11-osios matematinės varžybos
Lietuvos Didžiosios Kunigaikštystės garbei

Atsakymai, sprendimai

`Parengė Aivaras Novikas`

1. Kadangi $\sqrt{xyz}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{xyz}\cdot(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=$ $=(\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{x})+(\sqrt{\frac{zx}{y}}+\sqrt{y})+(\sqrt{\frac{xy}{z}}+\sqrt{z})$, tai pakanka įrodyti nelygybes
$$\sqrt{x+yz}\geqslant\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{x},\quad \sqrt{y+zx}\geqslant\sqrt{\frac{zx}{y}}+\sqrt{y},\quad \sqrt{z+xy}\geqslant\sqrt{\frac{xy}{z}}+\sqrt{z}.$$
Kadangi $x,y,z>0$, tai pirmąją iš jų galime pakelti kvadratu:
$$x+yz\geqslant\frac{yz}{x}+2\sqrt{yz}+x\iff yz\geqslant\frac{yz}{x}+2\sqrt{yz}=$$
$$=yz\left(1-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)+2\sqrt{yz}=yz-y-z+2\sqrt{yz}\iff y+z-2\sqrt{yz}\geqslant 0.$$
Pastaroji nelygybė teisinga, nes $y+z-2\sqrt{yz}=(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2$. Kitos dvi iš trijų nelygybių įrodomos analogiškai.

2. Ats. 20.

Kad ir kokį lentelės nuspalvinimą P beturėtume, kiekvieną lentelės eilutę visada galima padalyti į stačiakampius taip, kad juose visuose būtų po lygiai du juodus langelius, išskyrus galbūt dešiniausiąjį iš jų, kuriame gali būti ir lygiai vienas juodas langelis. Todėl $f(P)\leqslant 20$ kiekvienam P.

Įsitikinkime, kad lygybė $f(P)=20$ yra įmanoma. Tam pasirinkime tokį nudažymą P_0: juodai nudažykime vieną iš lentelės pagrindinių įstrižainių, išskyrus du kampinius lentelės langelius, ir dvi gretimas įstrižaines po 19 langelių, o likusius langelius nudažykime baltai. Reikia įrodyti, kad $f(P_0)\geqslant 20$.

Pagrindinėje įstrižainėje yra 18 juodų langelių, kuriuos pažymėkime A. Likusius $2\cdot 19=38$ juodus langelius pažymėkime B. Tarkime, kad gautoji nuspalvinta lentelė taip padalyta į stačiakampius, kad kiekviename stačiakampyje yra daugiausiai po 2 juodus langelius. Jei du A langeliai arba du B langeliai priklauso vienam stačiakampiui, tai jam atitinkamai priklauso ir bent vienas B langelis arba A langelis. Tai prieštarauja sąlygai, kad kiekviename stačiakampyje juodų langelių yra ne daugiau nei du. Todėl jei stačiakampyje yra du juodi langeliai, tai jie turi būti A langelis ir B langelis. Tokių stačiakampių yra ne daugiau nei A langelių (18). Vadinasi, mažiausiai $38 - 18 = 20$ B langelių priklauso stačiakampiams, kuriuose atitinkamas B langelis vienintelis yra juodas, ir $f(P_0) \geqslant 20$.

3. Trikampio ABC kampus A, B, C pažymėkime α, β, γ, o jo apibrėžtinio apskritimo spindulį – R. Atkarpų AC ir CH vidurio taškus atitinkamai pažymėkime M ir N. Kadangi $\angle AOB = 2\gamma$ ir $AO = BO$, tai $\angle OAB = 90° - \gamma$, o atstumas d nuo taško O iki tiesės AB lygus $OA \sin \angle OAB = R \cos \gamma$. Trikampio ACH kampai lygūs $90° - \alpha$, $90° - \gamma$ ir $\alpha + \gamma = 180° - \beta$. Pritaikykime jam Sinusų teoremą:
$$CH = AC \cdot \frac{\sin(90° - \gamma)}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{AC}{\sin \beta} \cdot \cos \gamma = 2R \cos \gamma \implies$$
$HN = CH/2 = d$. Kadangi atkarpa HN yra statmuo, nuleistas į tiesę XY, tai pakanka įrodyti, kad atstumas nuo taško O iki tiesės XY lygus $HN = d$, t. y. kad taškas O yra per vidurį tarp lygiagrečių tiesių XY ir AB.

Kadangi $\angle AOC = 2\beta$ ir $AO = CO$, tai
$$\angle OCA = 90° - \beta = \angle BCH \implies$$
$$\angle OCY = \angle MCN, \quad CN : CY = \sin(90° - \beta) = CM : CO \implies$$
$$\triangle CYO \sim \triangle CNM \implies \angle CYO = \angle CNM = \angle CHA = 180° - \beta.$$
Čia priešpaskutinė lygybė išplaukia iš to, kad atkarpa MN yra trikampio ACH vidurio linija. Vadinasi, $\angle QYB = 180° - \angle CYO = \beta = \angle QBY$ ir $QB = QY$. Analogiškai $PA = PX$, ir tada $AB + XY = XP + YQ = PA + QB = AB + QP$. Todėl $XY = QP$. Šios atkarpos yra ir lygiagrečios, todėl keturkampis $XYPQ$ yra lygiagretainis, o jo įsitrižainių sankirtos taškas O yra per vidurį tarp jo kraštinių XY ir PQ. Tai ir reikėjo įrodyti.

4. Ats. $(13, 3), (7, 5), (5, 11)$.

Pažymėkime $a = \sqrt{p^2 + 5pq + 4q^2} > 0$. Tada
$$pq = a^2 - (p + 2q)^2 = (a - p - 2q)(a + p + 2q).$$

Skaičius pq turi 8 daliklius: $\pm 1, \pm p, \pm q, \pm pq$. Kadangi $a+p+2q > 1, p, q$, tai $a + p + 2q = pq$, $a - (p + 2q) = 1$ ir

$$pq-1 = 2(p+2q) \iff (p-4)(q-2) = 9 \implies q-2 = \pm 1, \pm 3, \pm 9 \implies$$

$q = 3, 5, 11$ bei atitinkamai $p = 13, 7, 5$. Visos trys gautos pirminių skaičių poros tenkina uždavinio sąlygą (atitinkamai $a = 20, 18, 28$).