Atranka į 2019 m. Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos olimpiadas

Pirmoji diena, 2019 04 03

1. Mykolas sugalvojo natūraliųjų skaičių seką $a_1, a_2, a_3, \ldots$, o tada apibrėžė naują seką $b_1, b_2, b_3, \ldots$ tokiomis lygybėmis:

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_2, \quad b_n = a_n b_{n-1} + b_{n-2} \text{ visiems } n \geqslant 3.$$

   Ar galėjo Mykolas pradinę seką $a_1, a_2, a_3, \ldots$ parinkti taip, kad kiekvienas iš skaičių $b_1, b_2, b_3, \ldots$ būtų
   a) natūraliojo skaičiaus kvadratas?
   b) natūraliojo skaičiaus kubas?

2. Trikampio ABC pusiaukampinės kertasi taške I. Taškai M ir N atitinkamai kraštines AB ir AC dalija pusiau. Tiesės MN ir CI kertasi taške P. Pažymėtas toks taškas Q, kad tiesės MN ir PQ yra statmenos, o tiesės BI ir NQ – lygiagrečios. Raskite kampą tarp tiesių AC ir IQ.

3. Duoti natūralieji skaičiai m ir n. Į šaškininkų sąskrydį atvyko $12m$ dalyvių. Jo metu kiekvienas dalyvis sulošė lygiai $3m+6$ šaškių partijas. Bet kurie du dalyviai tarpusavyje lošė daugiausiai vieną kartą. Bet kuriems dviem sąskrydžio dalyviams A ir B egzistuoja lygiai n kitų dalyvių, kurie lošė šaškėmis tiek su A, tiek su B. Raskite m ir n.

Atranka į 2019 m. Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos olimpiadas

Antroji diena, 2019 04 04

4. Apskritimai ω_1 ir ω_2 kertasi dviejuose taškuose A ir B. Tiesės l_1 ir l_2 eina per B ir kerta apskritimą ω_1 atitinkamai taškuose C ir E, o apskritimą ω_2 – atitinkamai taškuose D ir F (čia $C, E, D, F \neq B$). Tiesė CF kerta ω_1 ir ω_2 atitinkamai taškuose $P \neq C$ ir $Q \neq F$. Lankų BP ir BQ, atitinkamai esančių ω_2 ir ω_1 viduje, vidurio taškai atitinkamai pažymėti M ir N. Įrodykite, kad jei $CD = EF$, tai taškai C, F, M, N priklauso vienam apskritimui.

5. Natūralųjį skaičių n vadinsime *penkiadaliu*, jei jis turi tokius penkis skirtingus teigiamus daliklius, kurių ketvirtųjų laipsnių suma lygi n. (Skaičiai 1 ir n taip pat yra skaičiaus n dalikliai.)
   a) Įrodykite, kad penkiadalis skaičius visada dalijasi iš 5.
   b) Nustatykite, ar yra be galo daug penkiadalių natūraliųjų skaičių.

6. Raskite:
   a) reiškinio
   $$(1-x)(1-y)(1-xy)$$
   didžiausią galimą reikšmę, kai $x, y \in [-1; 1]$.
   b) reiškinio
   $$(1-x)(1-y)(1-z)(1-xy)(1-yz)(1-xyz)$$
   didžiausią galimą reikšmę, kai $x, y, z \in [-1; 1]$.