2019 metų Lietuvos mokinių matematikos olimpiados uždavinių sąlygos ir sprendimai

Artūras Dubickas[1]

68-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Klaipėda, 2018 03 23

`1 (9-10 klasės).` Išspręskite lygtį $\sqrt{x^2-1} = x\sqrt{x} - \sqrt{x-1}$.

Sprendimas. Aišku, kad $x \geqslant 1$, o abi lygties $\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x-1} = x\sqrt{x}$ pusės yra neneigiamos. Pakėlę abi puses kvadratu, gauname ekvivalenčią lygtį

$$x^2 - 1 + x - 1 + 2\sqrt{(x^2-1)(x-1)} = x^3$$

su sąlyga, kad $x \geqslant 1$. Vadinasi,

$$2\sqrt{(x^2-1)(x-1)} = x^3 - x^2 - x + 2 = (x^2-1)(x-1) + 1.$$

Pažymėję $y = (x^2-1)(x-1)$, matome, kad $y \geqslant 0$ ir $2\sqrt{y} = y+1$. Vadinasi, $y + 1 - 2\sqrt{y} = (\sqrt{y}-1)^2 = 0$. Vienintelis šios lygties sprendinys yra $y = 1$. Taigi pradinę lygtį tenkina visi realieji skaičiai $x \geqslant 1$, su kuriais galioja lygybė $(x^2-1)(x-1) = 1$ ir tik jie. Ši lygtis ekvivalenti lygčiai

$$(x^2-1)(x-1) - 1 = x^3 - x^2 - x + 1 - 1 = x^3 - x^2 - x = x(x^2 - x - 1) = 0,$$

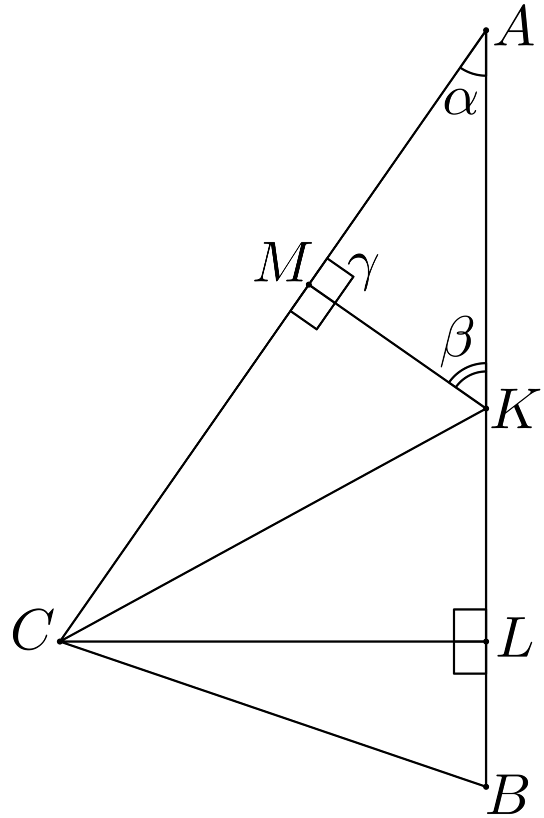
turinčiai vienintelį sprendinį $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ne mažesnį už 1. (Kiti du jos sprendiniai $x = 0$ ir $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ yra mažesni už 1.) Gautasis sprendinys tenkina pradinę lygtį, kadangi atlikome tik ekvivalenčius pertvarkymus su sąlyga, kad $x \geqslant 1$.

Atsakymas: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

`2 (9-12 klasės).` Trikampio ABC kraštinėje AB yra taškai K ir L (taškas K yra atkarpoje AL), o kraštinėje AC – taškas M. Atkarpos CL, CK ir MK dalija pradinį trikampį į keturis panašius trikampius. Raskite trikampio ABC kampus.

[1]Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Matematikos institutas, Naugarduko 24, Vilnius LT-03225. `http://www.mif.vu.lt/~dubickas/`

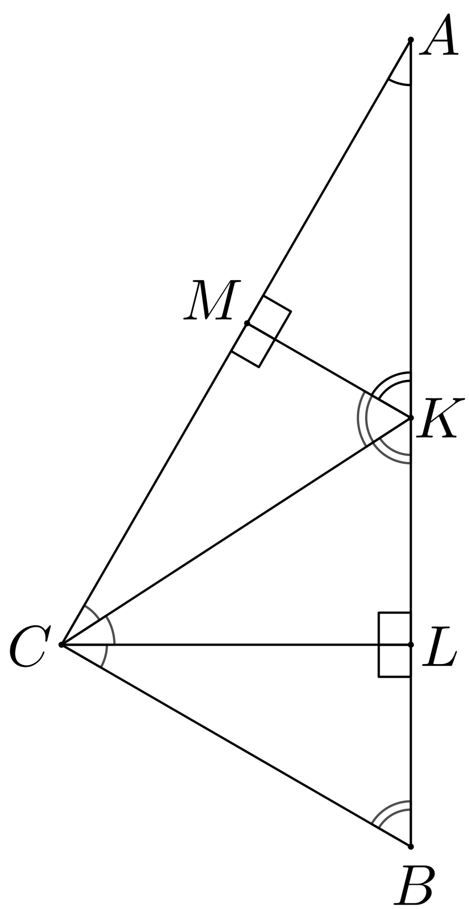
Sprendimas. Įrodysime, kad $KM \perp AC$. Tarkime, kad $\gamma = \angle AMK \neq 90^\circ$. Tada $\angle CMK = 180^\circ - \gamma \neq \angle AMK$. Taigi, remiantis trikampių CMK ir AMK panašumu, $\angle MAK = 180^\circ - \gamma$ arba $\angle AKM = 180^\circ - \gamma$. Abiem atvejais trikampio AMK dviejų kampų suma yra lygi $\gamma + 180^\circ - \gamma = 180^\circ$, prieštara. Vadinasi, $\gamma = 90^\circ$. Visiškai tokiu pačiu samprotavimu įrodoma, kad $CL \perp AB$, taigi $\angle AMK = \angle CMK = \angle CLK = \angle CLB = 90^\circ$. Pažymėkime $\angle MAK = \alpha$ ir $\angle MKA = \beta$, čia $\alpha + \beta = 90^\circ$ (žr. brėžinį).

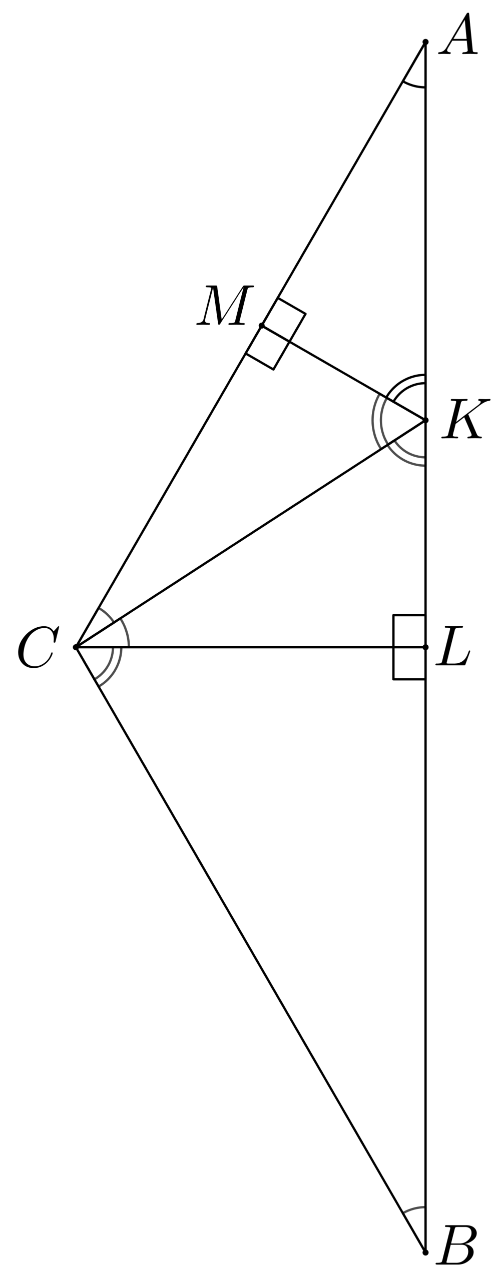


Jei $\angle MKC = \alpha$, tai $\angle CKA = \beta + \alpha = 90^\circ$ ir $\angle CKL = 180^\circ - \angle CKA = 90^\circ$. Tada trikampis CKL turi du stačius kampus, prieštara. Vadinasi, $\angle MKC = \beta$, o tada $\angle MCK = \alpha$. Analogiškai, vienas iš kampų $\angle CKL$ ir $\angle KCL$ yra α, o kitas β. Jei $\angle CKL = \alpha$, tai $\angle KCL = \beta$. Tada $\angle LCA = \alpha + \beta = 90^\circ$, taigi trikampis CAL turi du stačius kampus, vėl prieštara. Vadinasi, $\angle CKL = \beta$ ir $\angle KCL = \alpha$. Iš lygybės

$$180^\circ = \angle MKA + \angle MKC + \angle CKL = \beta + \beta + \beta = 3\beta$$

išplaukia, kad $\beta = 60°$. Taigi $\alpha = 90° - \beta = 30°$. Gavome, kad trikampis CLK yra statusis, $\angle CLA = 90°$, $\angle ACL = 60°$ ir $\angle CAL = 30°$. Be to, CK yra šio trikampio pusiaukampinė ir $KM \perp AC$. Kadangi visų trijų trikampių AMK, CMK ir CKL kampai yra $90°, 60°$ ir $30°$, tai jie yra panašūs.





Trikampyje CLB turime $\angle CLB = 90°$, taigi kiti du kampai turi būti $60°$ ir $30°$. Akivaizdu, kad abu atvejai, $\angle BCL = 30°$, $\angle CBL = 60°$ ir $\angle BCL = 60°$, $\angle CBL = 30°$ yra galimi (žr. brėžinį). Trikampio ABC kampai yra atitinkamai $90°, 60°, 30°$ arba $120°, 30°, 30°$.

Atsakymas: $90°, 60°, 30°$ arba $120°, 30°, 30°$.

`3 (9-10 klasės).` Petras pasirinko 5 taisyklingojo 10-kampio viršūnes, o Paulius – 13 taisyklingojo 30-kampio viršūnių.

a) Ar aš visada galėsiu nurodyti tokias 3 viršūnes iš Petro pasirinktųjų, kad jos būtų lygiašonio trikampio viršūnės?

b) Ar aš visada galėsiu tą patį padaryti su Pauliaus viršūnėmis?

Sprendimas. Tarkime, kad turime kokias nors tris pažymėtas taisyklingojo penkiakampio viršūnes. Aišku, kad bent dvi iš jų yra gretimos. Kad ir kur bebūtų trečioji pažymėtoji viršūnė (o ji užima vieną iš trijų likusių vietų), nesunku įsitikinti, kad trys pažymėtos viršūnės visada yra lygiašonio trikampio viršūnės.

Įrodysime, kad abiem atvejais, a) ir b), aš visada galėsiu nurodyti tokias 3 viršūnes, kad jos būtų lygiašonio trikampio viršūnės. Iš tikrųjų, pradėję nuo bet kurios ir imdami kas antrą 10-kampio viršūnę, mes gausime taisyklingąjį penkiakampį. Likusios penkios 10-kampio viršūnės taip pat eis kas antra, taigi ir jos sudaro taisyklingąjį penkiakampį. Bent trys iš 5 Petro pasirinktųjų viršūnių priklauso vienam iš šių dviejų taisyklingųjų penkiakampių. Pagal aukščiau įrodytą teiginį, jos visada yra yra lygiašonio trikampio viršūnės. Lygiai taip pat ir b) atveju imdami kas šeštą viršūnę ir po to tai kartodami iš taisyklingojo 30-kampio sudarome 6 taisyklinguosius penkiakampius. Remiantis Dirichlė principu, bent 3 iš 13 Pauliaus pasirinktųjų viršūnių priklausys bent vienam iš šių 6 taisyklingųjų penkiakampių. Pagal aukščiau įrodytą teiginį, jos visada yra lygiašonio trikampio viršūnės.

Atsakymas: a) taip; b) taip.

`4 (9-10 klasės).` Mokytoja uždavė mintinai išmokti kuo didesnio skaičiaus skaitmenis. Pirmūnė Julija didelėje lentoje vieną po kito užrašė visus skaičiaus 4^{2019} skaitmenis. Išdykėlis Juozas visiems nusprendė įrodyti, kad jis yra dar šaunesnis: įsiminė ir vieną po kito užrašė visus skaičiaus 25^{2019} skaitmenis. Kiek iš viso lentoje užrašyta skaitmenų?

Sprendimas. Jei Julijos skaičius turi m skaitmenų, tai $10^{m-1} \leqslant 4^{2019} < 10^m$. Be to, lygybė $10^{m-1} = 4^{2019}$ negalima, nes $m > 1$, taigi kairioji lygybės pusė dalijasi iš 5, o dešinioji nesidalija. Vadinasi, $10^{m-1} < 4^{2019} < 10^m$. Analogiškai, jei Juozo skaičius turi n skaitmenų, tai $10^{n-1} < 25^{2019} < 10^n$. Sudauginę šias nelygybes, gauname

$$10^{m+n-2} < 4^{2019} \cdot 25^{2019} = 100^{2019} = 10^{4038} < 10^{m+n}.$$

Kadangi m ir n yra natūralieji skaičiai, tai iš nelygybių $m+n-2 < 4038 < m+n$ išplaukia, kad $m + n = 4039$.

Atsakymas: 4039 skaitmenys.

`5 (11-12 klasės).` Duota lygčių sistema

$$\begin{cases} x^2 - xy^2 + x + 2 = 0, \\ 2y - x^2y - 14x = 0. \end{cases}$$

a) Nurodykite bent vieną jos sprendinį (x, y).

b) Raskite visus jos sprendinius.

Sprendimas. Iš pirmosios lygties išplaukia, kad $x \neq 0$. Jei $y = 0$, tai iš antrosios lygties gautume $x = 0$. Vadinasi, $y \neq 0$, o duotoji lygčių sistema yra ekvivalenti tokiai sistemai:

$$\begin{cases} y^2 - 1 = x + \frac{2}{x}, \\ \frac{14}{y} = \frac{2}{x} - x. \end{cases}$$

Nagrinėkime lygčių kvadratų skirtumą:

$$(y^2-1)^2 - \left(\frac{14}{y}\right)^2 = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - \left(\frac{2}{x} - x\right)^2 = x^2 + 4 + \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^2} + 4 - x^2 = 8.$$

Pažymėję $z = y^2$ ir padauginę abi puses iš z, gausime

$$(z-1)^2 z - 8z - 14^2 = z^3 - 2z^2 - 7z - 196 = 0.$$

Pastebėję, kad $z = 7$ yra šios lygties sprendinys, galime išskaidyti kubinį polinomą $z^3 - 2z^2 - 7z - 196 = (z-7)(z^2+5z+28)$. Kvadratinio trinario $z^2+5z+28$ diskriminantas $5^2 - 4 \cdot 28$ yra neigiamas, todėl $z^2 + 5z + 28 > 0$ su kiekvienu realiuoju z. Iš čia išplaukia, kad $z = 7$ yra vienintelė įmanoma z reikšmė, taigi $y = \sqrt{7}$ arba $y = -\sqrt{7}$. Abiem atvejais, iš pirmosios lygties matome, kad $x + \frac{2}{x} = y^2 - 1 = 6$, taigi $x^2 - 6x + 2 = 0$. Iš čia išplaukia, kad $x = 3 + \sqrt{7}$

arba $x = 3 - \sqrt{7}$ ir kad visi keturi šie sprendiniai $(3+\sqrt{7}, \sqrt{7})$, $(3+\sqrt{7}, -\sqrt{7})$, $(3-\sqrt{7}, \sqrt{7})$, $(3-\sqrt{7}, -\sqrt{7})$ pirmąją lygtį $y^2 - 1 = x + \frac{2}{x}$ tenkina.

Kita vertus, remiantis lygybe $x + \frac{2}{x} = 6$, kai $x = 3 \pm \sqrt{7}$, matome, kad antroji lygtis tampa tokia:

$$\frac{14}{y} = \frac{2}{x} - x = (6-x) - x = 6 - 2x \iff y = \frac{14}{6-2x} = \frac{7}{3-x}.$$

Iš čia gauname, kad $y = -\sqrt{7}$, kai $x = 3 + \sqrt{7}$, ir $y = \sqrt{7}$, kai $x = 3 - \sqrt{7}$. Vadinasi, duotąją lygčių sistemą tenkina tik du sprendiniai $(3+\sqrt{7}, -\sqrt{7})$ ir $(3-\sqrt{7}, \sqrt{7})$.

Atsakymas: $(x, y) = (3+\sqrt{7}, -\sqrt{7})$ ir $(3-\sqrt{7}, \sqrt{7})$.

`6 (11-12 klasės).` Eugenijus gavo dovanų stebuklingą dėžutę, kurioje yra 106000 eurų ir du mygtukai, geltonas ir žalias. Paspaudus geltonąjį mygtuką eurų skaičius dėžutėje padvigubėja, o paspaudus žaliąjį 17 eurų sumažėja. (Jei spaudžiant žaliąjį mygtuką dėžutėje buvo ne daugiau kaip 17 eurų, tai dėžutė tampa tuščia.) Mygtukus Eugenijus gali spaudyti bet kuria tvarka. Ar gali tam tikru momentu dėžutėje pasidaryti lygiai

a) dešimt eurų?
b) tūkstantis eurų?
c) milijonas eurų?
d) Raskite visas tokias natūraliąsias m reikšmes, kurioms yra įmanoma, kad tam tikru momentu dėžutėje pasidarytų lygiai m eurų.

Sprendimas. Skaičiuokime moduliu 17. Kadangi

$$106000 \equiv 53 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 5)^3 \pmod{17} \equiv 2^5 \cdot 5^3 \pmod{17} \equiv 5 \pmod{17},$$

tai spausdamas geltonąjį mygtuką Eugenijus gali gauti tik tokias liekanas moduliu 17:

$$5, 10, 3, 6, 12, 7, 14, 11, 5, 10, 3, 6, 12, 7, 14, 11, \ldots.$$

Čia tos pačios liekanos iš aibės

$$L = \{3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14\}$$

vis periodiškai kartojasi kas aštunta. Kita vertus, akivaizdu, kad spaudžiant žaliąjį mygtuką skaičiaus liekana moduliu 17 nesikeičia.

Nagrinėkime tokią natūraliųjų skaičių aibę:

$$M = \{17k + \ell \,:\, \ell \in L,\ k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Aišku, kad jei $x \in M$, tai $2x \in M$ ir $x - 17 \in M$ (kai $x > 17$). Be to, $106000 \in M$, taigi bet koks skaičius m, kurį įmanoma gauti po tam tikro skaičiaus mygtukų paspaudimų, arba priklauso aibei M, arba $m = 0$, jei kažkada gausime tuščią dėžutę. (Nuo to laiko dėžutė visada bus tuščia.)

Kadangi

$$1000000 \equiv 2^6 \cdot 5^6 \pmod{17} \equiv 2^6 \cdot 8^3 \pmod{17} \equiv 9 \pmod{17}$$

ir $9 \notin L$, tai $1000000 \notin M$. Vadinasi, lygiai milijono eurų dėžutėje gauti neįmanoma. (Taigi c) atveju atsakymas yra „ne".)

Įrodysime, kad jei $m \in M$, tai lygiai m eurų gauti visada yra įmanoma. Kadangi $10 \in M$ ir $1000 \in M$ (nes 1000 moduliu 17 yra $14 \in L$), tai iš šio teiginio išplaukia, kad ir a), ir b) atveju atsakymas yra „taip".

Tegul $m = 17k + \ell$. Čia $k = 0, 1, 2, \dots$ ir $\ell \in L = \{3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14\}$. Žinome, kad skaičius 106000 moduliu 17 yra lygus 5. Vadinasi, paspaudę geltonąjį mygtuką ne daugiau kaip 7 kartus (arba nieko nedarydami, kai $\ell = 5$), iš skaičiaus 106000 gausime skaičių $17k_1 + \ell$, kur $k_1 \in \mathbb{N}$. Jei $k_1 \geqslant k$, tai belieka paspausti žaliąjį mygtuką $k_1 - k$ kartų, kad gautume reikiamą skaičių $m = 17k + \ell$. Jei $k_1 < k$, tai, kadangi $2^8\ell \equiv \ell \pmod{17}$, paspaudę geltonąjį mygtuką dar 8 kartus, gausime skaičių $17k_2 + \ell$, kuriame $k_2 > k_1$. Kartodami šį procesą, kažkada gausime skaičių $17k_n + \ell$ su $k_n \geqslant k$. Tada, paspaudę žaliąjį mygtuką $k_n - k$ kartų, gausime reikiamą skaičių $m = 17k + \ell$.

Atsakymas: a) taip; b) taip; c) ne; d) $m = 17k + \ell$; čia $k = 0, 1, 2, \dots$, o $\ell \in \{3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14\}$.

`7 (11-12 klasės).` Raskite visas pirminių skaičių poras (p, q), su kuriomis lygtis

$$x^2 - (6p - 4q)x + 3pq = 0$$

turi du skirtingus sveikuosius sprendinius.

Sprendimas. Tarkime, kad tie skirtingi sveikieji sprendiniai yra x_1 ir x_2. Pagal Vijeto teoremą, jie tenkina dvi lygtis $x_1x_2 = 3pq$ ir $x_1 + x_2 = 6p - 4q$. Skaičiai $3, p, q$ yra pirminiai, o $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, todėl iš lygybės $x_1x_2 = 3pq$ išplaukia, kad vienas iš skaičių x_1, x_2 gali būti tik $1, -1, 3, -3, p, -p, q, -q$, o kitas atitinkamai

$3pq, -3pq, pq, -pq, 3q, -3q, 3p, -3p$. Kadangi atitinkamų porų suma yra lygi $6p - 4q$, tai gaunamos 8 lygtys, kai skaičius $6p - 4q$ yra lygus

$$1 + 3pq, -1 - 3pq, 3 + pq, -3 - pq, p + 3q, -p - 3q, q + 3p \quad \text{arba} \quad -q - 3p.$$

Pradėkime nuo pirmosios lygties $6p - 4q = 1 + 3pq$. Kadangi $q \geqslant 2$, tai $1 + 3pq \geqslant 1 + 6p > 6p > 6p - 4q$, todėl pirmoji lygtis pirminių sprendinių neturi. Analogiškai, remdamiesi nelygybe $p \geqslant 2$, matome, kad

$$-1 - 3pq < -6q < -4q < 6p - 4q,$$

taigi ir antroji lygtis neturi pirminių sprendinių. Trečiąją lygtį $6p - 4q = 3 + pq$ užrašykime taip:

$$(p + 4)(q - 6) = -27.$$

Čia $p + 4 > 0$, todėl $q < 6$, t. y. $q \leqslant 5$. Be to, $q \neq 2$, nes priešingu atveju viena lygties pusė yra lyginis skaičius, o kita – nelyginis. Taigi $q = 3$ arba $q = 5$ ir atitinkamai $p = 5$ arba $p = 23$. Abi poros $(p, q) = (5, 3)$ ir $(23, 5)$ tikrai yra pirminių skaičių poros ir abiem atvejais kvadratinės lygties sprendiniai 3 ir pq yra skirtingi sveikieji skaičiai. Taigi abi šios poros tenkina uždavinio sąlygą.

Panašiai nagrinėsime ir ketvirtąją lygtį $6p - 4q = -3 - pq$. Ją užrašykime taip: $(p - 4)(q + 6) = -27$. Iš čia $p \leqslant 3$. Be to, $p \neq 2$, nes dešinioji lygties pusė yra nelyginis skaičius. Vadinasi, $p = 3$ ir todėl $q = 21$, tačiau 21 yra sudėtinis skaičius. Vadinasi, kevirtoji lygtis pirminių sprendinių neturi.

Iš penktosios lygties $6p - 4q = p + 3q$ išplaukia lygybė $5p = 7q$. Vienintelė iš jos gaunama pirminių skaičių pora $(p, q) = (7, 5)$ tenkina uždavinio sąlygą, kadangi kvadratinės lygties sprendiniai p ir $3q$ yra skirtingi sveikieji skaičiai. Analogiškai, iš šeštosios lygties $6p - 4q = -p - 3q$ gauname $7p = q$. Ši lygtis pirminių sprendinių neturi, nes iš $7|q$ išplaukia, kad $q = 7$ ir todėl $p = 1$, tačiau 1 nėra pirminis skaičius. Septintoji lygtis $6p - 4q = q + 3p$ yra ekvivalenti lygčiai $3p = 5q$. Iš čia gaunamą vienintelę pirminių skaičių porą $(p, q) = (5, 3)$ jau gavome anksčiau ir žinome, kad ji tenkina uždavinio sąlygą. Galiausiai, aštuntoji lygtis $6p - 4q = -q - 3p$ yra ekvivalenti lygčiai $3p = q$. Pirminių sprendinių ji neturi, nes iš $3|q$ išplaukia, kad $q = 3$ ir $p = 1$, prieštara. Vadinasi, uždavinio sąlygą tenkina trys pirminių skaičių poros $(p, q) = (5, 3), (7, 5)$ ir $(23, 5)$.

Atsakymas: $(p, q) = (5, 3), (7, 5)$ ir $(23, 5)$.