

68-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Klaipėda, 2019 03 23

9–10 klasės

1. Išspręskite lygtį  $\sqrt{x^2 - 1} = x\sqrt{x} - \sqrt{x - 1}$ .
2. Trikampio  $ABC$  kraštinėje  $AB$  yra taškai  $K$  ir  $L$  (taškas  $K$  yra atkarpoje  $AL$ ), o kraštinėje  $AC$  – taškas  $M$ . Atkarpos  $CL$ ,  $CK$  ir  $MK$  dalija pradinį trikampį į keturis panašius trikampius. Raskite trikampio  $ABC$  kampus.
3. Petras pasirinko 5 taisyklingojo 10-kampio viršūnes, o Paulius – 13 taisyklingojo 30-kampio viršūnių.
  - a) Ar aš visada galėsiu nurodyti tokias 3 viršūnes iš Petro pasirinktųjų, kad jos būtų lygiašonio trikampio viršūnės?
  - b) Ar aš visada galėsiu tą patį padaryti su Pauliaus viršūnėmis?
4. Mokytoja uždavė mintinai išmokti kuo didesnio skaičiaus skaitmenis. Pirmūnė Julija didelėje lentoje vieną po kito užrašė visus skaičiaus  $4^{2019}$  skaitmenis. Išdykėlis Juozas visiems nusprendė įrodyti, kad jis yra dar šaunesnis: įsiminė ir vieną po kito užrašė visus skaičiaus  $25^{2019}$  skaitmenis. Kiek iš viso lentoje užrašyta skaitmenų?

## 11–12 klasės

1. Duota lygčių sistema

$$\begin{cases} x^2 - xy^2 + x + 2 = 0, \\ 2y - x^2y - 14x = 0. \end{cases}$$

- a) Nurodykite bent vieną jos sprendinį  $(x, y)$ .  
b) Raskite visus jos sprendinius.
2. Trikampio  $ABC$  kraštinėje  $AB$  yra taškai  $K$  ir  $L$  (taškas  $K$  yra atkarpoje  $AL$ ), o kraštinėje  $AC$  – taškas  $M$ . Atkarpos  $CL$ ,  $CK$  ir  $MK$  dalija pradinį trikampį į keturis panašius trikampius. Raskite trikampio  $ABC$  kampus.
3. Eugenijus gavo dovanų stebuklingą dėžutę, kurioje yra 106000 eurų ir du mygtukai, geltonas ir žalias. Paspaudus geltonąjį mygtuką eurų skaičius dėžutėje padvigubėja, o paspaudus žaliąjį 17 eurų sumažėja. (Jei spaudžiant žaliąjį mygtuką dėžutėje buvo ne daugiau kaip 17 eurų, tai dėžutė tampa tuščia.) Mygtukus Eugenijus gali spaudyti bet kuria tvarka. Ar gali tam tikru momentu dėžutėje pasidaryti lygiai
- a) dešimt eurų?  
b) tūkstantis eurų?  
c) milijonas eurų?  
d) Raskite visas tokias natūraliąsias  $m$  reikšmes, kurioms yra įmanoma, kad tam tikru momentu dėžutėje pasidarytų lygiai  $m$  eurų.
4. Raskite visas pirminių skaičių poras  $(p, q)$ , su kuriomis lygtis

$$x^2 - (6p - 4q)x + 3pq = 0$$

turi du skirtingus sveikuosius sprendinius.