XXXIV Lietuvos komandinė mokinių matematikos olimpiada prof. Jono Kubiliaus taurei laimėti

Atsakymai, sprendimai

Parengė Aivaras Novikas

1. Ats. $a = -4$.

   Lygčių diskriminantai turi būti teigiami: $4 - 4a > 0$, $a^2 - 8 > 0$. Lygčių $x^2 + 2x + a = 0$ ir $x^2 + ax + 2 = 0$ sprendinius atitinkamai pažymėkime x_1, x_2 ir x_3, x_4. Remiantis Vijeto teorema,

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4 - 2a,$$

$$x_3^2 + x_4^2 = (x_3 + x_4)^2 - 2x_3x_4 = a^2 - 4.$$

   Galime perfomuluoti uždavinį: reikia rasti tokius a, kad

$$4 - 4a > 0, \quad a^2 - 8 > 0, \quad 4 - 2a = a^2 - 4.$$

   Iš pastarosios kvadratinės lygties sprendinių $a = 2$ ir $a = -4$ nelygybes tenkina tik antrasis.

2. Ats. $30 - 10\pi$.

   Turime, kad $f(x+4) = f((x+2)+2) = -f(x+2) = f(x)$, kai $x \in \mathbb{R}$, ir $f(x) = x$, kai $x \in (0;2)$. Tada $f(x) = f(x-4) = f(x-8) = \ldots =$ $= f(x-28)$, kai $x \in \mathbb{R}$, ir, kadangi $10\pi - 30 = 31,4\ldots - 30 \in (0;2)$, tai $f(10\pi) = f(10\pi - 28) = -f(10\pi - 30) = 30 - 10\pi$.

3. Ats. b) $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}$.

   a) Kadangi $\frac{1}{xy} = \frac{2}{z+1}$, tai $z + 1 = 2xy$, kur $x \neq 0$, ir

$$\frac{1}{xy} = \frac{y}{z - x + 1} = \frac{y}{2xy - x} \implies 2xy - x = xy^2 \;\mid\; : x \neq 0 \implies$$

$$2y - 1 = y^2 \implies y = 1, \quad z = 2xy - 1 = 2x - 1.$$

   Skaičiai $y = 1$, $x = 1 + (x - 1)$, $z = x + (x - 1)$ sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas yra $x - 1$.

b) Skaičiai x, $y = 1$, $z = 2x - 1$, surašyti tam tikra tvarka, sudaro geometrinę progresiją a_1, a_1q, a_1q^2. Viduriniojo nario kvadratas lygus kitų dviejų narių sandaugai, todėl teisinga viena iš trijų lygybių:

$$x^2 = 1 \cdot (2x - 1), \quad 1^2 = x(2x - 1), \quad (2x - 1)^2 = 1 \cdot x.$$

Šių kvadratinių lygčių sprendiniai yra $x = 1$ (visų trijų lygčių sprendinys), $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{4}$. Atitinkamai gauname geometrines progresijas: $1, 1, 1$; $-\frac{1}{2}, 1, -2$; $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1$. O $x + y + z = x + 1 + (2x - 1) = 3x$ įgyja reikšmes 3, $-\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$.

4. Ats. $(x, y, z) = (\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 6)$.

Pastebėkime, kad $(x + y)(1 + \frac{1}{xy}) = (x + \frac{1}{x}) + (y + \frac{1}{y})$. Analogiškai galime perrašyti ir sistemos antrosios bei trečiosios lygčių kairiąsias puses. Pažymėkime $a = x + \frac{1}{x}$, $b = y + \frac{1}{y}$, $c = z + \frac{1}{z}$. Lygčių sistemą galime perrašyti taip:

$$\left\{a + b = \frac{17}{4}, \quad b + c = \frac{25}{3}, \quad c + a = \frac{33}{4}\right\}.$$

Tada

$$a = ((a + b) + (c + a) - (b + c)) : 2 = \left(\frac{51}{12} + \frac{99}{12} - \frac{100}{12}\right) : 2 = \frac{25}{12}.$$

Analogiškai, $b = \frac{13}{6}$, $c = \frac{37}{6}$. Norint rasti x, liko išspręsti lygtį

$$x + \frac{1}{x} = \frac{25}{12} \iff x^2 - \frac{25}{12}x + 1 = 0.$$

Gauname, kad $x = \frac{4}{3}$ arba $x = \frac{3}{4} < 1$. Tinka tik $x = \frac{4}{3}$. Analogiškai randame y bei z.

5. Remiantis aritmetinio ir harmoninio vidurkių nelygybe,

$$\frac{1 + x}{2} = \frac{(x + y + z) + x}{2} = \frac{(x + y) + (z + x)}{2} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z+x}} = \frac{2}{\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-y}}.$$

Todėl $\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-y} \geqslant \frac{4}{1+x}$. Analogiškai, $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} \geqslant \frac{4}{1+z}$ ir $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-z} \geqslant \frac{4}{1+y}$. Sudėję šias tris nelygybes ir padaliję iš 2, gauname duotąją nelygybę.

6. Ats. 134, 136, 140, 142, 148.

Ieškokime tinkamo $N \leqslant 333$. Tada skaičius $3N$ triženklis. Pažymėkime $3N = \overline{abc}$. Skaitmenys a, b, c lyginiai. Kadangi $N \geqslant 100$, tai $3N \geqslant 300$ ir $a \geqslant 4$. Skaičiai $3N$ ir N tuo mažesni, kuo mažesnis pirmasis skaitmuo a, o kai a duotas – kuo mažesnis skaitmuo b. Todėl pirmiausiai tikrinkime mažiausias galimas reikšmes $a = 4$ ir $b = 0$. Skaičius $3N$ dalijasi iš 3, todėl ir $a + b + c$ dalijasi iš 3. Tinka $c = 2$ ir $c = 8$. Didesnį skaičių $3N$ gausime, imdami $a = 4$, $b = 2$. Tinka $c = 0$ ir $c = 6$. Toliau turime imti $a = 4$, $b = 4$, ir tinka $c = 4$. Gauname mažiausias galimas $3N$ reikšmes 402, 408, 420, 426, 444 ir atitinkamas mažiausias N reikšmes.

bigskip

7. Ats. 20.

Šešis skaičius galima pažymėti $da_1, da_2, \ldots, da_6$. Tada skaičius

$$s = a_1 + a_2 + \ldots + a_6 \geqslant 1 + 2 + \ldots + 6 = 21$$

dalija skaičių $2020 = 20 \cdot 101 = ds$. Jei s nesidalija iš pirminio skaičiaus 101, tai d dalijasi iš 101, skaičius $20 : s = d : 101$ yra natūralusis ir todėl $s \leqslant 20$ – prieštara. Vadinasi, $s \geqslant 101$ ir $d = 2020 : s \leqslant 20$. Reikšmė $d = 20$ gaunama, imant, pavyzdžiui, šešis skaičius 20, $2 \cdot 20$, $3 \cdot 20$, $4 \cdot 20$, $5 \cdot 20$ ir $(101 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5) \cdot 20 = 86 \cdot 20$.

8. Ats. 193.

Skaičius $3n^3 - 2019 = (3n^3 - 3) - 2016$ dalijasi iš 2016 tada ir tik tada, kai skaičius $3n^3 - 3 = 3(n^3 - 1)$ dalijasi iš 2016. O pastarasis skaičius dalijasi iš $2016 = 3 \cdot 672$ tada ir tik tada, kai skaičius $n^3 - 1$ dalijasi iš $672 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$ arba kai skaičius $n^3 - 1 = (n-1)(n^2+n+1)$ dalijasi iš 2^5, iš 3 ir iš 7. Kadangi skaičius $n^2 + n + 1$ yra nelyginis, ir kai n lyginis, ir kai n nelyginis, tai $n - 1$ turi dalytis iš $2^5 = 32$. Be to, jei n dalijasi iš 3 su liekana 0 arba 2, tai $n^3 - 1 \equiv 0 - 1$ arba $2^3 - 1 \pmod 3$. Todėl $n^3 - 1$ dalijasi iš trijų tada ir tik tada, kai n dalijasi iš 3 su liekana 1, t. y. kai $n - 1$ dalijasi iš 3. Vadinasi, reikia rasti tokį mažiausią n, kuriam $n - 1$ dalijasi iš $32 \cdot 3 = 96$, o $n^3 - 1$ dalijasi iš 7.

Iš eilės tikrinkime galimas n reikšmes, tenkinančias pirmąją iš šių dviejų sąlygų: $n = 1 + 96$, $n = 1 + 96 \cdot 2$, ... Tada atitinkamai $n \equiv -1 \pmod 7$, $n \equiv 4 \pmod 7$, ... ir $n^3 - 1 \equiv (-1)^3 - 1 \equiv -2 \pmod 7$, $n^3 - 1 \equiv 4^3 - 1 \equiv 0 \pmod 7$, ... Matome, kad jau antroji reikšmė $n = 1 + 96 \cdot 2 = 193$ tinka.

9. Ats. a) pavyzdžiui, 4488888888; b) 50.

b) (ir kartu a)). Bet kaip sukeitus neišpasakytojo skaičiaus skaitmenis, jis turi dalytis iš 4. Todėl neišpasakytasis skaičius negali turėti nelyginio skaitmens: jį padarius paskutiniuoju skaitmeniu, gautasis skaičius nesidalytų net iš 2. Be to, neišpasakytasis skaičius negali turėti skaitmens 2: priešingu atveju iš to skaičiaus skaitmenų sudarytas skaičius

$$\overline{\ldots a2} = \ldots \cdot 100 + 10a + 2 = 4 \cdot \left(\ldots \cdot 25 + 5 \cdot \frac{a}{2} \right) + 2$$

nesidalytų iš 4 (čia a – priešpaskutinis sudarytojo dešimtženklio skaičiaus skaitmuo, jis turi būti lyginis). Analogiškai, neišpasakytasis skaičius negali turėti skaitmens 6.

Vadinasi, neišpasakytasis skaičius turi tik skaitmenis 4 ir 8. Tada iš jo skaitmenų sudarytas skaičius visada dalijasi iš 4. Kad toks skaičius dalytųsi iš $12 = 3 \cdot 4$, dar reikia, kad tų 10 skaitmenų suma dalytųsi iš 3. Jei skaitmenų 4 tokiame skaičiuje yra a, tai skaitmenų 8 yra $10 - a$, o skaičius $4a + 8(10 - a) = 80 - 4a$ dalijasi iš 3. Tinka $a = 2$, 5 ir 8.

Taigi, dešimtženklis skaičius $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{10}}$ yra neišpasakytasis, jei jis turi 2, 5 arba 8 skaitmenis 4, atitinkamai 8, 5 arba 2 skaitmenis 8 ir jei dalijasi iš 11. Paskutinę sąlygą užrašykime kitaip, pritaikę dalumo iš 11 požymį: skaičius $s = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_9 - a_{10}$ turi dalytis iš 11. Kadangi

$$|s| \leqslant 8 - 4 + 8 - 4 + 8 - 4 + 8 - 4 + 8 - 4 = 20,$$

tai vienintelė galima reikšmė yra $s = 0$ – kai ketvertų bei aštuonetų skaičiai tarp 5 skaitmenų $a_2, a_4, \ldots, a_{10}$ yra tokie patys, kaip tarp likusių 5 skaitmenų.

Dabar iš karto galime atmesti atvejį $a = 5$ (ketvertų skaičius turi būti lyginis). Jei turime $a = 2$, tai tinka tokie ir tik tokie skaičiai $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{10}}$, kur bet kuris vienas iš 5 skaitmenų $a_2, a_4, \ldots, a_{10}$ yra 4 ir bet kuris vienas iš likusių 5 skaitmenų yra 4 (o likę 8 skaitmenys yra 8). Tokių neišpasakytųjų skaičių yra tiek, keliais būdais galime parinkti tuos skaitmenis, lygius 4, t. y. jų yra $5 \cdot 5 = 25$. Jei turime $a = 8$, tai gauname analogišką atvejį su $10 - a = 2$ aštuonetais (vietoj dviejų ketvertų). Taip gauname dar 25 skaičius. Vadinasi, iš viso yra $25 + 25 = 50$ neišpasakytųjų skaičių.

10. Ats. $(2, 2)$.

Yra galimi trys atvejai.

1) Tegu $p = q = 2$. Tada $p^{q+1} + q^{p+1} = 4^2$ ir taip gauname tinkamą skaičių pora $(p, q) = (2, 2)$.

2) Tegu $p, q \neq 2$. Tada abu skaičiai p ir q yra nelyginiai, abu rodikliai $q+1$ ir $p+1$ yra lyginiai, o abu skaičiai p^{q+1} ir q^{p+1} – nelyginiai tikslieji kvadratai. Nelyginis tikslusis kvadratas visada dalijasi iš 4 su liekana 1, todėl skaičius $p^{q+1} + q^{p+1} \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 4$ dalijasi iš 2, bet ne iš 4 ir negali būti tikslusis kvadratas.

3) Toliau nemažindami bendrumo galime laikyti, kad $p = 2$, $q \neq 2$ (atvejis $q = 2$, $p \neq 2$ analogiškas). Tada $p^{q+1}+q^{p+1} = 2^{q+1}+q^3$. Tarkime, kad šis skaičius lygus tiksliajam kvadratui a^2, kur $a > 0$. Kadangi skaičius $q + 1$ lyginis, tai skaičius $b = 2^{\frac{q+1}{2}}$ natūralusis. Gauname $q^3 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Kadangi $a+b > 0$, tai $a+b > a-b > 0$. Abu skaičiai $a-b$ ir $a+b$ yra skaičiaus q laipsniai su neneigiamais sveikaisiais rodikliais. Jei abu tie rodikliai teigiami, tai skaičiai $a-b$ ir $a+b$ dalijasi iš q. Tačiau tada ir skaičių skirtumas $2b = 2^{\frac{q+3}{2}}$ dalijasi iš q – prieštara. Vadinasi, bent vienas iš rodiklių lygus 0, t. y. mažesnysis skaičius $a - b$ lygus $q^0 = 1$. Taigi, $q^3 - 1 = (a-b)(a+b) - 1 = a+b-1 = 2b$. Tačiau $2b$ yra dvejeto laipsnis (su natūraliuoju rodikliu), o $q^3 - 1$ dalijasi iš nelyginio skaičiaus $q^2 + q + 1 > 1$. Prieštara. Vadinasi, šiuo atveju sprendinių (p, q) nėra.

11. Ats. a) Taip, įmanoma; b) ne, neįmanoma.

a) Iš skaičiaus 256 lentoje iš eilės galima gauti tokius skaičius: 16, 61, 196, 14, 55.

b) Tarkime, kad lentoje užrašytas natūralusis skaičius n, kuris nesidalija iš 5 su liekana 1, o jį nutrynus užrašytas skaičius m. Jei $m \equiv 1 \pmod 5$, tai arba $n \equiv m^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod 5$, arba $3n \equiv m - 13 \equiv 1 - 13 \equiv 3 \pmod 5$ ir $n \equiv 1 \pmod 5$. Gauname prieštarą. Vadinasi, jei $n \not\equiv 1 \pmod 5$, tai $m \not\equiv 1 \pmod 5$. Kadangi $55 \not\equiv 1 \pmod 5$, tai iš šio skaičiaus niekada negausime $256 \equiv 1 \pmod 5$.

Kitas būdas. Kiekvieną sveikąjį skaičių galima užrašyti pavidalu $2a$ arba $2a+1$, kur $a \in \mathbb{Z}$. Tada kiekvieną tikslųjį kvadratą galima užrašyti kaip $4a^2 \equiv 0 \pmod 4$ arba $4(a^2 + a) + 1 \equiv 1 \pmod 4$.

Jei lentoje užrašytas skaičius $n \equiv 2$ arba $3 \pmod 4$, tai nutrynus šį skaičių, galima užrašyti tik $3n+13 \equiv 3$ arba $2 \pmod 4$. Kadangi $55 \equiv 3 \pmod 4$, tai iš skaičiaus 55 niekada negausime $256 \equiv 0 \pmod 4$.

12. Ats. 4.

Lengva sugalvoti pavyzdį, kur $s = 4$:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Tarkime, kad $s \leqslant 3$. Nagrinėkime langelį, kuriame įrašytas skaičius 1. Jam gretimuose langeliuose skaičiai ne didesni nei $1+s = 4$. Langeliuose, gretimuose šiems langeliams, skaičiai ne didesni nei $4 + s = 7$. Pagaliau visuose šiuose langeliuose ir langeliuose, gretimuose jiems, skaičiai ne didesni nei $7 + s = 10$. Skaičiai $11, \ldots, 16$ turi būti įrašyti likusiuose langeliuose. Perrenkant galimybes įsitikinama, kad jei vieneto langelis nėra kampinis, tai tų likusių langelių yra mažiau nei 6. Todėl vieneto langelis kampinis.

Nemažindami bendrumo, pažymėkime skaičius, kaip parodyta paveikslėlyje:

1			x_4
		x_3	y_3
	x_2	y_2	
x_1	y_1		

Tada $x_1, x_2, x_3, x_4 \leqslant 10$ ir $y_1, y_2, y_3 \geqslant 11$. Vienas iš skaičių x_1, x_2, x_3, x_4 ne didesnis už 7 ir yra gretimuose langeliuose kartu su vienu iš skaičių y_1, y_2, y_3. Vadinasi, $s \geqslant 11 - 7 = 4$. Prieštara.

13. Ats. $n - 1$.

Po kiekvienų rungtynių bendras surinktų taškų skaičius padidėja 2 taškais. Todėl visų surinktų taškų suma lygi $2 \cdot C_{2n}^2 = 2n(2n-1)$. Jei laimėjusi komanda būtų surinkusi daugiausiai $2n - 1$ taškų, tai kitos komandos būtų surinkusios po mažiau nei $2n - 1$ taškų, o visų taškų suma būtų mažesnė nei $2n(2n-1)$. Vadinasi, laimėjusi komanda surinko mažiausiai $2n$ taškų. Kiekvienose nepralaimėtose rungtynėse ji pelnė daugiausiai 2 taškus, todėl ji nepralaimėjo mažiausiai $2n : 2 = n$ rungtynių, o pralaimėjo daugiausiai $(2n-1) - n = n - 1$ rungtynių.

Situacija, kad laimėjusi komanda pralaimėjo $n-1$ rungtynių, yra įmanoma. Tai įrodysime, pateikdami pavyzdį. Tarkime, turnyre dalyvavo komandos A, B, C_1, C_2, $\ldots$, C_{n-1}, D_1, D_2, $\ldots$, D_{n-1}. Tarkime, kad A nugalėjo B, C_1, C_2, $\ldots$, C_{n-1} ir pralaimėjo komandoms D_1, D_2, $\ldots$, D_{n-1}, kad C_i nugalėjo D_i, kai $i = 1, 2, \ldots, n-1$, ir kad likusios rungtynės baigėsi lygiosiomis. Kiekviena iš komandų C_i ir D_i laimėjo ir pralaimėjo po vienerias rungtynes, o likusias $2n-3$ rungtynių baigė lygiosiomis. Todėl šios komandos surinko po $2 + 0 + (2n-3) = 2n-1$ taškų. Komanda B pralaimėjo vienerias rungtynes, o likusias $2n-2$ rungtynių baigė lygiosiomis ir surinko $2n-2$ taškų. Komanda A laimėjo n rungtynių, pralaimėjo $n-1$ rungtynių ir surinko $2n$ taškų – daugiau už kitas komandas.

14. Ats. 576.

Dviejų bet kokiais skaičiais užpildytų 4×4 lentelių sumą apibrėžkime kaip 4×4 lentelę, kurios kiekviename langelyje įrašyta pradinių lentelių atitinkamų langelių skaičių suma.

Jei lentelė L tenkina uždavinio sąlygą, tai jos kiekvienoje eilutėje yra arba vienintelis teigiamas skaičius 3, arba du teigiami skaičiai 1 ir 2. Tas pats tinka ir stulpeliams. Jei L trejetus pakeisime vienetais, o dvejetus – nuliais, tai gausime lentelę L_1, kurios kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje yra po vieną vienetą ir tris nulius. O jei L trejetus pakeisime dvejetais, o vienetus – nuliais, tai gausime lentelę L_2, kurios kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje yra po vieną dvejetą ir tris nulius. Be to, $L = L_1 + L_2$ (remiantis lygybėmis $0 = 0 + 0$, $1 = 1 + 0$, $2 = 0 + 2$, $3 = 1 + 2$).

Kita vertus, jei turime bet kokią 4×4 lentelę L_1, kurios kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje yra po vieną vienetą ir tris nulius, ir bet kokią 4×4 lentelę L_2, kurios kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje yra po vieną dvejetą ir tris nulius, tai lentelė $L = L_1 + L_2$ tenkina uždavinio sąlygą: jos visose eilutėse ir stulpeliuose skaičių sumos lygios $1 + 2 = 3$, o visi skaičiai langeliuose neneigiami.

Suskaičiuokime, kiek yra tokių lentelių L_1. Bet kuri iš jų gaunama taip: jos vienoje eilutėje įrašomas skaičius 1 – bet kuriame iš 4 langelių, tada antroje eilutėje skaičius 1 įrašomas viename iš 3 langelių, kurie nėra viename stulpelyje su jau užpildytuoju, toliau trečioje eilutėje skaičius 1 gali būti įrašytas 2 būdais, o ketvirtoje – vieninteliu būdu. Gauname $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ galimas lenteles L_1 ir, analogiškai, 24 galimas lenteles L_2.

Vadinasi, reikiamų lentelių $L = L_1 + L_2$ yra $24 \cdot 24 = 576$. Jos visos skirtingos: kiekvieną L skaičių 0, 1, 2, 3 galima **vieninteliu** būdu užrašyti kaip dviejų dėmenų sumą, kur pirmasis dėmuo yra 0 arba 1, o antrasis – 0 arba 2.

Pastaba. Jei L tenkina uždavinio sąlygą, tai ji tenkins sąlygą, ir bet kaip keičiant jos eilučių ir stulpelių tvarką. Galima įrodyti, kad tokiu būdu iš bet kurios tokios L galima gauti vieną iš šių lentelių:

3	0	0	0
0	3	0	0
0	0	3	0
0	0	0	3

3	0	0	0
0	3	0	0
0	0	1	2
0	0	2	1

3	0	0	0
0	1	2	0
0	2	0	1
0	0	1	2

1	2	0	0
2	1	0	0
0	0	1	2
0	0	2	1

1	2	0	0
2	0	1	0
0	1	0	2
0	0	2	1

Šiuos penkis atvejus iš eilės atitinka po 24, 144, 192, 72 ir 144 lenteles L.

15. Tarkime, kad žirgas gali apeiti visus langelius ir grįžti į pradinį.

Kiekvienoje iš keturių lentos eilučių kas antrą langelį pažymėkime, kaip parodyta paveikslėlyje (po 8 langelius viena raide):

A		A		...
B		B		...
	B		B	...
	A		A	...

Kadangi žirgo kelias uždaras, tai nemažindami bendrumo galime laikyti, kad žirgas pradžioje stovėjo kairiausiame langelyje A. Iš bet kurio langelio A žirgas vienu ėjimu visada pakliūna į kurį nors langelį B. Langelių A ir B yra po lygiai, todėl langeliai B, į kuriuos žirgas pateko tiesiai iš langelių A, ir yra visi įmanomi langeliai B. Kita vertus, į langelį A įmanoma pakliūti tik iš langelio B. Vadinasi, žirgo aplankytųjų langelių sekoje prieš langelį A (įskaitant pradinį, į kurį žirgas grįžo) visada yra langelis B, o prieš langelį B – langelis A. Tačiau tada langelių sekoje raide nepažymėtų langelių apskritai nėra. Prieštara.

16. Ats. $3:2$.

Iš trijų atkarpų, į kurias padalyta įstrižainė BD, dvi šoninės turi būti lygios dėl simetrijos, todėl viduriniosios ilgį galima pažymėti $5x$, o tų šoninių atkarpų – $4x$. Statmens iš taško A į atkarpą BD pagrindą pažymėkime E. Šis statmuo dalija statųjį trikampį ABD į du trikampius, kurie taip pat yra statieji ir turi po bendrą kampą su trikampiu ABD. Vadinasi, trikampiai ABD, EAD, EBA yra panašieji. Iš trikampių EAD ir EBA panašumo išplaukia, kad $AE^2 = BE \cdot DE = 4x \cdot (4x + 5x) = 36x^2$ ir $AE = 6x$. Tada trikampių ABD, EAD, EBA statinių santykiai lygūs $9 : 6 = 6 : 4 = 3 : 2$. Tai ir yra stačiakampio $ABCD$ kraštinių ilgių santykis ($AB : AD$ arba $AD : AB$).

17. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainių bendrą vidurio tašką pažymėkime M. Kadangi I yra kvadrato $BDEF$ centras, o M yra jo kraštinės BD vidurio taškas, tai $IM \perp BD$ ir $IM = BD/2$. Analogiškai, $JM \perp AC$ ir $JM = AC/2$.

Nagrinėkime trikampį AMI. Dvi jo kraštinės lygios $MA = AC/2$ ir $MI = BD/2$, o kampas tarp jų lygus $\angle AMB + 90°$. Analogiškai ir trikampis BMJ turi tokių ilgių dvi kraštines bei tokį patį kampą tarp jų. Vadinasi, $\triangle AMI = \triangle BMJ$ ir $AI = BJ$.

Pastaba. Kadangi $AB < BC$, tai $\angle AMB < 90°$ ir $180° > \angle AMB + + \angle BMI = \angle AMI$. Priešingu atveju $AB \geqslant BC$ uždavinio teiginys vis tiek liktų teisingas, tik čia turėtume $\angle AMI = \angle IMJ + 90° = \angle BMJ$.

18. Ats. $20°$.

Kadangi $AB = AC$, tai $\angle ABC = \angle ACB = (180° - \angle BAC) : 2 = 70°$, $\angle BCK = \angle ACB - \angle ACK = 40°$. Kita vertus, $\angle CKB = 180° - - \angle AKC = \angle CAK + \angle ACK = 70°$ ir $\angle CKL = \angle BKC - \angle LKB = = 40° = \angle KCL$. Vadinasi, trikampis CKL lygiašonis.

Trikampis BCK taip pat lygiašonis, nes $\angle BKC = 70° = \angle CBK$. Gauname, kad $CK = CB$, $\angle CKP = \angle CBA$, $KP = KB + BP = KB + + AK = BA$. Todėl $\triangle CKP = \triangle CBA$ (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų). Lygiašoniai trikampiai CKP ir CKL turi bendrą pagrindą CK, ir to pagrindo vidurio statmuo (bendra trikampių simetrijos ašis) eina per šių trikampių viršūnes L ir P bei dalija trikampio CKP kampą CPK pusiau. Vadinasi, $\angle APL = \angle CPK : 2 = \angle CAB : 2 = 20°$.

19. Tiesių CE ir AD sankirtą pažymėkime X, o tiesių BF ir DM sankirtą – Y. Kadangi $BM||KD$, tai egzistuoja toks $k > 0$, kad $YB = k \cdot BK$ ir $YM = k \cdot MD$. Kadangi $AE = BE$, $\angle EAX = \angle EBC$ (priešiniai kampai), $\angle AEX = \angle BEC$ (kryžminiai kampai), tai $\triangle AXE = \triangle BCE$ ir $AX = BC$. Pritaikykime Menelajo teoremą trikampiams ABF ir DFY bei tiesei CE:

$$1 = \frac{AE}{EB} \cdot \frac{BK}{KF} \cdot \frac{FX}{XA} = 1 \cdot \frac{BK}{KF} \cdot \frac{FA + AX}{XA} = \frac{BK}{KF} \cdot \frac{BC/2 + BC}{BC},$$

$$1 = \frac{DX}{XF} \cdot \frac{FK}{KY} \cdot \frac{YM}{MD} = \frac{DA + AX}{XA + AF} \cdot \frac{FK}{BK + k \cdot BK} \cdot \frac{k \cdot MD}{MD} =$$

$$= \frac{2BC}{BC + BC/2} \cdot \frac{KF}{BK} \cdot \frac{k}{k+1} \implies \frac{2}{3} = \frac{BK}{KF} = \frac{4}{3} \cdot \frac{k}{k+1} \implies k = 1.$$

Kadangi $BM||KD$ ir $YM = MD$, tai BM yra trikampio DKY vidurio linija ir $DK = 2BM$.

Trikampių DFK, BDK ir BDM plotus atitinkamai pažymėkime S_1, S_2 ir S_3. Reikia įrodyti, kad $S_1 = S_2 + S_3$. Trikampiai DFK ir BDK turi bendrą aukštinę iš viršūnės D, todėl $S_1 : S_2 = KF : BK = \frac{3}{2}$. Trikampių BDK ir BDM aukštinės atitinkamai iš viršūnės B ir iš viršūnės D lygios trapecijos $BMDK$ aukštinei, todėl $S_2 : S_3 = DK : BM = 2$. Vadinasi, $S_2 + S_3 = \frac{3S_2}{2} = S_1$. Tai ir reikėjo įrodyti.

20. Trikampio ABC aukštinių iš viršūnių A ir B pagrindus atitinkamai pažymėkime A_1 ir B_1. Remiantis Simedianos lema, $\angle ACS = \angle BCM$. Statieji trikampiai CB_1S_2 ir CA_1M_1 yra panašūs, ir $\angle CS_2M_2 = \angle CM_1S_1$.

Tiesės per tašką C, statmenos tiesei CM, sankirtas su tiesėmis per taškus A ir B, lygiagrečiomis su tiese CM, atitinkamai pažymėkime X ir Y. Kadangi $AM = BM$, tai $CX = CY$ (Talio teorema). Tiesės XY sankirtas su tiesėmis AH ir BH atitinkamai pažymėkime A_2 ir B_2. Kadangi $\angle AXB_2 = \angle AB_1B_2$, $\angle AA_1B = \angle AB_1B$, $\angle BA_1A_2 = \angle BYA_2$, tai keturkampiai AB_1XB_2, ABA_1B_1, BA_1YA_2 yra įbrėžtiniai. Todėl

$$CX \cdot CB_2 = CB_1 \cdot CA = CA_1 \cdot CB = CY \cdot CA_2 \implies CA_2 = CB_2.$$

Tiesė CM yra atkarpos A_2B_2 vidurio statmuo, $\angle CM_1B_2 = \angle CM_1A_2 = \angle CS_2B_2$, o keturkampis $CB_2M_1S_2$ yra įbrėžtinis. Tada $\angle M_1S_2M_2 = \angle M_1CB_2 = 90°$, ir M_1S_2 yra trikampio HM_1M_2 aukštinė. Analogiškai, M_2S_1 yra trikampio HM_1M_2 aukštinė.