Organizuoja
VILNIAUS UNIVERSITETAS

Remia
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS
Leidykla TYTO ALBA
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

XXXIV LIETUVOS KOMANDINĖ MOKINIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROF. JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas
2019-09-28

1. Su tam tikra realiąja parametro a reikšme abi lygtys $x^2+2x+a=0$ ir $x^2+ax+2=0$ turi po du skirtingus sprendinius. Be to, kiekvienos iš šių lygčių sprendinių kvadratų suma yra tokia pati. Raskite visas galimas a reikšmes.

2. Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tenkina sąlygas: 1) $f(x+2)=-f(x)$ visiems $x\in\mathbb{R}$; 2) $f(2x)=2x$ visiems $x\in(0;1)$. Raskite $f(10\pi)$.

3. Realieji skaičiai x,y,z tenkina lygybes (čia vardikliai nelygūs 0)
$$\frac{1}{xy}=\frac{y}{z-x+1}=\frac{2}{z+1}.$$
a) Įrodykite, kad surašyti tam tikra tvarka skaičiai x,y,z sudaro aritmetinę progresiją.

b) Raskite visas galimas $x+y+z$ reikšmes, jei žinoma, kad surašyti tam tikra tvarka skaičiai x,y,z sudaro geometrinę progresiją.

4. Raskite x,y,z, jei $x,y,z>1$ ir
$$\begin{cases}(x+y)(1+\frac{1}{xy})=\frac{17}{4},\\(y+z)(1+\frac{1}{yz})=\frac{25}{3},\\(z+x)(1+\frac{1}{zx})=\frac{33}{4}.\end{cases}$$

5. Duota, kad $x,y,z>0$ ir $x+y+z=1$. Įrodykite nelygybę
$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}\geq\frac{2}{1+x}+\frac{2}{1+y}+\frac{2}{1+z}.$$

6. Natūralusis skaičius N triženklis, o skaičiaus $3N$ visi skaitmenys lyginiai. Raskite penkias mažiausias galimas skaičiaus N reikšmes.

7. Šešių skirtingų natūraliųjų skaičių suma lygi 2020. Visi šeši skaičiai turi bendrą daliklį d. Raskite didžiausią galimą d reikšmę.

8. Skaičius $n>1$ natūralusis, o skaičius $3n^3-2019$ dalijasi iš 2016. Raskite mažiausią galimą n reikšmę.

9. Dešimtženklį natūralųjį skaičių vadinsime *neišpasakytuoju*, jei jis neturi skaitmens 0, dalijasi iš 11 ir jei bet kokia tvarka surašius 10 jo skaitmenų gautasis skaičius visada dalijasi iš 12.

   a) Raskite bent vieną neišpasakytąjį skaičių. b) Nustatykite, kiek yra neišpasakytųjų skaičių.

10. Raskite visas pirminių skaičių poras (p,q), kurioms $p^{q+1}+q^{p+1}$ yra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

11. Jei lentoje užrašytas natūralusis skaičius n, tai leidžiama jį nutrinti ir vietoj jo užrašyti vieną iš skaičių $3n + 13$ ir $\sqrt{n}$. Lentoje leidžiama rašyti tik natūraliuosius skaičius.

    a) Lentoje užrašytas skaičius 256. Ar įmanoma, atliekant leidžiamus veiksmus, lentoje užrašyti skaičių 55?

    b) Lentoje užrašytas skaičius 55. Ar įmanoma, atliekant leidžiamus veiksmus, lentoje užrašyti skaičių 256?

12. Į 4×4 lentelės langelius įrašyti visi skaičiai $1, 2, 3, \ldots, 16$, po vieną skaičių į langelį. Langeliai vadinami gretimais, jei turi bendrą kraštinę. Kiekvienai gretimų langelių porai lentelėje priskiriamas juose esančių skaičių skirtumo modulis. Tarp šių 24 priskirtųjų skaičių yra skaičius s, ne mažesnis nei likę 23 skaičiai. Raskite mažiausią galimą s reikšmę.

13. Futbolo turnyre dalyvauja $2n$ komandų, ir bet kurios dvi komandos sužaidė po vieną kartą. Šiame turnyre už pergalę vieneriose rungtynėse komanda gauna 2 taškus, už pralaimėjimą gauna 0 taškų, o už lygiąsias gauna 1 tašką. Nugalėtoja tapo komanda, surinkusi daugiau taškų nei bet kuri kita. Kiekvienai natūraliajai n reikšmei nustatykite, kiek daugiausiai turnyro varžybų gali būti pralaimėjusi ši komanda.

14. Į 4×4 lentelės langelius reikia taip įrašyti po neneigiamą sveikąjį skaičių, kad visose eilutėse ir stulpeliuose būtų daugiausiai po du teigiamus skaičius, o keturių skaičių suma kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje būtų lygi 3. Kiek skirtingų užpildytų lentelių taip galima gauti?

15. Viename iš 4×16 lentos langelių stovi šachmatų žirgas. Įrodykite, kad žirgu neįmanoma taip atlikti 64 ėjimų, kad visi 64 langeliai, į kuriuos peršoktų žirgas, būtų skirtingi, o paskutiniuoju ėjimu žirgas atsidurtų savo pradiniame langelyje. (Šachmatų žirgas gali vienu ėjimu peršokti iš vieno langelio į kitą, jei tie langeliai yra gretimose eilutėse, o jų stulpelius skiria lygiai vienas stulpelis arba jei tie langeliai yra gretimuose stulpeliuose, o jų eilutes skiria lygiai viena eilutė.)

16. Į stačiakampio $ABCD$ įstrižainę BD iš viršūnių A ir C išvesti statmenys dalija ją santykiu $4 : 5 : 4$. Raskite stačiakampio $ABCD$ ilgio ir pločio santykį.

17. Plokštumoje nubrėžti lygiagretainis $ABCD$ (čia $AB < BC$) bei kvadratai $BDEF$ bei $ACGH$. Šių kvadratų centrai atitinkamai pažymėti I ir J. Taškai C ir I yra vienoje pusėje nuo tiesės BD, o taškai D ir J – vienoje pusėje nuo tiesės AC. Įrodykite, kad $AI = BJ$.

18. Trikampis ABC tenkina sąlygas $AB = AC$, $\angle BAC = 40°$. Kraštinėse AB ir BC atitinkamai pažymėti tokie taškai K ir L, kad $\angle ACK = \angle BKL = 30°$. Tiesėje AB pažymėtas toks taškas P, kad $AK = BP$, o taškas B yra tarp taškų A ir P. Raskite $\angle APL$.

19. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinių AB ir AD vidurio taškai atitinkamai pažymėti E ir F. Tiesės CE ir BF kertasi taške K. Tiesėje CE pažymėtas toks taškas M, kad tiesės BM ir DK yra lygiagrečios. Įrodykite, kad trikampio DFK ir keturkampio $BMDK$ plotai lygūs.

20. Smailiojo įvairiakraščio trikampio ABC apibrėžtinio apskritimo liestinės taškuose A ir B kertasi taške S. Trikampio ABC aukštinės kertasi taške H, o taškas M dalija kraštinę AB pusiau. Tiesė HA kerta tieses CM ir CS atitinkamai taškuose M_1 ir S_1, o tiesė HB kerta tieses CM ir CS atitinkamai taškuose M_2 ir S_2. Įrodykite, kad atkarpos M_1S_2 ir M_2S_1 yra trikampio M_1M_2H aukštinės.