DEVYNIOLIKTOJI KALĖDINĖ KOMANDINĖ IR INDIVIDUALIOJI RASEINIŲ KRAŠTO OLIMPIADOS PROFESORIAUS JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

Raseiniai, 2018-12-12

Čia pateikiami komandinės olimpiados sprendimai. Individualiosios olimpiados 1-5 uždavinių sprendimai atitinkamai yra komandinės olimpiados 3, 4, 6, 7 ir 9 uždavinių sprendimai.

1. Magdalenos Raseiniškės propropro....anūkis titaniškasis Titas Tytuvėniškis sykį, dar darželin bevaikščiodamas, pasišovė ant menkos popieriaus skiautelės atlikti dalybos veiksmą, kuriame septyni milijonai devyni šimtai trisdešimt penki tūkstančiai aštuoni šimtai devyniasdešimt penki turėjo būti (be klaidų) padalinti iš dvidešimt septynių. Teisingai atlikus dalybą ir skiautės kampe dar likus kiek neprirašytos vietos, jam ėmė rodytis, kad tame pradiniame skaičiuje sukeitus vietomis du gretimus skaitmenis ir tada padalinus tą pakeistą skaičių iš 27, dalmuo būtų jau lygiai šimtu vienetų didesnis, negu kad prieš tai gautasis dalmuo. Visi buvo nustėrę nuo šių nelauktų Tito įžvalgų ir jo dalybos užmojų. Titas Tytuvėniškis įgyvendino savo sumanymą ir pasirodė, kad taip ir yra, kaip jam rodėsi. Mums gi belieka, gėrintis Tito sumanumu ir skaitiniu darbštumu, „prie progos“ pamėginti patiems susigaudyti: kokius gi du gretimus skaitmenis bus sukeitęs vietomis titaniškasis Titas Tytuvėniškis?

(A) 3 su 9 (B) 3 su 5 (C) 5 su 8 (D) 8 su 9 (E) 9 su 5

Sprendimas

Pirmiausiai pamėginkime užrašyti mūsų skaičių įprastiniais skaitmenimis ir gaukime skaičių 7 935 895, kurį turime padalinti iš 27, kitaip sakant, turime atlikti veiksmą

$$\frac{7935895}{27}$$

Kadangi sukeitus du gretimus skaitmenis ir tada padalinus iš 27 turime gauti 100 daugiau, tai, kol dar nebuvome padalinę turime gauti „ištisais“ 2 tūkstančiais 7 šimtais daugiau.

Matome, kada tada turime keisti beveik pačiame viduryje esančius skaitmenis 5 su 8. Tikrai, tada sukeitus atsirastų skaičius

$$7\,938\,595$$

ir

$$7\,938\,595 - 7\,935\,895 = 2700,$$

o šito mums ir reikėjo.

Derėtų pridurti, kad keisdami kitus gretimus skaitmenis pradinį skaičių padidintume „daug daugiau“ (bent 9000) arba „daug mažiau“ (mažiau nei 1000), todėl teisingas atsakymas byloja, kad reikia sukeisti 5 su 8 vietomis, tai yra, teisingą atsakymą ženklina raidė C.

Atsakymas

Reikia sukeisti gretimus skaitmenis 5 su 8 vietomis – atsakymas C.

2. Viduklės berniukas Vidimantas vieną kartą užsisvajojo bene aktualiausia šių ir kitų laikų tema „Iš vieno – daug“. Pasvajojęs apie viską, jis panūdo grupelę skaičių 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 suskaidyti į kuo daugiau pogrupių taip, kad visų tų pogrupių skaičių suma būtų vienoda, kad ir kokio pogrupio skaičius besumuotumėme. Kiek daugiausiai tokių pogrupių su vienoda visų pogrupių skaičių suma gali gauti sumanusis Viduklės berniukas Vidimantas?

(A) Vidimantas gali gauti tik 2 pogrupius (B) Jis gali gauti 3 pogrupius (C) Galima gauti 4 tokius pogrupius (D) Yra net 5 tokie pogrupiai (E) Teisingas atsakymas yra kitoks

Sprendimas

Pirmiausiai Vidimantas tikriausiai sudėjo visus tuos skaičius

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

ir gavo 54 .

Toliau Vidimantas mąstė taip: kadangi į kažkurį pogrupį paklius ir pats didžiausias skirstomas skaičius 10, tai kiekvieno pogrupio skaičių suma yra bent 10. Visų pogrupių sumos yra bent jau 10 ir tikrai ne mažiau, todėl tų pogrupių tada gali būti niekaip ne daugiau kaip 54 : 10 arba, kitaip sakant, ne daugiau negu 5. Tačiau penkių pogrupių su vienoda pogrupio skaitmenų suma negali būti, nes visų skaičių suma, kuri yra 54,

nesidalija iš 5. Lygiai taip pat, kadangi 54 nesidalija iš 4, tai ir keturių pogrupių su vienoda suma visuose pogrupiuose būti negali. Kitas kandidatas 3 yra jau daug rimtesnis atvejis, nes 54 dalijasi iš 3 ir dalmuo yra 18. Ir tuos skaičius suskirstyti į tris pogrupius su skaičių suma, kiekviename pogrupyje lygia 18, visiškai įmanoma.
Pavyzdys:
pirmasis pogrupis su skaičiais 2, 3, 6 ir 7;
antrasis pogrupis su skaičiais 4, 5 ir 9;
trečiasis pogrupis su skaičiais 8 ir 10.
Todėl daugiausiai bus trys pogrupiai ir todėl teisingas atsakymas yra ženklintas raide B.
Atsakymas
Gali būti daugiausiai 3 pogrupiai su vienoda skaičių suma kiekviename iš jų (B).

3. Raseinių futbolo pirmenybėse dalyvavo 6 komandos, kurių kiekviena sužaidė po vienerias rungtynes su kiekviena kita dalyvavusia komanda. Už pergalę yra skiriami 3 taškai, už lygiąsias komanda gauna 1, o už pralaimėjimą komanda taškų visai negauna. Pasibaigus čempionatui yra suskaičiuojami taškai ir dvi paskutinės komandos iškrenta į žemesnę lygą. (Jei kelios komandos surenka po lygiai taškų, joms atitinkamos vietos paskirstomos traukiant burtus.) Prieš čempionatą Raseinių krašto dienraštyje „Žemaitis" buvo daromos prognozės apie tai, kiek tiksliai taškų tikrai gana būtų pelnyti komandai, kad ji garantuotai neiškristų, t. y., atsidurtų tarp pirmųjų 4 komandų. Pasirodo, kad mažiausias taškų skaičius, kurį surinkusi komanda vis dėlto garantuotai pakliūna tarp 4 pirmųjų komandų, yra:
(A) 10 taškų (B) 8 taškai (C) 7 taškai (D) 11 taškų (E) 9 taškai
Sprendimas
Pirmiausiai pastebėkime, kad komanda surinkusi 9 taškus, dar negali būti dėl nieko garantuota. Kad tai pagrįstume, nurodysime turnyrinę lentelę, kur pirmos 5 komandos surenka po 9 taškus.

Komanda	A	B	C	D	E	F	Taškai	Vieta
A	X	3	3	0	0	3	9	I –V
B	0	X	3	3	0	3	9	I –V
C	0	0	X	3	3	3	9	I –V
D	3	0	0	X	3	3	9	I –V
E	3	3	0	0	X	3	9	I –V
F	0	0	0	0	0	X	0	VI

Šis pavyzdys ne tik rodo, bet ir demonstruoja, kad 9 taškai gali ir neapsaugoti nuo penktosios vietos.
Liko įsitikinti tik tuo, kad 10 taškų jau garantuoja, kad komanda tikrai pateks tarp pirmųjų keturių komandų.
Tikrai, jeigu komanda surenka 10 taškų, tai tam, kad ji būtų tik penkta, kurios nors likusios 4 komandos turėtų surinkti bent jau tiek pat, taigi irgi bent po 10 taškų. Bet tada ji su tomis 4 komandomis surinktų bent $10 + 4 \cdot 10 = 50$ taškų, o tiek taškų 6 komandų turnyre viename rate nėra „išžaidžiama", nes ten įvyksta iš viso 15 rungtynių, kiekvienose rungtynėse yra „išžaidžiama" daugiausiai 3 taškai, arba iš viso, per visas 15 rungtynių yra „išžaidžiama" daugiausiai

$$15 \cdot 3 = 45 \text{ taškai},$$

o čia reikėtų jų net 50-ties.
Taigi matome, jog teisingas atsakymas yra 10 taškų ir todėl turime rinktis atsakymą A.
Atsakymas
10 taškų arba A.

4. Girkalnio aritmetikos entuziastai kone springdami iš džiaugsmo staiga paskelbė, kad 5-ženklis skaičius ‚P869Q' bus vadinamas *raseiniškuoju*, jeigu jis dalijasi be liekanos iš 12. Tai išgirdęs Šimkaičių mąstytojas Šimkus be užuolankų paklausė: ar kas nors prieš skelbdamas bent pasidomėjo, kiek tada skirtingų reikšmių galės įgyti tokio raseiniškojo skaičiaus pirmojo ir paskutiniojo skaitmenų suma P + Q? Ariogalos matematizuoto darželio „Ariau jau ariau" mokslo bendruomenė patikino, kad tokių skaičių nėra tiek jau daug, todėl ne kažin kiek bus ir tų kraštinių skaitmenų sumų. Tai kiek gi yra tų sumos reikšmių?
(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 12

Sprendimas
Uždavinys remiasi dalumu iš 12, kuris, ir tai niekam nėra didelė paslaptis, yra 3 ir 4 sandauga. Sveiki stebėjimai kreipia, o mokslo šviesa pagrindžia, kad dalumas iš 12 reiškia dalumą iš 3 ir 4 ir, atvirkščiai, dalumas iš 3 ir iš 4 garantuoja ir dalumą iš 12. Mokslas sako ir įrodo, kad taip yra todėl, kad skaičiai 3 ir 4 neturi jokių kitų daliklių, išskyrus tik tą vienintelį sveiką teigiamą daliklį, kurį turi visi sveikieji teigiami skaičiai, tai yra, skaičių 1.
Todėl turime susigaudyti, kada tas 5-ženklis skaičius su trimis pasakytais viduriniais skaitmenimis 8, 6 ir 9 dalijasi be liekanos iš 3 ir iš 4.
Dalumo iš 4 požymis, kaip yra labai neblogai žinoma, yra „galūninis“: skaičius dalijasi iš keturių išimtinai tiktai tada, kai iš 4 dalijasi „dvinarė“ jo „galūnė“, arba dviženklis skaičius, kurį sudaro du paskutinieji to skaičiaus skaitmenys.
O dalumo iš 3 požymis yra bene geriausiai žinomas iš visų netrivialių dalumo požymių ir gali būti nusakomas taip: skaičius N ir skaičiaus N skaitmenų suma, dalinami iš 3, duoda vienodas liekanas. Iš čia išeina, kad skaičius dalinasi iš 3 išimtinai tiktai tada, kai iš 3 dalijasi to skaičiaus skaitmenų suma.
Taigi pirmiausiai galime pasižiūrėti, kada kalbamojo skaičiaus ‚P869Q‘ „dvinarė uodega“ ‚9Q‘ dalijasi iš 4.
O ji, kaip rodo skaitiniai eksperimentai, liaudyje teisingai ir nuo neatmenamų laikų vadinami dalyba kampu, dalinasi iš 4 tada, kai Q yra 2, ir dar tada, kai Q yra 6.
Beliko išsiaiškinti, kada skaičių ‚P8692‘ ir ‚P8696‘ skaitmenų sumos, kurios yra

$$P + 8 + 6 + 9 + 2 = P + 25$$

ir

$$P + 8 + 6 + 9 + 6 = P + 29,$$

yra dalios iš 3.
Pirmuoju atveju tai nutinka tada, kai P yra lygus arba 2, arba 5, arba 8, o kitu, antruoju atveju taip būtų tada, kai P yra lygus 1, 4 arba 7.
Todėl galime nurodyti arba išvardinti visus iš 12 besidalijančius paieškomus skaičius – tai yra skaičiai

$$18696, 28692, 48696, 58692, 78696, 88692.$$

Todėl pirmojo ir paskutiniojo skaitmens suma yra

$$1 + 6, 2 + 2, 4 + 6, 5 + 2, 7 + 6 \text{ ir } 8 + 2,$$

arba

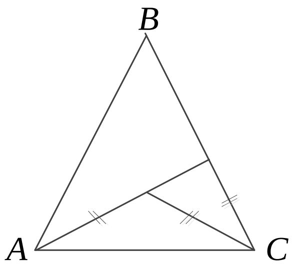
$$4, 7, 10 \text{ ir } 13.$$

Kitaip sakant, tinkamos reikšmės yra 4, 7, 10 ir 13, o tai byloja, jog iš 12 dalaus skaičiaus ‚P869Q‘ kraštinių skaitmenų suma P + Q įgyja 4 skirtingas reikšmes, arba jog teisingas atsakymas 4 yra tas, kurį ženklina raidė A.
Atsakymas
Yra keturios skirtingos iš 12 besidalijančio skaičiaus ‚P869Q‘ kraštinių skaitmenų P ir Q sumos

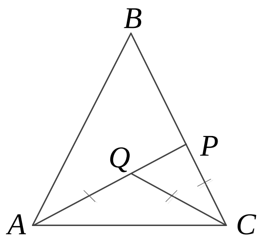
$$P + Q$$

reikšmės, arba teisingas yra atsakymas A.

5. Babtų berniukai iš trijų lygiašonių trikampių sudėliojo lygiašonį trikampį *ABC* (*AB* = *BC*) taip, kaip tai yra pavaizduota šalia esančiame piešinyje. Raskite kampo *ABC* didumą.



(A) 30º (B) 35º (C) 36º (D) 40º (E) To nustatyti negalima
Sprendimas
Pažymėkime atkarpos, išvestos kampo *BAC* viduje sankirtos su šonu *BC* tašką raide *P*, o jos susikirtimo su kampo *ACB* viduje išvesta atkarpa, raide *Q*.



Tada (žr. pav.)
kadangi trikampis *AQC* yra lygiašonis, tai

$$\angle PAC = \angle QAC = \angle QCA = \alpha.$$

Tuomet gretimo lygiašonio trikampio *QCP* kampai prie pagrindo (smailieji!) lygūs:

$$\angle CQP = \angle QAC + \angle QCA = \alpha + \alpha = 2\alpha = \angle CPQ.$$

Todėl to lygiašonio trikampio viršūnės kampas

$$\angle QCP = 180° - 2\alpha - 2\alpha = 180° - 4\alpha.$$

Toliau trikampis *APB* taip yra lygiašonis, o jo bukasis kampas *APB* yra lygus

$$180° - 2\alpha,$$

todėl likę du lygūs kampai *PAB* ir *PBA* yra po

$$\alpha$$

laipsnių.
Bet ir sudėtas didysis trikampis yra lygiašonis, todėl

$$\angle BAC = \angle BAP + \angle PAC = \alpha + \alpha = 2\alpha = \angle BCA = \angle ACQ + \angle QCP = \alpha + (180° - 4\alpha) = 180° - 3\alpha,$$

arba

$$2\alpha = 180° - 3\alpha,$$

$$5\alpha = 180°, \alpha = 36°.$$

Vadinasi, ieškomasis kampas, t. y. sudėtojo didžiojo trikampio *ABC* viršūnės kampas *ABC* arba kampas *ABP* irgi yra

$$\alpha = 36°.$$

Teisingas atsakymas yra ženklinamas raide C.

Atsakymas

36°

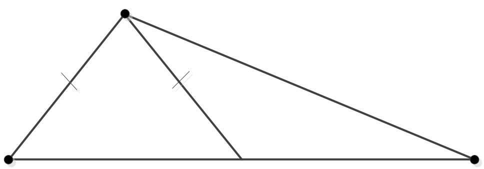
arba C.

6. Pakaunės Babtų berniukai pasiėmė statų trikampį, kurio kraštinių ilgiai buvo 3, 4 ir 5, ir pradėjo įnirtingai svarstyti, keliais būdais jį būtų galima vienu tiesiu kirpimu geromis žirklėmis padalinti į du trikampius taip, kad nors vienas iš tų dviejų gautųjų trikampių būtų lygiašonis trikampis. Po permainingų ginčų jie pajėgė surasti, kiek tokių būdų yra iš viso. Suraskite ir Jūs kuo daugiau tokių stačiojo trikampio padalijimo į du trikampius būdų, kad bent vienas iš gautųjų trikampių būtų lygiašonis trikampis, o Jūs galėtumėte pasirinkti deramą atsakymą. Tai padaryti galima:
(A) vieninteliu būdu (B) dviem būdais (C) trimis būdais (D) 5 būdais (E) daugiau negu 5 būdais

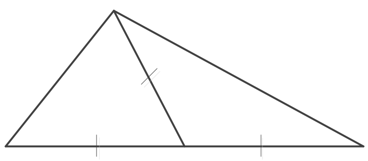
Sprendimas

Randame 6 būdus tai padaryti ir juos parodysime brėžiniais.

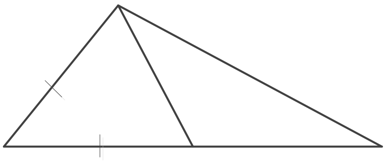
1.



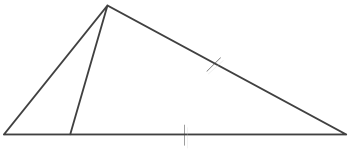
2.



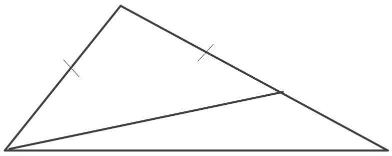
3.



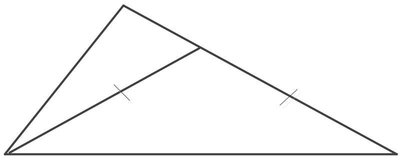
4.



5.



6.



Nesunku matyti, kad daugiau būdų nėra, nors, kita vertus, „švariai susamprotauti“ nėra lengva. Pasirenkamiems atsakymams užtenka 6 pavyzdžių, bet norint išspręsti uždavinį pilnai, derėtų samprotauti toliau – matematika juk yra tikslusis mokslas☺

Kad gautųsi du trikampiai, kerpama turi būti per vieną iš stačiojo trikampio viršūnių ir turi būti lygios dvi vieno iš dviejų trikampių kraštinės. Taip kiekvienai iš 3 viršūnių turime po 6 galimybes.

Pavyzdžiai 1-4 atitinka 5 galimybes stačiojo kampo viršūnei. Likusi šeštoji netinka, nes kirpimo linijos ilgis visada bus trumpesnis už 4.

Nėra jokios galimybės kirpti per mažiausiojo kampo viršūnę ir gauti du trikampius, iš kurių vienas būtų lygiašonis. Trikampis, kur paklius statusis kampas, negali būti lygiašonis, nes pradiniame trikampyje prieš mažiausią kampą guli trumpesnis statinis, o čia ta kraštinė dar patrumpės. Panašiai ir kitas trikampis negali būti lygiašonis, nes vienas jo kampas bukasis, o šį kampą sudarančios kraštinės bus viena ilgesnė už 4, o kita trumpesnė už 3.

Pavyzdžiai 5-6 atitinka 2 galimybes likusiai viršūnei. Kitos galimybės netinka, nes lygiašonio trikampio kraštinė, esanti prieš buką ar statų kampą, negali būti šoninė.

Atsakymas

Galima perkirpti 6 būdais, teisingas yra atsakymas E.

7. Titas Tytuvėniškis į 8 laisvus brėžinyje parodytus lentelės langelius surašė visus skaičius nuo 1 iki 8 (įrašydamas po vieną skaičių į kiekvieną langelį).

	X	

Paaiškėjo, kad keturios įrašytųjų skaičių sumos po tris skaičius – dvi sumos viršutinėje ir apatinėje eilutėse bei dar dvi sumos kairiajame ir dešiniajame stulpeliuose pasirodė esančios visos (keturios) lygios. Nugirdusi tai, Vida Viduklytė pasakė, kad ji tada būtinai išsiaiškins, kokia gi yra pati didžiausia įmanoma tokios lentelės kampinių skaičių suma. Kaip Vida tarė, taip Viduklytė padarė – viską „suskaičiavo-surokavo“ ir tikrai bei greitai išsiaiškino, kad toji pati didžiausioji įmanoma 4 kampinių skaičių suma yra:

A) 28 (B) 26 (C) 20 (D) 25 (E) 24

Sprendimas
Kiek spręsi, kiek mąstysi, kiek tik suspėdamas pamatysi, jog įrašytų skaičių įtaka sumoms yra dvejopa: kampiniai skaičiai savo didumu “prisideda“ prie dviejų sumų didumo, o kiti, tie nekampiniai, dalyvauja tik vienoje sumoje.
Žiūrėsime, kur tai ir kaip tai „pasireikš“.
O kol kas atlikinėsime nors ir ne pačius įdomiausius, bet reikalingus pažymėjimų ir sąlygos užrašinėjimų darbus.
Pirmiausiai duosime „vardus“ tiems skaičiams, lai jie būtų A, B, C, D, E, F, G ir H, bei nurodysime jų vietas lentelėje:

A	B	C
H	X	D
G	F	E

Užrašome sąlygas, kad visos sumos S „visais pakraščiais“ yra lygios:

$$A + B + C = C + D + E = E + F + G = G + H + A = S.$$

Todėl, suprantama, kad viską sudėję į „sumų sumą“ turėsime lygybę

$$2(A + C + E + G) + (B + D + F + H) = 4S$$

Bet dabar mes matome, kad ta keturguba suma susideda iš visų aštuonių skaičių nuo 1 iki 8 ir keturių kampinių skaičių sumos, todėl

$$4S = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) + (A + C + E + G),$$

Kitaip tariant,

$$4S = 36 + (A + C + E + G).$$

Kadangi 4S ir 36 dalijasi iš 4, tai iš 4 privalės dalintis ir pati didžiausia keturių kampinių skaičių suma.
Jeigu imtume apskritai 4 pačius didžiausius skaičius 5, 6, 7 ir 8, tai jų suma 5+6+7+8 yra 26 ir iš 4, suprantama, nesidalina. Todėl pati didžiausia tinkama pagal uždavinio sąlygą gali būti nebent 24.
Tada

$$4S = 36 + 24 = 60$$

ir

$$S = 15.$$

Ir kaip rodo žemiau pateikiama lentelė, tas pats didžiausias „maksimalus atvejis“ yra įmanomas:

7	2	6
5	X	1
3	4	8

Todėl pati didžiausia įmanoma suma yra tikrai 24, o ją ženklina raidė E.
Atsakymas
Pati didžiausia įmanoma suma yra 24, arba tikrasis atsakymas yra E.

8. Šimkaičių pirmūną Simą Stasių Šimkūną labai nustebino pats faktas, kad, pasirodo, kartais įmanoma natūralųjį skaičių n užrašyti dviejų natūraliųjų dėmenų suma taip, kad kiekvienas dėmuo būtų skaičiaus $n + 2$ daliklis. Jis tokius skaičius nedelsdamas praminė *sumaniais* skaičiais. Jis dar labiau nustebo, sakytume, kone nustėro, kai jam jo draugas iš Girkalnio linksmasis Magdalenos Raseiniškės ainis Rasius, pasiklausęs Stasiaus, ėmė užsidegęs aiškinti, kad rasi tokių sumanių skaičių gali būti apskritai nežinia kiek. O kiek gi tokių skaičių yra iš tikrųjų?
(A) Tokių sumanių skaičių apskritai nėra nė vieno (B) Tėra tik vienas vienintelis toks sumanus skaičius (C) Yra tik du tokie sumanūs skaičiai (D) Yra net 3 tokie sumanūs skaičiai (E) Tokių skaičių yra lygiai 4
Sprendimas
Pirmiausiai pastebėkime, kad bet kuris bet kurio natūraliojo nelyginio skaičiaus dėstinys dviejų natūraliųjų dėmenų suma visada turi vieną lyginį, o kitą nelyginį dėmenį. Ir tasai lyginis dėmuo niekaip negali būti natūraliojo skaičiaus $n + 2$ daliklis, kuris yra lygiai taip pat nelyginis, kaip ir skaičius n (nes juk lygiai dviem vienetais skiriasi nuo skaičiaus n), kadangi joks lyginis skaičius negali dalintis iš nelyginio skaičiaus.
Kitaip tariant, visi nelyginio skaičiaus dalikliai yra patys tokie, tai yra visi jie nelyginiai.
Mūsų uždavinio žodžiais tariant tai reikštų, kad joks nelyginis skaičius nėra sumanus, arba, kitais žodžiais kalbant, visi sumanūs skaičiai, jei tik tokių rasis, turės būti lyginiai.

Taigi pradedame tikrinti lyginius natūraliuosius skaičius.

1. Kadangi 2 = 1 + 1, o iš 1 tikrai dalijasi 2 + 1 = 3, nes iš 1 dalijasi kiekvienas skaičius, tai skaičius 2 yra sumanus skaičius.
2. Kadangi 4 = 2 + 2, o iš 2 tikrai dalijasi 4 + 2 = 6, tai ir 4 yra sumanus skaičius.
3. Kadangi 6 = 4 + 2, o 2, kaip ir iš 4 tikrai dalijasi 6 + 2 = 8, tai 6 yra (jau trečiasis) sumanusis skaičius.
4. Kadangi 8 yra užrašomas arba kaip 1 + 7, arba kaip 2 + 6, arba kaip 3 + 5, arba kaip 4 + 4, ir jokie abudu bet kurio dėstinio dėmenys kartu nedalija be liekanos 8 + 2 = 10, tai skaičius 8 nėra sumanusis skaičius.
5. Toliau imant 10 = 4 + 6, abudu skaičiai, ir 4, ir 6, dalija 10 + 2 = 12, tad ir 10 yra (jau ketvirtasis) sumanusis skaičius.

Vadinasi, jau aiškėja, kad teisingas atsakymas turėtų būti atsakymas E, tik derėtų paaiškinti, kodėl jokie kiti lyginiai natūralieji skaičiai jau nebebus sumanūs.
Pamėginsime paaiškinti, kodėl joks skaičius, didesnis už 10, jau nebegali būti sumaniu skaičiumi.
Tarkime, kad skaičius N, kuris yra 12 arba didesnis, vis dėlto yra sumanus skaičius. Tada jis turi dėstinį, yra užrašomas kaip dviejų skaičių a ir b suma, kurie abu dalija skaičių $N + 2 = a + b + 2$. Galime tarti, kad $a \leq b$. Turime, kad b dalija $a + 2 = (N + 2) - b$. Vadinasi, arba $b = a$, arba $b = a + 1$ arba $b = a + 2$. Antruoju atveju $N = 2a + 1$ yra nelyginis skaičius, todėl šį atvejį pamirškime.
Kitais dviem likusiais atvejais a dalija skaičių $N + 2 = 2a + 2$ arba skaičių $N + 2 = 2a + 4$. Bet to negali būti, nes tada a turi dalinti skaičių $(N + 2) - 2a$, lygų 2 arba 4. O taip yra tik tada, kai a yra 1, arba, kitu atveju, kai a yra lygus 2, arba, dar vienu, jau dabar paskutiniu atveju, kai a yra lygus 4, o pas mus, pagal prielaidą, a yra didesnis.
Todėl tie 4 „rankiniu būdu patikrinti“ sumanūs skaičiai 2, 4, 6 ir 10 ir lieka vieninteliais keturiais sumaniais skaičiais, ir todėl teisingą atsakymą ženklina raidė E.

Atsakymas

Yra lygiai 4 sumanūs skaičiai, arba teisingas atsakymas yra E.

9. Subtilusis Skirmantas Skirsnemuniškis, kurį gerbia visi jo ką nors suprantantys kaimynai, sykį suformavo tokį 10-ženklį natūralųjį skaičių, kurio skaitmenimis po kartą buvo paimti visi 10 įmanomų skaitmenų. Jis sugebėjo tai atlikti su tokiu meistriškumu, jog buvo pastebėta, kad skaičius, kurį sudaro pirmieji du jo skaičiaus skaitmenys, dalijosi iš 2, skaičius, kurį sudaro pirmieji trys jo suformuoto skaičiaus skaitmenys, dalijasi iš 3, ir taip toliau – kol galiausiai ir pats tas „visas Skirmanto Skirsnemuniškio skaičius“ dalijasi iš 10. Koks galėtų būti 8-tasis jo suformuoto 10-ženklio skaičiaus skaitmuo (moksle visuotinai vadinamas šimtų skaitmeniu)? Tas Skirmanto Skirsnemuniškio 10-ženklio skaičiaus šimtų skaitmuo lygus:

(A) 2 B) 6 (C) 4 (D) 8 (E) 9

Sprendimas

Truputį pasvarsčius ar net ilgiau pamąsčius, ima aiškėti tokie dalykai, kad mūsų paieškomas 10-ženklis skaičius, kuris, trumpiau pažymėjus jį

ABCDEFGHIJ,

yra pagal sąlygą toks, kad dviženklis skaičius AB dalijasi be liekanos iš 2, panašiai triženklis skaičius ABC dalijasi iš 3, keturženklis skaičius ABCD dalijasi be liekanos iš 4, ABCDE – iš 5, ABCDEF – iš 6 ir taip toliau, kol ABCDEFGHI nepasidalins iš 9, o jau visas ištisas skaičius ABCDEFGHIJ nepasidalins be liekanos iš 10.
Pirmiausia pastaba yra ta, jog iš 10 dalijasi tik nuliu besibaigiantis skaičius. Bet tada 9-ženklis skaičius ABCDEFGHI susideda iš 9 skirtingų skaitmenų, todėl turi

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45\text{-iems}$$

lygią skaitmenų sumą ir todėl be jokių rūpesčių dalijasi iš 9 (pagal dalumo požymį).
Todėl rašydami gale 0, ir dėl dalumo iš 9 galime nebesukti galvos.
Toliau, kadangi 0 jau įdarbintas būti paskutiniuoju skaitmeniu, o 5-ženklis skaičius ABCDE turis dalintis iš 5, tai ABCDE tegali baigtis tik 5-tu.
Todėl mūsų skaičius „ima konkretėti“ ir dabar jis atrodo kaip ABCD5FGHI0.

Toliau, kadangi dviženklė jo dalis dalinasi iš 2, keturženklė – iš 4, 6-ženklė – iš 6, o 8-ženklė – iš 8, tai aišku, jog mūsų skaičiaus antrasis skaitmuo B, ketvirtasis skaitmuo D, šeštasis skaitmuo F ir aštuntasis skaitmuo H yra lyginiai. Kadangi dešimtasis skaitmuo jau yra nustatyta, kad yra nulis, todėl mūsų paieškomo skaičiaus lyginėse vietose yra įrašyti lyginiai, vadinasi, nelyginėse vietose turės būti įrašinėjami tik nelyginiai skaitmenys.
Toliau matome, jog iš to, kad skaičius ABC turi dalintis iš 3, o ABCD5F – iš 6, išplaukia, jog iš 3 dalijasi ir skaičius D5F. Kadangi skaitmenys D ir F turi būti lyginiai, o suma D + 5 + F turi dalintis iš 3, tai ji būtinai dar yra ir nelyginė, vadinasi, ji yra lygi arba 9, arba 15, arba 21. D + 5 + F būti lygi 9 arba 21 negali, nes suma D + F tada per maža arba per didelė. Su suma 15 būtų galimybės 2 + 5 + 8, 4 + 5 + 6, 6 + 5 + 4 ir 8 + 5 + 2. Antroji ir ketvirtoji galimybės atkrenta, nes keturženkliai skaičiai ABC4 ir ABC8 dėl trečiojo skaitmens C nelyginumo iš 4 dalintis negali. Todėl jau lieka tik atvejai 258 ir 654.
Žiūrime tuos atvejus iš eilės.
Atvejis 258
Šiuo atveju, kadangi šeštasis skaitmuo yra lyginis, tai skaičius, sudarytas iš pirmųjų 8 skaitmenų, dalinsis iš 8, kai skaičius GH, kurį sudaro 7-as ir 8-as to skaičiaus skaitmenys, dalinsis iš 8. Tokie skaičiai bus – dėl skaitmenų nesikartojimo – tik 16 ir 96.
Atvejis 654
Šiuo atveju, samprotaudami taip pat, gautume, kad iš 8 turi dalintis skaičius 32 ir 72.
Vadinasi, turime keturias 5-skaitmenes dalis

25816, 25896, 65432 ir 65472.

Dabar liko parinkti iš likusių nepanaudotų skaitmenų triženklį skaičių, kuris turis dalintis iš 3.
Pirmuoju atveju nepanaudoti skaitmenys būtų 3, 4, 7 ir 9 ir iš jų besidalančio iš 3 skaičiaus su viduryje esančiu lyginiu 4-tu sudaryti nepavyksta.
Antruoju atveju lieka 1, 3, 4, 7 ir galima sudaryti 2 skaičius 147 ir 741. Gauname 2 kandidatus į Skirmanto skaičių: 1472589630 ir 7412589630. Nė vienas iš jų netenkina dalumo iš 7 sąlygos.
Likusius atvejus 65432 ir 65472 galime išnagrinėti taip pat, o galime ir nenagrinėti. Juk jau dabar turime, kad paieškomas šimtų skaitmuo nieku gyvu negali būti kitoks kaip tik 2.
O kad garbusis skaitytojas nesuabejotų, pateiksime tą skaičių, kuris vienintelis tegali būti Skirmanto skaičiumi ir kurį kaip tik ir galima atsijoti mūsų čia jau įsuktu būdu. Šis vienintelis skaičius besąs

3816547290.

Šio skaičiaus trečiasis nuo galo, arba vadinamasis šimtų skaitmuo yra, kaip jau minėjome 2, jį ženklina raidė A.

Atsakymas

Toks skaičius yra vienintelis, o jo vadinamasis šimtų skaitmuo yra 2, atsakymas A.

10. Raskite, kiek yra skaičių ketvertų (a, b, c, d), tenkinančių štai tokią, atvirai sakant, Tytuvėnuose visus apžavėjusią sąlygą apie Raseinių vertą lentelę, kurią nedelsdami pateikiame žemiau.
Sakome, kad 2 × 4 lentelė yra *verta Raseinių*, jeigu jos pirmoje eilutėje yra iš eilės įrašyti skaičiai 1, 2, 3, 4, o antrosios eilutės skaičiai a, b, c ir d yra vienženkliai ir tokie, kad skaičius a pasako, kiek toje lentelėje randama vienetų, skaičius b – kiek dvejetų, skaičius c – kiek trejetų, ir galiausiai skaičius d nurodo, kiek iš viso ketvertų yra visoje toje 2 × 4 lentelėje.

1	2	3	4
a	b	c	d

(A) Tokių ketvertų yra 12 (B) Jų yra 8 (C) Jų yra 4 (D) Jų yra du (E) Yra tik viena vienintelė tokia Raseinių verta lentelė ir vienintelis toks skaičių ketvertas

Sprendimas

Jeigu skaičiai a, b, c ir d registruoja, kiek visoje lentelėje esama vienetų, dvejetų, trejetų bei ketvertų, tai skaičiai a, b, c ir d yra, suprantama, natūralieji skaičiai.
Kadangi viršutinėje eilutėje jau yra „visų rūšių skaičių“ nuo vieno iki keturių po vieną, tai po kiekvienu skaičiumi bus parašyta bent po vienetą.
Pirmiausiai, antroje eilutėje joks iš skaičių a, b, c ir d tikrai neviršija 5. Be to, jei kuris nors iš skaičių a, b, c ir d lygus bent 4, tai virš to ketverto užrašytas skaičius yra antroje eilutėje sutinkamas mažiausiai 3 kartus.

Taip gauname vieną iš trijų atvejų:

1	2	3	4
4	1	1	1

1	2	3	4
2	4	2	2

1	2	3	4
3	3	4	3

,

iš kurių nė vienas netenkina sąlygos, arba atvejį

1	2	3	4
a	b	c	4

,

kuris reiškia, kad antroje eilutėje yra bent 3 ketvertai, o tada visoje lentelėje bent 4 + 4 + 4 = 12 skaičių, nors jų turi būti lygiai 8.

Todėl antroje eilutėje pats didžiausias skaičius yra 3. Vadinasi, visoje lentelėje tėra vienas ketvertas – pirmoje eilutėje:

1	2	3	4
a	b	c	1

Tada po 1 turi būti bent 2.

Jeigu po 1-tu yra 2, tai po 2-tu turi būti bent 2. Jei po 2-tu yra lygiai 2, tai jau turime 3 dvejetus. Todėl po 2-tu tada yra tik 3, o tada po trejetu – būtinai yra 2 ir viskas išeina. Turime vieną gerą lentelę:

1	2	3	4
2	3	2	1

Jeigu po 1-tu yra 3, tai tada

1	2	3	4
3	b	c	1

Ir dar kažkur antroje eilutėje yra 1-tas. Jis negali būti po 3-tu, nes trejetų jau yra 2, tad jis turi būti po 2-tu ir tada po 3-tu bus tik 3. Bus dar viena gera lentelė:

1	2	3	4
3	1	3	1

Taip gauname dar vieną gerą lentelę, arba iš viso du tinkamus ketvertus (lenteles) ir renkamės atsakymą D.

Atsakymas

Yra 2 ketvertai (2, 3, 2, 1) ir (3, 1, 3, 1), atsakymas D.