12-osios matematinės varžybos
Lietuvos Didžiosios Kunigaikštystės garbei

Atsakymai, sprendimai

Parengė Aivaras Novikas

1. Ats. $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, ir $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Duotojoje lygtyje įrašykime $y = 0$:

$$f(xf(0)) = f(0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Jei $f(0) \neq 0$, tai $z = xf(0)$ gali įgyti bet kurią realiąją reikšmę, todėl $f(z) = f(0)$ visiems $z \in \mathbb{R}$. Tada

$$f(0) = f(1 \cdot f(1) - 1 \cdot f(1)) = f(1) - 1 = f(0) - 1, \qquad 0 = -1.$$

Vadinasi, $f(0) = 0$.

Duotojoje lygtyje įrašykime $y = x$:

$$f(0) = f(x^2) - x^2, \qquad f(x^2) = x^2, \text{ kai } x \in \mathbb{R}.$$

Taigi $f(z) = z$ visiems $z \geqslant 0$.

Duotojoje lygtyje imkime bet kokius neigiamus skaičius x, y:

$$f(xf(y) - yf(x)) = f(xy) - xy = xy - xy = 0.$$

Jei $xf(y) - yf(x) > 0$, tai $0 = f(xf(y) - yf(x)) = xf(y) - yf(x) > 0$. Vadinasi, $xf(y) - yf(x) \leqslant 0$ bet kuriems $x, y < 0$. Tačiau tada taip pat $yf(x) - xf(y) \leqslant 0$ (sukeičiame x ir y vietomis). Taigi $xf(y) - yf(x) = 0$ bet kuriems $x, y < 0$, ir

$$xf(y) = yf(x), \qquad \frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}, \quad x, y < 0.$$

Funkcija $\frac{f(x)}{x}$, $x < 0$, yra konstanta, t. y. egzistuoja tokia konstanta c, kad $f(x) = cx$ visiems $x < 0$.

Duotojoje lygtyje imkime bet kokius $x < 0$ ir $y > 0$:

$$f(xy - cxy) = cxy - xy.$$

Nagrinėkime du atvejus.

1) Tarkime, kad $c \geqslant 1$. Tada $xy - cxy = (1 - c)xy \geqslant 0$, $cxy - xy = f(xy - cxy) = xy - cxy$, $cxy = xy$, $c = 1$. Tada $f(x) = x$ visiems $x \in \mathbb{R}$. Lengva patikrinti, kad ši funkcija tenkina uždavinio sąlygą.

2) Tarkime, kad $c < 1$. Tada $xy - cxy = (1-c)xy < 0$,

$$cxy - xy = f(xy - cxy) = c(xy - cxy) = cxy - c^2xy,$$

$$c^2xy = xy, \qquad c^2 = 1, \qquad c = -1.$$

Tada $f(x) = |x|$ visiems $x \in \mathbb{R}$. Reikia patikrinti, kad ši funkcija tenkina uždavinio sąlygą, t. y. kad

$$|x|y| - y|x|| = |xy| - xy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Tam pakanka išnagrinėti keturias galimybes: kai $x, y \geqslant 0$; kai $x, y < 0$; kai $x \geqslant 0$, $y < 0$; kai $x < 0$, $y \geqslant 0$. Pavyzdžiui, pastaruoju atveju

$$|x|y| - y|x|| = |xy + xy| = 2|xy| = |xy| + |xy| = |xy| - xy.$$

Kitos trys galimybės nagrinėjamos analogiškai.

2. Pradinė remontuojamų kelių aibė A_0 tuščia. Keiskime ją pagal tokį algoritmą, atlikdami ėjimus.

   Tarkime, kad po n ėjimų turime remontuojamų kelių aibę A_n. Tarkime, kad egzistuoja tokie du miestai M ir N, iš kurių išeina po lyginį skaičių remontuojamų kelių. Ėjimo metu raskime maršrutą iš M į N, tada to maršruto kelius, priklausančius aibei A_n, iš jos išmeskime, o maršruto kelius, aibei A_n nepriklausančius, į ją įdėkime. Taip gauname naują remontuojamų kelių aibę A_{n+1}. Pastebėkime, kad bet kuriam miestui, išskyrus M ir N, iš jo išeinančių remontuojamų kelių skaičiaus lyginumas nepakinta, o miestams M ir N tas skaičius iš lyginio tampa nelyginis. Vadinasi, miestų, iš kurių išeina po nelyginį skaičių remontuojamų kelių, kiekis a padidėja 2.

   Jei reikiami du miestai M ir N neegzistuoja, ėjimo jau nebeatliekame. Bet jie egzistuoja, kol $100 - a \geqslant 2$. Pradžioje $a = 0$. Todėl nurodytą ėjimą galėsime atlikti 50 kartų, gaudami $a = 2, 4, 6, \ldots, 98, 100$. Pasirinkę remontuojamų kelių aibę A_{50}, turėsime $a = 100$, t. y. iš kiekvieno Matlandijos miesto išeis nelyginis skaičius remontuojamų kelių. Tai ir reikėjo įrodyti.

3. Atkarpos BC vidurio tašką pažymėkime M. Apskritimo Ω liestinės iš taško P liečia Ω taškuose B ir C, todėl $PB = PC$, trikampis PBC lygiašonis, o šio trikampio pusiaukraštinė PM kartu yra ir aukštinė.

Kadangi kampai CMP ir CEP statieji, tai taškai C, E, P, M priklauso vienam apskritimui.

Turime

$$\angle BAC + \angle AEM = \angle MCP + \angle AEM \quad (PC \text{ liečia } \Omega) =$$

$$= \angle MEP + \angle AEM \text{ (keturkampis } CEPM \text{ įbrėžtinis)} = \angle CEP = 90^\circ.$$

Vadinasi, tiesės AB ir EM yra statmenos, o trikampio ADE aukštinė iš viršūnės E eina per M. Analogiškai įrodoma, kad trikampio ADE aukštinė iš viršūnės D eina per M. Taigi M yra trikampio ADE aukštinių sankirta. Tai ir reikėjo įrodyti.

4. Ats. a) Skaičius 2020 yra mielas; b) visi sveikieji skaičiai yra mieli.

a) Skaičius 2020 yra mielas, nes, pavyzdžiui,

$$2020 = 4 - 8 + 1000 + 1024 = 2^2 + (-2)^3 + 10^3 + 4^5.$$

b) Nagrinėkime bet kurį sveikąjį skaičių n. Jį galima užrašyti pavidalu $3k + r$, kur $k \in \mathbb{Z}$, $r \in \{0, 1, 2\}$. Pastebėkime, kad

$$(3k + 8)^2 + (k + 1)^3 + (-k - 4)^3 = 3k + 1.$$

Imdami $a = 3k + 8$, $b = k + 1$, $c = -k - 4$ ir $d = r - 1 \in \{-1, 0, 1\}$, gauname

$$a^2 + b^3 + c^3 + d^5 = 3k + 1 + (r - 1)^5 = 3k + 1 + (r - 1) = 3k + r = n.$$

Vadinasi, kiekviena sveikoji n reikšmė yra miela.