PASVALIO KRAŠTO
21-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2019 m. lapkričio 22 d.

UŽDAVINIAI
jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Šachmatų turnyre dalyvavo studentai ir dėstytojai. Kiekvienas dalyvis žaidė po 1 kartą su kiekvienu kitu turnyro dalyviu. Už laimėtą partiją skiriamas 1 taškas, už lygiąsias – 0,5 taško, o už pralaimėtą – 0 taškų. Dėstytojai sudarė 25 % turnyro dalyvių skaičiaus, o studentai surinko 1,2 karto daugiau taškų negu dėstytojai. Kiek studentų ir kiek dėstytojų dalyvavo šiame turnyre?

2. Jonas lentoje užrašė skaičius 10000^{10000}, 20000^{20000}, 30000^{30000}, ..., 90000^{90000}, 100000^{100000}. Ėjimo metu leidžiama nutrinti bet kurį lentoje užrašytą skaičių x ir vietoj jo užrašyti skaičių $\sqrt{x}$. Naujasis skaičius $\sqrt{x}$ turi būti sveikasis. Po kurio laiko Jonas nebegalėjo atlikti jokio ėjimo. Keliais nuliais baigiasi gautųjų 10 skaičių sandauga? Koks yra paskutinis nenulinis tos sandaugos skaitmuo?

3. Begalinė seka $a_1, a_2, a_3, \ldots$ apibrėžiama taip: $a_1 = 1$, o a_{n+1}, kai $n = 1, 2, 3, \ldots$, yra toks mažiausias natūralusis skaičius, kad skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ mažiausias bendrasis kartotinis yra didesnis už skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mažiausią bendrą kartotinį. Išvardykite visus dviženklius skaičius, priklau–sančius sekai.

4. Teigiami realieji skaičiai a ir b tenkina sąlygą $a + b = 6$. Kokia yra mažiausia sandaugos $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)$ reikšmė?

5. Realiųjų skaičių pora $(x; y)$ tenkina lygybę $x + y = 12$ ir lygybę $x^3 + y^3 = 36$. Raskite $x^2 + y^2$.

6. Penki moksleiviai sėdi prie apskrito stalo. Kiekvienas sugalvoja skaičių ir pasako jį tyliai kaimynams, o tada apskaičiuoja sužinotų skaičių vidurkį ir garsiai paskelbia.

Vieno tokio žaidimo metu pagal laikrodžio rodyklę buvo paskelbti skaičiai 1, 2, 3, 4 ir 5. Kokį skaičių sugalvojo moksleivis, kuris paskelbė skaičių 4?

7. Seka $x_1, x_2, x_3, \ldots$ nusakoma taip:

$$x_1 = 2017,\ \ x_2 = 2018,\ \ x_3 = -2019,$$
$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2} + x_{n-3} + n,\ \text{kai}\ n > 3.$$

Raskite sumą $x_8 + x_{10}$.

8. Realiųjų skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *Cezario suma* vadinamas skaičius

$$\frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n};\ \text{čia}\ S_1 = a_1,\ \ S_m = a_1 + \ldots + a_m,\ \ m = 2, \ldots, n.$$

Raskite skaičių $1, a_1, a_2, \ldots, a_{99}$ Cezario sumą, jeigu skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$ Cezario suma lygi 100.

9. Taškas K yra lygiašonio trikampio ABC, $AC = BC$, aukštinės CD vidurio taškas, tiesė BK kerta kraštinę AC taške E. Raskite santykį $AE : EC$.

10. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinė AB ir įstrižainė BD yra statmenos, $AB = a$, $AD = b$. Raskite įstrižainės AC ilgį.

PASVALIO KRAŠTO
21-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2019 m. lapkričio 22 d.

UŽDAVINIAI
vyresniųjų klasių mokiniams

1. Mieste į kiekvieną sankryžą sueina 3 gatvės. Kiekviena gatvė nudažyta viena iš trijų spalvų taip, kad į kiekvieną sankryžą sueitų visų trijų spalvų gatvės.

Iš miesto išeina 3 gatvės. Įrodykite, kad jos yra skirtingų spalvų.

2. Parabolės lygties $y = ax^2 + 33x = x(ax+33)$ koeficientas a yra sveikasis skaičius. Žinoma, kad jei $(x; y)$, $x \in \mathbf{N}$, $y \in \mathbf{N}$, yra šios parabolės taškas, tai y yra pirminis skaičius. Raskite skaičių a.

3. Žinoma, kad skaičiai a, b yra natūralieji, o skaičius $p < 10000$ yra pirminis. Lygtis $x^2 - p \cdot 2^a x + 2^b = 0$ turi du skirtingus natūraliuosius sprendinius x. Raskite visas galimas skai–čiaus p reikšmes.

4. Šachmatų turnyre dalyvavo studentai ir dėstytojai. Kiekvienas dalyvis žaidė po 1 kartą su kiekvienu kitu turnyro dalyviu. Už laimėtą partiją skiriamas 1 taškas, už lygiąsias – 0,5 taško, o už pralaimėtą – 0 taškų.

Dėstytojai sudarė 25 % turnyro dalyvių skaičiaus, o studentai surinko 1,2 karto daugiau taškų negu dėstytojai. Kiek studentų ir kiek dėstytojų dalyvavo šiame turnyre?

5. Natūraliųjų skaičių sekoje $a_1, a_2, ..., a_{25}$ bet kurių dviejų gretimų skaičių suma yra arba 100, arba 101. Kiek yra tokių sekų, kur $a_1 = 1$, $a_{25} = 12$?

6. Raskite $r^3 + \frac{1}{r^3}$, jei $\sqrt[3]{r} + \frac{1}{\sqrt[3]{r}} = 3.$

7. Lentoje yra užrašyti skaičiai 1, 2, 3, …, 2019. Iš pradžių pasirenkami bet kurie du skaičiai, sakykim, x ir y ir vietoj jų užrašomas skirtumo modulis $|x - y|$. Pavyzdžiui, 5 ir 1000 keičiami skaičiumi $|5 - 1000| = 995$. Tada vėl pasirenkami bet kurie du skaičiai ir jie keičiami skirtumo moduliu. Po 2018 žingsnių lentoje lieka tik vienas skaičius. Įrodykite, kad jis yra lyginis.

8. Raskite visas natūraliųjų skaičių poras $(m; n)$, kurios tenkina lygybę $mn = 12m + 14n + 1.$

9. Atkarpa CH yra trikampio ABC aukštinė, taškas M yra kraštinės AC vidurio taškas. Raskite kampo BAC didumą, jei $AM = AH$.

10. Taisyklingojo aštuonkampio $ABCDEFGH$ įstrižainės DG ir EH susikerta taške Q, atkarpa BP yra trikampio ABD aukštinė. Raskite trikampių GQH ir APB plotų santykį.