# Atranka į 2019 m. Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos olimpiadas

## Sprendimai

Artūras Dubickas ir Aivaras Novikas

1. Mykolas sugalvojo natūraliųjų skaičių seką $a_1, a_2, a_3, \ldots$, o tada apibrėžė naują seką $b_1, b_2, b_3, \ldots$ tokiomis lygybėmis:

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_2, \quad b_n = a_n b_{n-1} + b_{n-2} \text{ visiems } n \geqslant 3.$$

Ar galėjo Mykolas pradinę seką $a_1, a_2, a_3, \ldots$ parinkti taip, kad kiekvienas iš skaičių $b_1, b_2, b_3, \ldots$ būtų
a) natūraliojo skaičiaus kvadratas?
b) natūraliojo skaičiaus kubas?

*Sprendimas.* Nagrinėkime a) $P(x) = x^2$; b) $P(x) = x^3$. Abiem atvejais įrodysime, kad galima taip parinkti seką $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ir natūraliųjų skaičių seką $c_1 < c_2 < c_3 < \ldots$, kad visiems $n \in \mathbb{N}$ galiotų $b_n = P(c_n)$. Vadinasi, abiem atvejais a) ir b) atsakymas teigiamas. (Pastebėkime, kad analogišką teiginį galima įrodyti ir bet kokiam daugianariui su sveikaisiais koeficientais $P(x) = p_d x^d + \cdots + p_0$, kur $d \geqslant 2$ ir $p_d \in \mathbb{N}$.)

Funkcija $P(x) - x = x(x-1)$ arba $(x-1)x(x+1)$ yra neneigiama ir didėjanti, kai $x \in [1, +\infty)$. Imkime $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ ir $a_1 = P(c_1)$, $a_2 = P(c_2)$. Toliau imkime

$$c_n = P(c_{n-1}) + c_{n-2} \quad \text{ir} \quad a_n = \frac{P(c_n) - P(c_{n-2})}{P(c_{n-1})}$$

visiems $n \geqslant 3$. Čia $c_n > P(c_{n-1}) \geqslant c_{n-1}$, kai $n \geqslant 3$. Be to, $a_n \in \mathbb{N}$, nes skirtumas $P(c_n) - P(c_{n-2}) \in \mathbb{N}$ dalijasi iš $c_n - c_{n-2} = P(c_{n-1}) \in \mathbb{N}$.

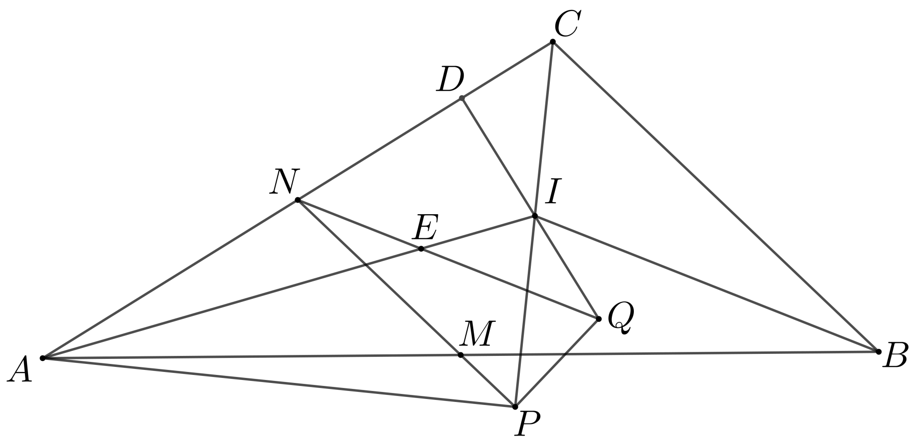
Belieka įrodyti, kad $b_n = P(c_n)$ visiems $n \in \mathbb{N}$. Remkimės matematine indukcija. Indukcijos bazė: $b_n = a_n = P(c_n)$, kai $n = 1$ ir $n = 2$. Indukcijos žingsnis: jei $b_k = P(c_k)$, kai $k = n-1$ ir $k = n$, tai

$$b_n = a_n b_{n-1} + b_{n-2} = \frac{P(c_n) - P(c_{n-2})}{P(c_{n-1})} P(c_{n-1}) + P(c_{n-2}) = P(c_n).$$

*Atsakymas:* a) taip; b) taip.

2. Trikampio $ABC$ pusiaukampinės kertasi taške $I$. Taškai $M$ ir $N$ atitinkamai kraštines $AB$ ir $AC$ dalija pusiau. Tiesės $MN$ ir $CI$ kertasi taške $P$. Pažymėtas toks taškas $Q$, kad tiesės $MN$ ir $PQ$ yra statmenos, o tiesės $BI$ ir $NQ$ – lygiagrečios. Raskite kampą tarp tiesių $AC$ ir $IQ$.

*Sprendimas.* Tiesių $AC$ ir $IQ$ sankirtą pažymėkime $D$, o tiesių $AI$ ir $NQ$ sankirtą – $E$ (žr. pav.).




Kadangi $MN||BC$, tai $\angle NCP = \angle BCP = \angle CPN$, trikampis $CPN$ lygiašonis ir $NP = NC = NA$. Todėl $P$ priklauso apskritimui su skersmeniu $AC$, o $\angle APC = 90°$. Kadangi $MN||BC$ ir $BI||NQ$, tai $\angle CBI = \angle PNQ$ ir

$$\angle AIP = 180° - \angle AIC = \angle CAI + \angle ACI = \frac{\angle BAC}{2} + \frac{\angle ACB}{2} =$$

$$= \frac{180° - \angle ABC}{2} = 90° - \angle CBI = 90° - \angle PNQ = \angle PQN.$$

Statieji trikampiai $AIP$ ir $NQP$ turi po lygų smailųjį kampą, todėl yra panašieji. Tada $\angle AIP = \angle NQP$ ir $\angle IAP = \angle QNP$, o keturkampiai $ANEP$ ir $IQPE$ yra įbrėžtiniai. Vadinasi,

$$\angle CID = \angle PIQ = \angle PEQ = 180° - \angle PEN = \angle PAN =$$

$$= \angle CAP = 90° - \angle ACP = 90° - \angle DCI,$$

$$\angle CDI = 180° - \angle CID - \angle DCI = 90°.$$

*Atsakymas:* 90°.

3. Duoti natūralieji skaičiai $m$ ir $n$. Į šaškininkų sąskrydį atvyko $12m$ dalyvių. Jo metu kiekvienas dalyvis sulošė lygiai $3m+6$ šaškių partijas. Bet kurie du dalyviai tarpusavyje lošė daugiausiai vieną kartą. Bet kuriems dviem sąskrydžio dalyviams $A$ ir $B$ egzistuoja lygiai $n$ kitų dalyvių, kurie lošė šaškėmis tiek su $A$, tiek su $B$. Raskite $m$ ir $n$.

   *Sprendimas.* Nagrinėkime bet kurį vieną sąskrydžio dalyvį $A$. Dalyvių, su kuriais jis yra lošęs šaškėmis, aibę pažymėkime $U$, o dalyvių, su kuriais jis nėra lošęs šaškėmis, aibę – $V$. Tada $|U| = 3m + 6$ ir $|V| = 12m - 1 - |U| = 9m - 7$.

   Kiekvienam $B \in U$ tie $3m + 6$ dalyviai, su kuriais $B$ lošė šaškėmis, taip pasiskirsto tarp aibių: vienas dalyvis $A$, $n$ dalyvių aibėje $U$ ir likę $3m + 5 - n$ dalyvių aibėje $V$. Todėl tokių partijų, kurias lošė žmogus iš $U$ ir žmogus iš $V$, yra iš viso $(3m + 6)(3m + 5 - n)$.

   Kiekvienam $C \in V$ iš $3m + 6$ dalyvių, su kuriais $C$ lošė šaškėmis, $n$ dalyvių yra aibėje $U$. Todėl tokių partijų, kurias lošė žmogus iš $U$ ir žmogus iš $V$, yra iš viso $(9m - 7)n$.

   Vadinasi, $(3m + 6)(3m + 5 - n) = (9m - 7)n$ ir

$$n = 3 \cdot \frac{3m^2 + 11m + 10}{12m - 1}.$$

   Kadangi skaičiai 3 ir $12m - 1$ yra tarpusavyje pirminiai, tai $12m - 1$ dalija skaičių $4 \cdot (3m^2 + 11m + 10) = (12m - 1)(m + 3) + 9m + 43$, todėl ir skaičių $4(9m+43) = 3(12m-1)+175$ bei skaičių $175 = 5^2 \cdot 7$. Jei $m \geqslant 15$, tai $12m - 1 \geqslant 179 > 175$, o jei $8 \leqslant m \leqslant 14$, tai $\frac{175}{2} < 12m - 1 < 175$. Be to, 175 nesidalija iš $12m - 1$, kai $m = 1, 2, 4, 5, 6, 7$. Vadinasi, $m = 3$ ir tada $n = 6$.

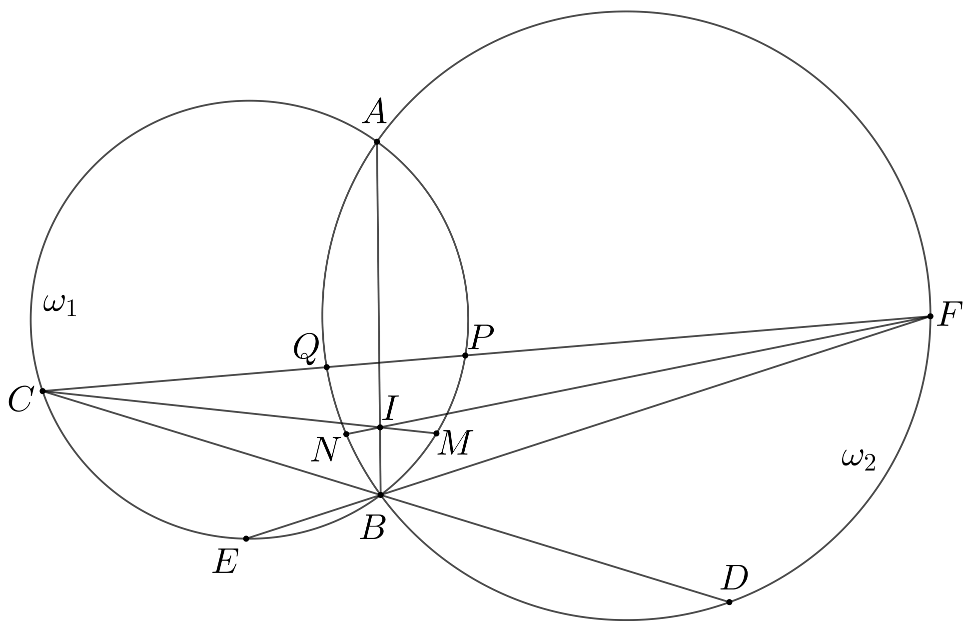
   *Pastaba.* Situacija $m = 3$ ir $n = 6$ yra įmanoma. Grafų teorijos kalba tai reiškia, kad egzistuoja stipriai reguliarus grafas srg(36, 15, 6, 6). Įrodyta, kad tokių skirtingų grafų iš viso yra net 32548.

   *Atsakymas:* $m = 3$, $n = 6$.

4. Apskritimai $\omega_1$ ir $\omega_2$ kertasi dviejuose taškuose $A$ ir $B$. Tiesės $l_1$ ir $l_2$ eina per $B$ ir kerta apskritimą $\omega_1$ atitinkamai taškuose $C$ ir $E$, o apskritimą $\omega_2$ – atitinkamai taškuose $D$ ir $F$ (čia $C, E, D, F \neq B$). Tiesė $CF$ kerta $\omega_1$ ir $\omega_2$ atitinkamai taškuose $P \neq C$ ir $Q \neq F$. Lankų $BP$ ir $BQ$, atitinkamai esančių $\omega_2$ ir $\omega_1$ viduje, vidurio taškai atitinkamai pažymėti

$M$ ir $N$. Įrodykite, kad jei $CD = EF$, tai taškai $C$, $F$, $M$, $N$ priklauso vienam apskritimui.

*Sprendimas.* Kadangi $\angle ADC = \angle ADB = \angle AFB = \angle AFE$ ir $\angle ACD = \angle ACB = \angle AEB = \angle AEF$ (įbrėžtiniai kampai; žr. pav.) bei $CD = EF$, tai $\triangle ACD = \triangle AEF$, $AD = AF$, o trikampis $ADF$ yra lygiašonis.




Todėl

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle ABD = \angle AFD = \angle ADF = \angle ABF,$$

o tiesė $AB$ dalija $\angle CBF$ pusiau. Taškas $M$ dalija lanką $BP$ pusiau, todėl tiesė $CM$ dalija $\angle BCF$ pusiau. Analogiškai tiesė $FN$ yra dalija $\angle CFB$ pusiau. Trikampio $BCF$ pusiaukampinės kertasi viename taške $I$. Pagal susikertančių stygų teoremą,

$$CI \cdot IM = AI \cdot IB = FI \cdot IN.$$

Todėl ir atkarpos $CM$ bei $FN$ tenkina šią teoremą, o jų galai $C$, $F$, $M$, $N$ priklauso vienam apskritimui.

5. Natūralųjį skaičių $n$ vadinsime *penkiadaliu*, jei jis turi tokius penkis skirtingus teigiamus daliklius, kurių ketvirtųjų laipsnių suma lygi $n$. (Skaičiai 1 ir $n$ taip pat yra skaičiaus $n$ dalikliai.)

a) Įrodykite, kad penkiadalis skaičius visada dalijasi iš 5.

b) Nustatykite, ar yra be galo daug penkiadalių natūraliųjų skaičių.

*Sprendimas.* a) Tarkime, kad egzistuoja penkiadalis skaičius $n$, nesidalijantis iš 5. Tada $n$ turi tokius skirtingus teigiamus daliklius $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$, $d_5$, kad $n = d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 + d_4^4 + d_5^4$. Kadangi $n$ nesidalija iš 5, tai ir visi $d_i$ nesidalija iš 5. Remiantis Mažąja Ferma teorema, $d_i^4 \equiv 1 \pmod 5$, kai $i = 1, \ldots, 5$. Tačiau tada

$$n \equiv d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 + d_4^4 + d_5^4 \equiv 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod 5$$

ir $n$ dalijasi iš 5. Gavome prieštarą. Vadinasi, visi penkiadaliai skaičiai dalijasi iš 5.

b) Imkime bet kokius penkis skirtingus natūraliuosius skaičius $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ ir apibrėžkime $n = a^4b^4c^4d^4e^4(a^4+b^4+c^4+d^4+e^4)$. Tada $n$ dalijasi iš 5 skiringų skaičių $d_1 = a^2bcde$, $d_2 = ab^2cde$, $d_3 = abc^2de$, $d_4 = abcd^2e$, $d_5 = abcde^2$, ir $n = d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 + d_4^4 + d_5^4$. Taigi, kiekvienas toks $n$ yra penkiadalis skaičius. Didindami skaičius $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, skaičių $n$ galime padaryti kiek norima didelį, todėl penkiadalių skaičių yra be galo daug.

*Atsakymas:* b) penkiadalių skaičių yra be galo daug.

6. Raskite:

a) reiškinio

$$(1-x)(1-y)(1-xy)$$

didžiausią galimą reikšmę, kai $x, y \in [-1; 1]$.

b) reiškinio

$$(1-x)(1-y)(1-z)(1-xy)(1-yz)(1-xyz)$$

didžiausią galimą reikšmę, kai $x, y, z \in [-1; 1]$.

*Sprendimas.* a) Tarkime, kad $x \in [0; 1]$ ir $y \in [-1; 1]$. Tada

$$(1-x)(1-xy) \leqslant (1-x)(1+x) = 1 - x^2 \leqslant 1.$$

ir

$$(1-x)(1-y)(1-xy) \leqslant 1 - y \leqslant 2.$$

Nelygybė $(1-x)(1-y)(1-xy) \leqslant 2$ teisinga, ir kai $x \in [-1; 1]$, $y \in [0; 1]$ (įrodoma analogiškai). Įrodysime šią nelygybę likusiu atveju $x \in [-1; 0)$

ir $y \in [-1; 0)$. Pastebėję, kad ji virsta lygybe, kai $x = -1$, $y = 0$, gauname, kad ieškoma didžiausia reikšmė yra 2.

Imkime bet kokį $x \in [-1; 0)$ ir nagrinėkime kvadratinę funkciją

$$f(y) = (1 - x)(1 - y)(1 - xy)$$

intervale $y \in [-1; 0]$. Aišku, kad šią funkciją atitinkančios parabolės viršūnė yra taškas $(y_0; f(y_0))$, kur $y_0 = (1 + x)/(2x)$. Jei $y_0 \in [-1; 0)$, tai $x \in (-1; -1/3]$. Tada

$$f(y) \leqslant f(y_0) = -\frac{(1-x)^3}{4x} = \frac{(1+|x|)^3}{4|x|} \leqslant 2,$$

nes

$$(|x| - 1)(4|x| - 1) \geqslant 0 \implies 5|x| \geqslant 4|x|^2 + 1 \implies$$
$$8|x| \geqslant |x|^3 + 3|x|^2 + 3|x| + 1 = (1 + |x|)^3.$$

(Nelygybę $-\frac{(1-x)^3}{4x} \leqslant 2$ galima įrodyti, ir pasinaudojus išvestine.) Jei $y_0 \notin [-1; 0)$, tai arba $f(y) \leqslant f(0) = 1 - x \leqslant 2$, arba $f(y) \leqslant f(-1) = 2(1 - x^2) \leqslant 2$. Vadinasi,

$$f(y) \leqslant 2$$

visiems $y \in [-1; 0)$.

b) Pažymėkime $P = (1 - x)(1 - y)(1 - z)(1 - xy)(1 - yz)(1 - xyz)$. Visi dauginamieji $P_1 = 1 - x$, $P_2 = 1 - y$, $P_3 = 1 - z$, $P_{1,2} = 1 - xy$, $P_{2,3} = 1 - yz$ ir $P_{1,2,3} = 1 - xyz$ priklauso intervalui $[0, 2]$.

Tarkime, kad $P_{2,3} \leqslant P_{1,2}$. Remiantis a), $P_1P_2P_{1,2} \leqslant 2$ ir $P_3P_{1,2}P_{1,2,3} \leqslant 2$ (čia a) dalies reiškinyje imame $z$ vietoj $x$ ir $xy$ vietoj $y$). Tada

$$P = P_1P_2P_3P_{1,2}P_{2,3}P_{1,2,3} \leqslant P_1P_2P_{1,2} \cdot P_3P_{1,2}P_{1,2,3} \leqslant 2 \cdot 2 = 4.$$

Analogiškai, kai $P_{1,2} \leqslant P_{2,3}$, tai

$$P \leqslant P_2P_3P_{2,3}P_1P_{2,3}P_{1,2,3} \leqslant 2 \cdot 2 = 4.$$

Vadinasi, visada $P \leqslant 4$. Ieškoma didžiausia reikšmė ir yra 4, nes $P$ įgyja šią reikšmę, kai $x = z = -1$ ir $y = 0$.

*Atsakymas:* a) 2; b) 4.