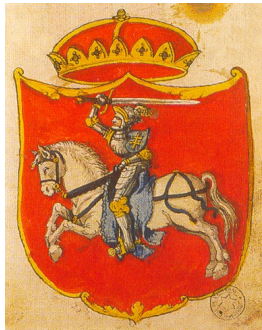


**12-osios matematinės varžybos
Lietuvos Didžiosios Kunigaikštystės garbei**

2020 m. spalio 3 d.



1. Realiųjų skaičių aibė žymima \mathbb{R} . Nustatykite visas funkcijas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kurioms lygybė

$$f(xf(y) - yf(x)) = f(xy) - xy$$

teisinga su visais $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Matlandijoje yra 100 miestų. Kiekvienas kelias Matlandijoje jungia du miestus, neina per joki kitą miestą ir nesudaro kryžkelių su kitais keliais (nors keliai gali tuneliais eiti vieni po kitais). Važiuojant Matlandijos keliais, iš kiekvieno miesto įmanoma patekti į bet kurį kitą. Įrodykite, kad įmanoma taip suremontuoti kai kuriuos Matlandijos kelius, kad iš kiekvieno miesto eitų nelyginis skaičius suremontuotų kelių.
3. Apie smailųjį trikampį ABC apibrėžtas apskritimas Ω , kurio liestinės taškuose B ir C kertasi taške P . Iš taško P į tieses AB ir AC nuleisti statmenys kerta jas atitinkamai taškuose D ir E . Įrodykite, kad trikampio ADE aukštinės kertasi atkarpos BC vidurio taške.
4. Sveikąjį skaičių n vadinsime *mielu*, jei jį galima užrašyti pavidalu

$$n = a^2 + b^3 + c^3 + d^5,$$

kur a, b, c ir d yra sveikieji skaičiai.

- a) Nustatykite, ar skaičius 2020 mielas.
b) Raskite visus mielus sveikuosius skaičius.