LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Jaunajam matematikui

11

2008–2010 metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Vilnius, 2016

Leidinio sudarytojai:
Antanas APYNIS
Edmundas MAZĖTIS
Eugenijus STANKUS
Juozas ŠINKŪNAS

Leidinį maketavo Kristina LYNDIENĖ

TURINYS

PRATARMĖ

Šioje vienuoliktojoje Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos knygelėje ,,Jaunajam matematikui“ yra pateikta 2008–2010 mokslo metais nagrinėtų temų metodinė medžiaga, užduotys LJMM klausytojams ir jų sprendimai.

Knygelės turinį sudaro šios temos: kvadratinės lygtys tekstiniuose uždaviniuose (E. Tumėnaitė), Bezu teorema (A. Apynis); masių centras ir jo taikymas (J. Šinkūnas); lyginiai ir jų taikymas (E. Stankus); funkcinės lygtys (A. Apynis); trigonometrijos taikymas geometrijoje (E. Mazėtis); iškilosios funkcijos ir nelygybės (J. Šinkūnas); priklausomi ir nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai (E. Stankus). Skaitytojas taip pat ras 2008 metų stojamąją užduotį ir jos sprendimą bei 2010 metų baigiamosios užduoties pavyzdį.

Kad būtų lengviau naudotis knygelėmis ,,Jaunajam matematikui“, šio leidinio paskutiniuose puslapiuose yra įdėtas ankstesnių dešimties LJMM mokslo metų temų sąrašas.

Antanas Apynis
Edmundas Mazėtis
Eugenijus Stankus
Juozas Šinkūnas

Metodinė medžiaga ir užduotys

STOJAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Raskite natūralųjį skaičių, kurį sudauginus su skaičiumi, užrašytu atvirkščia skaitmenų tvarka, gaunamas skaičius 78 445.

2. Duonoje yra 40 % vandens, o šios duonos džiūvėsiuose – 20 % vandens. Keliais procentais sumažėja duonos masė ją džiovinant? Kiek kilogramų duonos reikia sudžiovinti, kad gautume devynis kilogramus džiūvėsių?

3. Akcinė bendrovė parduoda 1000 akcijų. Ji nustatė 10 % nuolaidą kiekvienai penktai parduodamai akcijai ir 25 % nuolaidą kiek–vienai tryliktai parduodamai akcijai. Jeigu akcijai tenka abi nuolaidos, tai taikoma didesnioji nuolaida. Apskaičiuokite, kokią pinigų sumą gavo bendrovė, pardavusi akcijas, jeigu vienos akcijos kaina 1000 Lt.

4. Pusapskritimis, kurio skersmuo yra stačiojo trikampio *ABC* $(\angle C = 90^\circ)$ didesnysis statinis *AC*, kerta trikampio įžambinę taške *D*. Apskaičiuokite pusapskritimio ilgį, jeigu trikampio mažesnysis statinis lygus 30, o styga *CD* lygi 24.

5. Kubo viršūnės nupjautos taip, kad likusios kubo sienų dalys yra taisyklingieji aštuonkampiai. Raskite likusios kubo dalies tūrį, jeigu kubo briauna lygi *a*.

6. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 - xy + 5y = 1, \\ x^2 + 3y^2 - xy - 4y = -1. \end{cases}$$

7. Raskite visas natūraliųjų skaičių *x* ir *y* poras $(x;\ y)$, kurioms esant galioja lygybė

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + 6 = 0.$$

8. Raskite visas natūraliųjų skaičių poras, kurias sudarančių skaičių bendras mažiausias kartotinis yra 2496, o bendras didžiausias daliklis 24.

9. Iš natūraliųjų skaičių 1, 2, 3, ..., 100 sudarytos visos galimos poros $(m; n)$, $m < n$. Kiek yra porų, kurių skaičių sandauga dalijasi iš 3?

10. Šachmatų turnyre kiekvienas žaidėjas žaidžia po vieną partiją su likusiais turnyro dalyviais. Du žaidėjai, sužaidę po 5 partijas, pasitraukė iš turnyro. Todėl turnyre buvo sužaistos tik 38 partijos. Ar šie du žaidėjai žaidė tarpusavyje?

I. KVADRATINĖS LYGTYS TEKSTINIUOSE UŽDAVINIUOSE

Erika Tumėnaitė
(Panevėžio Juozo Balčikonio gimnazija)

Kvadratinėmis lygtimis vadinamos lygtys, kurių bendroji išraiška yra $ax^2+bx+c=0$; čia x yra kintamasis, o realieji skaičiai a, b ir c – *lygties koeficientai* (skaičius c kartais dar vadinamas *laisvuoju nariu*).

Atsižvelgiant į koeficientų reikšmes, kvadratinės lygtys skirstomos į *pilnąsias* (kai a, b, c – nelygūs nuliui skaičiai) ir *nepilnąsias* (kai $a\neq 0$, o b arba c lygūs nuliui).

Prisiminkime pilnosios kvadratinės lygties sprendimą.

Kvadratinės lygties $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) diskriminantas yra $D=b^2-4ac$.

Kai $D>0$, lygtis turi du skirtingus realiuosius sprendinius:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \text{ ir } x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Kai $D=0$, lygtis turi kartotinį sprendinį $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.

Kai $D<0$, lygtis realiųjų sprendinių neturi.

Tekstiniais uždaviniais vadinami tokie uždaviniai, kuriuose matematinė problema formuluojama žodžiais aprašant situaciją bei sąsajas tarp žinomų ir norimų sužinoti dydžių.

Sprendžiant daugelį matematikos ar technikos tekstinių uždavinių, reikia sudaryti kvadratines lygtis arba trupmenines lygtis, kurios pakeičiamos kvadratinėmis.

Pirmiausia reikia labai atidžiai perskaityti uždavinio sąlygą ir sudaryti matematinį modelį. Išsprendus uždavinį reikia išanalizuoti, ar gautieji sprendiniai tenkina uždavinio sąlygą. Visus mokyklinius tekstinius uždavinius galima suskirstyti į tam tikras grupes. Pavyzdžiui, judėjimo, mišinių, darbo, lydinių, geometrinio turinio ir kt.

Išspręsime keletą tokių uždavinių pavyzdžių.

1 pavyzdys. Konferencijos dalyviai pasisveikino paspausdami vienas kitam rankas. Kažkas suskaičiavo, kad rankų paspaudimų buvo 66. Kiek žmonių dalyvavo konferencijoje?

Sprendimas. Kiekvienas iš x dalyvių pasisveikino $x-1$ kartų. Vadinasi, iš viso pasveikinimų buvo $x\cdot(x-1)$. Bet dviejų žmonių pasisveikinimą reikia laikyti vienu rankos paspaudimu. Todėl rankų paspaudimų skaičius yra $\frac{x\cdot(x-1)}{2}$. Sudarome lygtį $\frac{x\cdot(x-1)}{2}=66$. Ši kvadratinė lygtis turi du sprendinius: $x_1=-11$ (netinka), $x_2=12$.

Ats.: 12 dalyvių.

2 pavyzdys. Skrido bičių spiečius. Bitės, kurių skaičius lygus kvadratinei šakniai iš pusės visų bičių skaičiaus, nutūpė ant jazmino krūmo, už savęs paliko $\frac{8}{9}$ spiečiaus. Dar dvi bitės suko apie lotoso žiedą. Kiek iš viso bičių buvo spiečiuje?

Sprendimas. Bičių skaičių spiečiuje pažymėkime *x*. Pagal uždavinio sąlygą sudarome lygtį

$$\sqrt{\frac{x}{2}}+\frac{8}{9}x+2=x.$$

Pažymėję $y=\sqrt{\frac{x}{2}}$, gausime kvadratinę lygtį

$$2y^2-9y-18=0.$$

Jos sprendiniai yra: $y_1=-1{,}5$ (netinka), $y_2=6$. Taigi $x=2\cdot 6^2=72$.

Ats.: 72 bitės.

3 pavyzdys. 25 m per sekundę greičiu į viršų išmestas kamuolys. Po kelių sekundžių šis kamuolys bus 20 m aukštyje nuo žemės?

Sprendimas. Iš fizikos žinome, kad kūno pakilimo nuo žemės aukštis *h* skaičiuojamas pagal formulę

$$h=vt-\frac{gt^2}{2};$$

čia *v* yra mesto kūno greitis, *t* – laikas, o *g* laisvojo kritimo pagreitis (9,8 m/s^2).

Kad būtų lengviau skaičiuoti, imkime $g = 10$ m/s^2 (su 2 % paklaida).

Tada gausime lygtį $20 = 25t - \frac{10t^2}{2}$, o iš jos – lygtį $t^2 - 5t + 4 = 0$.
Iš sprendinių ($t_1 = 1,\ t_2 = 4$) matome, kad kamuolys du kartus pabuvoja 20 m aukštyje: pirmą kartą kildamas (po 1 sekundės), o antrą kartą – krisdamas žemyn (po 4 sekundžių).

Ats.: 1 s, 4 s.

4 pavyzdys. Apskritimu priešingomis kryptimis juda du kūnai. Pirmas juda pastoviu greičiu *v*, o antras juda su pagreičiu *a*. Tam tikru laiku abu kūnai yra taške *A* ir tuo momentu antro kūno greitis lygus nuliui. Nustatykime, po kurio laiko kūnai susitiks pirmą kartą, jei žinoma, kad antrą kartą jie susitiktų taške *A*.

Sprendimas. Pirmas kūnas per laiką *t* nueina kelią *vt*, o antras – kelią $\frac{at^2}{2}$. Jei *R* – apskritimo spindulys, tai pažymėję t_1 ir t_2 – kūnų pirmo ir antro susitikimo laiką, gausime lygčių sistemą

$$\begin{cases} vt_1 + \dfrac{at_1^2}{2} = 2\pi R, \\ vt_2 = \dfrac{at_2^2}{2} = 2\pi R. \end{cases}$$

Iš čia $t_2 = \frac{2v}{a}$, todėl $2\pi R = \frac{2v^2}{a}$. Vadinasi, t_1 galima rasti iš sistemos

$$\begin{cases} at_1^2 + 2vt_1 - \dfrac{4v^2}{a} = 0, \\ t_1 > 0. \end{cases}$$

Išsprendę ją, gauname, kad $t_1 = \frac{v}{a}(\sqrt{5} - 1)$.

Ats.: $\frac{v}{a}(\sqrt{5} - 1)$.

5 pavyzdys. Du pėstieji tuo pačiu metu išėjo vienas prieš kitą ir susitiko po 3 valandų. Per kiek laiko kiekvienas iš jų įveikė visą atstumą, jei pirmas atėjo į vietovę, iš kurios išėjo antras, 2,5 h vėliau negu antras atėjo į vietovę, iš kurios išėjo pirmas.

Sprendimas. Atstumą tarp vietovių pažymėkime s. Jei pirmas visą atstumą įveikė per x valandų, tai antras per $(x-2{,}5)$ valandų. Sudarome lygtį $\left(\frac{s}{x-2{,}5}+\frac{s}{x}\right)\cdot 3=s$. Pertvarkę gauname kvadratinę lygtį $2x^2-17x+15=0$, turinčią du sprendinius: $x_1=1$, $x_2=7{,}5$. Pagal uždavinio sąlygą turi būti $x>2{,}5$; todėl $x=1$ netinka.

Ats.: 7,5 h, 5 h.

6 pavyzdys. Sumaišius du sieros tirpalus gauta 10 kg naujo sieros tirpalo. Pirmame tirpale buvo 1 kg, o antrame – 0,3 kg grynos sieros. Nustatykime abiejų tirpalų mases, jei žinoma, kad pirmame tirpale yra 20 % grynos sieros daugiau negu antrame.

Sprendimas. Tegu x – pirmo tirpalo masė, o y – antro tirpalo masė. Tada $x+y=10$.

Pirmame tirpale grynos sieros yra $\frac{1}{x}\cdot 100$ procentų, o antrame tirpale – $\frac{0{,}3}{y}\cdot 100$ procentų. Sprendžiame lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y=10, \\ \frac{100}{x}-\frac{30}{y}=20 \end{cases}$$

ir gauname:

$$\begin{cases} y=10-x, \\ \frac{100}{x}-\frac{30}{10-x}=20; \end{cases}$$

$$100(10-x)-30x=20(10-x)\,x,$$

$$20x^2-330x+1000=0,$$

$$2x^2-33x+100=0,$$

$$x_1 = 12{,}5 \text{ (netinka)}, \ x_2 = 4.$$

Taigi $x = 4, \ y = 6$.

Ats.: 4 kg ir 6 kg.

7 pavyzdys. Dviejų teigiamų skaičių aritmetinis vidurkis lygus 25. Jis yra 10 vienetų didesnis už šių skaičių geometrinį vidurkį. Raskime tuos skaičius.

Sprendimas. Tegu x yra pirmas skaičius, o y – antras.

Kadangi skaičių x ir y aritmetinis vidurkis $\frac{x+y}{2}$ lygus 25, tai $y = 50 - x$.

Skaičių x ir $50 - x$ geometrinis vidurkis yra $\sqrt{x(50-x)}$. Pagal sąlygą, $\sqrt{x(50-x)} = 15$. Spręsdami šią lygtį, gauname:

$$50x - x^2 = 225,$$

$$x^2 - 50x + 225 = 0; \ x_1 = 5, \ x_2 = 45.$$

Tada $y_1 = 45$, $y_2 = 5$.

Ats.: 5 ir 45.

8 pavyzdys. Miestai *A* ir *B* yra ant upės kranto. Miestas *B* žemiau negu miestas *A*. Devintą valandą ryto iš *A* į *B* buvo išplukdytas sielis, o iš *B* į *A* išplaukė valtis. Po 5 valandų juodu susitiko. Valtis, pasiekusi *A*, tuojau apsisuko ir grįžo į miestą *B*. Ir valtis, ir sielis atplaukė tuo pačiu metu. Ar suspėjo sielis ir valtis atplaukti į miestą *B* iki tos pačios dienos devintos valandos vakaro?

Sprendimas. Tegu $x \ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ yra valties greitis stovinčiame vandenyje, $y \ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ – upės tėkmės greitis, o atstumas tarp miestų *A* ir *B* yra *s* km.

Sudarome lygčių sistemą $\begin{cases} s = 5(x-y) + 5y, \\ \dfrac{s}{x-y} + \dfrac{s}{x+y} = \dfrac{s}{y}. \end{cases}$

Iš pirmos lygties randame $x = \frac{s}{5}$. Kadangi reikia rasti sielio (ir valties) plaukimo laiką $\frac{s}{y}$, tai antrą lygtį pertvarkome taip, kad gautume dydį $\frac{s}{y}$:

$$\frac{s}{x-y}+\frac{s}{x+y}=\frac{s}{y} \Rightarrow \frac{s}{\frac{s}{5}-y}+\frac{s}{\frac{s}{5}+y}=\frac{s}{y} \Rightarrow \frac{1}{\frac{s-5y}{5}}+\frac{1}{\frac{s+5y}{5}}=\frac{1}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{s-5y}+\frac{5}{s+5y}=\frac{1}{y} \Rightarrow s^2-10sy-25y^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{s}{y}\right)^2-10\left(\frac{s}{y}\right)-25=0 \Rightarrow \begin{cases} z=\frac{s}{y}, \\ z^2-10z-25=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=\frac{s}{y}, \\ z_1=5-5\sqrt{2} \text{ (netinka)}\ z_2=5+5\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{s}{y}=5+5\sqrt{2}.$$

Kadangi $5+5\sqrt{2}\approx 12{,}07$, tai $9+12{,}07=21{,}07>21$.

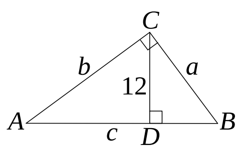
Ats.: Nesuspėjo.

10 pavyzdys. Stačiojo trikampio perimetras lygus 60 cm, o aukštinė, nubrėžta iš stačiojo kampo viršūnės į įžambinę, lygi 12 cm. Raskime šio trikampio kraštinių ilgius.

Sprendimas. Stačiojo trikampio *ABC* kraštinių ilgius pažymėkime *a*, *b* ir *c* (žr. pav.). Pagal sąlygą, $a+b+c=60$.

Trikampio *ABC* plotą *S* galima apskaičiuoti dvejopai:

$$S=\frac{1}{2}ab \text{ arba } S=\frac{1}{2}c\cdot 12.$$



Gauname lygybę $ab=12c$. Pagal Pitagoro teoremą, $a^2+b^2=c^2$.

Toliau sprendžiame trijų lygčių sistemą

$$\begin{cases} a+b+c=60, \\ ab=12c, \\ a^2+b^2=c^2 \end{cases}$$

ir gauname:

$$\begin{cases} a+b=60-c, \\ ab=12c, \\ a^2+b^2=c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+2ab+b^2=3600-120c+c^2, \\ ab=12c, \\ a^2+b^2=c^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c^2+24c=3600-120c+c^2, \\ ab=12c, \\ a^2+b^2=c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=25, \\ ab=300, \\ a+b=35. \end{cases}$$

Pagal Vijeto teoremą, *a* ir *b* yra kvadratinės lygties

$$x^2-35x+300=0$$

sprendiniai.

Gauname dvi a ir b reikšmių poras: $a=20$, $b=15$ ir $a=15$, $b=20$.

Atsakymas toks: trikampio *ABC* statinių ilgiai yra 15 cm ir 20 cm., o įžambinės ilgis 25 cm.

Ats.: 15 cm, 20 cm ir 25 cm.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Dvi valstietės kartu į turgų atnešė 100 kiaušinių (pirmoji mažiau už antrąją). Juos pardavusios, gavo vienodas pinigų sumas.

Grįždama namo, pirmoji valstietė tarė antrajai: „Aš tavo kiaušinius būčiau pardavusi už 15 pinigėlių“. Antroji atsakė: „O aš tavo kiaušinius būčiau pardavusi už $6\frac{2}{3}$ pinigėlių“. Kiek kiaušinių buvo atnešusi į turgų kiekviena valstietė?

2. Dviratininkas kiekvieną minutę nuvažiuoja 500 m mažiau nei motociklininkas, todėl 120 km kelyje jis užtrunka 2 valandomis ilgiau negu motociklininkas. Raskite dviratininko greitį.

3. Baseinas pripildomas dviem vamzdžiais Pirmuoju vamzdžiu 1 m^3 vandens pribėga 4 min. greičiau negu antruoju. Kiek kubinių metrų vandens pribėgs į baseiną antruoju vamzdžiu per 5 h, jei pirmuoju vamzdžiu per tą laiką pribėga 100 m^3 vandens daugiau.

4. Rankraštį verčia du vertėjai. Pirmąsias dvi valandas dirbo tik pirmas vertėjas, o po to šešias valandas jie dirbo kartu. Per šį laiką buvo išversta 80 % rankraščio. Kiek laiko reikėtų pirmajam vertėjui išversti visą rankraštį, jei žinoma, kad antrasis užtruktų keturiomis valandomis ilgiau?

5. Dviženklio skaičiaus skaitmenų aritmetinis vidurkis puse vieneto didesnis už jų geometrinį vidurkį, o skaitmenų suma lygi 5. Raskite tą skaičių.

6. Iš vieno taško tuo pačiu metu viena kryptimi startavo trys žiedine trasa lenktyniaujantys dviratininkai. Jų greičiai pastovūs. Važiuodamas penktą ratą, pirmasis dviratininkas pirmą kartą po starto pasivijo antrąjį taške, diametraliai priešingame starto taškui. Dar po pusvalandžio pirmasis dviratininkas antrą kartą aplenkė trečiąjį. Antrasis dviratininkas pirmą kartą pasivijo trečiąjį praėjus 3 valandoms po starto. Kiek ratų per valandą nuvažiuoja pirmasis dviratininkas, jei antrasis vienam ratui įveikti sugaišta ne mažiau kaip 20 minučių?

7. Pirklys pirko avių bei arklių ir sumokėjo 780 auksinų. Po to jis pardavė visus gyvulius – arklius po 73,6 auksino, o avis po 11 auksinų. Už kiekvieną arklį jis gavo 15 % pelno, o už kiekvieną avį tiek procentų pelno, kiek auksinų ji jam pačiam kainavo. Kiek arklių ir avių jis buvo pirkęs, jeigu bendras gyvulių skaičius mažesnis už 30? (1921 m. Panevėžio berniukų gimnazijos egzamino užduotis).

8. Keliu, kylančiu į kalną, iš punkto *A* į punktą *B*, esantį už 12 km, eina pėstysis pastoviu 6 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ greičiu. Tuo pačiu metu iš punkto *A* į punktą *B* išvažiavo autobusas. Nuvažiavęs į punktą *B* (greičiau negu per vieną valandą), autobusas pasuko atgal ir po 12 min. sutiko pėstįjį. Raskite autobuso greitį važiuojant į kalną, jei žinoma, kad jis du kartus mažesnis už greitį leidžiantis žemyn.

9. Keliantis paprastuoju liftu į 33 metrų aukštį ir sustojant du kartus po šešias sekundes, reikia tiek pat laiko, kaip ir keliantis greituoju liftu į 81 metro aukštį, bet sustojant tik vieną kartą septynioms sekundėms. Raskite greitojo lifto greitį, jei jis yra 1,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ didesnis už paprastojo lifto greitį.

10. Taškas M yra stačiojo kampo viduje. Jo atstumai iki kampo kraštinių yra 4 cm ir 8 cm. Tiesė, nubrėžta per tašką M, atkerta statųjį trikampį, kurio plotas lygus 100 cm^2. Raskite šio trikampio statinių ilgius.

II. BEZU TEOREMA

Antanas Apynis
(Vilniaus universitetas)

Studijuodami šią temą, susipažinsime su daugianario $P(x)$ dalumu iš dvinario $x-a$, su algebrinės lygties $P(x)=0$ racionaliaisiais ir iracionaliaisiais sprendiniais bei apytiksliu racionaliojo reiškinio $\frac{P(x)}{Q(x)}$ reikšmių skaičiavimu daugianarių $P(x)$ ir $Q(x)$ bendrų (realiųjų) šaknų aplinkose.

1. Daugianario $\boldsymbol{P(x)}$ dalumas iš dvinario $\boldsymbol{x-a}$. Čia nagrinėsime daugianarius $P(x)$, kuriuos galima užrašyti formule

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

kurioje koeficientai $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ yra kurie nors racionalieji skaičiai $(a_n \neq 0)$. Aukščiausias x laipsnio rodiklis n $(n \in \mathrm{N})$ yra vadinamas *daugianario* $P(x)$ *laipsniu*, o koeficientas a_0 dažnai vadinamas jo *laisvuoju nariu*.

Sakoma, kad n-tojo laipsnio daugianaris $P(x)$ dalijasi iš dvinario $x-a$ (a – kuris nors realusis skaičius), jeigu yra toks $(n-1)$-ojo laipsnio daugianaris

$$Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0, \; b_{n-1} \neq 0,$$

kuriam esant galioja lygybė

$$P(x) = (x-a)Q(x).$$

Daugianario $Q(x)$ paieška yra tam tikra problema; tačiau pakanka išmokti dalyti kampu ir jokių rūpesčių nebeliks. Štai tokios dalybos pavyzdys. Daugianarį

$$P(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 3$$

padalykime iš dvinario $x+3$:

$$\begin{array}{l|l} \underline{\ } x^3+5x^2+7x+3 & \underline{x+3} \\ \underline{x^3+3x^2} & x^2+2x+1 \\ \quad \underline{\ } 2x^2+7x+3 & \\ \quad \underline{2x^2+6x} & \\ \qquad \underline{\ } x+3 & \\ \qquad \underline{x+3} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Gavome nuliui lygią liekaną, todėl galima sakyti, kad galioja lygybė

$$x^3+5x^2+7x+3=(x+3)(x^2+2x+1).$$

Šios lygybės teisingumą lengva patikrinti dauginant dvinarį $x+3$ iš trinario x^2+2x+1. Rezultatas turi būti daugianaris x^3+5x^2+7x+3.

Nagrinėjant konkrečius pavyzdžius galima įsitikinti, kad tas pats daugianaris $P(x)$ dalijasi ne iš kiekvieno dvinario $x-a$. Pasirinkime $a=1$ ir dalykime $P(x)=x^3+5x^2+7x+3$ iš dvinario $x-1$:

$$\begin{array}{l|l} \underline{\ } x^3+5x^2+7x+3 & \underline{x-1\qquad\quad} \\ \underline{x^3-\ x^2} & x^2+6x+13 \\ \quad \underline{\ } 6x^2+7x+3 & \\ \quad \underline{6x^2-6x} & \\ \qquad \underline{\ } 13x+3 & \\ \qquad \underline{13x-13} & \\ \qquad\quad 16 & \end{array}$$

Dalybos liekana yra 16, todėl turime tokią $P(x)$ išraišką:

$$x^3+5x^2+7x+3=(x-1)(x^2+6x+13)+16.$$

Ar galima iš anksto (taigi nedalijant!) sužinoti, kokia bus $P(x)$ dalybos iš $x-a$ liekana?

Bezu teorema (Bezout Etienne, 1730–1783, prancūzų matematikas). *Dalijant daugianarį* $P(x)$ *iš dvinario* $x-a$, *liekana lygi* $P(a)$.

Teoremos įrodymą praleisime – jį galima rasti universiteto studentams skirtuose algebros vadovėliuose.

Žinome, kad realusis skaičius *a* yra vadinamas *daugianario* $P(x)$

šaknimi, arba lygties $P(x)=0$ *sprendiniu*, jeigu $P(a)=0$. Kita vertus, gavus $P(x)$ dalybos iš $x-a$ liekaną $P(a)$, lygią nuliui, galima tvirtinti, jog *a* yra $P(x)$ šaknis (lygties $P(x)=0$ sprendinys); tai aiškiai matyti iš lygybės $(x-a)Q(x)=0$.

Vadinasi, galima suformuluoti tokią **išvadą**: *n-tojo laipsnio daugianaris* $P(x)$ *dalijasi iš dvinario* $x-a$ *tada ir tik tada, kai a yra* $P(x)$ *šaknis (lygties* $P(x)=0$ *sprendinys).*

2. Racionalieji ir iracionalieji algebrinės lygties sprendiniai. Jei *n*-tojo laipsnio daugianario $P(x)$ koeficientai yra racionalieji skaičiai, tai lygtis $P(x)=0$ vadinama *n-tojo laipsnio algebrine lygtimi*. Pavyzdžiui, lygtis $\frac{2}{3}x^5+4x^2+\frac{3}{7}x+\frac{1}{4}=0$ yra 5-ojo laipsnio algebrinė lygtis. Aišku, kad kiekvieną algebrinę *n*-tojo laipsnio lygtį galima pakeisti ekvivalenčia to paties laipsnio lygtimi su sveikaisiais koeficientais – tereikia lygtį padauginti iš visų koeficientų vardiklių bendro mažiausio kartotinio.

Algebrinės lygties $P(x)=0$ realieji sprendiniai (sprendiniai, priklausantys realiųjų skaičių aibei) gali būti ir racionalieji, ir iracionalieji skaičiai. Pavyzdžiui, trečiojo laipsnio lygtis $x^3-3x^2-2x+6=0$ turi tris realiuosius sprendinius: 3, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$; vienas iš jų yra racionalusis, o kiti du – iracionalieji. Daugiau sprendinių ši lygtis neturi. Tai matyti iš daugianario $P(x)=x^3-3x^2-2x+6$ skaidinio:

$$P(x)=(x^3-3x^2)-(2x-6)=x^2(x-3)-2(x-3)=(x-3)(x^2-2)=$$
$$=(x-3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}).$$

Ar yra kokių nors požymių, rodančių, kokie galėtų būti konkrečios algebrinės lygties $P(x)=0$ realieji sprendiniai – racionalieji ar iracionalieji skaičiai? Vieną tokio pobūdžio požymį galima suformuluoti taip:

Jeigu daugianario

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

visi koeficientai yra sveikieji skaičiai, o jo racionalioji šaknis $\frac{p}{q}$ *(p, q –*

sveikieji skaičiai; $q \neq 0$*) yra nesuprastinama trupmena, tai p yra laisvojo nario* a_0 *daliklis, o q – koeficiento* a_n *daliklis.*

Sprendžiant algebrines lygtis $P(x) = 0$ labai praverčia pradinės analizės rezultatai. Nustačius, kad kuris nors racionalusis skaičius a yra jos sprendinys, daugianarį $P(x)$ galima padalyti iš $x - a$, o paskui nagrinėti žemesnio laipsnio lygtį. Ši lygtis taip pat gali turėti bent vieną racionalųjį sprendinį.

1 pavyzdys. Išspręskime ketvirtojo laipsnio lygtį
$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = 0. \qquad (1)$$

Sprendimas. Ši lygtis gali turėti tik tokius racionaliuosius sprendinius: ± 1; ± 2; ± 4. Patikrinti galima tiesiogiai skaičiuojant $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$ reikšmes $P(-1)$, $P(1)$, $P(-2)$, $P(2)$, $P(-4)$ ir $P(4)$. Gauname, kad $P(2) = 0$ ir $P(x) \neq 0$, kai $x \in \{-1; 1; -2; -4; 4\}$. Taigi (1) lygtis turi tik vieną racionalųjį sprendinį – skaičių 2. Padalykime $P(x)$ iš $x - 2$. Dalykime kampu:

$$\begin{array}{l|l}
\underline{\ } x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 & \underline{x - 2 \qquad\qquad} \\
\underline{x^4 - 2x^3} & x^3 - 2x^2 + x - 2 \\
\quad \underline{\ } -2x^3 + 5x^2 - 4x + 4 & \\
\quad \underline{-2x^3 + 4x^2} & \\
\qquad\quad \underline{\ } x^2 - 4x + 4 & \\
\qquad\quad \underline{x^2 - 2x} & \\
\qquad\qquad \underline{\ } -2x + 4 & \\
\qquad\qquad \underline{-2x + 4} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Matome, kad (1) lygtį galima pakeisti lygtimi
$$(x - 2)(x^3 - 2x^2 + x - 2) = 0.$$
Toliau sprendžiame lygtį
$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$$
ir matome, kad laisvojo nario daliklis 2 yra jos sprendinys (kartotinė

daugianario $P(x)$ šaknis). Vadinasi, daugianaris $Q(x)=x^3-2x^2+x-2$ dalijasi iš dvinario $x-2$. Gauname skaidinį $Q(x)=(x-2)(x^2+1)$. Kvadratinis dvinaris x^2+1 realiųjų šaknų neturi, todėl lygtis $Q(x)=0$ turi tik vieną realųjį sprendinį – skaičių 2.

Darome išvadą, kad (1) lygtis turi tik vieną realųjį sprendinį $(x=2)$.

2 pavyzdys. Nustatykime, ar lygtis

$$x^4-2x^3-2x^2+10x-15=0 \tag{2}$$

turi iracionaliųjų sprendinių.

Sprendimas. Pirmiausia patikrinkime, ar (2) lygtis turi racionaliųjų sprendinių. Tarp pretendentų yra tik šie sveikieji skaičiai (laisvojo nario dalikliai): ±1, ±3, ±5, ±15. Nė vienas iš jų netenkina lygties. Taigi (2) lygtis racionaliųjų sprendinių neturi. Tačiau tas nereiškia, kad ji turi nors vieną iracionalųjį sprendinį (nes lygtis gali neturėti nė vieno realiojo sprendinio).

Pabandykime išskaidyti daugianarį

$$P(x)=x^4-2x^3-2x^2+10x-15$$

grupuodami:

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^4-25)-(2x^3-10x)-(2x^2-10)=\\&=(x^2-5)(x^2+5)-2x(x^2-5)-2(x^2-5)=\\&=(x^2-5)(x^2+5-2x-2)=(x^2-5)(x^2-2x+3).\end{aligned}$$

Kvadratinis dvinaris x^2-5 turi dvi šaknis: $-\sqrt{5}$ ir $\sqrt{5}$, o kvadratinis trinaris x^2-2x+3 realiųjų šaknų neturi.

Vadinasi, (2) lygtis turi du iracionaliuosius sprendinius: $-\sqrt{2}$ ir $\sqrt{2}$.

3 pavyzdys. Nustatykime, ar skaičius $r=1+\sqrt{\sqrt{2}-1}$ yra racionalusis, ar iracionalusis.

Sprendimas. Pirmiausia sudarykime algebrinę lygtį $P(x)=0$ su sveikaisiais koeficientais, kurios vienas sprendinys būtų skaičius r, o paskui sugretinkime r su galimais pretendentais į šios lygties racionaliuosius sprendinius.

Aišku, kad $1+\sqrt{\sqrt{2}-1}$ yra tiesinės lygties $x-(1+\sqrt{\sqrt{2}-1})=0$ sprendinys. Tačiau jos laisvasis narys nėra sveikasis skaičius; todėl lygtį pertvarkykime:

$$\left(x-\left(1+\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)=0\right)\Rightarrow\left(x^2=\left(1+\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(x^2=2\sqrt{\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}\right)\Rightarrow\left(\left(x^2-\sqrt{2}\right)^2=\left(2\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(x^4-2\sqrt{2}x^2+2=4\sqrt{2}-4\right)\Rightarrow\left(x^4+6=2\left(x^2+2\right)\sqrt{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\left(x^4+6\right)^2=\left(2\left(x^2+2\right)\sqrt{2}\right)^2\right)\Rightarrow\left(x^8+12x^4+36=8\left(x^4+4x^2+4\right)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^8+4x^4-32x^2+4=0.$$

Skaičius $r=1+\sqrt{\sqrt{2}-1}$ yra aštuntojo laipsnio algebrinės lygties

$$x^8+4x^4-32x^2+4=0$$

sprendinys, o galimi šios lygties racionalieji sprendiniai yra tik šie sveikieji skaičiai: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4$.

Skaičius r nėra sveikasis, nes tikrai nepriklauso aibei {–1; 1; –2; 2; –4; 4}.

Išvada aiški – realusis skaičius $r=1+\sqrt{\sqrt{2}-1}$ yra iracionalusis skaičius.

3. Daugianarių dalybos taikymas racionaliųjų reiškinių apytikslėms reikšmėms rasti. Kintamojo x racionaliuoju (algebriniu) reiškiniu yra vadinamas reiškinys

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0};$$

čia m ir n – natūralieji skaičiai, $a_n\neq 0$, $b_m\neq 0$. Štai keli pavyzdžiai:

1) $\dfrac{5x+7}{8x^2+3x+1}$; 2) $\dfrac{x^3-27}{x^3-8}$; 3) $\dfrac{2x^7-4x^3+x+9}{4x^2+7}$.

Aišku, kad racionaliojo reiškinio apibrėžimo sritį sudaro tie realieji skaičiai *x*, su kuriais galioja nelygybė $Q(x) \neq 0$.

Racionaliojo reiškinio reikšmių skaičiavimas iš esmės niekuo nesiskiria nuo bet kurios kitos funkcijos reikšmių skaičiavimo – reikia vietoj kintamojo *x* įrašyti pasirinktą skaičių ir atlikti konkrečius matematinius veiksmus. Pasirinkime, pavyzdžiui, racionalųjį reiškinį

$$f(x) = \frac{x^3 - 7x^2 + 14x - 8}{x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 6x + 8}$$

ir apskaičiuokime jo reikšmes $f(0)$, $f(1)$ ir $f(-1)$. Gausime:

$$f(0) = \frac{0^3 - 7\cdot 0^2 + 14\cdot 0 - 8}{0^4 - 6\cdot 0^3 + 9\cdot 0^2 - 6\cdot 0 + 8} = \frac{-8}{8} = -1;$$

$$f(1) = \frac{1^3 - 7\cdot 1^2 + 14\cdot 1 - 8}{1^4 - 6\cdot 1^3 + 9\cdot 1^2 - 6\cdot 1 + 8} = \frac{1 - 7 + 14 - 8}{1 - 6 + 9 - 6 + 8} = \frac{0}{6} = 0;$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^3 - 7\cdot(-1)^2 + 14\cdot(-1) - 8}{(-1)^4 - 6\cdot(-1)^3 + 9\cdot(-1)^2 - 6\cdot(-1) + 8} = \frac{-1 + 7 - 14 - 8}{1 + 6 + 9 + 6 + 8} =$$

$$= \frac{-16}{30} = -\frac{8}{15}.$$

Pasirinkę $x = 2$ arba $x = 4$, gautume, kad abu daugianariai,

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$$

ir

$$Q(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 6x + 8,$$

įgyja lygias nuliui reikšmes: $P(2) = P(4) = 0$, $Q(2) = Q(4) = 0$. Žinoma, ir 2, ir 4 nepriklauso funkcijos $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ apibrėžimo sričiai; tačiau $Q(x) \neq 0$, kai $x \approx 2$, ir $Q(x) \neq 0$, kai $x \approx 4$. Pabandykime įvertinti (rasti) apytiksles reiškinio $f(x)$ reikšmes taškų $x = 2$ ir $x = 4$ aplinkose (taškuose, kurie mažai nutolę nuo $x = 2$ ir nuo $x = 4$).

Pradėkime nuo taško $x = 2$. Šio taško aplinkoje (kai $x \approx 2$, bet $x \neq 2$) gauname: $P(x) \approx 0$ ir $Q(x) \approx 0$. Aišku, kad $P(x) \neq 0$ ir $Q(x) \neq 0$, tačiau to per maža, kad galėtume pasakyti, koks šių dydžių santykis.

Kadangi 2 ir 4 yra daugianarių $P(x)$ ir $Q(x)$ šaknys, tai (pagal Bezu teoremą) jie dalijasi iš dvinarių $x-2$ bei $x-4$. Gausime:

$$f(x)=\frac{x^3-7x^2+14x-8}{x^4-6x^3+9x^2-6x+8}=\frac{\dfrac{x^3-7x^2+14x-8}{x-2}}{\dfrac{x^4-6x^3+9x^2-6x+8}{x-2}}=$$

$$=\frac{x^2-5x+4}{x^3-4x^2+x-4}\approx\frac{2^2-5\cdot 2+4}{2^3-4\cdot 2^2+2-4}=\frac{4-10+4}{8-16+2-4}=\frac{-2}{-10}=\frac{1}{5},$$

kai $x\approx 2$.

Analogiškai galima rasti apytikslę $f(x)$ reikšmę taško $x=4$ aplinkoje:

$$f(x)=\frac{x^3-7x^2+14x-8}{x^4-6x^3+9x^2-6x+8}=\frac{\dfrac{x^3-7x^2+14x-8}{x-4}}{\dfrac{x^4-6x^3+9x^2-6x+8}{x-4}}=\frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2+x-2}\approx$$

$$\approx\frac{4^2-3\cdot 4+12}{4^3-2\cdot 4^2+4-2}=\frac{16-12+2}{64-32+4-2}=\frac{3}{17},\text{ kai } x\approx 4 \quad (x\neq 4).$$

Matome, kad dalyba kartais yra labai veiksminga, kai reikia rasti apytiksles racionaliojo reiškinio $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ reikšmes taško a aplinkoje. Atkreipiame dėmesį į tai, kad šis būdas tinka tik tada, kai a yra abiejų daugianarių šaknis.

Skaičių $\dfrac{P(x)}{x-a}$ ir $\dfrac{Q(x)}{x-a}$ santykis išlieka toks pat, kaip ir skaičių $P(x)$ ir $Q(x)$ santykis (turima mintyje, kad $x\neq a$), bet trupmenų $\dfrac{P(x)}{x-a}$ ir $\dfrac{Q(x)}{x-a}$ moduliai (absoliučiosios reikšmės) žymiai padidėja, kai $-1<x-a<1$. Pavyzdyje matėme, kad taško $x=2$ aplinkoje buvo $P(x)\approx 0$ ir $Q(x)\approx 0$, o padaliję gavome: $\dfrac{P(x)}{x-2}=x^2-5x+4\approx -2$ ir

$\frac{Q(x)}{x-2} = x^3 - 4x^2 + x - 4 \approx -10.$ Šiame pakeitime ir slypi taikyto skaičiavimo būdo esmė.

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Išspręskite algebrinę lygtį $2x^3 + 3x^2 - 9x - 10 = 0$.

2. Raskite visus racionaliuosius algebrinės lygties $x^5 - x^3 - 8x^2 + 8 = 0$ sprendinius.

3. Nustatykite, ar algebrinė lygtis $x^3 + 4x^2 + 2x - 7 = 0$ turi nors vieną iracionalųjį sprendinį.

4. Raskite visus realiuosius algebrinės lygties $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 8x + 6 = 0$ sprendinius.

5. Raskite visas sveikąsias parametro m reikšmes, kurioms esant algebrinė lygtis

$$x^3 + (m+1)x^2 + (m^2 - 4)x + 2 = 0$$

turi nors vieną racionalųjį sprendinį.

6. Skaičiai 2 ir 3 yra lygties $2x^3 + mx^2 - 13x + n = 0$ sprendiniai. Raskite koeficientų m ir n reikšmes ir trečiąjį lygties sprendinį.

7. Sudarykite algebrinę lygtį su sveikaisiais koeficientais, kurios vienas realusis sprendinys būtų realusis skaičius $\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$. Pagal jos racionaliuosius sprendinius nustatykite, ar $\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$ yra racionalusis, ar iracionalusis skaičius.

8. Sudarykite algebrinę lygtį su sveikaisiais koeficientais, kurios du realieji sprendiniai būtų $\sqrt{2}$ ir $\sqrt{2} - 1$. Nustatykite, ar ši lygtis turi bent vieną racionalųjį sprendinį.

9. Nustatykite, kokia yra racionaliojo reiškinio

$$f(x)=\frac{x^5+2x^4+2x^2+7x+6}{2x^4+7x^3+4x^2-x+6}$$

apytikslė reikšmė taško $x=-2$ aplinkoje, t. y. kai kintamojo x reikšmės yra artimos skaičiui -2.

10. Raskite apytikslę racionaliojo reiškinio

$$g(x)=\frac{3x^4-5x^3+2x^2-x+1}{x^5-2x^4+6x^3-6x^2-3x+4}$$

reikšmę, kai $x\approx 1$ (taško $x=1$ aplinkoje).

III. MASIŲ CENTRAS IR JO TAIKYMAS

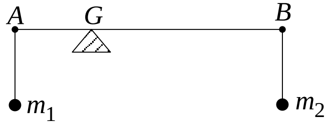
Juozas Šinkūnas
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

Dabartiniuose vidurinės mokyklos matematikos vadovėliuose daugiau dėmesio skiriama vektoriams. Taikant juos palengvėja daugelio geometrinių uždavinių sprendimas. Tačiau, taikant masių centro metodą, geometrinių uždavinių sprendimą galima dar labiau supaprastinti. Susipažinę su materialių taškų masių centro savybėmis ir išnagrinėję pateiktus pavyzdžius, sėkmingai atliksite užduotį.

1. Materialių taškų masių centras ir jo savybės.

1 apibrėžimas. *Tašką A su jam priskirtu teigiamu skaičiumi m vadinsime materialiuoju tašku, kurio masė m, ir žymėsime* (A, m).

Iš fizikos žinoma, kad dviejų materialių taškų (A, m_1) ir (B, m_2), sujungtų besvoriu strypu, turinčiu atramos tašką G (žr. 1 pav.), sistema yra pusiausvyroje, jeigu



1 pav.

$$m_1 \cdot GA = m_2 \cdot GB. \qquad (1)$$

Šią lygtį galima užrašyti vektoriškai:

$$m_1 \overrightarrow{GA} = -m_2 \overrightarrow{GB} \text{ arba } m_1 \overrightarrow{GA} + m_2 \overrightarrow{GB} = 0. \qquad (2)$$

Taškas $(G, m_1 + m_2)$ vadinamas materialių taškų (A, m_1) ir (B, m_2) *masių centru*.

Apibendrinsime dviejų materialių taškų masių centro sąvoką taškams, turintiems neigiamas „mases“.

2 apibrėžimas. *Taškas* $(G, \alpha + \beta)$ *vadinamas taškų* (A, α) *ir* (B, β), $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, *masių centru, jeigu galioja lygybė*

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}. \qquad (3)$$

Kadangi $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$ (vektorių sudėties taisyklė), tai (3) lygybę galima užrašyti taip:

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = (\alpha + \beta)\overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0},$$

t. y.

$$(\alpha + \beta)\overrightarrow{AG} = \beta \overrightarrow{AB}. \qquad (4)$$

Kai $\alpha + \beta \neq 0$,

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB} \qquad (5)$$

ir taškas G randamas vienareikšmiškai.

Kai $\alpha + \beta = 0$, o $\beta \cdot \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$, taškas G neegzistuoja.

Kai $\alpha + \beta = 0$ ir $\beta \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, (4) lygybę tenkina bet kuris taškas $(G, 0)$.

Iš (4) ir (5) lygybių išplaukia tokios dviejų materialių taškų savybės:

1. Taškų (A, α) ir (B, β) masių centras priklauso per šiuos taškus einančiai tiesei (vektoriai $\overrightarrow{AG}$ ir $\overrightarrow{AB}$ yra kolinearūs); be to:
$$|\alpha| \cdot |\overrightarrow{AG}| = |\beta|\,|\overrightarrow{AB}|; \qquad (6)$$
2. Taškų (A, α), ir (B, β) ir $(A, k\alpha)$, $(B, k\beta)$, $k \in \mathrm{R}$, $k \neq 0$, masių centrai sutampa.

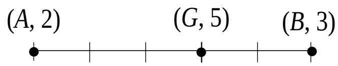
   Iš tikrųjų , jeigu taškų $(A, k\alpha)$, $(B, k\beta)$ masių centras yra taškas $(G', k\alpha + k\beta)$, o taškų (A, α), (B, α) masių centras – taškas $(G, \alpha + \beta)$, tai
$$\overrightarrow{AG'} = \frac{k\beta}{k\alpha + k\beta}\overrightarrow{AB} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} \;\Rightarrow\; G' \equiv G.$$
3. Taškų (A, α) ir (B, α), $\alpha \neq 0$, masių centras yra atkarpos AB vidurio taškas.

   Iš tikrųjų, $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\alpha}{\alpha + \alpha}\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

1 pavyzdys. Plokštumoje pažymėkime du taškus A ir B. Rasime masių centrus šių materialių taškų:

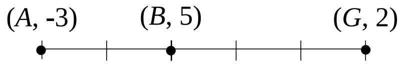
a) $(A, 2)$, $(B, 3)$; b) $(A, -3)$, $(B, 5)$; c) $(A, -8)$, $(B, 5)$; d) $(A, 0)$, $(B, 5)$; e) $(A, 2)$, $(A, 1)$; f) (A, α), $(A, -\alpha)$, $\alpha \neq 0$.

Sprendimas. a) Į (5) lygybę įrašę $\alpha = 2$, $\beta = 3$, gauname: $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2+3}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$. Taigi taškas *G* atkarpą *AB* dalija santykiu 3:2 (žr. 2 pav.).



2 pav.

b) Pagal (5) lygybę $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{-3+5}\overrightarrow{AB} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$. Atkarpą *AB* padaliję pusiau ir nuo taško *A* vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ kryptimi atidėję vieną atkarpos *AB* pusę 5 kartus, gausime tašką $(G, 2)$ (žr. 3 pav.).



3 pav.

c) Kadangi $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{-8+5}\overrightarrow{AB} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$, tai vektoriai $\overrightarrow{AG}$ ir $\overrightarrow{AB}$ yra priešingų krypčių. Taškas $(G, -3)$ pavaizduotas 4 paveiksle.

4 pav.

d) Kadangi $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{-0+5}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$, taškas *G* sutampa su tašku *B*.

e) Iš lygybės $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2+1}\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ išplaukia, kad $G \equiv A$.

f) Iš lygybės $(\alpha + (-\alpha))\overrightarrow{AG} = \alpha \cdot \overrightarrow{AA}$ išplaukia, kad taškų (A, α) ir $(A, -\alpha)$ masių centru gali būti bet kuris taškas $(G, 0)$; laikysime, kad šių taškų masių centras yra taškas $(A, 0)$.

1 teorema. *Jeigu taškas* $(G, \alpha+\beta)$ *yra taškų* (A,α) *ir* (B,β) *masių centras, tai su bet kuriuo tašku M teisinga lygybė*

$$\alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{MG} \qquad (7)$$

Įrodymas. Kadangi $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}$ ir $\alpha\,\overrightarrow{GA}+\beta\,\overrightarrow{GB}=0$, tai

$$\alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}=\alpha(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})+\beta(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})=$$

$$=(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{MG}+\alpha\,\overrightarrow{GA}+\beta\,\overrightarrow{GB}=(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{MG}\,.$$

Kai $M\equiv G$, (7) lygybė sutampa su (3) lygybe.

3 apibrėžimas. *Tašką* $(G,\alpha+\beta+\gamma)$, $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ *vadinsime taškų* (A,α), (B,β) *ir* (C,γ) *masių centru, jeigu*

$$\alpha\,\overrightarrow{GA}+\beta\,\overrightarrow{GB}+\gamma\,\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}\,. \qquad (8)$$

3 teorema. *Jeigu taškas* $(G,\alpha+\beta+\gamma)$ *yra taškų* (A,α), (B,β) *ir* (C,γ) *masių centras, tai su bet kuriuo tašku M teisinga lygybė*

$$\alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}+\gamma\,\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\,\overrightarrow{MG}. \qquad (9)$$

Ši teorema įrodoma analogiškai kaip 1-oji teorema. Atskiru atveju, kai $M\equiv A$, gauname:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\,\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\,\overrightarrow{AC}. \qquad (10)$$

Taigi, kai $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, trijų taškų, (A,α), (B,β) ir (C,γ) masių centras *G* randamas vienareikšmiškai.

Iš (10) lygybės išplaukia šios trijų taškų masių centro savybės:

1) jeigu trys taškai (A,α), (B,β) ir (C,γ) nepriklauso vienai tiesei (vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ yra nekolinearūs), tai šių taškų masių centras priklauso per juos einančiai plokštumai;

2) taškų (A,α), (B,β) ir (C,γ) ir $(A,k\alpha)$, $(B,k\beta)$ ir $(C,k\gamma)$, $k\neq 0$, masių centrai sutampa.

4 apibrėžimas. *Tašką*

$$(G, \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n),\ \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n \neq 0,$$

vadinsime taškų (A_1, α_1), (A_2, α_2), ..., (A_n, α_n) *masių centru, jeigu*

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}. \qquad (11)$$

3 teorema. *Jeigu taškas*

$$(G, \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n),\ \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n \neq 0,$$

yra taškų (A_1, α_1), (A_2, α_2), ..., (A_n, α_n) *masių centras, tai su bet kuriuo tašku M teisinga lygybė*

$$\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n)\overrightarrow{MG}. \qquad (12)$$

Teoremos įrodymas analogiškas 1-os teoremos įrodymui.

4 teorema. *Taškų* (A_1, α_1), (A_2, α_2), ..., (A_k, α_k), (A_{k+1}, α_{k+1}), ..., (A_n, α_n) *masių centras nepasikeis, jeigu taškus* (A_1, α_1), (A_2, α_2), ..., (A_k, α_k) *pakeisime jų masių centru* $(B, \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k)$.

Įrodymas Sakykime, kad taškas $(G, \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n)$ yra nagrinėjamų taškų masių centras, t. y.

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + ... + \alpha_k \overrightarrow{GA_k} + \alpha_{k+1} \overrightarrow{GA_{k+1}} + ... + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}.$$

Kadangi taškas $(B, \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k)$ yra taškų (A_1, α_1), (A_2, α_2), ..., (A_k, α_k) masių centras, tai pagal (12) formulę, kai $M = G$, gauname:

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + ... + \alpha_k \overrightarrow{GA_k} = (\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k)\overrightarrow{GB}.$$

Iš paskutiniųjų dviejų lygybių išplaukia, kad

$$(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k)\overrightarrow{GB} + \alpha_{k+1} \overrightarrow{GA_{k+1}} + ... + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}.$$

Taigi taškas $(G, \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n)$ yra taškų $(B, \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k)$, (A_{k+1}, α_{k+1}), ..., (A_n, α_n) masių centras.

1 išvada. *Jeigu taškas* $(G, \alpha+\beta+\gamma)$ *yra trikampio ABC viršūnių* (A, α), (B, β) *ir* (C, γ) *masių centras, tai tiesė AG kerta kraštinę BC arba jos tęsinį taške* A_1, *kuris yra taškų* (B, β) *ir* (C, γ) *masių centras.*

Įrodymas. Kadangi $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$, tai pagal 4 teoremą $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}= \;=\alpha\overrightarrow{GA}+(\beta+\gamma)\overrightarrow{GA_1}=\overrightarrow{0}$. Taigi taškas G yra taškų (A, α) ir $(A_1, \gamma+\beta)$ masių centras. Kadangi taškas A_1 priklauso tiesei BC (1 savybė) tai tiesė AG tiesę BC kerta taške A_1.

2 išvada. *Jeigu trikampio ABC viršūnių* (A, α) *ir* (B, β) *masių centras yra taškas* $(C_1, \alpha+\beta)$, *o viršūnių* (A, α) *ir* (C, γ) *masių centras – taškas* $(B_1, \alpha+\gamma)$, *tai taškų* (A, α), (B, β) *ir* (C, γ) *masių centras yra tiesių* CC_1 *ir* BB_1 *susikirtimo taškas.*

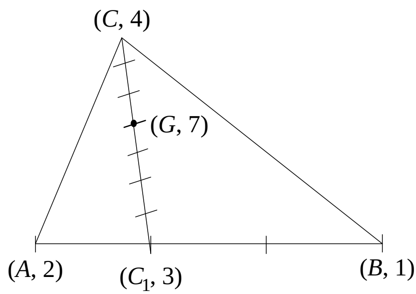
Įrodymas. Sakykime, kad taškas $(G, \alpha+\beta+\gamma)$ yra trikampio ABC viršūnių (A, α), (B, β) ir (C, γ) masių centras, t. y.

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$$

arba pagal 4 teoremą $(\alpha+\beta)\overrightarrow{GC_1}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}.$ Taigi taškas G priklauso tiesei CC_1. Kita vertus, $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=(\alpha+\gamma)\overrightarrow{GB_1}+\beta\overrightarrow{G}=\overrightarrow{0}$, t. y, taškas G priklauso ir tiesei BB_1.

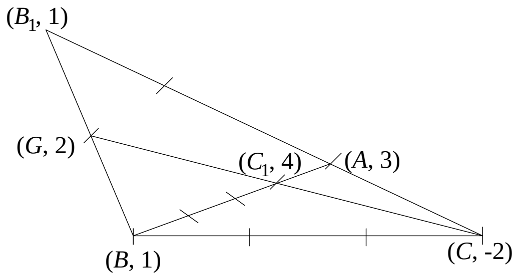
2 pavyzdys. Rasime trikampio ABC viršūnių: a) $(A, 2)$, $(B, 1)$ ir $(C, 4)$; b) $(A, 3)$, $(B, 1)$, $(C, -2)$ masių centrą.

Sprendimas. a) Nusibraižykime trikampį ABC (*žr.* 5 pav.). Pagal 4 teoremos 1-ąją išvadą šių trijų taškų masių centras yra taškų $(A, 2)$, $(B, 1)$ masių centro $(C_1, 3)$ ir taško $(C, 4)$ masių centras $(G, 7)$.



5 pav.

b) Nubraižykime trikampį *ABC* (žr. 6 pav.). Pagal 4 teoremos 2-ąją išvadą taškų $(A, 3)$, $(B, 1)$ ir $(C, -2)$ masių centras $(G, 2)$ yra tiesių CC_1 ir BB_1 susikirtimo taškas; čia C_1 yra taškų $(A, 3)$ ir $(B, 1)$ masių centras, o $(B_1, 1)$ – taškų $(A, 3)$ ir $(C_1, -2)$ masių centras, t. y. $\overrightarrow{CB_1} = \dfrac{3}{-2+3}\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CA}.$



6 pav.

Pastebėsime, kad taškas $(G, 2)$ yra taškų $(B, 1)$ ir $(B_1, 1)$ masių centras, t. y. atkarpos BB_1 vidurio taškas.

3 pavyzdys. Rasime trikampio *ABC* viršūnių (A, α), (B, β) ir $(C, -\beta)$ masių centrą.

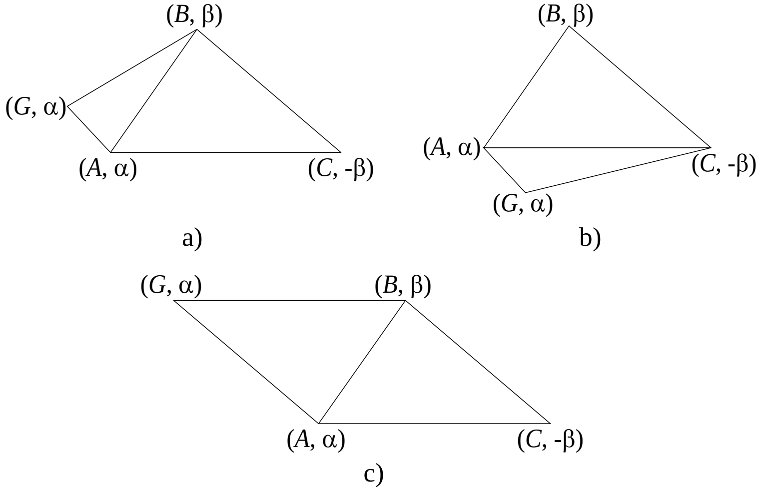
Sprendimas. Iš (10) lygybės, kai $\gamma = -\beta$, išplaukia, kad

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{AB} - \frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{AC} = \frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{AB} + \frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{CA} = \frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{CB}.$$

Taigi vektorius $\overrightarrow{AG}$ yra kolinearus vektoriui $\overrightarrow{CB}$ ir $\left|\overrightarrow{AG}\right| = \left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|$. Kai $\alpha \cdot \beta > 0$, vektoriai $\overrightarrow{AG}$ ir $\overrightarrow{CB}$ yra vienakrypčiai, o keturkampis *ACBG* – trapecija (*žr.* 7a) pav.).

Kai $\alpha \cdot \beta < 0$, vektoriai $\overrightarrow{AG}$ ir $\overrightarrow{CB}$ yra priešpriešiai, o keturkampis *CBAG* – trapecija (*žr.* 7b) pav.).

Kai $\alpha = \beta$, vektoriai $\overrightarrow{AG}$ ir $\overrightarrow{CB}$ yra lygūs ir keturkampis *ACBG* yra lygiagretainis (*žr.* 7c) pav.). Taigi trikampio *ABC* viršūnių (A, α), (B, α) ir $(C, -\alpha)$ (arba $(A, 1)$, $(B, 1)$ ir $(C, -1)$ masių centras yra lygiagretainio *ACBG* viršūnė (G, α) (arba $(G, 1)$).



7 pav.

2. Masių centro taikymas geometrijoje

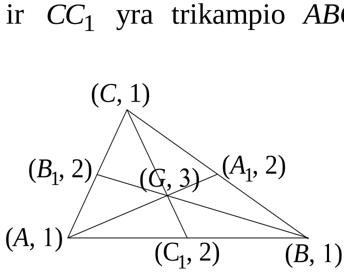
Nagrinėjamų figūrų (kūnų) viršūnėms priskyrus atitinkamas mases galima spręsti daugelį geometrinių uždavinių. Ypač nesunkiai įrodoma, kad keletas tiesių susikerta viename taške, kad keletas taškų priklauso vienai tiesei (plokštumai) ir kt.

Kaip tinkamai parinkti taškams mases išsiaiškiname spręsdami uždavinius.

4 pavyzdys. Įrodysime, kad trikampio pusiaukraštinės susikerta viename taške ir surasime kokiu santykiu tas taškas jas dalija.

Sprendimas. Sakykime AA_1, BB_1 ir CC_1 yra trikampio ABC pusiaukraštinės (žr. 8 pav.).

Kadangi $A_1C = A_1B$, $B_1A = B_1C$ ir $C_1A = C_1B$, tai trikampio viršūnėms priskiriame lygias mases. Nagrinėkime taškų $(A,1)$, $(B,1)$ ir $(C,1)$ ir jų masių centrą $(G,3)$. Kadangi taškas $(A_1,2)$ yra taškų BB_1 ir CC_1 masių centras, tai taškas $(G,3)$ yra taškų



8 pav.

$(A,1)$ ir $(A_1, 2)$ masių centras (4 teoremos 1 išvada). Taigi taškas G priklauso atkarpai AA_1 ir $1 \cdot AG = 2 \cdot GA_1$. Kita vertus, taškas $(B_1, 2)$ yra taškų $(A,1)$ ir $(C,1)$ masių centras, todėl taškas $(G, 3)$ yra taškų $(B,1)$ ir $(B_1, 2)$ masių centras. Taigi taškas G priklauso atkarpai BB_1 ir $1 \cdot BG = 2 \cdot GB_1$. Analogiškai įrodoma, kad taškas G yra atkarpoje CC_1 ir $1 \cdot CG = 2 \cdot GC_1$. Taigi visos trikampio pusiaukraštinės susikerta taške G. Šis taškas pusiaukraštines dalija santykiu 2:1 skaitant nuo viršūnių.

Šio uždavinio sprendimą užrašysime schematiškai dviejų eilučių lentele. Lentelės pirmoje eilutėje rašysime taškus, o antroje eilutėje – jiems priskirtas mases.

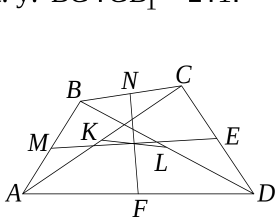
Turime:

$$G = \text{Centr} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = \text{Centr} \begin{array}{|c|c|} \hline C_1 & C \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow G \in [CC_1],$$
$$2GC_1 = 1 \cdot GC,$$
t. y. $CG : GC_1 = 2 : 1$;

$$G = \text{Centr} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = \text{Centr} \begin{array}{|c|c|} \hline A & A_1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \Rightarrow G \in [AA_1],$$
$$1GA = 2 \cdot GA_1,$$
t. y. $AG : GA_1 = 2 : 1$;

$$G = \text{Centr} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = \text{Centr} \begin{array}{|c|c|} \hline B_1 & B \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow G \in [BB_1],$$
$$2GB_1 = 1 \cdot GB,$$
t. y. $BG : GB_1 = 2 : 1$.

5 pavyzdys. Taškai M, N, E ir F yra atitinkamai iškilojo keturkampio $ABCD$ kraštinių AB, BC, CD ir DA vidurio taškai, o taškai K ir L – įstrižainių AC ir BD vidurio taškai (žr. 9 pav.). Įrodysime, kad atkarpos ME, NF ir KL susikerta viename taške ir šiame taške dalijasi pusiau.



9 pav.

Sprendimas. Kaip ir ketvirtajame pavyzdyje, nagrinėkime taškus $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$ ir $(D, 1)$, kurių masių centras yra taškas $(G, 4)$. Tada

$$G = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array} = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline M & E \\ \hline 2 & 2 \\ \hline\end{array} \Rightarrow G \in [ME]$$
ir $GM = GE$;

$$G = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array} = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline F & N \\ \hline 2 & 2 \\ \hline\end{array} \Rightarrow G \in [FN]$$
ir $GF = GN$;

$$G = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array} = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline K & L \\ \hline 2 & 2 \\ \hline\end{array} \Rightarrow G \in [KL]$$
ir $GK = GL$.

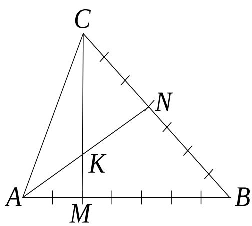
Taigi atkarpos *ME*, *FN* ir *KL* susikerta viename taške *G* ir šiame taške dalijasi pusiau.

6 pavyzdys. Taškas *M* trikampio *ABC* kraštinę *AB* dalija santykiu $AM : MB = 2 : 5$, o taškas *N* kraštinę *BC* – santykiu $BN : NC = 4 : 3$. Tiesės *AN* ir *CM* susikerta taške *K* (*žr.* 10 pav.). Rasime santykius $AK : KN$ ir $CK : KM$.

Sprendimas. Taškams *A*, *B* ir *C* priskiriame tokius skaičius, kad taškas *M* būtų taškų *A* ir *B* masių centras, o taškas *N* – taškų *B* ir *C* masių centras. Kadangi

$$5AM = 2BM,\ 3BN = 4CN \text{ arba}$$
$$15AM = 6BM,\ 6BM = 8CN,$$

tai taškui *A* priskiriame skaičių 15, taškui *B* – skaičių 6 ir taškui *C* – skaičių 8. Šių taškų masių centras – taškas $(G, 29)$. Turime:



10 pav.

$$G = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 15 & 6 & 8 \\ \hline\end{array} = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline A & N \\ \hline 15 & 14 \\ \hline\end{array} \Rightarrow G \in [AN],$$

$15GA = 14GN$,

t. y. $AG : GN = 14 : 15$;

$$G = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 15 & 6 & 8 \\ \hline\end{array} = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline M & C \\ \hline 21 & 8 \\ \hline\end{array} \Rightarrow G \in [GM],$$

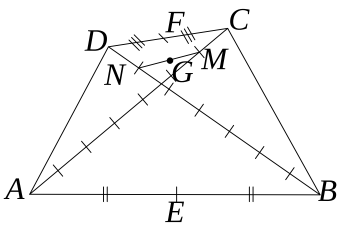
$21GM = 8GC$,

t. y. $CG : GM = 21 : 8$.

Kadangi $G \in [AN]$ ir $G \in [GM]$, tai taškas G sutampa su tašku K. Taigi $AK : KN = 14 : 15$ ir $CK : KM = 21 : 8$.

7 pavyzdys. Iškilojo keturkampio $ABCD$ įstrižainėse AC ir BD pažymėti taškai M ir N, be to $AM = 6MC$ ir $BN = 6ND$ (žr. 11 pav.). Įrodysime, kad atkarpos MN vidurio taškas ir kraštinių AB ir CD vidurio taškai yra vienoje tiesėje.

Sprendimas. Jeigu taškui A priskirsime skaičių 1, o taškui C – skaičių 6, tai taškas M bus taškų $(A, 1)$ ir $(C, 6)$ masių centras. Nesunku patikrinti, kad taškas N yra taškų $(B, 1)$ ir $(D, 6)$ masių centras. Nagrinėkime taškus $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 6)$ ir $(D, 6)$. Sakykime, kad taškas G yra jų masių centras.



11 pav.

Tada:

$$G = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 6 & 6 \\ \hline\end{array} = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline M & N \\ \hline 7 & 7 \\ \hline\end{array} \Rightarrow G \in [MN],$$

$GM = GN$;

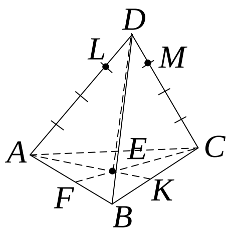
$$G = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 6 & 6 \\ \hline\end{array} = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline E & F \\ \hline 2 & 12 \\ \hline\end{array} \Rightarrow G \in [EF],$$

čia E – kraštinės AB vidurio taškas,

o F – kraštinės AB vidurio taškas.

Taigi atkarpos MN vidurio taškas G ir kraštinių AB ir CD vidurio taškai E ir F yra vienoje tiesėje.

8 pavyzdys. Trikampės piramidės *ABCD* pagrindo *ABC* pusiaukraštinės *AK* ir *CF* susikerta taške *E*, o piramidės briaunose *AD* ir *CD* parinkti taškai *L* ir *M* taip, kad $CM = \frac{3}{4}CD$ ir $DL = \frac{1}{4}DA$ (*žr.* 12 pav.). Įrodysime, kad atkarpos *FM*, *KL* ir *DE* susikerta viename taške ir rasime kokiu santykiu šis taškas jas dalija.



12 pav.

Sprendimas. Taškas *E* yra taškų $(A,1)$, $(B,1)$ ir $(C,1)$ masių centras (*žr.* 4 pavyzdį). Jeigu taškui *D* priskirsime skaičių 3, tai taškas *L* bus taškų $(A,1)$ ir $(D,3)$ masių centras, o taškas *M* – taškų $(D,3)$ ir $(C,1)$ masių centras.

Sakykime, kad taškas *G* yra taškų $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$ ir $(D,3)$ masių centras. Tuomet

$$G = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 6 & 6 \\ \hline\end{array} = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline F & M \\ \hline 2 & 4 \\ \hline\end{array} \Rightarrow G \in [FM]$$

ir $2GF = 4GM$, t. y. $FG : GM = 2:1$;

$$G = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline\end{array} = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline L & K \\ \hline 4 & 2 \\ \hline\end{array} \Rightarrow G \in [LK]$$

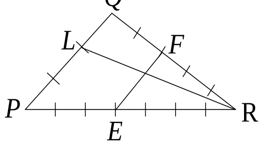
ir $4GL = 2GK$, t. y. $KG : GL = 2:1$;

$$G = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline\end{array} = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline E & D \\ \hline 3 & 3 \\ \hline\end{array} \Rightarrow G \in [ED]$$

ir $EG = GD$,

Taigi atkarpos *FM*, *LK* ir *ED* susikerta viename taške *G* ir $FG : GM = 2:1$, $KG : GL = 2:1$, $EG = GD = 1:1$.

9 pavyzdys. Trikampio PRQ kraštinėse PR, RQ ir QP pažymėti taškai E, F ir L; be to, $PE:ER=3:4$, $RF:FQ=3:2$ ir $QL:LP=1:2$. Atkarpos RF ir EF susikerta taške K (*žr.* 13 pav.). Rasime santykius $RK:KL$ ir $EK:KF$.



13 pav.

Sprendimas. Nagrinėkime taškus (P,α), (R,β_1), (R,β_2) ir (Q,γ). Skaičius α, β_1, β_2 ir γ parinkime taip, kad taškas E būtų taškų (P,α) ir (R,β_1) masių centras, taškas F – taškų (R,β_2) ir (Q,γ) masių centras, o taškas L – taškų (P,α) ir (Q,γ) masių centras. Tuomet atkarpų EF ir LR susikirtimo taškas sutaps su taškų (P,α) ir (R,β_1), (R,β_2) ir (Q,γ) masių centru. Akivaizdu, kad taškų $(P,1)$ ir $(Q,2)$ masių centras yra taškas $(L,3)$, taškų $(P,1)$ ir $\left(R,\frac{3}{4}\right)$ masių centras – taškas $\left(E,\frac{7}{4}\right)$, o taškų $(Q,2)$ ir $\left(R,\frac{4}{3}\right)$ masių centras – taškas $\left(F,\frac{10}{3}\right)$. Nagrinėkime taškų $(P,1)$, $\left(R,\frac{3}{4}\right)$, $\left(R,\frac{4}{3}\right)$ ir $(Q,2)$ arba taškų $(P,12)$, $(R,9)$, $(R,16)$ ir $(Q,24)$ sistemą (pasinaudojome masių centro savybe ir visų taškų mases padauginome iš 12, t. y. masių vardiklių bendro mažiausio kartotinio).

Turime:

$$G=\mathrm{Centr}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline P & R & R & Q \\ \hline 12 & 9 & 16 & 24 \\ \hline\end{array}=\mathrm{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline E & F \\ \hline 21 & 40 \\ \hline\end{array}\Rightarrow K\in[EF]$$

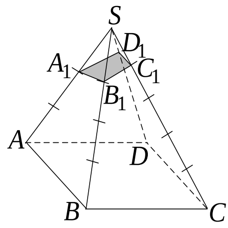
ir $21KE=40KF$,
t. y.
$EK:KF=40:21$;

Kita vertus,

$$G=\mathrm{Centr}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline P & R & R & Q \\ \hline 12 & 9 & 16 & 24 \\ \hline\end{array}=\mathrm{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline L & R \\ \hline 36 & 25 \\ \hline\end{array}\Rightarrow K\in[LR]$$

ir $36KL=25LR$,
t. y.
$LK:KR=25:36$.

10 pavyzdys. Piramidės *SABCD* pagrindas yra lygiagretainis *ABCD*. Briaunose *SA*, *SB* ir *SC* pažymėti taškai A_1, B_1 ir C_1; be to, $SA_1 = \frac{1}{3}SA$, $SB_1 = \frac{1}{4}SB$ ir $SC_1 = \frac{1}{5}SC$ (*žr.* 14 pav.). Įrodysime, kad plokštuma $(A_1B_1C_1)$ kerta briauną *SD* ir rasime kokius santykiu susikirtimo taškas ją dalija.



14 pav.

Sprendimas. Taškų $(A,1)$, $(B,-1)$ ir $(C,1)$ masių centras yra taškas $(D,1)$ (*žr.* 3 pavyzdį). Taškui *S* priskirsime mases taip, kad taškas A_1 būtų taškų *A* ir *S* masių centras, taškas B_1 – taškų *B* ir *S* masių centras ir taškas C_1 – taškų *C* ir *S* masių centras. Kadangi $SA_1 : A_1A = 1:2$, tai taškui *S* priskirsime skaičių 2. Analogiškai iš santykio $SB_1 : B_1B = 1:3$ išplaukia, kad taškui *S* reikia priskirti skaičių (–3). Kadangi $SC_1 : C_1C = 1:4$, tai taškui *S* priskirsime skaičių 4. Nagrinėkime taškus $(A,1)$, $(B,-1)$, $(C,1)$, $(S,2)$, $(S,-3)$ ir $(S,4)$. Sakykime jų masių centras yra *G*. Tada:

$$G = \mathrm{Centr}\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline A & B & C & S & S & S \\ \hline 1 & -1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ \hline\end{array} = \mathrm{Centr}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A_1 & B_1 & C_1 \\ \hline 3 & -4 & 5 \\ \hline\end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G \in (A_1B_1C_1);$$

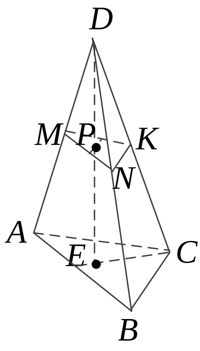
$$G = \mathrm{Centr}\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline A & B & C & S & S & S \\ \hline 1 & -1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ \hline\end{array} = \mathrm{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline D & S \\ \hline 1 & 3 \\ \hline\end{array} \Rightarrow$$

$G \in [DS]$ ir $GD : GS = 1:3$, t. y $SG : GD = 1:3$.

Taigi plokštuma $(A_1B_1C_1)$ kerta briauną *SD* taške *G*, kuris ją dalija santykiu 1:3 skaitant nuo viršūnės.

11 pavyzdys. Trikampės piramidės *ABCD* briaunose *DA*, *DB* ir *DC* pažymėti taškai *M*, *N* ir *K*, kad $DM = \frac{1}{3}DA$, $DN = \frac{1}{4}DB$ ir

$DK = \frac{3}{5}DC$. Taškas E yra trikampio ABC pusiaukraštinių susikirtimo taškas. Plokštuma, einanti per taškus M, N ir K, kerta atkarpą DE taške P (*žr.* 15 pav.). Apskaičiuosime $DP : PE$.



15 pav.

Sprendimas. Taškams A ir D, B ir D, C ir D priskirsime tokias mases, kad taškai M, N ir K būtų jų masių centrais. Kadangi taškas E yra trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taškas, tai taškams A, B ir C priskirsime vienodas mases, pavyzdžiui 1. Tada taškų $(A,1)$ ir $(D,2)$ masių centras yra M, taškų $(B,1)$ ir $(D,3)$ masių centras yra N, o taškų $(C,1)$ ir $\left(D,\frac{2}{3}\right)$ masių centras – taškas K.

Nagrinėkime taškų $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$, $(D,2)$, $(D,3)$ ir $\left(D,\frac{2}{3}\right)$ arba taškų $(A,3)$, $(B,3)$, $(C,3)$, $(D,6)$, $(D,9)$ ir $(D,2)$ sistemą. Sakykime, kad šios sistemos masių centras yra G. Tada:

$$G = \mathrm{Centr}\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D & D & D \\ \hline 3 & 3 & 3 & 6 & 9 & 2 \\ \hline\end{array} = \mathrm{Centr}\begin{array}{|c|c|c|}\hline M & N & K \\ \hline 9 & 12 & 5 \\ \hline\end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G \in (MNK);$$

$$G = \mathrm{Centr}\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D & D & D \\ \hline 3 & 3 & 3 & 6 & 9 & 2 \\ \hline\end{array} = \mathrm{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline E & D \\ \hline 9 & 17 \\ \hline\end{array} \Rightarrow .$$

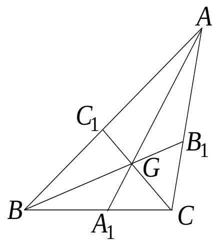
$$\Rightarrow G \in [ED] \text{ ir } 9GE = 17GD, \text{ t. y. } DG : GE = 9:17.$$

Akivaizdu, kad $G \equiv P$.

12 pavyzdys. Taškas E yra trikampės piramidės $ABCD$ pagrindo ABC pusiaukraštinių susikirtimo taškas. Briaunose DA, DB ir atkarpoje DE pasirinkti taškai A_1, B_1 ir E_1, kad $BB_1 : B_1D = 4:1$, $AA_1 : A_1D = 2:1$ ir $EE_1 : E_1D = 1:3$. Ištirsime ar plokštuma $(A_1B_1E_1)$ kerta briauną DC.

Sprendimas. Taškų $(A,1)$ ir $(D,2)$ masių centras yra taškas A_1, taškų $(B,1)$ ir $(D,4)$ masių centras yra taškas B_1, taškų $(E,3)$ ir $(D,1)$ masių centras – taškas E_1. Nagrinėkime taškų $(C,1)$ ir (D,x) porą. Skaičių x parinkime taip, kad šių taškų masių centro $(C_1,1+x)$ ir taškų $(A_1,3)$, $(B_1,5)$ masių centras sutaptų su tašku $(E_1,4)$. Taškų $(A_1,3)$, $(B_1,5)$ ir $(C_1,1+x)$ masių centras yra $(E_1,4)$, kai $3+5+1+x=4$, t. y., kai $x=-5$. Taškų $(C,1)$ ir $(D,-5)$ masių centras $(C_1,-4)$ nepriklauso briaunai *DC*. Taigi plokštuma (A,B,E_1) briaunos *DC* nekerta.

13 pavyzdys. Įrodysime, kad trikampio *ABC* pusiaukampinės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta viename taške ir rasime kokiu santykiu šis taškas jas dalija (16 pav.).



16 pav.

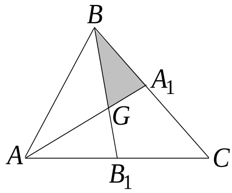
Sprendimas. Remsimės trikampio pusiaukampinės savybe: trikampio kampo pusiaukampinė prieš jį esančią kraštinę dalija į atkarpas, proporcingas prie jo esančioms kraštinėms. Jeigu $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, tai $\dfrac{BA_1}{A_1C}=\dfrac{c}{b}$, $\dfrac{CB_1}{B_1A}=\dfrac{a}{c}$, $\dfrac{BC_1}{C_1B}=\dfrac{b}{a}$, t. y. $a\cdot AC_1=b\cdot C_1B$, $c\cdot CB_1=a\cdot B_1A$, $b\cdot BA_1=c\cdot A_1C$. Nagrinėsime taškų (A,a), (B,b) ir (C,c) sistemą. Tegul jos masių centras yra *G*. Tada

$$G=\text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline a & b & c \\ \hline\end{array}=\text{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline A & A_1 \\ \hline a & b+c \\ \hline\end{array}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow G\in[AA_1] \text{ ir } aGA=(b+c)GA_1, \text{ t. y. } AG:GA_1=(b+c):a.$$

Analogiškai įrodoma, kad $G\in[BB_1]$, $G\in[CC_1]$ ir $BG:GB_1=(a+c):b$, $CG:GC_1=(a+b):c$. Taigi trikampio pusiaukampinės susikerta viename taške.

14 pavyzdys. Trikampio ABC kraštinės AB ilgis 3, o kraštinės AC ilgis 4. Pusiaukraštinė BB_1 ir pusiaukampinė AA_1 susikerta taške G (*žr.* 17 pav.). Raskime trikampio ABC plotą, jeigu $S_{BGA_1} = S$.



17 pav.

Sprendimas. Pagal pusiaukampinės savybę $\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{4}{3}$, t. y. $3CA_1 = 4A_1B$. Taigi taškų $(B, 4)$ ir $(C, 3)$ masių centras yra taškas $(A_1, 7)$, o taškų $(A, 3)$ ir $(C, 3)$ masių centras – taškas $(B_1, 6)$. Tada

$$G = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 3 & 4 & 3 \\ \hline\end{array} = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline A & A_1 \\ \hline 3 & 7 \\ \hline\end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3GA = 7GA_1, \text{ t. y. } AG : GA_1 = 7 : 3.$$

Kadangi trikampių AGB ir BGA_1 pagrindai AG ir GA_1 yra vienoje tiesėje ir jų aukštinės lygios, tai, $S_{AGB} : S_{BGA_1} = AG : GA_1$, t. y. $S_{AGB} = \frac{7}{3}S$. Taigi $S_{ABA_1} = \frac{7}{3}S + S = \frac{10S}{3}$. Kadangi $\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{4}{3}$, tai $\frac{S_{ACA_1}}{S_{ABA_1}} = \frac{4}{3}$, t. y. $S_{ACA_1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{10S}{3} = \frac{40S}{9}$. Taigi,

$$S_{ABC} = S_{ABA_1} + S_{ACA_1} = \frac{10S}{3} + \frac{40S}{9} = \frac{70S}{9}.$$

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Raskite trikampio ABC viršūnių $(A, 2)$, $(B, -3)$ ir $(C, 5)$ masių centrą.

2. Trikampio ABC kraštinėse AC ir BC pažymėti taškai E ir F, kad $CE = \frac{2}{3}CA$ ir $CF = \frac{4}{5}CB$. Atkarpos BE ir AF susikerta taške M. Raskite $AM : AF$ ir $BM : BE$.

3. Trikampio *ABC* kraštinėse *AB*, *BC* ir *CA* pažymėti taškai C_1, A_1 ir B_1; be to $AC_1 : C_1B = 2:5$, $BA_1 : A_1C = 1:2$, $CB_1 : B_1A = 4:1$. Atkarpos CC_1 ir A_1B_1 susikerta taške *E*. Raskite $CE : EC_1$ ir $B_1E : EA_1$.

4. Trikampės piramidės *ABCD* briaunose *AB* ir *CD* pažymėti taškai *P* ir *Q*, kad $AP : PB = 3:1$ ir $CQ : QD = 3:1$. Įrodykite, kad atkarpos *PQ* vidurio taškas ir briaunų *AC* ir *BD* vidurio taškai yra vienoje tiesėje.

5. Piramidės *SABCD* pagrindas *ABCD* yra lygiagretainis. Plokštuma kerta briaunas *AS*, *BS*, *CS* ir *DS* taškuose A_1, B_1, C_1 ir D_1; be to, $AA_1 = 2A_1S$, $BB_1 = 4B_1S$ ir $CC_1 = 3C_1S$. Raskite $DD_1 : D_1S$.

6. Trikampės piramidės *ABCD* briaunose *DA*, *DB* ir *DC* pažymėti taškai *M*, *N* ir *L*, kad $AM : MD = 3:2$, $BN : ND = 2:5$ ir $CL : LD = 1:3$. Taškas *E* yra trikampio *ABC* pusiaukraštinių susikirtimo taškas. Plokštuma, einanti per taškus *M*, *N* ir *L* kerta atkarpą *DE* taške *K*. Raskite $DK : KE$.

7. Taškai E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 ir E_6 yra iškilojo šešiakampio *ABCDEF* kraštinių *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF* ir *FA* vidurio taškai. Įrodykite, kad trikampių $E_1E_3E_5$ ir $E_2E_4E_6$ pusiaukraštinių susikirtimo taškai sutampa.

8. Trikampyje *ABC* $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$. Trikampio aukštinė *CD* ir pusiaukraštinė *AF* susikerta taške *E*. Raskite $AE : EF$ ir $CE : ED$.

9. Trikampio *ABC* kraštinės *AB* ilgis 3, o kraštinės *BC* ilgis 2. Taškas *D* kraštinę *AB* dalija santykiu $AD : DB = 1:2$. Pusiaukampinė *BE* ir atkarpa *CD* susikerta taške *F*. Apskaičiuokite trikampio *ABC* plotą, jeigu trikampio *BCF* plotas lygus *S*.

10. Smailiojo trikampio *ABC* kampų didumai yra α, β ir γ. Įrodykite, kad trikampio aukštinės susikerta viename taške ir raskite santykius, kuriais šis taškas aukštines dalija.

IV. LYGINIAI IR JŲ TAIKYMAS

Eugenijus Stankus
(Vilniaus universitetas)

Lyginio sąvoka labai svarbi nagrinėjant sveikųjų skaičių savybes. Remiantis lyginių savybėmis įrodomi sveikųjų skaičių dalumo požymiai. Lyginių teorija naudojama įvairiems skaičių teorijos uždaviniams spręsti. Čia susipažinsime su lyginio sąvoka, įrodysime kai kurias lyginių savybes ir pateiksime keletą lyginių taikymo pavyzdžių.

Tačiau, norėdami apibrėžti lyginį, pirmiau turime panagrinėti sveikųjų skaičių dalumą, dalybą su liekana bei kai kuriuos kitus dalykus, susijusius su lyginio sąvoka.

Toliau naudosimės įprastiniais žymenimis: $\mathrm{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ – natūraliųjų skaičių aibė, $\mathrm{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ – sveikųjų skaičių aibė.

Sveikųjų skaičių dalumas.

1 apibrėžimas. Skaičius *a dalijasi iš* skaičiaus *b* arba *b dalija a* (žymima $b \mid a$), jeigu yra toks sveikasis skaičius *q*, su kuriuo teisinga lygybė $a = bq$ $(a, b \in \mathrm{Z}, b \neq 0)$. Skaičiai *b* ir *q* vadinami skaičiaus *a* *dalikliais*, o skaičius *a* yra skaičiaus *b kartotinis.*

Įrodysime kelias sveikųjų skaičių dalumo savybes.

1. Jei $b \mid a$ ir $c \mid b$, tai $c \mid a$.

Įrodymas. Kadangi $a = bq_1$ ir $b = cq_2$, tai $a = cq_1q_2$. Vadinasi, skaičius *a* dalijasi iš skaičiaus *c*.

2. Jeigu žinoma, kad lygybės

$$a_1 + a_2 + ... + a_m = b_1 + b_2 + ... + b_n \tag{1}$$

kairiosios ir dešiniosios pusės visi dėmenys, išskyrus kurį nors vieną, dalijasi iš *c*, tai ir pastarasis dėmuo dalijasi iš *c*.

Įrodymas. Tarkime, kad skaičiai $a_2, ..., a_m, b_1, b_2, ..., b_n$ dalijasi iš *c*, t. y. $a_2 = cq_2, ..., a_m = cq_m$, $b_1 = cl_1, b_2 = cl_2, ..., b_n = cl_n$. Įrašę šias išraiškas į (1) lygybę ir išreiškę a_1, gauname: $a_1 = c(l_1 + l_2 + ... + l_n - q_2 - ... - q_m)$. Taigi a_1 taip pat dalijasi iš *c*.

3. Jei $a \mid b_1, a \mid b_2, ..., a \mid b_n$, tai $a \mid (b_1 + b_2 + ... + b_n)$.

Įrodymas. Kadangi $b_1 = aq_1, b_2 = aq_2, ..., b_n = aq_1$, tai $b_1 + b_2 + ... + b_n = a(q_1 + q_2 + ... + q_n)$, t.y. suma $b_1 + b_2 + ... + b_n$ dalijasi iš a.

2 apibrėžimas. Natūralusis skaičius n vadinamas *pirminiu skaičiumi*, jeigu jis dalijasi tik iš savęs ir iš vieneto (skaičius 1 nelaikomas pirminiu). Visi kiti natūralieji skaičiai, didesni už 1, vadinami *sudėtiniais skaičiais*. Pirminiai skaičiai dažniausiai žymimi raide p.

Nesunku išvardinti keletą pirmųjų pirminių skaičių: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, … . Kad jų yra be galo daug, įrodė senovės graikų matematikas Euklidas (365-apie 300 m. pr. Kr.). Įdomu, kad iki šiol nežinoma, ar be galo daug yra pirminių skaičių porų, tokių kaip (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), vadinamų *pirminiais dvyniais*. Tai garsioji *dvynių problema*.

Pagrindinė aritmetikos teorema. Nagrinėjant natūraliųjų skaičių savybes pirminiai skaičiai ypatingai svarbūs. Pirminiais skaičiais išreiškiami visi nelygūs nuliui natūralieji (taip pat ir sveikieji) skaičiai.

1 teorema. Bet kuris sudėtinis natūralusis skaičius n vieninteliu būdu išreiškiamas pirminių skaičių sandauga (jei nekreipiama dėmesio į dauginamųjų tvarką):

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_m^{k_m}; \tag{2}$$

čia p_1, p_2, …, p_m yra pirminiai skaičiai, iš kurių dalijasi skaičius n, o $k_1, k_2, ..., k_m$ – teigiami patys didžiausi pirminių skaičių laipsnio rodikliai, su kuriais skaičius n iš šių laipsnių dalijasi.

Pavyzdžiui, $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, $-59535 = -3^5 \cdot 5 \cdot 7^2$. Skaičiaus n užrašymas (2) išraiška vadinamas skaičiaus n *faktorizavimu*. Kai skaičius n didelis, tai faktorizavimo uždavinys tampa gana sudėtingas netgi šiuolaikiniams kompiuteriams.

Dalyba su liekana.

2 teorema. Tarkime, a ir b – sveikieji skaičiai, $b \neq 0$. Tuomet yra tokie vieninteliai skaičiai q ir r, $0 \leq r < |b|$, su kuriais galioja lygybė

$$a = bq + r. \tag{3}$$

Skaičius q vadinamas *dalmeniu*, o r – *liekana*.

Skaičiams q ir r, $0 \le r < |b|$, tenkinantiems (3) lygybę, rasti galima taikyti dalybos kampu algoritmą. Pavyzdžiui, skaičių $a = 2009$ dalydami iš $b = 17$, gausime, kad $2009 = 17 \cdot 118 + 3$. Taigi $q = 118$, $r = 3$. Kai $a = -2009$, $b = 17$, tai $-2009 = 17 \cdot (-119) + 14 \Rightarrow$ $\Rightarrow q = -119$, $r = 14$. Jeigu $a = 2009$, $b = -17$, tuomet $2009 = (-17) \cdot (-118) + 3 \Rightarrow q = -118$, $r = 3$. Kai $a = -2009$, $b = -17$, turėsime: $-2009 = (-17) \cdot 119 + 14 \Rightarrow q = 119$, $r = 14$.

Atkreipkime dėmesį, kad kiekviename pateiktame pavyzdyje bq yra didžiausias, neviršijantis skaičiaus a, skaičiaus b kartotinis.

Pozicinė skaičiavimo sistema. Pasirinkime natūralųjį skaičių g, $2 \le g \le 10$. Tuomet, remiantis dalyba su liekana, kiekvieną natūralųjį skaičių n galima užrašyti pavidalu

$$n = a_k \cdot g^k + a_{k-1} \cdot g^{k-1} + \ldots + a_2 \cdot g^2 + a_1 \cdot g^1 + a_0 \cdot g^0 ; \qquad (4)$$

čia $0 \le a_i < g$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$.

Pavyzdžiui, tegu $g = 8$. Skaičių 2009 užrašykime (4) pavidalu. Aukščiausias skaičiaus $g = 8$ laipsnis, neviršijantis 2009, yra 3 (nes $g^2 = 64$, $g^3 = 512$, $g^4 = 4096$). Skaičių 2009 padaliję iš $g^3 = 512$, gauname $2009 = 3 \cdot 8^3 + 473$. Kadangi $473 = 7 \cdot 8^2 + 25$, tai $2009 =$ $= 3 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 25$ ir $25 = 3 \cdot 8 + 1 \cdot 8^0$. Taigi $2009 = 3 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 +$ $+ 3 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0$. Ši lygybė vadinama skaičiaus 2009 išraiška pozicine skaičiavimo sistema pagrindu $g = 8$. Sutrumpintai tai užrašoma $2009_{(10)} = 3731_{(8)}$.

Atkreipkime dėmesį, kad skaičiaus užrašą 2009 taip pat suvokiame kaip natūraliojo skaičiaus išraišką pozicine skaičiavimo sistema pagrindu $g = 10$, t.y. $2009 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$.

Ši pozicinė dešimtainė skaičiavimo sistema (pagrindu 10) labiausiai įprasta. Ja kiekvienas natūralusis skaičius n užrašomas naudojant skaitmenis 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Kartais naudojamas toks (4) išraiškos užrašas: $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$.

Kompiuterių moksle labai svarbi dvejetainė sistema, kurios pagrindas yra $g = 2$. Natūralusis skaičius n šioje sistemoje užrašomas

$n = \overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0}$. Čia galimi skaitmenys yra tik 0 ir 1. Pavyzdžiui, skaičių 2009, užrašytą dešimtaine sistema, užrašykime dvejetaine sistema:

$$2009 = 1\cdot 2^{10} + 1\cdot 2^9 + 1\cdot 2^8 + 1\cdot 2^7 + 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 +$$
$$+ 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0.$$

Taigi $2009_{(10)} = 11111011001_{(2)}$.

Lyginiai ir jų savybės. Tegu $m \geq 2$ yra natūralusis skaičius. Nagrinėsime liekanas, gaunamas dalijant sveikuosius skaičius iš *m*. Naudojant lyginius moduliu *m*, galima išsiaiškinti tokių liekanų savybes. Lyginio sąvoką įvedė žymus vokiečių matematikas Gausas (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777–1855) knygoje „Disquisitiones arithmeticae“, išleistoje 1801 metais.

3 apibrėžimas. Sakoma, kad skaičius *a lygsta skaičiui b moduliu m,* jei skirtumas $a-b$ dalijasi iš *m* (žymima užrašu $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$, kuris vadinamas *lyginiu moduliu m*).

Lyginių savybės, kaip ir pats jų užrašas, panašios į įprastinių lygybių savybes.

1. Jei $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$, tai ir $b \equiv a(\mathrm{mod}\, m)$.

2. $a \equiv a(\mathrm{mod}\, m)$.

Pirmosios dvi savybės išplaukia tiesiogiai iš lyginio apibrėžimo.

3. Lyginys $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ galioja tik tuomet, kai skaičius *a* ir skaičius *b*, dalijant iš *m*, turi vienodas liekanas.

Įrodymas. Savybės formulavime žodeliai „tik tuomet“ reiškia, kad turime įrodyti du teiginius:

- iš $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ išplaukia, kad skaičius *a* ir skaičius *b*, dalijant iš *m*, turi vienodas liekanas;
- iš to, kad skaičius *a* ir skaičius *b*, dalijant iš *m*, turi vienodas liekanas išplaukia, kad galioja lyginys $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$.

Jei $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$, tai pagal apibrėžimą $a - b = mq$. Skaičių a dalydami iš m gausime $a = mq_1 + r_1$, $0 \le r_1 < m$, o skaičių b – turėsime $b = mq_2 + r_2$, $0 \le r_2 < m$. Iš čia $a - b = m(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$ ir $0 \le |r_1 - r_2| < m$. Kadangi $m \mid (a - b)$, tai pagal 2 dalumo savybę iš m turi dalytis ir skaičius $r_1 - r_2$. Todėl $r_1 - r_2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2$.

Jei skaičius a ir skaičius b, dalijant iš m, turi vienodas liekanas, tai $a = mq_1 + r$ ir $b = mq_1 + r$. Tuomet

$$a - b = m(q_1 - q_2) \Rightarrow m \mid (a - b) \Rightarrow a \equiv b(\mathrm{mod}\, m).$$

4. Jei $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$, tuomet $ac \equiv bc(\mathrm{mod}\, m)$ su bet kuriuo $c \in \mathrm{Z}$.

Įrodymas. $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m) \Rightarrow a - b = mq \Rightarrow ac - bc = mqc \Rightarrow$ $\Rightarrow ac \equiv bc(\mathrm{mod}\, m)$.

5. Jei $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$, tuomet $a + c \equiv b + c(\mathrm{mod}\, m)$ su bet kuriuo $c \in \mathrm{Z}$.

Įrodymas. $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m) \Rightarrow a - b = mq \Rightarrow (a + c) - (b + c) = mq \Rightarrow$ $\Rightarrow a + c \equiv b + c\ (\mathrm{mod}\, m)$.

6. Jei $a_1 \equiv b_1(\mathrm{mod}\, m)$ ir $a_2 \equiv b_2(\mathrm{mod}\, m)$, tai

$$a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2(\mathrm{mod}\, m).$$

Įrodymas. $a_1 \equiv b_1(\mathrm{mod}\, m)$, $a_2 \equiv b_2(\mathrm{mod}\, m)$ $\Rightarrow$ $a_1 = b_1 + mq_1$, $a_2 = b_2 + mq_2$ $\Rightarrow$ $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + m(q_1 + q_2)$ $\Rightarrow$ $a_1 + a_2 \equiv$ $\equiv b_1 + b_2(\mathrm{mod}\, m)$.

Pastaba. Nesunkiai įrodoma, kad ši savybė galioja panariui sumuojant bet kurį lyginių skaičių.

7. Jei $a_1 \equiv b_1(\mathrm{mod}\, m)$ ir $a_2 \equiv b_2(\mathrm{mod}\, m)$, tai

$$a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2(\mathrm{mod}\, m).$$

Įrodymas. $a_1 \equiv b_1(\mathrm{mod}\, m)$, $a_2 \equiv b_2(\mathrm{mod}\, m)$ $\Rightarrow$ $a_1 = b_1 + mq_1$, $a_2 = b_2 + mq_2 \Rightarrow$ $a_1 \cdot a_2 = (b_1 + mq_1)(b_2 + mq_2)$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 + m(b_1 q_2 + b_2 q_1 + mq_1 q_2) \Rightarrow a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2(\mathrm{mod}\, m)$.

Pastaba. Nesunkiai įrodoma, kad ši savybė galioja panariui dauginant bet kurį lyginių skaičių.

Klasės moduliu *m* ir veiksmai su jomis.

4 apibrėžimas. *Klase* $\bar{a}$ *moduliu m* vadinama visų sveikųjų skaičių x, tenkinančių lyginį $x \equiv a(\mathrm{mod}\, m)$, aibė.

Atkreipkime dėmesį – iš 3 savybės išplaukia, kad visi klasės $\bar{a}$ skaičiai turi tokias pat liekanas r (dalijant iš m), kaip ir skaičius a. Taigi kiekvienas klasės $\bar{a}$ skaičius užrašomas pavidalu $x = r + mk, k \in Z$, vadinasi, ši sveikųjų skaičių aibė yra begalinė. Žymuo $\overline{r + mk}$ su kiekvienu $k \in Z$ reiškia tą pačią klasę, tačiau mažiausias teigiamas tos klasės „atstovas“ yra r, todėl patogiausia šią klasę žymėti $\bar{r}$. Kadangi visuomet $0 \le r < m$, tai iš viso skirtingų klasių yra m: $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{m-1}$ – tai *pilnoji liekanų moduliu m sistema*. Be to, $Z = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} \cup \ldots \cup \overline{m-1}$. Pavyzdžiui, kai $m = 5$, tai yra penkios klasės moduliu 5:

$$\bar{0} = \{0 + 5k,\, k \in Z\} = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, \ldots\};$$

$$\bar{1} = \{1 + 5k,\, k \in Z\} = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, 21, \ldots\};$$

$$\bar{2} = \{2 + 5k,\, k \in Z\} = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, 17, 22, \ldots\};$$

$$\bar{3} = \{3 + 5k,\, k \in Z\} = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, 18, 23, \ldots\};$$

$$\bar{4} = \{4 + 5k,\, k \in Z\} = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, 19, 24, \ldots\}.$$

5 apibrėžimas. Klasių $\bar{a}$ ir $\bar{b}$ *suma* $\bar{a} + \bar{b}$ vadinama klasė, kuriai priklauso skaičius $a + b$, t.y. klasė $\overline{a + b}$.

Pavyzdžiui, klasėms moduliu 5 turėsime: $\bar{1} + \bar{4} = \bar{0}$, $\bar{4} + \bar{3} = \bar{2}$, $\bar{3} + \bar{3} = \bar{1}$, $\bar{2} + \bar{4} = \bar{1}$ ir pan. Galima sudaryti pilną klasių moduliu 5 *sudėties lentelę*:

$\bar{b}$ \ $\bar{a}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

6 apibrėžimas. Klasių $\bar{a}$ ir $\bar{b}$ *sandauga* $\bar{a} \cdot \bar{b}$ vadinama klasė, kuriai priklauso skaičius $a \cdot b$, t.y. klasė $\overline{a \cdot b}$.

Pavyzdžiui, sudauginę klases moduliu 5 gausime: $\bar{1} \cdot \bar{4} = \bar{4}$, $\bar{4} \cdot \bar{3} = \bar{2}$, $\bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{4}$, $\bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{3}$ ir pan. Galima sudaryti pilną klasių moduliu 5 *daugybos lentelę*:

$\bar{b}$ \ $\bar{a}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

7 apibrėžimas. Klasės $\bar{a}$ (moduliu *m*) *k*-uoju laipsniu $\bar{a}^k$ vadinama klasė, kuriai priklauso skaičius a^k, t. y. klasė $\overline{a^k}$.

8 apibrėžimas. Sveikojo skaičiaus *c* ir klasės $\bar{a}$ (moduliu *m*) *sandauga* $c \cdot \bar{a}$ vadinama klasė, kuriai priklauso skaičius $c \cdot a$, t.y. klasė $\overline{c \cdot a}$.

Taigi su klasėmis pasirinktuoju moduliu galima atlikti sudėties ir daugybos, kėlimo laipsniu bei dauginimo iš sveikojo skaičiaus veiksmus. Pavyzdžiui, apskaičiuokime reiškinį, sudarytą iš klasių moduliu 5: $\bar{3}^3 + 2 \cdot \bar{4}^2 - 3 \cdot \bar{2} + \bar{1} = \bar{2} + \bar{2} + \bar{4} + \bar{1} = \bar{4}$.

Lyginiai su nežinomaisiais. Taikant lyginius skaičiavimuose, dažnai reikia spręsti lyginius su nežinomaisiais, pavyzdžiui, $5x \equiv 6 \pmod 7$. Čia reikia rasti sveikuosius *x*, su kuriais lyginys tenkinamas. Kitaip tariant, šio lyginio sprendiniai yra skaičiai, priklausantys klasei $\bar{x}$ moduliu 7, su kuria $5 \cdot \bar{x} = \bar{6}$. Patikrinę visas klases moduliu 7, nustatome, kad $\bar{x} = \bar{4}$ arba $x \equiv 4 \pmod 7$. Šios klasės visi skaičiai užrašomi formule $x = 7k + 4, k \in Z.$ Tai pirmojo laipsnio lyginio pavyzdys.

Lyginių teorijoje nagrinėjami ir aukštesnio laipsnio lyginiai, pavyzdžiui, $x^2 \equiv a(\mathrm{mod}\,p)$ ar lyginių sistemos.

Lyginių taikymas nustatant dalybos liekaną. Panagrinėkime pavyzdį.

Raskime skaičiaus $n = 11^{11} + 12^{12} + 13^{13}$ a) dalybos iš 7 liekaną ir b) paskutinį skaitmenį.

Sprendimas. a) Nagrinėkime kiekvieną sumos dėmenį atskirai. Pirmajam dėmeniui turėsime:

$$11 \equiv 4(\mathrm{mod}7) \Rightarrow 11^2 \equiv 4^2(\mathrm{mod}7) \Rightarrow 11^2 \equiv 2(\mathrm{mod}7) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11^4 \equiv 4(\mathrm{mod}7) \Rightarrow 11^8 \equiv 2(\mathrm{mod}7).$$

Dabar panariui sudauginkime pirmą, trečią ir paskutinį lyginius – gausime $11^{11} \equiv 16 \equiv 2(\mathrm{mod}7)$.

$$12 \equiv 5(\mathrm{mod}7) \Rightarrow 12^2 \equiv 5^2(\mathrm{mod}7) \Rightarrow 12^2 \equiv -3(\mathrm{mod}7) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12^4 \equiv 2(\mathrm{mod}7) \Rightarrow 12^8 \equiv 4(\mathrm{mod}7);$$

sudauginę du paskutiniuosius lyginius, turėsime $12^{12} \equiv 1(\mathrm{mod}7)$.

$$13 \equiv -1(\mathrm{mod}7) \Rightarrow 13^2 \equiv 1(\mathrm{mod}7) \Rightarrow 13^4 \equiv 1(\mathrm{mod}7) \Rightarrow 13^8 \equiv 1(\mathrm{mod}7);$$

sudauginame pirmą, trečią ir ketvirtą lyginius – gauname $13^{13} \equiv -1 \equiv 6(\mathrm{mod}7)$.

Sudėję gautuosius lyginius $11^{11} \equiv 2(\mathrm{mod}7)$, $12^{12} \equiv 1(\mathrm{mod}7)$ ir $13^{13} \equiv -1(\mathrm{mod}7)$, turėsime $n \equiv 2(\mathrm{mod}7)$. Taigi skaičių n dalydami iš 7, gausime liekaną 2.

b) Natūraliojo skaičiaus, užrašyto pozicine dešimtaine sistema, paskutinysis skaitmuo yra liekana, gauta šį skaičių dalijant iš 10. Vėl nagrinėkime kiekvieną dėmenį atskirai:

$$11 \equiv 1(\mathrm{mod}10) \Rightarrow 11^{11} \equiv 1(\mathrm{mod}10);$$

$$12 \equiv 2(\mathrm{mod}10) \Rightarrow 12^2 \equiv 4(\mathrm{mod}10) \Rightarrow 12^4 \equiv 6(\mathrm{mod}10) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12^8 \equiv 6(\mathrm{mod}10) \Rightarrow 12^{12} \equiv 6(\mathrm{mod}10);$$

$$13 \equiv 3(\mathrm{mod}10) \Rightarrow 13^2 \equiv -1(\mathrm{mod}10) \Rightarrow 13^8 \equiv 1(\mathrm{mod}10) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13^{13} \equiv 3(\mathrm{mod}10).$$

Sudėję panariui gautuosius tris lyginius, gauname $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 10)$.

Vadinasi, duotojo skaičiaus paskutinysis skaitmuo yra 0, arba kitaip, šis skaičius dalijasi iš 10.

Lyginių taikymas įrodant skaičių dalumo požymius. Pateiksime tik vieno dažnai vartojamo dalumo požymio įrodymą, kuris iš esmės remiasi lyginių savybėmis.

Dalumo iš 3 (*iš* 9) *požymis*. Skaičius, užrašytas dešimtaine skaičiavimo sistema, dalijasi iš 3 (iš 9) tik tuomet, kai jo skaitmenų suma dalijasi iš 3 (iš 9).

Įrodymas. Atkreipkime dėmesį, kad

$$10 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3), 10^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3), \ldots, 10^k \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3),$$

taip pat $10 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 9), 10^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 9), \ldots, 10^k \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 9)$. Tuomet iš (4) formulės ir lyginių savybių gauname $n \equiv a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1 + a_0 (\mathrm{mod}\, 3)$, taip pat ir $n \equiv a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1 + a_0 (\mathrm{mod}\, 9)$. Vadinasi, jei skaitmenų suma dalijasi iš 3 (iš 9), tai ir pats skaičius dalijasi iš 3 (iš 9), ir atvirkščiai – jei skaičius dalijasi iš 3 (iš 9), tai ir jo skaitmenų suma dalijasi iš 3 (iš 9).

Metodinės medžiagos apie skaičių dalumą, apie lyginius rasite ir LJMM išleistose knygelėse:

1. E. Stankus. Skaičių dalumas, Jaunajam matematikui 3, Danieliaus leidykla, Vilnius, 2002, 8–14.

2. E. Stankus. Skaičių dalumas, dalumo požymiai, Jaunajam matematikui 7, Danieliaus leidykla, Vilnius, 2006, 8–16.

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Skaičių 234329, kuris užrašytas dešimtaine sistema, užrašykite aštuntaine sistema.

2. Išraiškoje $a = bq + r, 0 \le r < |b|$, raskite trūkstamus skaičius, kai

a) $a = -38743, b = 213$; b) $a = -621, b = -53$;

c) $a = 5995, q = -19$; d) $a = -5960, q = -315$.

3. Sudarykite klasių moduliu 7 sudėties lentelę.

4. Sudarykite klasių moduliu 7 daugybos lentelę.

5. Apskaičiuokite $f(\overline{6})$, kai $\overline{6}$ yra klasė moduliu 7, o $f(x) = 2x^3 - 3x^2$.

6. Išspręskite lyginį $3x + 8 \equiv 5(\mathrm{mod}\,11)$.

7. Išspręskite lyginį $3x^2 \equiv 5(\mathrm{mod}\,11)$.

8. Raskite liekaną, gaunamą skaičių $n = 17^{17} + 18^{18} + 19^{19}$ dalijant iš 11.

9. Raskite skaičiaus $n = 17^{17} + 18^{18} + 19^{19}$ paskutinįjį skaitmenį.

10. Įrodykite, kad skaičius $M = 14n^3 + 9n^2 + n$ su visais $n \in Z$ dalijasi iš 3.

V. FUNKCINĖS LYGTYS

Antanas Apynis
(Vilniaus universitetas)

Ši tema skiriama pirmajai pažinčiai su lygtimis, kuriose nežinomasis yra vieno kintamojo funkcija, apibrėžta tam tikroje srityje. Štai keli funkcinių lygčių pavyzdžiai:

$$f(x)+f(-x)=0,\quad f(x)-f(-x)=0,\quad f(x)-f(x+2\pi)=0,$$

$$f(x)+2x\,f\left(\frac{1}{x}\right)=5,\quad 2x\,f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=2x.$$

Pirmosios trys lygtys (nagrinėjant jas visoje realiųjų skaičių tiesėje) jau yra matytos mokykliniuose vadovėliuose. Pirmosiomis dviem lygtimis nusakoma nelyginė ir lyginė funkcijos, o trečiąja lygtimi – periodinė funkcija $y=f(x)$, $x\in(-\infty;+\infty)$, kurios periodas lygus 2π. Visos trys lygtys turi be galo daug sprendinių – šias lygtis tenkinančių funkcijų.

Kitos dvi lygtys ($f(x)+2xf\left(\frac{1}{x}\right)=5$ ir $2x\,f(x)+2xf\left(\frac{1}{1-x}\right)=2x$) neturi lengvai paaiškinamų interpretacijų. Jos gali atsirasti matematiškai modeliuojant kuriuos nors gamtos ar socialinius reiškinius arba pertvarkant tokių matematinių modelių lygtis.

Nagrinėdami funkcinių lygčių temą, šį kartą nesigilinsime į lygčių prigimtį, į jų sprendinių egzistavimą, o visą dėmesį skirsime funkcinės lygties sprendinio sampratai ir jo paieškos procesui.

Prisiminkime, kad pagal apibrėžimą funkcija f yra kokia nors taisyklė, pagal kurią kiekvienam vienos aibės, tarkime, A elementui priskiriamas kuris nors (bet tik vienas!) realusis skaičius, priklausantis, pavyzdžiui, aibei B. Susitarkime šį faktą sutrumpintai rašyti taip:

$$f\colon\ A\to B.$$

Aibė A čia yra funkcijos f apibrėžimo sritis, o B – arba jos reikšmių aibė, arba bet kuri platesnė aibė. Pavyzdžiui, žinome, kad trigonometrinės funkcijos $y=\sin x$ ir $y=\cos x$ yra apibrėžtos visoje realiųjų skaičių tiesėje, o jų reikšmių aibės yra uždarieji intervalai [–1; 1]. Vis dėlto galima rašyti ne tik

$$\sin\colon\ \mathbf{R}\to[-1;1]\ \text{ ir }\ \cos\colon\ \mathbf{R}\to[-1;1],$$

bet ir taip:

$$\sin\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ ir } \cos\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

(čia **R** yra realiųjų skaičių aibė – intervalas $(-\infty; +\infty)$).

Pastaraisiais užrašais pabrėžiamas faktas, kad tiek sinuso, tiek kosinuso reikšmės yra realieji skaičiai.

Funkcine lygtimi pateikiamas sąryšis tarp nežinomos funkcijos, tarkime, f reikšmių dviejuose ar keliuose taškuose. Pavyzdžiui, lygtis $f(x) + f(-x) = 0$ sieja funkcijos f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ reikšmes taškuose x ir $-x$ ($x \in \mathbf{R}$), o lygtis $f(x) + 2x\, f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 5$ sieja funkcijos f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ reikšmes taškuose x ir $\dfrac{1}{x}$, kai $x \in \mathbf{R}$ ir $x \neq 0$.

Išspręsti funkcinę lygtį reiškia rasti visas (jei nenurodyta kitaip) funkcijas, kurios tenkina ją ir kitas uždavinyje suformuluotas sąlygas. Pereikime prie konkrečių uždavinių analizės ir sprendimo.

1 pavyzdys. Patikrinkime, ar $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2 - x + 4}$, $x \in \mathbf{R}$, yra funkcinės lygties

$$2\, f(1-x) + 1 = x\, f(x), \; x \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

sprendinys.

Sprendimas. Apskaičiuokime funkcijos f reikšmę taške $1-x$:

$$f(1-x) = \frac{(1-x)-3}{(1-x)^2 - (1-x) + 4} = \frac{-x-2}{x^2 - x + 4} = -\frac{x+2}{x^2 - x + 4}.$$

Tada

$$2\, f(1-x) + 1 = -\frac{2(x+2)}{x^2 - x + 4} + 1 = \frac{-2x - 4 + x^2 - x + 4}{x^2 - x + 4} = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - x + 4}.$$

Nesunku įsitikinti, kad ši išraiška sutampa su sandaugos $x\, f(x)$ išraiška:

$$x\, f(x) = x \cdot \frac{x-3}{x^2 - x + 4} = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - x + 4}.$$

Vadinasi, funkcija f, apibrėžta formule $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2 - x + 4}$, $x \in \mathbf{R}$, yra (1) lygties sprendinys.

2 pavyzdys. Išspręskime funkcinę lygtį

$$x(f(x)+f(-x)+4)+2f(x)+2=0. \qquad (2)$$

Sprendimas. Uždavinio sąlygoje nepasakyta, nei kokia funkcijos f apibrėžimo sritis, nei kokie yra apribojimai šios funkcijos reikšmėms. Todėl ieškosime funkcijų f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, tenkinančių (2) lygtį.

Kadangi ir x, ir $-x$ yra realieji skaičiai, tai vietoj x galima pasirinkti $-x$, t. y. atlikti keitinį $x \to -x$; gausime naują lygtį

$$-x(f(-x)+f(-(-x))+4)+2f(-x)+2=0,$$

arba

$$-x(f(-x)+f(x)+4)+2f(-x)+2=0. \qquad (3)$$

Ši lygtis kaip ir (2) turi du „nežinomuosius“ – funkcijos f reikšmes $f(x)$ ir $f(-x)$. Mūsų tikslas – rasti $f(x)$ išraišką (formulę). Pabandykime ją rasti iš (2) ir (3) lygčių sistemos

$$\begin{cases} x(f(x)+f(-x)+4)+2f(x)+2=0, \\ -x(f(-x)+f(x)+4)+2f(-x)+2=0. \end{cases}$$

Sudėję abi lygtis, gausime lygtį

$$2f(x)+2f(-x)+4=0,$$

o iš jos – sąryšį

$$f(-x)=-f(x)-2.$$

Įrašę į (2), gausime:

$$x(f(x)+(-f(x)-2)+4)+2f(x)+2=0,$$
$$2x+2f(x)+2=0,$$
$$f(x)=-x-1.$$

Taigi radome tokią funkcijos f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, tenkinančios (2) lygtį, išraišką:

$$f(x)=-x-1,\ x \in \mathbf{R}.$$

Matome, kad (2) lygtis turi vienintelį sprendinį.

Ats.: $f(x)=-x-1,\ x \in \mathbf{R}.$

3 pavyzdys. Raskime visas funkcijas f: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ (čia $\mathbf{N}$ – natūraliųjų skaičių aibė), tenkinančias lygtį

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy;\ x, y \in \mathbf{N}, \qquad (4)$$

kai $f(1)=1$.

Sprendimas. Tegu x yra bet kuris natūralusis skaičius. Tada iš (4) lygties (pasirinkę $y=1$) gauname lygtį $f(x+1)=f(x)+f(1)+x,$ o iš jos (įrašę $f(1)=1$) – lygtį

$$f(x+1) = f(x) + x + 1.$$

Pagal šią sąlygą galioja tokios lygybės:

$$\begin{aligned} &f(2) = f(1) + 2, \\ &f(3) = f(2) + 3, \\ &f(4) = f(3) + 4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f(n) = f(n-1) + n. \end{aligned}$$

Sudėję jas (atskirai kairiąsias ir dešiniąsias puses), gauname ieškomą funkcijos f reikšmių formulę:

$$f(n) = f(1) + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \ n \in \mathbf{N}.$$

Ats.: $f(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}, \ n \in \mathbf{N}.$

4 pavyzdys. Išspręskime funkcinę lygtį

$$x\, f(x) + 2 f\left(-\frac{1}{x}\right) = 3; \ x \in \mathbf{R}, \ x \neq 0. \qquad (5)$$

Sprendimas. Tarkime, kad funkcija f, tenkinanti (5) lygtį, egzistuoja. Argumento reikšmę x $(x \neq 0)$ pakeiskime reikšme $-\dfrac{1}{x}$ (atlikime keitinį $x \to -\dfrac{1}{x}$). Gausime:

$$-\frac{1}{x} \cdot f\left(-\frac{1}{x}\right) + 2 f(x) = 3, \ \text{nes} \ -\frac{1}{x} = -\frac{1}{-\frac{1}{x}} = x.$$

Šioje lygtyje yra tie patys du „nežinomieji“ ($f(x)$ ir $f\left(-\dfrac{1}{x}\right)$) kaip ir (5) lygtyje. Jų išraiškas nesunku rasti iš sistemos

$$\begin{cases} x\, f(x) + 2 f\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 3, \\ -\dfrac{1}{x} \cdot f\left(-\dfrac{1}{x}\right) + 2 f(x) = 3. \end{cases}$$

Iš pirmos lygties gautą $f\left(-\frac{1}{x}\right)$ išraišką

$$f\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{2}-\frac{x}{2}f(x)$$

įrašę į antrą lygtį, turėsime lygtį tik su „nežinomuoju“ $f(x)$:

$$-\frac{1}{x}\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{2}f(x)\right)+2f(x)=3.$$

Toliau:

$$-\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}f(x)+2f(x)=3,$$

$$\frac{5}{2}f(x)=3+\frac{3}{2x},$$

$$f(x)=\frac{3(2x+1)}{5x}.$$

Ats.: $f(x)=\frac{3(2x+1)}{5x}, \quad x\neq 0.$

5 pavyzdys. Išspręskime funkcinę lygtį

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x;\ x\in\mathbf{R},\ x\neq 0,\quad x\neq 1. \tag{6}$$

Sprendimas. Atlikime keitinį $x\to\frac{1}{1-x}$. Gausime, kad

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)=f\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}\right)=f\left(\frac{x-1}{x}\right),$$

todėl vietoj (6) lygties turėsime lygtį

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{1-x}. \tag{7}$$

Matome, kad greta „nežinomųjų“ $f(x)$ ir $f\left(\frac{1}{1-x}\right)$ atsirado trečias

„nežinomasis“ – funkcijos f reikšmė $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$. Pabandykime atlikti keitinį $x \to \frac{x-1}{x}$. Gausime

$$f(x) = f\left(\frac{x-1}{x}\right), \quad f\left(\frac{1}{1-x}\right) = f\left(\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}\right) = f(x),$$

todėl (6) lygtis tampa lygtimi

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = \frac{x-1}{x}. \tag{8}$$

Funkcijos f argumento reikšmių taškuose x, $\frac{1}{1-x}$ ir $\frac{x-1}{x}$ ciklas užsidarė. Todėl sudarome (6), (7) ir (8) lygčių sistemą „nežinomiesiems“ $f(x)$, $f\left(\frac{1}{1-x}\right)$ ir $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$ rasti

$$\begin{cases} f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x, \\ f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-x}, \\ f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = \frac{x-1}{x}. \end{cases} \tag{9}$$

Tegu $u = f(x)$, $v = f\left(\frac{1}{1-x}\right)$, $t = f\left(\frac{x-1}{x}\right)$. Įrašę į (9), gausime tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} u + v = x, \\ v + t = \frac{1}{1-x}, \\ t + u = \frac{x-1}{x}. \end{cases}$$

Iš trečios lygties randame $t=\dfrac{x-1}{x}-u;$ tada iš antros lygties

$$v=\frac{1}{1-x}-t=\frac{1}{1-x}-\left(\frac{x-1}{x}-u\right)=\frac{1}{x(1-x)}-1+u,$$

o iš pirmos lygties

$$u=x-v=x-\left(\frac{1}{x(1-x)}-1+u\right)=x-\frac{1}{x(1-x)}+1-u=\frac{x^3-x+1}{x(x-1)}-u.$$

Dydį u randame iš lygties

$$u=\frac{x^3-x+1}{x(x-1)}-u.$$

Jo išraiška tokia:

$$u=\frac{x^3-x+1}{2x(x-1)};\quad x\neq 0,\quad x\neq 1.$$

Taigi ieškoma funkcijos f formulė yra

$$f(x)=\frac{x^3-x+1}{2x(x-1)},\quad x\neq 0,\quad x\neq 1.$$

Ats.: $f(x)=\dfrac{x^3-x+1}{2x(x-1)},\quad x\neq 0,\quad x\neq 1.$

6 pavyzdys. Raskime visas funkcijas f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, tenkinančias lygtį

$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)\cdot f(y);\ x,y\in\mathbf{R}. \tag{10}$$

Sprendimas. Tegu $x\in\mathbf{R}$ ir $y=x;$ tada iš (10) lygties gausime lygtį $2x\,f(x)=2x\,f^2(x),$ arba lygtį

$$x\,f(x)(f(x)-1)=0. \tag{11}$$

Kadangi (11) galioja ir tada, kai $x\neq 0,$ tai yra tik dvi galimybės: arba $f(x)=0,$ arba $f(x)=1.$

Jei $f(x)=0,$ tai iš (10) gauname lygybę $x\,f(y)=0,$ galiojančią su visais $y\in\mathbf{R}$. Vadinasi (nes x gali būti ir nelygus nuliui), $f(y)\equiv 0$ aibėje $\mathbf{R}$, kai $f(x)=0.$

Jei $f(x)=1,$ tai iš (10) gauname lygybę $x\,f(y)+y=(x+y)\,f(y);$

o iš jos – lygybę $y(f(y)-1)=0$, galiojančią su visais $y \in \mathbf{R}$. Taigi $f(y)=1$ su visais $y \in \mathbf{R}$, kai $f(x)=1$.

Iš atliktos analizės matome, kad yra tik dvi funkcijos – (10) lygties sprendiniai: $f(x)\equiv 0$ ir $f(x)\equiv 1$ (aibėje **R**).

Ats.: $f(x)\equiv 0$ ir $f(x)\equiv 1$ (aibėje **R**).

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Patikrinkite, ar $f(x)=\dfrac{4x^2-x+1}{5(x-1)}$, $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 1$, tenkina funkcinę lygtį

$$x\,f(x)+2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1.$$

2. Funkcija f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ yra lygties

$$(x^2-1)f(x)-f(-x)=x^2(2-x^2)$$

sprendinys. Apskaičiuokite $f(2)$.

3. Raskite visas funkcijas f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, kurios tenkina lygtį

$$x^2 f(x)+f(1-x)=2x-x^4.$$

4. Išspręskite funkcinę lygtį

$$x^{-1}\cdot f(-x)+f(x^{-1})=x,\ x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}.$$

5. Nustatykite, su kuriomis a, b ir c reikšmėmis funkcija f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, apibrėžta formule $f(x)=ax^2+bx+c$, tenkina lygtį

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy;\ x, y \in \mathbf{R}\setminus\{0\}.$$

6. Raskite visas funkcijas f: $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$, kurios tenkina lygtį $f(n)=f(n-1)+2^n$ ir sąlygą $f(1)=1$.

7. Išspręskite funkcinę lygtį

$$2f(x^n)+f(-x^n)=3x,\ \ x\in\mathbf{R},$$

kai n – nelyginis natūralusis skaičius.

8. Raskite bent vieną funkciją f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, tenkinančią sąlygą

$$f(x\cdot f(y))=x^{2009}\cdot f(f(y));\ x,y\in\mathbf{R}.$$

9. Raskite f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, jeigu

$$f(x)\cdot f(y)=f(x-y),\ \text{kai}\ x,y\in\mathbf{R}.$$

10. Išspręskite funkcinę lygtį

$$2x\,f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=2x,\ \ x\in\mathbf{R},\ \ x\neq 1.$$

VI. TRIGONOMETRIJOS TAIKYMAS GEOMETRIJOJE

Edmundas Mazėtis
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

Šiame darbe Jūs giliau susipažinsite su trigonometrijos taikymais geometrijoje, pakartosite žinomas trigonometrijos formules ir teoremas, išmoksite naujų.

Priminsime geometrijos pamokose įrodytas sinusų ir kosinusų teoremas.

1 teorema (kosinusų teorema). Trikampio kraštinės kvadratas lygus kitų trikampio kraštinių kvadratų sumos ir dvigubos tų kraštinių sandaugos, padaugintos iš kampo tarp jų kosinuso, skirtumui:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cdot \cos\angle C,$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B,$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle A.$$

2 teorema (sinusų teorema). Trikampio kraštinės ir prieš ją esančio kampo sinuso santykis yra lygus apibrėžto apie trikampį apskritimo skersmeniui:

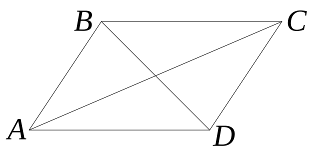
$$\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{AC}{\sin\angle B} = \frac{BC}{\sin\angle A} = 2R.$$

3 teorema (trikampio ploto formulė). Trikampio plotas lygus dviejų trikampio kraštinių ir kampo tarp jų sinuso sandaugos pusei:

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC\sin\angle A = \frac{1}{2}AC \cdot CB\sin\angle C = \frac{1}{2}AB \cdot BC\sin\angle B.$$

Pateiksime keletą šių teoremų taikymo geometrijos uždavinių sprendime pavyzdžių.

1 pavyzdys. Įrodysime, kad lygiagretainio įstrižainių kvadratų suma lygi jo kraštinių kvadratų sumai (1 pav.).



1 pav.

Trikampiams ABD ir ACD taikome kosinusų teoremą ir gauname

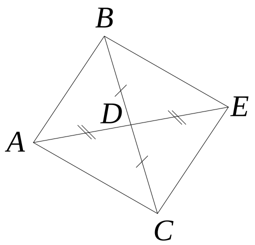
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\angle BAD,$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos\angle ADC.$$

Kadangi $\angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$, tai $\cos\angle ADC = -\cos\angle BAD.$ Sudėję gautąsias lygybes ir atsižvelgę į tai, kad $AB = DC$, gauname $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$, ką ir reikėjo įrodyti.

2 pavyzdys. Įrodysime, kad trikampio *ABC* pusiaukraštinės *AD* ilgis randamas pagal formulę

$$AD = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}.$$



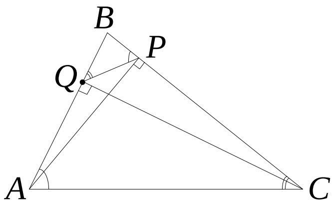
2 pav.

Pratęskime pusiaukraštinę *AD* ir atidėkime atkarpą *DE*, lygią atkarpai *AD* (2 pav.). Keturkampio *ABEC* įstrižainės *AE* ir *BC* susikerta taške *D*, kuriame abi dalijasi pusiau, todėl šis keturkampis – lygiagretainis. Pagal 1 pavyzdyje įrodytą lygybę turime

$$AE^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2).$$

Iš čia $4AD^2 = 2(AB^2 + AC^2) - BC^2$ – tai ir reikėjo įrodyti.

3 pavyzdys. Smailiojo trikampio *ABC* plotas yra 18, atkarpos *AP* ir *CQ* – jo aukštinės. Trikampio *BPQ* plotas lygus 2, o atkarpos *PQ* ilgis lygus $2\sqrt{2}$. Apskaičiuosime apie trikampį *ABC* apibrėžto apskritimo spindulio ilgį.



3 pav.

Iš stačiųjų trikampių *ABP* ir *CBQ* randame (3 pav.): $\cos B = \dfrac{BP}{AB} = \dfrac{BQ}{BC}$, t. y. $\dfrac{BP}{BQ} = \dfrac{AB}{BC}$. Iš čia seka, kad trikampiai *BPQ* ir *BAC* yra panašūs, o jų panašumo koeficientas lygus cosB. Kadangi panašiųjų trikampių plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui, tai pagal sąlygą $\dfrac{2}{18} = \cos^2 B.$ Kadangi kampas *B* smailusis, tai

$\cos B = \frac{1}{3}$. Iš minėtų trikampių panašumo gauname $\frac{PQ}{AC} = \frac{BP}{AB}$, t. y. $\frac{PQ}{AC} = \cos B$. Iš čia $AC = \frac{PQ}{\cos B} = 6\sqrt{2}$. Tuomet pagal sinusų teoremą trikampiui ABC turime $\frac{AC}{\sin B} = 2R$, t. y. $R = \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{9}{2}$.

Spręsdami šį uždavinį, gavome tokį faktą: jei atkarpos AP ir CQ yra trikampio ABC aukštinės, tai $\Delta ABC \sim \Delta PBQ$. Ši trikampių aukštinių savybė dažnai taikoma sprendžiant uždavinius.

Atliekant šią užduotį, Jums reikės prisiminti (o gal sužinoti) visą eilę trigonometrinių formulių. Kai kurias jų čia pateikiame:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Taikant šias trigonometrines tapatybes, galima įrodyti ir naujų trikampio elementams būdingų lygybių.

4 pavyzdys. Įrodysime, kad trikampiui ABC yra teisinga lygybė

$$a(\cos A + \cos B\cos C) = b(\cos B + \cos A\cos C) = c(\cos C + \cos A\cos B),$$

čia a, b, c – kraštinių BC, AC ir AB ilgiai.

Kadangi trikampio kampų suma lygi 180°, tai $\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C)$, tuomet

$$a(\cos A + \cos B\cos C) = a(-\cos(B+C) + \cos B\cos C) =$$

$$= a(-\cos B\cos C + \sin B\sin C + \cos B\cos C) = a\sin B\sin C.$$

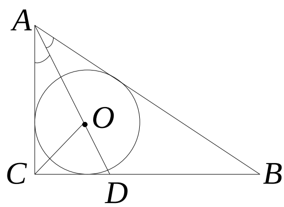
Analogiškai

$$b(\cos B + \cos A\cos C) = b(-\cos(A+C) + \cos A\cos C) = b\sin A\sin C.$$

Lygybė $a\sin B\sin C = b\sin A\sin C$ ekvivalenti lygybei $a\sin B = b\sin A$, t. y. lygybei $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$. Taigi pirmoji įrodomoji lygybė ekvivalenti sinusų teoremai, taigi ji įrodyta. Analogiškai įrodoma ir antroji lygybė.

Kartais geometrinio uždavinio sprendimas yra suvedamas į trigonometrinės lygties sprendimą. Suradus trigonometrinės lygties sprendinių aibę, iš jos atrenkami tie sprendiniai, kurie tenkina uždavinio sąlygą.

5 pavyzdys. Stačiojo trikampio ABC $(\angle C = 90^\circ)$ smailiojo kampo pusiaukampinė AD įbrėžto į trikampį apskritimo centru O dalijama santykiu $AO:OD = (\sqrt{3}+1):(\sqrt{3}-1).$ Rasime trikampio smailiųjų kampų didumus.



4 pav.

Kadangi taškas O – trikampio ABC pusiaukampinių sankirtos taškas, tai atkarpa CO taip pat pusiaukampinė (4 pav.) ir pagal trikampio ACD pusiaukampinių savybę

$$AO:OD = AC:CD = \mathrm{ctg}\frac{A}{2}.$$

Taigi

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2} = \frac{OD}{AO} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}.$$

Pagal pusės kampo tangento formulę $\mathrm{tg}\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$, taigi gauname trigonometrinę lygtį $1-\cos A = (2-\sqrt{3})\sin A.$ Pakėlę abi puses kvadratu turime

$$1-2\cos A+\cos^2 A. = (7-4\sqrt{3})(1-\cos^2 A), \text{ arba}$$

$$(4-2\sqrt{3})\cos^2 A - \cos A + 2\sqrt{3} - 3 = 0.$$

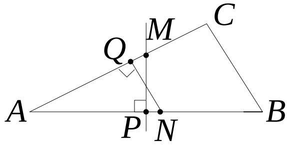
Šios lygties sprendiniai $\cos A = 1$ ir $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Kadangi A – smailusis stačiojo trikampio kampas, tai uždavinio sąlygą tenkina tik antrasis sprendinys, t. y. $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$.

6 pavyzdys. Trikampio ABC kraštinės AB vidurio statmuo kerta kraštinę AC taške M ir $AM:MC=3.$ Kraštinės AC vidurio statmuo kerta kraštinę AB taške N ir $AN:NB=2.$ Rasime trikampio ABC kampus.

Sakykime, kad trikampio ABC kraštinės AB vidurio taškas P, o kraštinės AC – taškas Q (5 pav.). Jei a, b, c – atitinkamai kraštinių BC, AC ir AB ilgiai, tai pagal uždavinio sąlygą

$$AM=\frac{3}{4}b,\quad MC=\frac{1}{4}b,\quad AN=\frac{2}{3}c,\quad NB=\frac{1}{3}c.$$

Iš stačiųjų trikampių AMP ir AQN seka, kad $\cos A=\dfrac{AP}{AM}=\dfrac{2c}{3b},\quad \cos A=\dfrac{AQ}{AN}=\dfrac{3b}{4c}.$



5 pav.

Taigi $\dfrac{2c}{3b}=\dfrac{3b}{4c}$ t. y., $c=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}b.$ Todėl $\cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ir $\angle A=45^\circ.$

Trikampiui ABC taikome kosinusų teoremą ir gauname

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+\frac{9}{8}b^2-2b\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}}b\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5}{8}b^2,$$

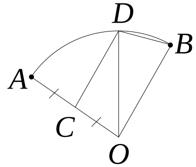
t. y. $a=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}b.$ Tuomet pagal sinusų teoremą $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$, taigi

$\sin B=\dfrac{2}{\sqrt{5}},\quad \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$ t. y., $\sin C=\dfrac{3}{\sqrt{10}}.$

Geometrijos uždaviniuose kartais reikia naudoti atvirkštines trigonometrines funkcijas, jų savybes. Priminkime, kad skaičiaus x $(|x|\le 1)$ *arksinusu* yra vadinamas kampas iš intervalo $[-90^\circ;90^\circ]$, kurio sinusas lygus x; taigi pagal apibrėžimą $\sin(\arcsin x)=x$, jei $|x|\le 1$. Analogiškai skaičiaus x $(|x|\le 1)$ arkkosinusas yra kampas, priklausantis intervalui $[0^\circ;180^\circ]$, kurio kosinusas lygus x, t. y. $\cos(\arccos x)=x$, jei $|x|\le 1$. Be to, visiems x, $(|x|\le 1)$ yra teisinga lygybė $\arcsin x+\arccos x=90^\circ$.

7 pavyzdys. Skritulio išpjovos centrinis kampas AOB lygus α, skritulio spindulys lygus R. Per skritulio spindulio OA vidurio tašką C nubrėžta tiesė, lygiagreti su spinduliu OB, kuri lanką AB kerta taške D. Rasime trikampio OCD plotą.

Sakykime, kad taškas C yra atkarpos OA vidurio taškas (6 pav.). Kadangi tiesės OB ir CD lygiagrečios, tai $\angle OCD = 180^\circ - \alpha.$ Iš sinusų teoremos trikampiui OCD turime $\dfrac{OC}{\sin \angle ODC} = \dfrac{OD}{\sin(180^\circ - \alpha)}.$ Kadangi $OD = R,\quad OC = \dfrac{R}{2},$ tai iš šios lygybės seka, kad



6 pav.

$\sin \angle ODC = \dfrac{1}{2}\sin\alpha,$ t. y. $\angle ODC = \arcsin\left(\dfrac{1}{2}\sin\alpha\right).$ Tuomet

$$\angle COD = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) - \arcsin\left(\frac{1}{2}\sin\alpha\right) = \alpha - \arcsin\left(\frac{1}{2}\sin\alpha\right)$$

ir

$$\sin \angle COD = \sin\left(\alpha - \arcsin\left(\frac{1}{2}\sin\alpha\right)\right) =$$

$$\sin\alpha\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\sin\alpha\right)\right) - \cos\alpha\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\sin\alpha\right)\right) =$$

$$\sin\alpha \cdot \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\sin\alpha\right)\right)} - \cos\alpha \cdot \frac{1}{2}\sin\alpha =$$

$$\sin\alpha \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin^2\alpha} - \cos\alpha \cdot \frac{1}{2}\sin\alpha.$$

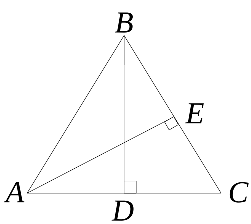
Taigi trikampio COD plotas

$$S = \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin \angle COD =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{2} \cdot R \cdot \left(\sin\alpha \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin^2\alpha} - \cos\alpha \cdot \frac{1}{2}\sin\alpha\right) =$$

$$= \frac{R^2 \sin\alpha}{8}\left(\sqrt{4 - \sin^2\alpha} - \cos\alpha\right).$$

8 pavyzdys. Lygiašonio trikampio ABC $(AB = BC)$ aukštinė AE yra tokia, kad $BE : AC = 7 : 6.$ Rasime trikampio kampus.

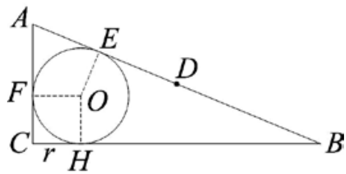


7 pav.

Iš stačiojo trikampio AEC (7 pav.) turime $\cos\angle C = \frac{EC}{AC}$. Nubrėžiame aukštinę BD ir iš trikampių AEC ir BDC panašumo gauname $\frac{EC}{AC} = \frac{CD}{BC}$. Pažymėję $AC = x$, $EC = y$, turime $CD = \frac{x}{2}$, $BC = BE + EC = \frac{7}{6}AC + EC = \frac{7}{6}x + y$. Taigi $\frac{y}{x} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{7}{6}x + y}$. Pertvarkę gauname lygtį $6y^2 + 7xy - 3x^2 = 0$. Tarę, kad y yra kintamasis, gauname $y_{1,2} = \frac{-7x \pm \sqrt{49x^2 + 72x^2}}{12} = \frac{-7x \pm 11x}{12}$. Kadangi x ir y – teigiamieji skaičiai, tai $y = \frac{1}{3}x$. Tuomet $\cos\angle C = \frac{y}{x} = \frac{1}{3}$, todėl $\angle A = \angle C = \arccos\frac{1}{3}$, $\angle B = 180^\circ - 2\arccos\frac{1}{3}$.

9 pavyzdys. Rasime stačiojo trikampio smailiuosius kampus, jei apibrėžto apie jį apskritimo ir įbrėžto į jį apskritimo spindulių santykis lygus 5:2.

Sakykime, kad taškas D yra stačiojo trikampio ABC įžambinės AB vidurio taškas (8 pav.), t. y. apibrėžto apskritimo spindulys, $AD = DB = \frac{c}{2}$. Sakykime, kad taškuose E, F ir H įbrėžtas į trikampį apskritimas liečia trikampio įžambinę AB ir statinius AC ir CB. Pažymėkime $AE = AF = y$, $BE = BH = x$, tai pagal apskritimo liestinių, nubrėžtų iš vieno taško savybę trikampio ABC perimetrui $2p$ galioja lygybė $2x + 2y + 2r = 2p$, čia $r = CF = CH$ – įbrėžto į trikampį apskritimo spindulys. Iš čia



8 pav.

$$r = p - (x + y) = p - c = \frac{1}{2}(a + b + c) - c = \frac{1}{2}(a + b - c).$$

Iš uždavinio sąlygos $\dfrac{r}{\frac{1}{2}c}=\dfrac{2}{5},$ t. y. $\dfrac{a+b-c}{c}=\dfrac{2}{5},$ arba $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}=\dfrac{7}{5}.$

Kadangi $\dfrac{a}{c}=\sin A,$ $\dfrac{b}{c}=\cos A,$ tai turime trigonometrinę lygtį $\sin A+\cos A=\dfrac{7}{5}.$ Kadangi kampas A – smailusis, tai $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$, todėl lygtis tampa tokia: $\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{7}{5}-\cos A.$ Iš čia gauname, kad $1-\cos^2 A=\dfrac{49}{25}-\dfrac{14}{5}\cos A+\cos^2 A,$ arba $\cos^2 A-\dfrac{7}{5}\cos A+\dfrac{12}{25}=0.$ Iš čia $\cos A=\dfrac{4}{5},$ arba $\cos A=\dfrac{3}{5}.$ Tuomet $\cos B=\sin A=\dfrac{3}{5},$ arba $\cos B=\dfrac{4}{5}.$ Taigi trikampio smailieji kampai lygūs $\arccos\dfrac{4}{5}$ ir $\arccos\dfrac{3}{5}.$

Spręsdami šį uždavinį gavome įbrėžto į statųjį trikampį apskritimo spindulio formulę $r=\dfrac{1}{2}(a+b-c),$ čia a ir b – trikampio statiniai, c – įžambinė.

10 pavyzdys. Į statųjį trikampį įbrėžto apskritimo ir įžambinės lietimosi taškas dalija įžambinę į dalis, kurių ilgių santykis lygus k. Rasime trikampio smailiųjų kampų didumus.

Tarkime, kad $AE:EB=k$ (8 pav.). Pažymėkime $BE=x,$ tuomet $AE=kx,$ o $AB=(k+1)x.$ Tada $BC=AB\cos\angle B=(k+1)x\cos B,$ $AC=AB\sin\angle B=(k+1)x\sin B.$ Kaip įrodėme 9 pavyzdyje įbrėžto į statųjį trikampį apskritimo spinduliui r teisinga lygybė $r=\dfrac{1}{2}(AC+BC-AB).$ Kita vertus

$$BC=CH+HB=r+BE, \text{ t. y. } r=BC-BE.$$

Taigi

$$\frac{1}{2}(AC + BC - AB) = BC - BE,$$

arba

$$(k+1)x\cos B - x = \frac{1}{2}((k+1)x\sin B + (k+1)x\cos B - (k+1)x).$$

Suprastinę iš $x \neq 0$, gauname trigonometrinę lygtį

$$(k+1)\cos B - 1 = \frac{k+1}{2}(\sin B + \cos B - 1),$$

t. y.

$$(k+1)(\cos B - \sin B) = 1 - k.$$

Iš čia

$$\frac{2(k+1)}{\sqrt{2}}(\sin 45^\circ \cos B - \cos 45^\circ \sin B) = 1 - k, \quad \sin(45^\circ - B) = \frac{\sqrt{2}(1-k)}{2(1+k)}.$$

Kadangi $45^\circ - B \in (-45^\circ, 45^\circ)$, tai $45^\circ - B = \arcsin\frac{\sqrt{2}(1-k)}{2(1+k)}$. Iš čia

$$\angle B = 45^\circ - \arcsin\frac{\sqrt{2}(1-k)}{2(1+k)},$$

$$\angle A = 90^\circ - \angle B = 45^\circ + \arcsin\frac{\sqrt{2}(1-k)}{2(1+k)}.$$

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Kampas tarp lygiašonio trikampio kraštinių lygus α, įbrėžto į trikampį apskritimo spindulys *r*. Apskaičiuokite trikampio plotą.

2. Atkarpos *AP* ir *CQ* yra smailiojo trikampio *ABC* aukštinės. Trikampio *ABC* perimetras lygus 15, trikampio *BPQ* perimetras lygus 9. Apie trikampį *BPQ* apibrėžto apskritimo spindulys yra $\frac{9}{5}$. Apskaičiuokite kraštinės *AC* ilgį.

3. Stačiojo trikampio *ABC* stačiojo kampo pusiaukampinė *CD* įbrėžto į trikampį apskritimo centru *O* dalijama santykiu $CO : OD = \sqrt{3} : \sqrt{2}$. Raskite trikampio smailiuosius kampus.

4. Lygiašonės trapecijos aukštinė lygi *h*, smailusis kampas tarp įstrižainių yra α . Raskite trapecijos vidurinę liniją.

5. Skritulio išpjovos *AOB* spindulys lygus *R*, centrinis kampas *AOB* lygus α . Į šią išpjovą įbrėžtas lygiakraštis trikampis, kurio viena viršūnė yra lanko *AB* vidurio taškas, o kitas priklauso spinduliams *OA* ir *OB*. Raskite trikampio kraštinės ilgį.

6. Apie apskritimą apibrėžta stačioji trapecija, kurios perimetras lygus *P*, o smailusis kampas lygus α . Raskite trapecijos aukštinę.

7. Atkarpos AA_1 ir CC_1 yra smailiojo trikampio *ABC* aukštinės. Taškai A_2 ir C_2 yra simetriški taškams A_1 ir C_1 atkarpų *BC* ir *AB* vidurio taškų atžvilgiu, taškas *O* yra apie trikampį *ABC* apibrėžto apskritimo centras. Įrodykite, kad tiesė *OB* kerta atkarpą A_2C_2 jos vidurio taške.

8. Trikampio kraštinės lygios *a* ir *b*, o jų sudaromo kampo pusiau-kampinės ilgis *l*. Raskite trikampio kampą, kurį sudaro duotosios kraštinės.

9. Dviejų išoriškai besiliečiančių apskritimų bendroji išorinė liestinė su jų centrų tiese sudaro kampą α . Raskite apskritimų spindulių santykį.

10. Lygiagretainio *ABCD* kraštinių santykis $AB : AD = m : n$, įstrižainių santykis $BD : AC = p : q$. Raskite lygiagretainio kampus.

VII. IŠKILOSIOS FUNKCIJOS IR NELYGYBĖS

Juozas Šinkūnas
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

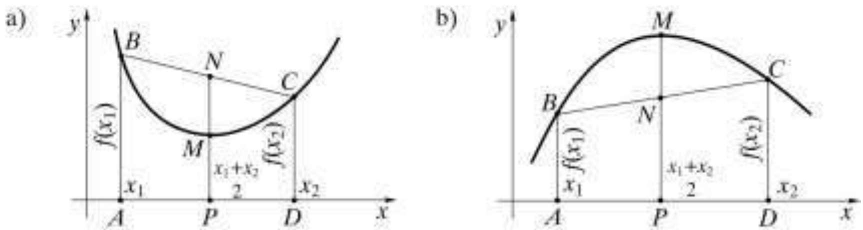
Vidurinių mokyklų ir gimnazijų matematikos programose mažai dėmesio skiriama funkcijų savybių taikymui sprendžiant elementariosios matematikos uždavinius. Ši tema skirta iškilų žemyn ir iškilų aukštyn funkcijų savybių taikymui sprendžiant algebrines, geometrines ir trigonometrines nelygybes. Manau, kad kiekvienas iš Jūsų atidžiai perskaitęs pateiktus nurodymus ir išnagrinėjęs pavyzdžių sprendimus, sėkmingai atliks duotąją užduotį.

1 apibrėžimas. Funkcija f: $(a;b)\subset \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ vadinama *iškila žemyn* (*aukštyn*), jeigu bet kuriems $x_1, x_2 \in (a;b)$ galioja nelygybė

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\underset{(\geq)}{\leq}\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}. \tag{1}$$

Jeigu lygybė galioja tik tada, kai $x_1 = x_2$, funkcija f vadinama *griežtai iškila žemyn* (*aukštyn*). Toliau nagrinėsime tik griežtai iškilas funkcijas ir žodį „griežtai“ praleisime.

Išsiaiškinsime funkcijos iškilumo žemyn (aukštyn) geometrinę prasmę (žr. 1 pav. a) ir b)).



1 pav.

Jeigu funkcija f intervale $(a;b)$ yra iškila žemyn (aukštyn), tai bet kuriame intervale $[x_1;x_2]\subset(a;b)$ funkcijos grafiko taškai yra žemiau (aukščiau) kirstinės, jungiančios taškus $B(x_1, f(x_1))$ ir $C(x_2, f(x_2))$

($PM = f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \underset{(>)}{<} \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = PN$; čia PN –trapecijos $ABCD$ vidurinė linija).

Remdamiesi apibrėžimu, ištirkime kai kurių funkcijų iškilumą.

1. Įrodykime, kad funkcija $f(x) = \sin x$ intervale (0; π) yra iškila aukštyn.

Įrodymas. Jeigu $0 < x_1 \le x_2 < \pi$, tai

$$0 < \frac{x_1+x_2}{2} < \pi, \; -\frac{\pi}{2} < \frac{x_1-x_2}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Taigi

$$\frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} = \sin\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\cos\frac{x_1-x_2}{2} \le \sin\frac{x_1+x_2}{2},$$

nes $0 < \cos\frac{x_1-x_2}{2} \le 1$. Lygybė galima tik tada, kai $x_1 = x_2$. Vadinasi, funkcija $f(x) = \sin x$ intervale (0; π) yra iškila aukštyn.

2. Funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0; +\infty)$, yra iškila žemyn, nes

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} =$$

$$= \frac{2}{x_1+x_2} - \frac{1}{2x_1} - \frac{1}{2x_2} = -\frac{(x_1-x_2)^2}{2x_1\cdot x_2\cdot(x_1+x_2)} \le 0$$

su bet kuriais $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$. Lygybė galima tik tada, kai $x_1 = x_2$.

Analogiškai įrodoma, kad funkcija $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$, yra iškila žemyn.

3. Įrodykime, kad funkcija $f(x) = \lg x$, $x \in (0; +\infty)$, yra iškila aukštyn.

Įrodymas. Pasirinkę bet kuriuos $x_1 > 0$ ir $x_2 > 0$, gauname: $\lg\frac{x_1+x_2}{2} - \frac{\lg x_1 + \lg x_2}{2} = \lg\frac{x_1+x_2}{2} - \lg\sqrt{x_1 x_2} = \lg\frac{x_1+x_2}{2\sqrt{x_1 x_2}} \ge 0$, nes

$\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow x_1+x_2 \geq 2\sqrt{x_1x_2}$ ir $\dfrac{x_1+x_2}{2\sqrt{x_1x_2}} \geq 1$. Lygybė galima tik tada, kai $x_1 = x_2$. Taigi funkcija $f(x)=\lg x$ yra iškila aukštyn.

4. Įrodysime, kad funkcija $f(x)=\operatorname{tg} x$ intervale $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ yra iškila žemyn.

Įrodymas. Kadangi

$$\operatorname{tg}\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{\operatorname{tg}x_1+\operatorname{tg}x_2}{2}=\frac{\sin\frac{x_1+x_2}{2}}{\cos\frac{x_1+x_2}{2}}-\frac{\sin(x_1+x_2)}{2\cos x_1\cos x_2}=$$

$$=\frac{\sin\frac{x_1+x_2}{2}}{\cos\frac{x_1+x_2}{2}}-\frac{\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\cos\frac{x_1+x_2}{2}}{\cos x_1\cos x_2}=$$

$$=\frac{\sin\frac{x_1+x_2}{2}}{\cos\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\cos x_1\cdot\cos x_2}\cdot\left(\cos x_1\cdot\cos x_2-\cos^2\frac{x_1+x_2}{2}\right)=$$

$$=\frac{\sin\frac{x_1+x_2}{2}}{\cos\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\cos x_1\cdot\cos x_2}\cdot\left(\frac{\cos(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1+\cos(x_1+x_2)}{2}\right)=$$

$$=\frac{\sin\frac{x_1+x_2}{2}}{\cos\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\cos x_1\cdot\cos x_2}\cdot\frac{\cos(x_1-x_2)-1}{2}\leq 0,$$

tai funkcija $f(x)=\operatorname{tg} x$ intervale $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ yra iškila žemyn.

Analogiškai įrodoma, kad funkcija $f(x) = \operatorname{ctg} x$ intervale $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ yra iškila žemyn.

Pastaba. Tiriant funkcijų savybes išvestinių pagalba, funkcijos iškilumą galima nustatyti remiantis šia **teorema:**

Funkcija *f*: $(a; b) \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, turinti antrąją išvestinę, yra iškila žemyn (aukštyn) tada ir tik tada, kai $f'' \geq 0$ ($f'' \leq 0$) intervale $(a; b)$.

Pavyzdžiui, funkcija $f(x) = x^4$, $x \in \mathbf{R}$, yra iškila žemyn, nes $f''(x) = 12x^2 \geq 0$.

1 teorema. Jeigu funkcija *f*: $(a; b) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ yra iškila žemyn (aukštyn), tai visiems $x_1, x_2, ..., x_n \in (a; b)$ teisinga nelygybė

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \underset{(\geq)}{\leq} \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}. \qquad (2)$$

Lygybė galima tik tada, kai $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Įrodymas. Teoremą įrodysime tik atskiriems *n* atvejams.

1 atvejis, kai $n = 4$. Kadangi funkcija *f* yra iškila žemyn (aukštyn), tai

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) = f\left(\frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2}}{2}\right) \underset{(\geq)}{\leq}$$

$$\underset{(\geq)}{\leq} \frac{f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)}{2} \underset{(\geq)}{\leq}$$

$$\underset{(\geq)}{\leq} \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)}{4}.$$

Analogiškai įrodoma, kad (2) nelygybė teisinga, kai $n = 2^k$, $k = 3, 4, 5, \ldots$.

2 atvejis, kai $n = 3$. Šiuo atveju gauname:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)=f\left(\frac{\frac{x_1+x_2+x_3}{3}+x_1+x_2+x_3}{4}\right)\underset{(\geq)}{\leq}$$

$$\underset{(\geq)}{\leq}\frac{1}{4}f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)+\frac{1}{4}f(x_1)+\frac{1}{4}f(x_2)+\frac{1}{4}f(x_3)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)\underset{(\geq)}{\leq}\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}.$$

Lygybė galima tik tada, kai $x_1=x_2=x_3$.

Nesunku įrodyti (2) nelygybę ir atvejais, kai $n = 6k$, k = l, 2, 3, ...

Remdamiesi l teorema, įrodysime nelygybes tarp n teigiamų skaičių aritmetinio (A_n), geometrinio (G_n), kvadratinio (K_n) ir harmoninio (H_n) vidurkių.

2 apibrėžimas. 1) Realiųjų skaičių $a_1, a_2, ..., a_n$ *aritmetiniu vidurkiu* vadinamas skaičius

$$A_n=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n};$$

2) realiųjų neneigiamų skaičių $a_1, a_2, ..., a_n$ *geometriniu vidurkiu* vadinamas skaičius

$$G_n=\sqrt[n]{a_1\, a_2\, ...\, a_n};$$

3) realiųjų teigiamų skaičių $a_1, a_2, ... a_n$ *harmoniniu vidurkiu* vadinamas skaičius

$$H_n=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}};$$

4) Realiųjų skaičių $a_1, a_2, ..., a_n$ *kvadratiniu vidurkiu* vadinamas skaičius

$$K_n=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}}.$$

2 teorema. Teigiamų skaičių $a_1, a_2, ..., a_n$ vidurkiams teisingos nelygybės:

$$H_n \le G_n \le A_n \le K_n. \quad (3)$$

Vidurkiai lygūs tada ir tik tada, kai visi skaičiai yra lygūs.

Įrodymas. 1) Pirmiausia įrodykime, kad $G_n \le A_n$. Remdamiesi funkcijos $f(x) = \lg x$, $x \in (0; +\infty)$, iškilumu aukštyn, gauname:

$$\lg \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \frac{\lg a_1 + \lg a_2 + ... + \lg a_n}{n} = \lg(a_1 a_2 ... a_n)^{1/n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.\ \text{Taigi}\ \ G_n \le A_n.$$

Lygybė galima tik tada, kai $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

2) Įrodykime, kad $H_n \le G_n$.

Pasirinkime n teigiamų skaičių $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, ..., \frac{1}{a_n}$ ir jiems pritaikykime geometrinio ir aritmetinio vidurkių nelygybę

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot ... \cdot \frac{1}{a_n}} \le \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \cdot + ... + \frac{1}{a_n}}{n}.$$

Iš jos išplaukia nelygybė

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \cdot + ... + \frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n},$$

t. y. nelygybė $H_n \le G_n$. Lygybė galima tik tada, kai $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

3) Įrodysime, kad $A_n \le K_n$.

Remdamiesi funkcijos $f(x) = x^2$, $x \in (0; +\infty)$, iškilumu žemyn, gauname, kad bet kuriems teigiamiems skaičiams $a_1, a_2, ..., a_n$ galioja nelygybė

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^2 \le \frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}.$$

Tada gauname:

$$K_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} \ge \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^2} =$$

$$=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}=A_n.$$

Taigi $K_n \geq A_n$.

Lygybė galima tik tada, kai $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Vadinasi, $H_n \leq G_n \leq A_n \leq K_n$.

Remdamiesi (2) ir (3) nelygybėmis, išspręsime keletą uždavinių. Daug uždavinių, sprendžiamų remiantis (3) nelygybėmis, galima rasti [1] knygelėje.

1 pavyzdys. Jeigu α, β ir γ yra trikampio kampų didumai, tai teisingos šios nelygybės:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\leq\frac{1}{8}$;

2) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leq\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}$;

3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\leq\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma$, kai $\alpha,\beta,\gamma\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Įrodymas. 1) Funkcija $f(x)=\sin\frac{x}{2}$, $x\in(0;\pi)$, yra iškila aukštyn, todėl

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}}{3}\leq\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

O tada $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\leq\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}}{3}\right)^3\leq\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$.

Lygybė galima tik tada, kai $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$;

2) Kadangi funkcija $f(x)=\sin x$ intervale $(0;\pi)$ yra iškila aukštyn, tai

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}\le\sin\frac{\alpha+\beta}{2},\quad \frac{\sin\beta+\sin\gamma}{2}\le\sin\frac{\beta+\gamma}{2},$$
$$\frac{\sin\gamma+\sin\alpha}{2}\le\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

Sudėję šias nelygybes, gauname:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\beta+\gamma}{2}+\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}=$$
$$=\sin\frac{\pi-\gamma}{2}+\sin\frac{\pi-\alpha}{2}+\sin\frac{\pi-\beta}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2};$$

3) Funkcija $f(x)=\mathrm{ctg}\,x$ intervale $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ yra iškila žemyn, todėl

$$\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta}{2}\ge\mathrm{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2},\quad \frac{\mathrm{ctg}\,\beta+\mathrm{ctg}\,\gamma}{2}\ge\mathrm{ctg}\frac{\beta+\gamma}{2},$$
$$\frac{\mathrm{ctg}\,\gamma+\mathrm{ctg}\,\alpha}{2}\ge\mathrm{ctg}\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

Sudėję šias nelygybes, gauname:

$$\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta+\mathrm{ctg}\,\gamma\ge\mathrm{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}+\mathrm{ctg}\frac{\beta+\gamma}{2}+\mathrm{ctg}\frac{\gamma+\alpha}{2}=$$
$$=\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta+\mathrm{ctg}\,\gamma\ge\mathrm{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}+\mathrm{ctg}\frac{\beta+\gamma}{2}+\mathrm{ctg}\frac{\gamma+\alpha}{2}=$$
$$=\mathrm{ctg}\frac{\pi-\gamma}{2}+\mathrm{ctg}\,\pi-\alpha 2+\mathrm{ctg}\frac{\pi-\beta}{2}=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Lygybė galima tik tada, kai $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$.

2 pavyzdys. Iš visų trikampių, apibrėžtų apie spindulio r apskritimą, raskime mažiausio perimetro trikampį.

Sprendimas. Sakykime, apie apskritimą apibrėžtas trikampis ABC, kurio kampų didumai yra α, β ir γ (žr. 2 pav.). Kadangi

$AB_1=AC_1=r\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $\quad CB_1=CA_1=r\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}$, $\quad BA_1=BC_1=r\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}$, tai

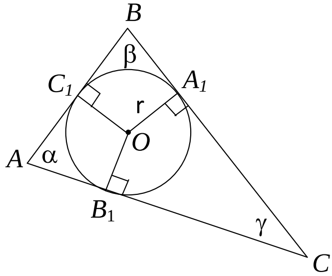
$P_{ABC}=2r\left(\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)$ Funkcija $\mathrm{ctg}\frac{x}{2}$ intervale $(0;\pi)$

yra iškila žemyn, todėl

$$P = 2r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right) \geq$$

$$\geq 2r \cdot 3\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6} = 6r\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = 6\sqrt{3}\,r.$$

Lygybė galima (perimetras yra mažiausias) tik kai $\alpha = \beta = \gamma$. Taigi apie apskritimą apibrėžto lygiakraščio trikampio perimetras yra mažiausias.



2 pav.

3 pavyzdys. Jeigu $a_1, a_2, ..., a_n$ – n-kampio kraštinių ilgiai, o $P = a_1 + a_2 + ... + a_n$ – perimetras, tai teisinga nelygybė

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{P - a_k} \geq \frac{n}{n-1}.$$

(Moksleivių matematikos olimpiados uždavinys: Vokietija, 1967; Anglija, 1976.)

Įrodymas. Pažymėkime $b_k = \dfrac{a_k}{P}$. Tada $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = 1$ ir $\dfrac{a_k}{P-a_k} = \dfrac{b_k}{1-b_k}$.

Taigi reikia įrodyti, kad

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{1-b_k} \geq \frac{n}{n-1}, \text{ kai } \sum_{k=1}^{n} b_k = 1,\ b_k > 0.$$

Pasirinkime funkciją $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$, $x \in (0;1)$. Ji yra iškila žemyn, nes

$f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3} > 0$, kai $x \in (0;1)$.

Taikydami 1 teoremą, gausime nelygybę

$$\frac{\dfrac{b_1+b_2+...+b_n}{n}}{1-\dfrac{b_1+b_2+...+b_n}{n}} \leq \frac{1}{n}\left(\frac{b_1}{1-b_1} + \frac{b_2}{1-b_2} + ... + \frac{b_n}{1-b_n}\right),$$

o iš jos – įrodomą nelygybę:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{1-b_k}\geq n\cdot\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}=\frac{n}{n-1}.$$

Literatūra. 1. J. Šinkūnas, *Ekstremumai be išvestinių*, TEV, 2008, 128 p.

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1. Remdamiesi iškilosios funkcijos apibrėžimu, įrodykite, kad funkcija $f(x)=\cos x$ intervale $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ yra iškila aukštyn.

2. Tarp trikampių, įbrėžtų į spindulio R skritulį, raskite didžiausio ploto trikampį.

3. Įrodykite, kad $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\leq\frac{1}{8}$ (čia α,β,γ – smailiojo trikampio kampų didumai).

4. Jeigu α, β ir γ – smailiojo trikampio kampų didumai, tai $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\leq\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma.$ Įrodykite.

5. Trikampio kraštinių ilgiai lygūs a, b ir c, o apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulys yra R. Įrodykite, kad $a+b+c\leq 3\sqrt{3}R$. Kokiam trikampiui galioja lygybė?

Nurodymas. Remkitės sinusų teorema ir funkcijos $f(x)=\sin x$ iškilumu aukštyn intervale $(0;\pi)$.

6. a) Įrodykite, kad funkcija $f(x)=x^6$ yra iškila žemyn visoje apibrėžimo srityje;

b) Įrodykite, kad $32(a^6+b^6)\geq(a+b)^6$ su visomis a, b reikšmėmis.

7. a) Įrodykite, kad funkcija $f(x)=\sqrt{x}$ yra iškila aukštyn visoje apibrėžimo srityje.

b) Įrodykite, kad $\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\le\sqrt{3p}$; čia a, b, c – trikampio kraštinių ilgiai, o p – trikampio pusperimetris.

8. Trikampio ABC vidinių kampų A, B ir C pusiaukampinės kerta apie šį trikampį apibrėžtą apskritimą taškuose A_1, B_1 ir C_1. Įrodykite, kad trikampio ABC perimetras ne didesnis už trikampio $A_1B_1C_1$ perimetrą.

Nurodymas. Pastebėję, kad $\angle A_1=\dfrac{\angle B+\angle C}{2}$, $\angle B_1=\dfrac{\angle A+\angle C}{2}$, $\angle C_1=\dfrac{\angle A+\angle B}{2}$, remkitės sinusų teorema ir funkcijos $f(x)=\sin x$ iškilumu aukštyn intervale $(0;\pi)$.

9. Įrodykite, kad $\dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\ge 6$; čia α, β, γ – trikampio kampų didumai.

Nurodymas. Remkitės nelygybe tarp trijų teigiamų skaičių aritmetinio ir geometrinio vidurkių bei pirmo pavyzdžio 1-ąja nelygybe.

10. a) Įrodykite, kad funkcija $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $x\in(0;1)$, yra iškila žemyn.

b) Įrodykite nelygybę $\dfrac{p}{p-a}+\dfrac{p}{p-b}+\dfrac{p}{p-c}\ge 9$; čia a, b, c – trikampio kraštinių ilgiai, o p – trikampio pusperimetris.

VIII. PRIKLAUSOMI IR NEPRIKLAUSOMI ATSITIKTINIAI DYDŽIAI

Eugenijus Stankus
(Vilniaus universitetas)

Mus supa daugybė atsitiktinių reiškinių ir atsitiktinių dydžių – metę monetą, nežinome, kuria puse ji atsivers; metę lošimo kauliuką, nežinome, kiek akučių atsivers; nežinome, kiek autoavarijų per dieną įvyks stebimoje automagistralės atkarpoje, kokios bus degalų kainos po savaitės, koks bus pirmojo sutikto gatvėje žmogaus ūgis ir svoris ir pan. Taigi iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad mes visai nieko nežinome ir gyvename atsitiktinumų pasaulyje, kuriame vis dėlto gebame išgyventi, netgi planuojame savo, šalies ar pasaulio ateitį. Taip yra todėl, kad ir tarp atsitiktinių reiškinių galima įžiūrėti dėsningumų. Tikimybių teorija ir tiria tokius dėsningumus. Žinoma, remdamiesi ja negalime nustatyti, ar įvyks mus dominantis įvykis, kokią reikšmę įgis stebimas dydis tam tikru momentu, tačiau galime įvertinti šio įvykio įvykimo, konkrečios dydžio reikšmės pasirodymo galimybę, t. y. apskaičiuoti tokių įvykių tikimybes. Taip pat dažnai svarbu nustatyti, kokią įtaką vieno dydžio įgytos reikšmės daro kitam dydžiui – kartais jokios (kai dydžiai yra nepriklausomi), o kartais – gana didelę (kai dydžiai yra priklausomi). Tokio pobūdžio klausimams nagrinėti ir skirta ši tema.

Trumpai prisiminkime pagrindines tikimybių teorijos sąvokas ir kai kurias tikimybių skaičiavimo formules.

Bandymas ir su juo susiję įvykiai. *Bandymu* arba *eksperimentu* vadiname sąlygų, sudarančių galimybę įvykti stebimajam įvykiui, visumą. Tai – sąlygos, kurioms esant, metama moneta ar lošimo kauliukas, tai – sąlygos (meteorologinės, laikotarpis, tam tikra vieta ir t. t.), kai stebimas autoavarijų skaičius magistralėje, tai – sąlygos, kuriose mes gyvename, kai domimės žmogaus ūgiu ir svoriu ar jo gyvenimo trukme.

Kiekvieną kartą atlikdami bandymą nežinome, ar įvyks stebimasis įvykis, nors sąlygos atrodo ir yra tos pačios. Tačiau mes galime išvardyti visas šio bandymo baigtis ir sudaryti *bandymo baigčių aibę*. Klasikinis pavyzdys – simetriško lošimo kauliuko vieno metimo bandymo baigtys yra šešios – gali atsiversti bet kuri iš šešių lošimo kauliuko sienelių.

Taigi su šiuo bandymu susiejame baigčių aibę $E=\{e_1; e_2; e_3; e_4; e_5; e_6\}$. Jeigu nagrinėtume dviejų simetriškų skirtingų spalvų lošimo kauliukų metimą, tai bandymo baigčių aibę $E=\{e_{ij},\ i=1,2,...,6,\ j=i=1,2,...,6\}$ galėtume sudaryti iš 36 baigčių; čia e_{ij} yra baigtis, reiškianti, kad pirmasis kauliukas atsivertė i akutėmis, o antrasis – j akutėmis. Atkreipkime dėmesį, kad šešias simetriško lošimo kauliuko metimo baigtis galime laikyti *vienodai galimomis* – nė viena iš jų neturi daugiau šansų pasirodyti, negu bet kuri kita. Taip pat vienodai galimos yra ir dviejų lošimo kauliukų metimo 36 baigtys.

Žinoma, ne visi bandymai tokie „geri“. Daugeliui bandymų vienodai galimų baigčių aibės sudaryti negalime. Pavyzdžiui, kai stebima įmonės akcijų kaina, negalime teigti, kad baigtys, jog kaina sumažės, nepakis ir padidės, yra vienodai galimos, baigtys, kad tam tikroje kelio atkarpoje per tam tikrą laikotarpį įvyks 0, 1, 2, 3, …., n autoavarijų, tikrai nėra vienodai galimos.

Kai bandymo baigčių aibė sudaryta, galime nagrinėti įvairius jos poaibius, reiškiančius atitinkamus įvykius (kurie gali įvykti atlikus šį bandymą). Pavyzdžiui, poaibis $A=\{e_2; e_4; e_6\}$ reiškia įvykį A, kad, metus lošimo kauliuką, jis atsivers lyginiu akučių skaičiumi, poaibis $B=\{e_1; e_3; e_5\}$ yra įvykis, kad atsivers nelyginis akučių skaičius, o $E_6=\{e_6\}$ – įvykis, kad atsivers šešiukė (jis sudarytas iš vienos baigties – tokius įvykius vadinsime *elementariaisiais įvykiais*). Galime sudaryti ir daugiau su šiuo bandymu susijusių įvykių. Įvykis E yra *būtinasis*, o tuščios aibės simboliu $\varnothing$ žymimas *negalimasis* įvykis. Baigtys, sudarančios įvykį, vadinamos *palankiomis* šiam įvykiui (negalimasis įvykis neturi nė vienos baigties). Visos baigtys, kurios nėra palankios pasirinktajam įvykiui A, sudaro baigčių aibę, reiškiančią *priešingąjį įvykį* $\overline{A}$.

Kadangi įvykiai tapatinami su baigčių aibėmis, tai su jais, kaip ir su bet kokiomis aibėmis, galima atlikti veiksmus. Prisiminkime įvykių sąjungos ir sankirtos sąvokas.

Dviejų įvykių A ir B *sąjunga* (žymima $A\cup B$) yra įvykis, kurį sudaro baigtys, palankios bent vienam iš įvykių A ir B.

Dviejų įvykių A ir B *sankirta* (žymima $A\cap B$) yra įvykis, kurį sudaro baigtys, palankios abiem įvykiams – ir A, ir B.

Du įvykiai A ir B vadinami *nesutaikomaisiais*, jei $A \cap B = \varnothing$, kitaip tariant, abu įvykiai negali įvykti kartu.

Įvykio tikimybė. Įvykio tikimybę galima apskaičiuoti pagal klasikinį apibrėžimą (kai bandymo baigtys yra vienodai galimos). Jeigu baigtys nėra vienodai galimos, tai įvykio tikimybė randama naudojantis bendruoju apibrėžimu. (žr. vadovėlį Matematika 11, II dalis – išplėstinis kursas, TEV, Vilnius, 2002, 112 ir 124 psl.). Prisiminkime *klasikinį tikimybės apibrėžimą*.

1 apibrėžimas. Tarkime, bandymo baigčių aibė yra sudaryta iš n vienodai galimų baigčių. Įvykio A, kuriam palankių baigčių yra m, *tikimybe* vadinamas skaičius $P(A) = \dfrac{m}{n}$.

Skaičiuojant tikimybę pagal klasikinį apibrėžimą svarbu įsitikinti baigčių vienodu galimumu, nors tai nėra paprasta. Vienodą baigčių galimumą suvokiame intuityviai – iš patirties, kaip ir kai kurias kitas pirmines matematines sąvokas (pavyzdžiui, skaičius, taškas, tiesė ir pan.). Dažniausiai teigiama: jeigu nė viena baigtis neturi daugiau šansų, negu bet kuri kita, tai tokios baigtys laikomos vienodai galimomis.

Įvykio tikimybę galima įvertinti remiantis statistiniais duomenimis. Jeigu atlikus vienodomis sąlygomis N bandymų, stebimasis įvykis A įvyko M kartų, tai santykis $\dfrac{M}{N}$ (įvykio A *santykinis dažnis*), kai N yra pakankamai didelis, gali būti apytikriai laikomas lygiu įvykio A tikimybei, nes santykinis dažnis didinant bandymų skaičių yra stabilus ir apytikriai lygus tikimybei. Ši santykinio dažnio savybė yra bendresnio tikimybių teorijos teiginio, vadinamo *didžiųjų skaičių dėsniu,* atskiras atvejis. Didžiųjų skaičių dėsnis patvirtinamas ir eksperimentiškai: literatūroje galima rasti pavyzdžių, kai moneta buvo mesta 6000 ar 12000 kartų ir herbo atsivertimo santykinio dažnio reikšmė beveik lygi 0,5, t. y. šio įvykio tikimybei.

Skaičiuojant įvykių tikimybes naudingos ir kai kurios formulės. Pavyzdžiui, iš tikimybės apibrėžimo išplaukia: jeigu įvykiai A ir B yra nesutaikomi, tai

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{1}$$

Įvykių nepriklausomumas ir priklausomumas. Jei vieno įvykio įvykimas nedaro įtakos kito įvykimui, o tiksliau – vieno iš jų tikimybė nepriklauso nuo to, ar įvyko, ar ne, kitas įvykis, tai jie yra nepriklausomi. Jeigu taip nėra, tai jie – priklausomi. Prisiminsime šių sąvokų matematinius apibrėžimus, kurie paremti sąlygine tikimybe.

Įvykio A *sąlygine tikimybe* su sąlyga, kad įvykis B įvykęs (ji žymima $P(A|B)$), vadinama tikimybė

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ kai } P(B) > 0. \qquad (2)$$

Pastarąja formule sąlyginė tikimybė išreikšta „besąlyginėmis“ tikimybėmis. Tai visai natūralu, nes skaičiuojant įvykio A sąlyginę tikimybę, kai įvykis B įvykęs, baigčių aibę sudaro tik įvykiui B palankios baigtys, o įvykiui A iš jų palankios tik tos, kurios priklauso šių įvykių sankirtai.

Jeigu $P(A|B) = P(A)$, tai įvykiai A ir B vadinami *nepriklausomais*. Taip bus tik tuomet, kaip išplaukia iš (2) formulės, kai

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (3)$$

Jei $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, tai A ir B – priklausomi įvykiai.

Nesunkiai įrodomas teiginys: kai viena iš nepriklausomų įvykių porų A ir B, A ir $\overline{B}$, $\overline{A}$ ir B, $\overline{A}$ ir $\overline{B}$ yra nepriklausomi įvykiai, tai ir visos kitos šios poros yra nepriklausomi įvykiai.

Atkreipkime dėmesį, kad įvykių nepriklausomumas ir priklausomumas visiškai atitinka gyvenimišką šių terminų sampratą.

Atsitiktiniai dydžiai. Su kiekvienu bandymu susiejome jo baigčių aibę, įvykius – baigčių aibės poaibius – ir tokių įvykių galimumo įvykti matą – tikimybę. Šioje baigčių aibėje galime apibrėžti įvairias funkcijas, kiekvienai baigčiai priskirdami kokį nors realųjį skaičių ar realiųjų skaičių porą. Tokios funkcijos reikšmę galima sužinoti tik atlikus bandymą – kai bus žinomas bandymo rezultatas. Neatlikę bandymo galime nustatyti tik šios funkcijos reikšmių tikimybes.

Funkcija $x = f(e), e \in E, x \in \mathrm{R}$, *priskirianti kiekvienai bandymo baigčiai skaitinę reikšmę (realųjį skaičių), apibrėžia* ***vienmatį,*** *su tuo bandymu susijusį,* ***atsitiktinį dydį****.*

1 pavyzdys. Taisyklingo lošimo kauliuko vieno metimo baigčių aibėje funkcija

$$x = f(e) = \begin{cases} 2, \text{ kai } e = e_1, e_2; \\ 5, \text{ kai } e = e_3, e_4, e_5; \\ 6, \text{ kai } e = e_6 \end{cases}$$

apibrėžia atsitiktinį dydį *X*, kurio galimos reikšmės yra 2, 5 ir 6. Kokią reikšmę įgis atsitiktinis dydis *X* prieš metant kauliuką nežinome, nes nežinome, kuris įvykis įvyks: ar $\{e_1, e_2\}$, ar $\{e_3, e_4, e_5\}$, ar $\{e_6\}$. Tačiau mokame apskaičiuoti šių įvykių tikimybes:

$$P\{e_1, e_2\} = P(X = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \; P\{e_3, e_4, e_5\} = P(X = 5) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$P\{e_6\} = P(X = 6) = \frac{1}{6}.$$

Šio atsitiktinio dydžio galimas reikšmes ir jų tikimybes surašykime į lentelę

m	2	5	6
$P(X = m)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Gavome atsitiktinio dydžio *X* tikimybių skirstinio lentelę arba tiesiog *skirstinį*. Skirstinio tikimybių suma lygi 1 – taip ir turėtų būti, nes įvykis, kad atsitiktinis dydis įgis kurią nors savo reikšmę – būtinasis.

Jeigu atsitiktinis dydis *X* gali įgyti *k* skirtingų reikšmių $x_1, x_2, ..., x_k$ su tikimybėmis $p_1, p_2, ..., p_k$ atitinkamai, tai jis apibūdinamas skirstiniu

m	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
$P(X = m)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k

(4)

Jame $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$. Taigi atsitiktinis dydis gali būti nusakomas skirstiniu – tą dydį apibrėžiančios funkcijos nebūtina žinoti.

Dažnai vartojamos atsitiktinio dydžio skaitinės charakteristikos yra vidurkis (arba matematinė viltis), dispersija ir standartinis nuokrypis. Vidurkis nusako atsitiktinio dydžio vidutinę reikšmę, o dispersija ir standartinis nuokrypis apibūdina atsitiktinio dydžio reikšmių išsibarstymo apie vidurkį laipsnį (kuo plačiau apie vidurkį pasklidusios dydžio reikšmės, tuo dispersija ir standartinis nuokrypis didesni). Prisiminkime šių charakteristikų apibrėžimus.

Atsitiktinio dydžio *X*, apibrėžto (4) skirstiniu, *vidurkiu, dispersija* ir *standartiniu nuokrypiu* vadinami skaičiai

$$EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_k p_k , \tag{5}$$

$$DX = E(X - EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2 , \tag{6}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{DX} \tag{7}$$

atitinkamai.

Funkcija $u = f(e), e \in E, u \in \mathrm{R}^2$, *priskirianti kiekvienai bandymo baigčiai realiųjų skaičių porą, apibrėžia **dvimatį**, su tuo bandymu susijusį, **atsitiktinį dydį**.* Čia žymuo R^2 reiškia visų realiųjų skaičių porų $u = (x, y), x \in \mathrm{R}, y \in \mathrm{R},$ aibę.

2 pavyzdys. Taisyklingo lošimo kauliuko vieno metimo baigčių aibėje funkcija

$$u = f(e) = \begin{cases} (3, 1), \text{ kai } e = e_1, e_2; \\ (3, 5), \text{ kai } e = e_3, e_4, e_5; \\ (6, 1), \text{ kai } e = e_6 \end{cases}$$

apibrėžia dvimatį atsitiktinį dydį (X, Y), kurio galimos reikšmės yra $(3, 1)$, $(3, 5)$ ir $(6, 1)$.

Kaip ir 1 pavyzdyje, galime nesunkiai apskaičiuoti atsitiktinio dydžio reikšmių tikimybes

$$P((X,Y) = (3,1)) = P(X = 3, Y = 1) = P(\{e_1, e_2\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$P((X,Y) = (3,5)) = P(X = 3, Y = 5) = P(\{e_3, e_4, e_5\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$P((X,Y) = (6,1)) = P(X = 6, Y = 1) = P(\{e_6\}) = \frac{1}{6}.$$

Tačiau ir dvimačius atsitiktinius dydžius (kaip ir vienmačius) patogiau nusakyti *dvimate skirstinio lentele*, kurioje išvardinamos visos galimos dydžio *X* reikšmės (kairiajame stulpelyje) ir dydžio *Y* galimos reikšmės (pirmoje eilutėje) bei jų įgijimo tikimybės:

Y / X	1	5
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
6	$\frac{1}{6}$	0

Paanalizuokime šią lentelę. Pažymėkime lentelės tikimybes $r_{ij},\ i=1,2,\ j=1,2$, ir papildykime lentelę vienu stulpeliu ir viena eilute ten įrašydami atitinkamų tikimybių sumas:

Y / X	1	5	A.d. *X* reikšmių tikimybės:
3	$r_{11}=\frac{1}{3}$	$r_{12}=\frac{1}{2}$	$p_1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$
6	$r_{21}=\frac{1}{6}$	$r_{22}=0$	$p_2=\frac{1}{6}+0=\frac{1}{6}$
A.d. *Y* reikšmių tikimybės:	$q_1=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$	$q_2=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$	Visų tikimybių suma lygi 1

Nesunku suvokti, kad tokiu būdu (sudėjome nesutaikomų įvykių tikimybes) gavome atsitiktinio dydžio *X* reikšmių 3 ir 6 tikimybes (paskutinysis stulpelis) ir atsitiktinio dydžio *Y* reikšmių 1 ir 5 tikimybes (paskutinioji eilutė). Taigi galime užrašyti atsitiktinio dydžio *X* ir atsitiktinio dydžio *Y* skirstinius:

m	3	6
$P(X=m)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

m	1	5
$P(Y=m)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(8)

Dviejų įvykių nepriklausomumas apibrėžiamas (3) formule. Kadangi ir čia iš tikrųjų kalbama apie įvykius, tai atsitiktinių dydžių nepriklausomumas (ir priklausomumas) apibrėžiamas panaudojant tą pačią formulę.

Atsitiktiniai dydžiai X ir Y vadinami **nepriklausomais**, *jeigu su visomis jų reikšmėmis x ir y galioja lygybės*

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y) \qquad (9)$$

Jeigu su bent viena x ir y reikšmių pora (9) *lygybė negalioja, tai atsitiktiniai dydžiai vadinami* **priklausomais**.

2 pavyzdyje nagrinėti atsitiktiniai dydžiai *X* ir *Y* yra priklausomi, nes, pavyzdžiui, $p_1 \cdot q_1 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12} \neq \frac{1}{3} = r_{11}$. Aišku, kad tikrinti, ar galioja kitos lygybės, nebereikia.

Kaip ir vienmačiam atsitiktiniam dydžiui, jį apibrėžiančios funkcijos nebūtina žinoti – visą informaciją apie dydį teikia jo skirstinys.

3 pavyzdys. Dvimatis atsitiktinis dydis (X, Y) nusakomas skirstiniu

X \ Y	1	5
3	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$
6	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Įsitikinkime, kad šio dydžio komponentės *X* ir *Y* yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Kaip ir 2 pavyzdyje papildykime skirstinį vienu stulpeliu ir viena eilute:

X \ Y	1	5	p_i
3	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{6}$
6	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
q_j	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Kadangi „visose pozicijose“ galioja (9) lygybės, tai X ir Y yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.

Pastaba. Atkreipkime dėmesį, kad vienmačiai X ir Y skirstiniai (8) yra tokie patys kaip ir 2 pavyzdžio, nors 2 pavyzdyje dydžiai X ir Y yra priklausomi.

Šioje temoje susipažinome tik su pačia atsitiktinių dydžių priklausomumo matematine sąvoka. Toliau reikėtų išsiaiškinti, kaip įvertinamas atsitiktinių dydžių priklausomumo stiprumas, kaip pagal vieno dydžio įgytą reikšmę prognozuoti kito dydžio reikšmes ir pan. Atsitiktinių dydžių priklausomumas labai svarbus taikant tikimybių teoriją kitose srityse, ypač ekonomikoje.

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Taisyklingas lošimo kauliukas metamas du kartus. Apskaičiuokite tikimybę, kad atsivertusių akučių suma bus nelyginė.

2. Dėžėje yra 2 geltoni, 3 žali ir 4 raudoni rutuliai. Iš jos atsitiktinai traukiami 2 rutuliai. Apskaičiuokite tikimybę, kad bus ištraukti skirtingų spalvų rutuliai.

3. Tegu X yra herbo atsivertimų skaičius metus monetą tris kartus. Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.

4. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X, apibrėžto 3 uždavinyje, vidurkį, dispersiją ir standartinį nuokrypį.

5. Taisyklingo lošimo kauliuko vieno metimo baigčių aibėje funkcija

$$u = f(e) = \begin{cases} (1, 2), \text{ kai } e = e_1; \\ (2, 1), \text{ kai } e = e_2, e_3, e_4; \\ (3, 4), \text{ kai } e = e_5, e_6 \end{cases}$$

apibrėžia dvimatį atsitiktinį dydį (X, Y). Sudarykite šio dydžio skirstinį.

6. Yra dvi urnos: vienoje – rutuliai, kitoje – kaladėlės. Pirmoje urnoje yra 9 vienodi rutuliai: du iš jų pažymėti skaičiumi 1, trys – skaičiumi 2, likusieji – skaičiumi 3. Antroje urnoje yra 5 vienodos kaladėlės: dvi iš jų pažymėtos skaičiumi 0, o trys – skaičiumi 1. Dvimačio atsitiktinio dydžio (X, Y) pirmoji komponentė X yra iš pirmos urnos atsitiktinai ištraukto rutulio skaičius, o Y – iš antros urnos atsitiktinai paimtos kaladėlės skaičius. Sudarykite atsitiktinio dydžio (X, Y) skirstinį ir nustatykite, ar dydžiai X ir Y yra priklausomi.

7. Yra dvi urnos: abiejose – vienodi rutuliai, kurie pažymėti skaičiais. Pirmoje urnoje yra 3 rutuliai: du iš jų pažymėti skaičiumi 1, vienas – skaičiumi 2. Antroje urnoje yra 2 rutuliai: vienas pažymėtas skaičiumi 1, kitas – skaičiumi 2. Iš pirmos urnos atsitiktinai ištraukiamas rutulys, užsirašomas jo skaičius (tai – atsitiktinis dydis X), po to jis įdedamas į antrąją ir iš jos atsitiktinai ištraukiamas rutulys (šio rutulio skaičius – atsitiktinis dydis Y). Sudarykite atsitiktinio dydžio (X, Y) skirstinį ir nustatykite, ar dydžiai X ir Y yra priklausomi.

8. Dvimačio atsitiktinio dydžio skirstinys toks:

X \ Y	-1	1
1	0,1	0,2
2	0,1	0,1
3	0,2	0,3

Sudarykite komponenčių X ir Y skirstinius ir nustatykite, ar šie atsitiktiniai dydžiai yra priklausomi.

9. Dvimačio atsitiktinio dydžio skirstinys toks:

X \ Y	1	2
0	0,08	0,32
1	0,12	0,48

Sudarykite komponenčių X ir Y skirstinius ir nustatykite, ar šie atsitiktiniai dydžiai yra priklausomi.

10. Atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi, o jų skirstiniai tokie:

m	1	2	3
$P(X=m)$	0,1	0,5	0,4

m	-1	1
$P(Y=m)$	0,7	0,3

Sudarykite dvimačio atsitiktinio dydžio (X, Y) skirstinį.

BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

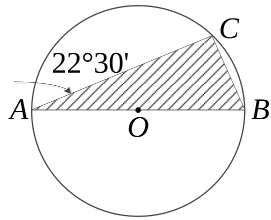
1. Išspręskite lygtį

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 = 0.$$

2. Raskite skaičiaus $n = 16^{16} + 17^{17}$ dalybos iš 7 liekaną.

3. Trikampio *ABC* kraštinės *AB* ir *AC* atitinkamai lygios 2 cm ir 5 cm. Taškas *M* pusiaukampinę AA_1 dalija santykiu 3:2 skaitant nuo viršūnės *A*. Tiesė *BM* kerta kraštinę *AC* taške B_1. Apskaičiuokite santykį $AB_1 : B_1C$.

4. Apskritimo skersmuo *AB*, kurio ilgis 8, su styga *AC* sudaro 22° 30′ kampą. Apskaičiuokite užbrūkšniuotos figūros plotą.



Užduočių sprendimai

STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Akivaizdu, kad ieškomas skaičius yra triženklis. Kadangi sandaugos paskutinis skaitmuo yra 5, tai ieškomo skaičiaus pirmas arba paskutinis skaitmuo turi būti 5 arba 1.

$$1x5 \cdot 5x1 = 78445 \Rightarrow x = 4.$$

Ats.: {145; 541}.

2. Sakykime, kad džiovinama a kg duonos. Pagal sąlygą, šioje duonoje yra $0{,}4a$ kg vandens ir 0,6 – „grynosios" masės. Išgarinus x kg vandens gauta $(a-x)$ kg džiūvėsių, kuriuose yra $(a-x)\cdot 0{,}8$ „grynosios" masės. Sudarome lygtį $0{,}6a = (a-x)\cdot 0{,}8$. Iš jos gauname $x = 0{,}25\,a$. Taigi džiovinant duoną, jos masė sumažėja 25 %. Kai $a - x = 9$, gauname $a = 12$.

Ats.: 25 %, 12 kg.

3. Tarp skaičių $1, 2, 3, \ldots, 1000$ yra 76 dalūs iš 13 skaičiai, 200 skaičių, dalių iš 5, ir 15 skaičių, dalių ir iš 13, ir iš 5. Taigi bendrovė gavo

$$76\cdot 1000\cdot 0{,}75 + (200-15)\cdot 1000\cdot 0{,}9 + (1000-76-185)\cdot 1000 =$$
$$= 962\,500$$

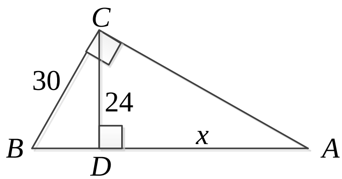
litų pinigų sumą.

Ats.: 962 500 Lt.

4. Kadangi $\angle CDA = 90^\circ$ (remiasi į apskritimo skersmenį AC), tai

$$BD = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18.$$

Tegu $AD = x.$ Tuomet



$BC^2 = BD\cdot BA$,

$18\,(18+x) = 900 \Rightarrow x = 32 \Rightarrow$

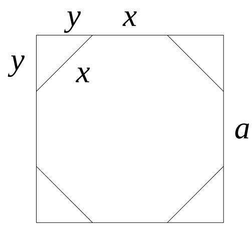
$AB = 50$,

$$AC = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40.$$

$$s = \pi\cdot 20.$$

Ats.: 20π.

5. Nuo kubo viršūnių nupjaunamos taisyklingosios piramidės, kurių pagrindo kraštinė lygi x, šoninės briaunos $y=\dfrac{a-x}{2}$, o sienos yra statieji trikampiai. Rasime x:



$$y^2+y^2=x^2 \Rightarrow y=\frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x}{\sqrt{2}}+x=a \Rightarrow (\sqrt{2}+1)x=a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=a\cdot(\sqrt{2}-1).$$

Piramidės briaunos ilgis

$$y=\frac{a-a(\sqrt{2}-1)}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}a,$$

vienos piramidės tūris

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}a\right)^2\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2}a=\frac{10-7\sqrt{2}}{24}a^3.$$

Taigi likusios kubo dalies tūris

$$V=a^3-8V_1=a^3-8\cdot\frac{10-7\sqrt{2}}{24}a^3=\frac{7(\sqrt{2}-1)}{3}a^3.$$

Ats.: $V=\dfrac{7(\sqrt{2}-1)}{3}a^3$.

6. $\begin{cases} x^2-4y^2-xy+5y=1, \\ x^2+3y^2-xy-4y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-4y^2-xy+5y=1, \\ 7y^2-9y+2=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2-4y^2-xy+5y=1, \\ y=\frac{2}{7} \text{ arba } y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{2}{7}, \\ 49x^2-14y^2+5=0 \end{cases}$ arba $\begin{cases} y=1, \\ x^2-x=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varnothing$ arba $\begin{cases} y=1, \\ x=0 \text{ arba } x=1 \end{cases} \Rightarrow x=0,\ y=1$ arba $x=1,\ y=1.$

Ats.: (0; 1), (1; 1).

7. $D=9y^2-8y^2-24=y^2-24 \Rightarrow y^2-24=k^2,\ k\in\mathbf{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow (y-k)(y+k)=24\cdot 1=12\cdot 2=8\cdot 3=6\cdot 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y+k=12, \\ y-k=2 \end{cases}$ arba $\begin{cases} y+k=24, \\ y-k=1, \end{cases}$ arba $\begin{cases} y+k=8, \\ y-k=3, \end{cases}$ arba $\begin{cases} y+k=6, \\ y-k=4 \end{cases}$

$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$y=7$,			$y=5$,
$\Downarrow$			$\Downarrow$
$x^2-21x+104=0 \Rightarrow$			$x^2-15x+56=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=8,\ x=13$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\Rightarrow x=7,\ x=8$
$\Downarrow$			$\Downarrow$
(8; 7) ir (13; 7)			(7; 5), (8; 5)

Ats.: (8; 7), (13; 7), (7; 5), (8; 5).

8. Tegu ieškoma pora yra (a; b). Pagal sąlygą, $\text{BMK}\,(a;b)=2496$ ir $\text{BDD}\,(a;b)=24$.Todėl $a=24k,\ b=24l$; čia $k,\ l$ – tarpusavyje pirminiai skaičiai. Kadangi

$$\text{BMK}(a;b)\cdot\text{BDD}(a;b)=a\cdot b,$$

tai

$24k\cdot 24l=2496\cdot 24 \Rightarrow k\cdot l=104 \Rightarrow k\cdot l=1\cdot 104=8\cdot 13 \Rightarrow$

$\Rightarrow k=1,\ l=104;\ k=104,\ l=1;\ k=8,\ l=13;\ k=13,\ l=8.$

Ats.: $a=24,\ b=2496$ arba $a=192,\ b=312$.

9. Iš viso galima sudaryti $\dfrac{100\cdot 99}{2}=4950$ porų skaičių. Tarp skaičių 1, 2, 3, ..., 100 yra 67 skaičiai, kurie nesidalija iš 3. Todėl porų (m; n), $m<n$, kurių skaičių sandauga nesidalija iš 3, yra $\dfrac{67\cdot 66}{2}=2211$. Vadinasi, ieškomų porų skaičius yra $4950-2211=2739$.

Ats.: 2739.

10. Tegu $x+2$ yra turnyro dalyvių skaičius. Likę žaidėjai turnyre sužaidė $\frac{x(x-1)}{2}$ partijų.

Jeigu abu pasitraukę iš turnyro žaidėjai būtų žaidę tarpusavyje, tai jie būtų sužaidę 9 partijas. Gautume lygtį

$$\frac{x(x-1)}{2}+9=38,$$

kuri neturi natūraliojo sprendinio.

Taigi pasitraukę iš turnyro žaidėjai tarpusavyje nežaidė.

Belieka įsitikinti, kad toks turnyras galėjo būti. Tuo tikslu reikia išspręsti lygtį $\frac{x(x-1)}{2}+10=38.$ Ji turi natūralųjį sprendinį $x=8.$ Todėl uždavinys yra korektiškas.

Ats.: Pasitraukę iš turnyro žaidėjai tarpusavyje nežaidė.

PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tarkime, pirma valstietė į turgų atnešė x kiaušinių, o antra $100-x$ kiaušinių. Jei pirma būtų turėjusi $100-x$ kiaušinių, tai ji juos būtų pardavusi už 15 pinigėlių. Taigi pirma valstietė savo kiaušinius pardavė po $\frac{15}{100-x}$ pinigėlių.

Analogiškai nustatome, kad antra valstietė savo kiaušinius pardavinėjo po $6\frac{2}{3}:x=\frac{20}{3x}$ pinigėlių.

Pagal uždavinio sąlygą sudarome lygtį

$$x\cdot\frac{15}{100-x}=(100-x)\cdot\frac{20}{3x}.$$

Atlikę veiksmus, gauname kvadratinę lygtį

$$x^2+160x-8000=0,$$

kurios sprendiniai yra 40 ir –200. Tinka tik $x=40.$

Ats.: pirma – 40 kiaušinių, antra – 60 kiaušinių.

2. Tegu dviratininko greitis yra $x\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$, o motociklininko – $y\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$. Pagal uždavinio sąlygą sudarome lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{y}{60} - \dfrac{x}{60} = 0{,}5, \\ \dfrac{120}{x} - \dfrac{120}{y} = 2. \end{cases}$$

Spręsdami gauname:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{60} - \dfrac{x}{60} = 0{,}5, \\ \dfrac{120}{x} - \dfrac{120}{y} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x = 30, \\ \dfrac{60}{x} - \dfrac{60}{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 30 + x, \\ \dfrac{60}{x} - \dfrac{60}{30+x} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 30 + x, \\ 60\,(30 + x) - 60x = 30x + x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 30 + x, \\ x^2 + 30x - 1800 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 30 + x, \\ x \in \{-60;\, 30\}. \end{cases}$$

Iš čia gauname: $x = 30$ ir $y = 60$.

Ats.: 30 $\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$.

3. Tarkime, kad pirmu vamzdžiu 1 m^3 vandens į baseiną pribėga per x min.; tada antru vamzdžiu 1 m^3 vandens pribėga per $x + 4$ min.

Tai reiškia, kad per 1 valandą pirmu vamzdžiu į baseiną pribėga $\dfrac{60}{x}$ m^3, o antru – $\dfrac{60}{x+4}$ m^3 vandens. Pagal uždavinio sąlygą sudarome lygtį

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+4} = \frac{100}{5}.$$

Spręsdami ją, gauname:

$$\frac{3}{x} - \frac{3}{x+4} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{3\,(x+4) - 3x - x\,(x+4)}{x\,(x+4)} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x^2 - 4x + 12 = 0, \\ x(x+4) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 12 = 0, \\ x \neq 0,\ x \neq -4 \end{cases} \Rightarrow\ x \in \{-6; 2\}.$$

Tinka tik $x = 2$. Taigi antruoju vamzdžiu į baseiną 1 m^3 vandens pribėga per 6 min. Todėl per 5 h į baseiną pribėgs 50 m^3 vandens.

Ats.: 50 m^3.

4. Rankraščio puslapių skaičių pažymėkime *p*. Tarkime, kad pirmas vertėjas visą rankraštį išverstų per x valandų, o antras – per $x+4$ valandų. Tada pirmo vertėjo darbo sparta būtų $\dfrac{p}{x}$ puslapių per valandą, o antro – $\dfrac{p}{x+4}$ puslapių per valandą. Per pirmąsias 2 valandas buvo išversta $\dfrac{2p}{x}$ rankraščio puslapių, o per kitas 6 valandas – $\left(\dfrac{6p}{x} + \dfrac{6p}{x+4}\right)$ puslapių. Sudarome lygtį

$$\frac{2p}{x} + \frac{6p}{x} + \frac{6p}{x+4} = \frac{4p}{5}.$$

Spręsdami ją gauname:

$$\frac{8}{x} + \frac{6}{x+4} = \frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} 40(x+4) + 30x - 4x(x+4) = 0, \\ x \neq 0,\ x \neq -4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 27x - 80 = 0, \\ x \neq 0,\ x \neq -4 \end{cases} \Rightarrow\ x \in \{-2{,}5; 16\}.$$

Tinka tik $x = 16$.

Ats.: 16 h.

5. Tegu $\overline{xy}$ – ieškomas dviženklis skaičius. Tada $\dfrac{x+y}{2}$ yra jo skaitmenų aritmetinis vidurkis, o $\sqrt{xy}$ – geometrinis vidurkis. Pagal uždavinio sąlygą,

$$\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{xy} \text{ ir } x + y = 5.$$

Toliau sprendžiame šių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{1}{2} + \sqrt{xy}, \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+5-x}{2} = \dfrac{1}{2} + \sqrt{x\cdot(5-x)}, \\ y=5-x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x\cdot(5-x)} = 2, \\ y=5-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-5x+4=0, \\ y=5-x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in \{1;\, 4\}, \\ y=5-x \end{cases} \Rightarrow \overline{xy} = 14 \text{ arba } \overline{xy} = 41.$$

Ats.: 14 arba 41.

6. Tarkime, kad per vieną valandą pirmasis dviratininkas nuvažiuoja x ratų, antrasis – y ratų, trečiasis – z ratų. Tada pirmasis dviratininkas vieną ratą važiuoja per $\dfrac{1}{x}$ h, antrasis per $\dfrac{1}{y}$ h, trečiasis per $\dfrac{1}{z}$ h.

Sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \dfrac{4{,}5}{x} = \dfrac{3{,}5}{y}, \\ \left(\dfrac{4{,}5}{x} + 0{,}5\right)\cdot x = \left(\dfrac{4{,}5}{x} + 0{,}5\right)\cdot z + 2, \\ 3y = 3z + 1. \end{cases}$$

Spręsdami ją gauname: $y = \dfrac{7}{9}x$, $z = \dfrac{7}{9}x - \dfrac{1}{3}$.

Tada $2x^2 - 15x + 27 = 0$. Ši lygtis turi du sprendinius: $x_1 = 3$, $x_2 = 4{,}5$. Tikrindami, ar šie sprendiniai tenkina uždavinio sąlygą, turime rasti antrojo dviratininko sugaištą laiką vienam ratui nuvažiuoti: $\dfrac{1}{y_1} = \dfrac{3}{7x_1} = \dfrac{3}{7}\,\text{h} > 20\,\text{min}$, $\dfrac{1}{y_2} = \dfrac{2}{7x_2}\,\text{h} < 20\,\text{min}$. Taigi tinka tik $x = 3$.

Ats.: 3.

7. 1) Tarkime, kad arklys pirkliui kainavo x auksinų. Tuomet $1{,}15x = 73{,}6$. Todėl $x = 64$.

2) Tarkime, kad avis pirkliui kainavo y auksinų. Pagal uždavinio sąlygą, $\left(1+\frac{y}{100}\right)y = 11$. Iš čia $y = 10$.

3) Tarkime, kad pirklys pirko m arklių ir n avių. Pagal sąlygą, $64m + 10n = 780$ ir $m + n < 30$. Ieškome sistemos

$$\begin{cases} 64m + 10n = 780, \\ m + n < 30 \end{cases}$$

natūraliųjų sprendinių. Gauname:

$$\begin{cases} n = 78 - \frac{32}{5}m, \\ m + n < 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 5k,\ k \in N, \\ n = 78 - 32k, \\ 5k + n < 30 \end{cases} \Rightarrow k = 2,\ m = 10,\ n = 14.$$

Ats.: 10 arklių ir 14 avių.

8. Autobuso greitį į kalną pažymėkime $v\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Tada autobusas atstumą nuo A iki B įveikė per $\frac{12}{v}$ h.

Grįždamas iš punkto B autobusas važiavo $\frac{1}{5}$ h, kol sutiko pėstįjį. Vadinasi, iš viso jis važiavo $\left(\frac{12}{v}+\frac{1}{5}\right)$ h. Per tą laiką pėstysis nuėjo $6\cdot\left(\frac{12}{v}+\frac{1}{5}\right)$ km.

Autobusas nuo B iki susitikimo su pėsčiuoju nuvažiavo atstumą, lygų $2v\cdot\frac{1}{5}$ km. Sudarome lygtį

$$6\left(\frac{12}{v}+\frac{1}{5}\right) + 2v\cdot\frac{1}{5} = 12.$$

Atlikę veiksmus, gauname kvadratinę lygtį $v^2 - 27v + 180 = 0$, turinčią du sprendinius:

$$v_1 = 12, \ v_2 = 15.$$

Reikšmė $v_1 = 12$ netenkina sąlygos, kad autobusas atvažiavo iš A į B greičiau negu per vieną valandą.

Ats.: 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

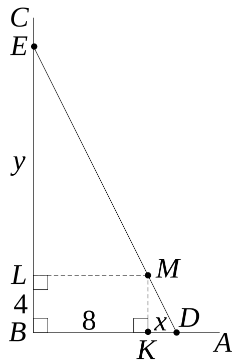
9. Sakykime, $x \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ yra greitojo lifto greitis; tuomet paprastojo lifto greitis yra $(x - 1{,}5) \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Sudarome lygtį $\frac{81}{x} + 7 = \frac{33}{x - 1{,}5} + 12$. Kai $x \notin \{0; 1{,}5\}$, ji ekvivalenti kvadratinei lygčiai $x^2 - 11{,}1x + 24{,}3 = 0$, kuri turi du sprendinius:

$$x_1 = 3, \ x_2 = 8{,}1.$$

Tinka abu sprendiniai, nors antrasis – nelabai realus.

Ats.: 3 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ arba 8,1 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

10. Tegu $BK = LM = 8$, $BL = KM = 4$, $x = KD$ ir $y = LE$. Skaičiuodami trikampio BDE plotą (jis pagal sąlygą lygus 100) dvejopai, gauname dvi lygtis:



$$\frac{1}{2}(8 + x)(4 + y) = 100$$

ir

$$4 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 4x + \frac{1}{2} \cdot 8y = 100.$$

Sprendžiame šių lygčių sistemą ir gauname:

$$\begin{cases} 32 + 4x + 8y + xy = 200, \\ 64 + 4x + 8y = 200 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy = 32, \\ x + 2y = 34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{32}{x}, \\ x^2 - 34x + 64 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x=2,\ y=16)$ arba $(x=32,\ y=1)$.

Ats.: 10 cm ir 20 cm arba 40 cm ir 5 cm.

ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Galimi racionalieji sprendiniai yra tokie: ± 1; ± 2; ± 5; ± 10; $\pm \frac{1}{2}$; $\pm \frac{5}{2}$.

Įsitikinę, kad skaičius –1 tenkina lygtį, daugianarį $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ padalykime (pavyzdžiui, kampu) iš dvinario $x+1$ ir gausime tokį $P(x)$ skaidinį: $P(x) = (x+1)(2x^2 + x - 10)$. Kvadratinio trinario $2x^2 + x - 10$ šaknys (kvadratinės lygties $2x^2 + x - 10 = 0$ sprendiniai) yra 2 ir –2,5. Vadinasi, lygtis $2x^3 + 3x^2 - 9x - 10 = 0$ turi tris sprendinius: –2,5; –1; 2.

Ats.:–2,5; –1; 2.

2. Galima tikrinti visus laisvojo nario daliklius: ± 1; ± 2; ± 4; ± 8. Bet galima iš pradžių pertvarkyti lygtį grupuojant:

$$x^5 - x^3 - 8x^2 + 8 = (x^5 - x^3) - (8x^2 - 8) = x^3(x^2 - 1) - 8(x^2 - 1) =$$
$$= (x^2 - 1)(x^3 - 8) = (x-1)(x+1)(x-2)(x^2 + 2x + 4).$$

Iš šio skaidinio matyti, kad lygtis turi tris racionaliuosius sprendinius: –1; 1; 2.

Ats.: –1; 1; 2.

3. Galimi racionalieji sprendiniai yra sveikieji skaičiai ± 1 ir ± 7. Lygtį tenkina tik skaičius 1. Taigi ši lygtis turi tik vieną racionalųjį sprendinį.

Daugianarį $P(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 7$ išskaidykime remdamiesi

Bezu teorema – padalykime $P(x)$ iš dvinario $x-1$. Gausime:

$$P(x)=(x-1)\,(x^2+5x+7)$$

Kvadratinis trinaris x^2+5x+7 realiųjų šaknų neturi. Vadinasi, algebrinė lygtis $x^3+4x^2+2x-7=0$ iracionaliųjų sprendinių neturi.

Ats.: neturi.

4. Galimi racionalieji sprendiniai yra sveikieji skaičiai: ± 1; ± 2; ± 3; ± 6.

Tiesiogiai tikrinant galima įsitikinti, kad lygtį tenkina tik du sveikieji skaičiai: 1 ir 3.

Padalykime daugianarį $P(x)=x^4-4x^3+5x^2-8x+6$ iš sandaugos $(x-1)\,(x-3)=x^2-4x+3.$ Dalykime kampu:

$$\begin{array}{r|l} \_\,x^4-4x^3+5x^2-8x+6 & x^2-4x+3 \\ \cline{2-2} \underline{x^4-4x^3+3x^2} & x^2+2 \\ \_\,2x^2-8x+6 & \\ \underline{2x^2-8x+6} & \\ 0 & \end{array}$$

Iš skaidinio $P(x)=(x-1)\,(x-3)\,(x^2+2)$ matyti, kad daugianaris $P(x)$ turi tik dvi realiąsias šaknis 1 ir 3, o algebrinė lygtis $P(x)=0$ – tik du realiuosius sprendinius.

Ats.: 1; 3.

5. Kai *m* yra sveikasis skaičius, tai visi lygties koeficientai yra sveikieji skaičiai. Galimi racionalieji sprendiniai yra tik sveikieji skaičiai: ± 1, ± 2.

Kad sveikasis skaičius 1 būtų lygties sprendinys, parametras *m* turi tenkinti lygybę

$$1^3+(m+1)\cdot 1^2+(m^2-4)\cdot 1+2=0.$$

Ji ekvivalenti kvadratinei lygčiai $m^2+m=0$, turinčiai du sveikuosius sprendinius: $m_1=0$ ir $m_2=-1$.

Skaičius –1 yra lygties sprendinys, kai $m^2-m-6=0$, t. y. kai $m\in\{-2; 3\}$.

Kad skaičius 2 būtų lygties sprendinys, turėtų galioti lygybė $m^2+2m+3=0$; tačiau kvadratinė lygtis $m^2+2m+3=0$ realiųjų sprendinių neturi.

Skaičius –2 yra lygties sprendinys, kai galioja lygybė $m^2-2m-3=0$, t. y. kai $m\in\{-1; 3\}$.

Taigi lygtis turi nors vieną racionalųjį sprendinį, kai $m\in\{-2;-1; 0; 3\}$.

Ats.: –2; –1; 0; 3.

6. Įrašę 2 ir 3 į lygtį, gauname lygčių sistemą dydžiams *m* ir *n* rasti:

$$\begin{cases} 4m+n=10, \\ 9m+n=-15. \end{cases}$$

Ji turi vienintelį sprendinį: $m=-5,\ \ n=30.$

Toliau nagrinėjame trečiojo laipsnio lygtį

$$2x^3-5x^2-13x+30=0. \qquad (1)$$

Pagal Bezu teoremą daugianaris $P(x)=2x^3-5x^2-13x+30$ dalijasi ir iš $x-2$, ir iš $x-3$; taigi dalijasi iš sandaugos $(x-2)\,(x-3)=x^2-5x+6.$ Dalydami kampu, gauname:

$$\begin{array}{r|l} \_\,2x^3-5x^2-13x+30 & x^2-5x+6 \\ \cline{2-2} \underline{2x^3-10x^2+12x} & 2x+5 \\ \_\,5x^2-25x+30 & \\ \underline{5x^2-25x+30} & \\ 0 & \end{array}$$

Vietoj (1) turime tokią ekvivalenčią lygtį

$$(x-2)\,(x-3)\,(2x+5)=0.$$

Iš čia ir randame trečiąjį sprendinį – racionalųjį skaičių –2,5.

Ats.: $m=-5,\ \ n=30,\ \ x=-2{,}5.$

7. Skaičius $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}$ yra tiesinės lygties $x-\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}\right)=0$ sprendinys; tačiau jos laisvasis narys nėra sveikasis skaičius $\left(1<\sqrt[3]{2}<1{,}3,\ 1<\sqrt{2}<1{,}5 \Rightarrow 2<\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}<2{,}8\right)$. Todėl ieškome aukštesnio laipsnio lygties:

$$x-\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}\right)=0 \Rightarrow \left(x-\sqrt{2}\right)^3=\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 \Rightarrow$$
$$x^3-3\sqrt{2}x^2+6x-2\sqrt{2}=2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(x^3+6x-2\right)^2=\left(3\sqrt{2}x^2+2\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^6+12x^4-4x^3+36x^2-24x+4=18x^4+24x^2+8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^6-6x^4-4x^3+12x^2-24x-4=0. \qquad (1)$$

Skaičius $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}$ yra šios lygties sprendinys, tačiau jis nėra racionalusis skaičius, nes jo nėra tarp galimų (1) lygties racionaliųjų sprendinių – sveikųjų skaičių $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4$.

8. Pradėkime nuo lygties $\left(x-\sqrt{2}\right)\cdot\left(x-\left(\sqrt{2}-1\right)\right)=0$. Sudauginę gausime ekvivalenčią lygtį $x^2+\left(1-2\sqrt{2}\right)x+2-\sqrt{2}=0$. Matome, kad du jos koeficientai nėra sveikieji skaičiai, todėl pertvarkykime (keldami kvadratu):

$$x^2+\left(1-2\sqrt{2}\right)x+2-\sqrt{2}=0 \Rightarrow x^2+x+2=2\sqrt{2}x-\sqrt{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(x^2+x+2\right)^2=\left(\sqrt{2}\left(2x+1\right)\right)^2 \Rightarrow x^4+2x^3+5x^2+4x+4=$$
$$=8x^2+8x+2.$$

Gavome ketvirtojo laipsnio algebrinę lygtį su sveikaisiais koeficientais:

$$x^4+2x^3-3x^2-4x+2=0. \qquad (1)$$

Skaičiai $\sqrt{2}$ ir $\sqrt{2}-1$ yra jos sprendiniai. Tačiau jie nėra racionalieji skaičiai. Racionaliaisiais (1) lygties sprendiniais galėtų būti tik sveikieji skaičiai ± 1 ir ± 2. Tačiau nė vienas iš jų netenkina lygties. Taigi (1) lygtis racionaliųjų sprendinių neturi.

Ats.: Neturi.

9. Skaičius -2 yra ir $P(x)=x^5+2x^4+2x^2+7x+6$, ir $Q(x)=2x^4+7x^3+4x^2-x+6$ šaknis. Pagal Bezu teoremą abu daugianariai dalijasi (be liekanos) iš dvinario $x+2$. Padaliję (pavyzdžiui, kampu) gauname:

$$\frac{P(x)}{x+2}=x^4+2x+3 \text{ ir } \frac{Q(x)}{x+2}=2x^3+3x^2-2x+3.$$

Vadinasi,

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\frac{P(x)}{x+2}}{\frac{Q(x)}{x+2}}=\frac{x^4+2x+3}{2x^3+3x^2-2x+3},\quad x\neq -2.$$

Gauto racionaliojo reiškinio vardiklis taške $x=-2$ nėra lygus nuliui, todėl

$$f(x)\approx\frac{(-2)^4+2\cdot(-2)+3}{2\cdot(-2)^3+3(-2)^2-2(-2)+3}=\frac{16-4+3}{-16+12+4+3}=\frac{15}{3}=5,$$

kai $x\approx -2$.

Ats.: $f(x)\approx 5$, kai $x\approx -2$.

10. Skaičius 1 yra ir skaitiklio, ir vardiklio šaknis. Todėl juos dalijame iš $x-1$ ir gauname:

$$g(x)=\frac{\frac{3x^4-5x^3+2x^2-x+1}{x-1}}{\frac{x^5-2x^4+6x^3-6x^2-3x+4}{x-1}}=\frac{3x^3-2x^2-1}{x^4-x^3+5x^2-x-4},\quad x\neq 1.$$

Matome, kad norimo aiškumo nepasiekėme, nes taške $x=1$ ir skaitiklio, ir vardiklio reikšmė lygi nuliui. Remdamiesi Bezu teorema, vėl dalijame iš $x-1$ ir gauname:

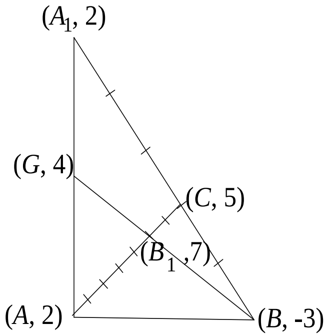
$$g(x)=\frac{3x^3-2x^2-1}{x^4-x^3+5x^2-x-4}=\frac{\frac{3x^3-2x^2-1}{x-1}}{\frac{x^4-x^3+5x^2-x-4}{x-1}}=$$

$$=\frac{3x^2+x+1}{x^3+5x+4}\approx\frac{3\cdot 1^2+1+1}{1^3+5\cdot 1+4}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}\text{, kai } x\approx 1.$$

Ats.: $g(x)\approx\frac{1}{2}$, kai $x\approx 1$.

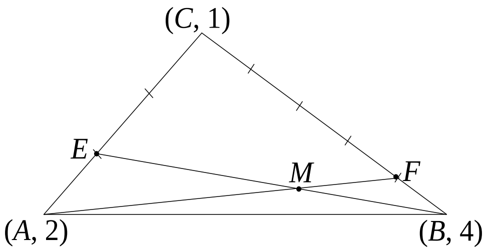
TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Pagal ketvirtos teoremos antrąją išvadą taškų $(A,2)$, $(B,-3)$ ir $(C,5)$ masių centras $(G,4)$ yra tiesių BB_1 ir AA_1 susikirtimo taškas; čia $(B_1,7)$ yra taškų $(A,2)$ ir $(C,5)$ masių centras, o $(A_1,2)$ – taškų $(B,-3)$ ir $(C,5)$ masių centras, t. y. $\overrightarrow{BA_1}=\frac{5}{-3+5}\overrightarrow{BC}=\frac{5}{2}\overrightarrow{BC}$. Taškai $(A_1,2)$, $(B_1,7)$ ir $(G,4)$ pavaizduoti 1 pav.



1 pav.

2. Kadangi $CE:EA=2:1$ ir $CF:FB=4:1$ (2 pav.), tai $1\cdot CE=2EA$ ir $1\cdot CF=4FB$. Taškas $(E,3)$ yra taškų $(A,2)$ ir $(C,1)$ masių centras, o taškas $(F,5)$ – taškų $(C,1)$ ir $(B,4)$ masių centras. Tiesių AF ir BE susikirtimo taškas M yra trijų taškų $(A,2)$, $(B,4)$ ir $(C,1)$ masių centras (žr. 4 teorema 2-oji išvada). Taigi



2 pav.

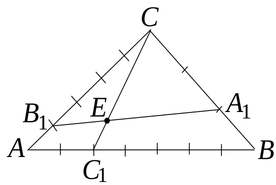
$$M = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 2 & 4 & 1 \\ \hline\end{array} = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline E & B \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array} \Rightarrow 3EM = 4MB,$$
t. y. $BM : ME = 3:4$
arba $BM : BE = 3:7.$

Kita vertus,

$$M = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 2 & 4 & 1 \\ \hline\end{array} = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline A & F \\ \hline 2 & 5 \\ \hline\end{array} \Rightarrow 2AM = 5MF,$$
t. y. $AM : MF = 5:2$
arba $AM : AF = 5:7.$

Ats.: $BM : BE = 3:7$, $AM : AF = 5:7.$

3. Akivaizdu, kad taškas $(C_1, 7)$ yra taškų $(A, 5)$ ir $(B, 2)$ masių centras (3 pav.). Jeigu taškui C priskirsime skaičių $\frac{5}{4}$, tai taškas B_1 bus taškų $(A, 5)$ ir $\left(C, \frac{5}{4}\right)$ masių centras. Papildomai taškui C priskyrę skaičių 1, gauname, kad taškas $(A_1, 3)$ yra taškų $(B, 2)$ ir $(C, 1)$ masių centras. Nagrinėkime taškų $(A, 5)$, $\left(C, \frac{5}{4}\right)$,



3 pav.

$(C, 1)$ ir $(B, 2)$ sistemą arba taškų $(A, 20)$, $(C, 5)$, $(C, 4)$ ir $(B, 8)$ sistemą. Abiejų sistemų masių centrai sutampa. Sakykime, kad taškas G yra nagrinėjamos taškų sistemos masių centras. Tuomet

$$G = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & C & C & B \\ \hline 20 & 5 & 4 & 8 \\ \hline\end{array} = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline B_1 & A_1 \\ \hline 25 & 12 \\ \hline\end{array}$$
$\Rightarrow G \in [A_1B_1]$ ir $25B_1G = 12GA_1$, t. y. $B_1G : GA_1 = 12:25.$

Kita vertus,

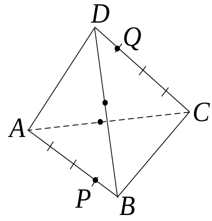
$$G = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & C & C & B \\ \hline 20 & 5 & 4 & 8 \\ \hline \end{array} = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline C_1 & C \\ \hline 28 & 9 \\ \hline \end{array}$$

$\Rightarrow G \in [CC_1] \Rightarrow G$ sutampa su E ir $9CG = 28GC_1$,

t. y. $CG : GC_1 = 28 : 9$.

Ats.: $CE : EC_1 = 28 : 9$,

$B_1E : EA_1 = 12 : 25$.



4 pav.

4. Sakykime, kad taškai E ir F yra briaunų AC ir BD vidurio taškai (4 pav.). Nagrinėkime taškų $(A, 1)$, $(B, 3)$, $(C, 1)$ ir $(D, 3)$ sistemą, kurios masių centras yra taškas G. Tuomet:

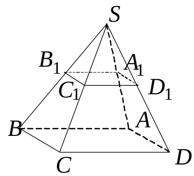
$$G = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline 1 & 3 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline P & Q \\ \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$\Rightarrow$ taškas G yra atkarpos PQ vidurio taškas.

Kita vertus,

$$G = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline 1 & 3 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline E & \text{F} \\ \hline 2 & 6 \\ \hline \end{array} \Rightarrow G \in [EF].$$

Taigi atkarpos PQ vidurio taškas G ir atkarpų AC ir BD vidurio taškai E ir F yra vienoje tiesėje.



5 pav.

5. Taškų $(A, 1)$, $(B, -1)$ ir $(C, 1)$ masių centras (5 pav.) yra taškas $(D, 1)$ (žr. 3 pav.). Taškui S mases paskirsime taip, kad taškai A_1, B_1 ir C_1 būtų atitinkamai taškų A ir S, B ir S, C ir S masių centrai. Nagrinėkime taškų $(A, 1)$, $(B, -1)$, $(C, 1)$, $(S, 2)$, $(S, -4)$ ir $(S, 3)$ sistemą, kurios masių centras yra taškas G. Tuomet:

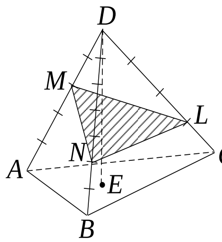
$$G = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline A & B & C & S & S & S \\ \hline 1 & -1 & 1 & 2 & -4 & 3 \\ \hline \end{array} = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline D & S \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$\Rightarrow G \in [SD]$.

Taigi $G \equiv D_1$ ir $DD_1 : D_1S = 1:1$.

Ats.: $DD_1 : D_1S = 1:1$.

6. Taškas $(E, 3)$ yra taškų $(A, 1)$, $(B, 1)$ ir $(C, 1)$ masių centras (6 pav.). Taškui D priskirsime mases taip, kad taškai M, N ir L būtų atitinkamai taškų A ir D, B ir D, C ir D masių centras. Nagrinėkime taškų $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$, $\left(D, \frac{3}{2}\right)$, $\left(D, \frac{2}{5}\right)$ ir $\left(D, \frac{1}{3}\right)$ sistemą arba taškų $(A, 30)$, $(B, 30)$, $(C, 30)$, $(D, 45)$, $(D, 12)$ ir $(D, 10)$ sistemą, kurios masių centras yra taškas G. Tuomet



6 pav.

$$G = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D & D & D \\ \hline 30 & 30 & 30 & 45 & 12 & 10 \\ \hline\end{array} = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline D & E \\ \hline 67 & 90 \\ \hline\end{array}$$

$\Rightarrow G \in [DE]$ ir $67DG = 90GE$, t. y. $DG : GE = 90:67$.

Kita vertus,

$$G = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D & D & D \\ \hline 30 & 30 & 30 & 45 & 12 & 10 \\ \hline\end{array} = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|}\hline M & N & L \\ \hline 75 & 42 & 40 \\ \hline\end{array}$$

$\Rightarrow G$ priklauso plokštumai (MNL).

Taigi, $G \equiv K$. Todėl $DK : KE = 90:67$.

Ats.: $DK : KE = 90:67$.

7. Nagrinėkime taškų $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$, $(D, 1)$, $(E, 1)$ ir $(F, 1)$, kurių masių centras G, sistemą. Turime:

$$G = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D & E & F \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array} = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|}\hline E_1 & E_3 & E_5 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline\end{array}$$

$\Rightarrow G$ yra trikampio $E_1E_3E_5$ pusiaukraštinių susikirtimo taškas.

Kita vertus,

$$G = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D & E & F \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|}\hline E_2 & E_4 & E_6 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$\Rightarrow G$ yra trikampio $E_2E_4E_6$ pusiaukraštinių susikirtimo taškas.

Taigi trikampių $E_1E_3E_5$ ir $E_2E_4E_6$ pusiaukraštinių susikirtimo taškai sutampa.

8. Trikampis *ABC* yra statusis $(\angle C = 90^\circ)$. Sakykime, kad $CB = a$. Tada $AB = 2a$, $BD = \frac{1}{2}a$, $AD = 2a - \frac{1}{2}a = \frac{3}{2}a$ ir $AD : DB = 3:1$. Nagrinėkime taškus $(A, 1)$, $(B, 3)$ ir $(C, 3)$, kurių masių centras yra taškas *G*. Tada

$$G = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 1 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline D & C \\ \hline 4 & 3 \\ \hline \end{array} \Rightarrow G \in [CD] \text{ ir } CG : GD = 4:3.$$

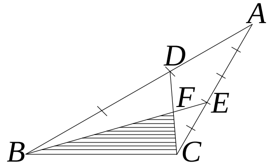
Kita vertus,

$$G = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 1 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline A & F \\ \hline 1 & 6 \\ \hline \end{array} \Rightarrow G \in [AF] \text{ ir } AG : GF = 6:1.$$

Kadangi taškas *G* priklauso ir atkarpai *CD* ir atkarpai *AF*, tai *G* sutampa su tašku *E*. Taigi, $CE : ED = 4:3$ ir $AE : EF = 6:1$.

Ats.: $AE : EF = 6:1$, $CE : ED = 4:3$.

9. Kadangi trikampių *BFC* ir *BEC* (7 pav.) pagrindai yra vienoje tiesėje, o aukštinė, išvesta iš viršūnės *C*, yra bendra, tai $\frac{S_{BEC}}{S_{BFC}} = \frac{BE}{BF}$. Analogiškai $\frac{S_{ABC}}{S_{EBC}} = \frac{AC}{CE}$. Iš šių lygybių išplaukia, kad



7 pav.

$$S_{ABC} = \frac{AC}{CE} \cdot \frac{BE}{BF} S_{BFC} = \frac{AC}{CE} \cdot \frac{BE}{BF} \cdot S.$$

Taigi, apskaičiavę santykius $AC : CE$ ir $BE : BF$, rasime trikampio *ABC* plotą.

Pagal pusiaukampinės *BE* savybę $CE : EA = 2 : 3$ arba $CA : CE = 5 : 2$. Nagrinėkime taškus $(A, 2)$, $(B, 1)$ ir $(C, 3)$, kurių masių centras yra *G*. Tada

$$G = \text{Centr} \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} = \text{Centr} \begin{array}{|c|c|}\hline B & E \\ \hline 1 & 5 \\ \hline \end{array} \Rightarrow G \in [BE] \text{ ir } BG : GE = 5 : 1.$$

Kita vertus,

$$G = \text{Centr} \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} = \text{Centr} \begin{array}{|c|c|}\hline C & D \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array} \Rightarrow G \in [CD].$$

Taigi $G \equiv F$ ir $BF : FE = 5 : 1$, t. y. $BE : BF = 6 : 5$. Vadinasi, $S_{ABC} = \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot S = 3S.$

Ats.: $S_{ABC} = 3S.$

10. Įrodysime, kad trikampio *ABC* aukštinės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta viename taške.

Iš stačiojo trikampio CC_1B turime: $\frac{CC_1}{C_1B} = \operatorname{tg}\beta$, o iš stačiojo trikampio CC_1A – $\frac{CC_1}{AC_1} = \operatorname{tg}\alpha$. Iš šių lygybių išplaukia, kad $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$, t. y. $\operatorname{tg}\alpha \cdot AC_1 = \operatorname{tg}\beta \cdot C_1B$. Analogiškai įrodoma, kad $\operatorname{tg}\beta \cdot BA_1 = \operatorname{tg}\gamma \cdot A_1C$ ir $\operatorname{tg}\gamma \cdot CB_1 = \operatorname{tg}\alpha \cdot B_1A$. Taigi nagrinėkime taškų (*A*, tgα), (*B*, tgβ), (*C*, tgγ) sistemą, kurios masių centras yra taškas *H*. Tuomet

$$H = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \text{tg}\alpha & \text{tg}\beta & \text{tg}\gamma \\ \hline \end{array} = \text{Centr}\begin{array}{|c|c|}\hline A & A_1 \\ \hline \text{tg}\alpha & \text{tg}\beta + \text{tg}\gamma \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow H \in [AA_1] \text{ ir } AH : HA_1 = (\text{tg}\beta + \text{tg}\gamma) : \text{tg}\alpha.$$

Analogiškai įrodoma, kad $H \in [BB_1]$, $H \in [CC_1]$ ir $BH : HB_1 = (\text{tg}\alpha + \text{tg}\gamma) : \text{tg}\beta$, $CH : HC_1 = (\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta) : \text{tg}\gamma$. Taigi visos trikampio aukštinės susikerta taške H.

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. $234329 =$

$= 7 \cdot 8^5 + 4953 = 7 \cdot 8^5 + 1 \cdot 8^4 + 857 = 7 \cdot 8^5 + 1 \cdot 8^4 + 1 \cdot 8^3 + 345 =$

$= 7 \cdot 8^5 + 1 \cdot 8^4 + 1 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 25 =$

$7 \cdot 8^5 + 1 \cdot 8^4 + 1 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 = 234329_{(10)} =$

$= 711531_{(8)}$

2. a) Kai $a = -38743$, $b = 213$,

tai $-38743 = 213 \cdot (-182) + 23 \Rightarrow q = -182$, $r = 23$;

b) Kai $a = -621$, $b = -53$,

tai $-621 = (-53) \cdot 12 + 15 \Rightarrow q = 12$, $r = 15$;

c) Kai $a = 5995$, $q = -19$,

tai $5995 = (-19) \cdot (-315) + 10 \Rightarrow b = -315$, $r = 10$;

d) Kai $a = -5960$, $q = -315$,

tai $-5960 = (-315) \cdot 19 + 25 \Rightarrow b = 19$, $r = 25$.

3.

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$

4.

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

5. $f(\overline{6}) = 2\cdot\overline{6}^3 - 3\cdot\overline{6}^2 = 2\cdot\overline{6} - 3\cdot\overline{1} = \overline{5} - \overline{3} = \overline{2}$, nes $\overline{6}^2 = \overline{1}$, $\overline{6}^3 = \overline{6}$.

Ats.: $\overline{2}$.

6. $3x + 8 \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 11) \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x \equiv 8 (\mathrm{mod}\, 11) \Rightarrow x \equiv 10 (\mathrm{mod}\, 11) \Rightarrow x = 11k + 10,\ k \in \mathrm{Z}.$

Ats.: $x = 11k + 10,\ k \in \mathrm{Z}.$

7. $3x^2 \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 11) \Rightarrow x^2 \equiv 9 (\mathrm{mod}\, 11)$ (padauginus abi duotojo lyginio puses iš 4) $\Rightarrow x \equiv \pm 3 (\mathrm{mod}\, 11) \Rightarrow x = 3 + 11k,\ k \in \mathrm{Z},$
$x = -3 + 11m,\ m \in \mathrm{Z}.$

Ats.: $x = 3 + 11k,\ k \in \mathrm{Z},\ x = -3 \pm 11m,\ m \in \mathrm{Z}.$

8. $17 \equiv 6 \pmod{11}$, $17^2 \equiv 3 \pmod{11}$, $17^4 \equiv 9 \pmod{11}$, $17^8 \equiv 4 \pmod{11}$,

$17^{16} \equiv 5 \pmod{11} \Rightarrow 17^{16} \cdot 17 \equiv 5 \cdot 6 \equiv 8 \pmod{11}$;

$18 \equiv 7 \pmod{11}$, $18^2 \equiv 5 \pmod{11}$, $18^4 \equiv 3 \pmod{11}$, $18^8 \equiv 9 \pmod{11}$,

$18^{16} \equiv 4 \pmod{11} \Rightarrow 18^2 \cdot 18^{16} \equiv 5 \cdot 4 \equiv 9 \pmod{11}$;

$19 \equiv 8 \pmod{11}$, $19^2 \equiv 9 \pmod{11}$, $19^4 \equiv 4 \pmod{11}$, $19^8 \equiv 5 \pmod{11}$,

$19^{16} \equiv 3 \pmod{11} \Rightarrow 19^{16} \cdot 19^2 \cdot 19 \equiv 3 \cdot 9 \cdot 8 \equiv 7 \pmod{11}$;

Taigi $n \equiv 8 + 9 + 7 \equiv 2 \pmod{11}$

Ats.: 2.

9. Skaičiaus $n = 17^{17} + 18^{18} + 19^{19}$ paskutinysis skaitmuo yra liekana, gauta šį skaičių dalijant iš 10. Raskime šią liekaną:

$17 \equiv 7 \pmod{10}$, $17^2 \equiv 9 \pmod{10}$, $17^4 \equiv 1 \pmod{10}$,

$17^{16} \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow 17^{17} = 17^{16} \cdot 17 \equiv 1 \cdot 7 \equiv 7 \pmod{10}$;

$18 \equiv 8 \pmod{10}$, $18^2 \equiv 4 \pmod{10}$, $18^4 \equiv 6 \pmod{10}$,

$18^8 \equiv 6 \pmod{10}$,

$18^{16} \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow 18^{18} = 18^{16} \cdot 18^2 \equiv 6 \cdot 4 \equiv 4 \pmod{10}$;

$19 \equiv 9 \pmod{10}$, $19^2 \equiv 1 \pmod{10}$,

$19^{16} \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow 19^{19} = 19^{16} \cdot 19^2 \cdot 19 \equiv 1 \cdot 1 \cdot 9 \equiv 9 \pmod{10}$.

Taigi gauname $n \equiv 7 + 4 + 9 = 20 \equiv 0 \pmod{10}$. Vadinasi, paskutinysis šio skaičiaus skaitmuo yra 0.

Ats.: 0.

10. Panagrinėkime atskirai skaičius $n \equiv 0 (\mathrm{mod} 3)$, $n \equiv 1 (\mathrm{mod} 3)$ ir $n \equiv 2 (\mathrm{mod} 3)$.

Kai $n \equiv 0 (\mathrm{mod} 3)$ (t. y. $n = 3k,\ k \in \mathrm{Z}$), tai skaičius $M = 14 \cdot (3k)^3 + 9 \cdot (3k)^2 + 3k = \ = 3(14 \cdot 9k^3 + 9 \cdot 3k^2 + k)$ dalijasi iš 3. Kai $n \equiv 1 (\mathrm{mod} 3)$ (t. y. $n = 3k + 1,\ k \in \mathrm{Z}$), tai

$$M = 14 \cdot (3k+1)^3 + 9 \cdot (3k+1)^2 + 3k + 1 =$$
$$= 14(27k^3 + 27k^2 + 9k + 1) + 9(9k^2 + 6k + 1) + 3k + 1 =$$
$$= 14(27k^3 + 27k^2 + 9k) + 14 + 9(9k^2 + 6k) + 9 + 3k + 1 =$$
$$= 14 \cdot 3\,(9k^3 + 9k^2 + k) + 9(9k^2 + 6k) + 3k + 24.$$

Kadangi visi keturi šio skaičiaus dėmenys dalijasi iš 3, tai ir skaičius M dalijasi iš 3.

Kai $n \equiv 2\,(\mathrm{mod} 3)$ (t. y. $n = 3k + 2,\ k \in \mathrm{Z}$), tai $n^2 \equiv 1\,(\mathrm{mod} 3)$, $n^3 \equiv 2\,(\mathrm{mod} 3)$. Tuomet $M \equiv 14 \cdot 2 + 9 \cdot 1 + 2 = 39 \equiv 0\,(\mathrm{mod} 3)$.

Pastaba. Tokiu pat būdu galima nagrinėti ir atvejus $n \equiv 0\,(\mathrm{mod} 3)$ ir $n \equiv 1\,(\mathrm{mod} 3)$. Kadangi visais trimis galimais skaičiaus n atvejais skaičius M dalijasi iš 3, tai M dalijasi iš 3 su visais sveikaisiais skaičiais n.

PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Pirmiausia raskime funkcijos f išraišką taške $\dfrac{x-1}{x+1}$:

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{4 \cdot \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2 - \dfrac{x-1}{x+1} + 1}{5\left(\dfrac{x-1}{x+1} - 1\right)} = -\frac{2x^2 - 3x + 3}{5(x+1)}.$$

Tada $1 - 2f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) =$

$$= 1 + \frac{2(2x^2 - 3x + 3)}{5(x+1)} = \frac{5(x+1) + 2(2x^2 - 3x + 3)}{5(x+1)} = \frac{4x^2 - x + 11}{5(x+1)}.$$

Šią išraišką sugretinkime su sandauga $x \cdot f(x)$; ji yra tokia:

$$x\,f(x) = \frac{x(4x^2 - x + 1)}{5(x-1)} = \frac{4x^3 - x^2 + x}{5(x-1)}.$$

Matome, kad šios išraiškos nesutampa. Neigiamam atsakymui pagrįsti reiki įsitikinti, kad bent viename taške x šių reiškinių reikšmės nelygios. Pasirinkę, pavyzdžiui, $x = 2$, gauname:

$$1 - 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{4 \cdot 2^2 - 2 + 11}{5(2+1)} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$

ir

$$x\,f(x) = \frac{4 \cdot 2^3 - 2^2 + 2}{5(2-1)} = \frac{30}{5} = 6.$$

Ats.: Ne.

2. Reikšmei $f(2)$ rasti sudarykime dviejų lygčių sistemą

$$\begin{cases} (2^2 - 1)\,f(2) - f(-2) = 2^2(2 - 2^2), \\ ((-2)^2 - 1)\,f(-2) - f(2) = (-2)^2(2 - (-2)^2). \end{cases}$$

Atlikę veiksmus, gauname tokią sistemą:

$$\begin{cases} 3f(2) - f(-2) = -8, \\ -f(2) + 3f(-2) = -8. \end{cases}$$

Pirmą lygtį padauginę iš 3 ir sudėję su antrąja, gauname lygtį

$$8f(2) = -32.$$

Iš čia $f(2) = -4$.

Ats.: –4.

3. Rasime visas funkcijas f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, kurios tenkina lygtį

$$x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4. \qquad (1)$$

Kintamąjį x pakeitę kintamuoju $1-x$, gauname lygtį

$$(1-x)^2 f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4. \qquad (2)$$

Joje yra tie patys du nežinomieji ($f(x)$ ir $f(1-x)$) kaip ir (1) lygtyje. Todėl funkcijos f formulės galima bandyti ieškoti sprendžiant sistemą, sudarytą iš (1) ir (2) lygčių:

$$\begin{cases} x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4, \\ f(x) + (1-x)^2 f(1-x) = 2(1-x) - (1-x)^4. \end{cases}$$

Iš pirmos lygties gautą $f(1-x)$ išraišką

$$f(1-x) = 2x - x^4 - x^2 f(x)$$

įrašę į antrą, turėsime lygtį

$$f(x) + (1-x)^2(2x - x^4) - (1-x)^2 x^2 f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4.$$

Ją pertvarkykime taip:

$$(1-(1-x)^2 x^2) f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4 - (1-x)^2 \cdot (2x - x^4),$$

$$(1 - x^2 + 2x^3 - x^4) f(x) = (1-x^2)(1 - x^2 + 2x^3 - x^4).$$

Iš čia $f(x) = 1 - x^2$, kai $x \notin \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$, nes

$$1 - x^2 + 2x^3 - x^4 = 1 - (1-x)^2 x^2 = (1-(1-x)x)(1+(1-x)x) =$$

$$= (x^2 - x + 1)(-x^2 + x + 1) = -\left(\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right) \left(\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{5}{4} \right) = 0,$$

kai $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Ats.: $f(x) = 1 - x^2$, kai $x \notin \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$.

4. Išspręsime funkcinę lygtį

$$x^{-1} \cdot f(-x) + f(x^{-1}) = x,\ x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}. \qquad (3)$$

Kintamąjį x pakeitę kintamuoju $-\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, gauname lygtį

$$-xf\left(\frac{1}{x} \right) + f(-x) = -\frac{1}{x},$$

turinčią tuos pačius nežinomuosius ($f(-x)$ ir $f\left(\frac{1}{x} \right)$) kaip ir (3) lygtis.

Toliau spręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{1}{x} \cdot f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x, \\ f(-x) - x\, f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}. \end{cases}$$

Iš pirmos lygties $f\left(\frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{x} f(-x)$. Įrašę šią išraišką į antrą lygtį, gauname lygtį

$$f(-x) - x^2 + f(-x) = -\frac{1}{x}.$$

Iš čia $f(-x) = \frac{x^3 - 1}{2x}$ ($x \neq 0$).

Vadinasi, $f(x) = \frac{(-x)^3 - 1}{-2x} = \frac{x^3 + 1}{2x}$, $x \neq 0$.

Ats.: $f(x) = \frac{x^3 + 1}{2x}$, $x \neq 0$.

5. Nustatysime, su kuriomis *a*, *b* ir *c* reikšmėmis funkcija *f*: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, apibrėžta formule $f(x) = ax^2 + bx + c$, tenkina lygtį

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy; \; x, y \in \mathbf{R}. \qquad (4)$$

Kadangi $f(y) = ay^2 + by + c$,

$$f(x+y) = a(x+y)^2 + b(x+y) + c = ax^2 + 2axy + ay^2 + bx + by + c,$$

iš (4) lygties gauname, kad parametrai *a*, *b* ir *c* turi tenkinti (su visais $x, y \in \mathbf{R}$) tokią lygybę:

$$ax^2 + 2axy + ay^2 + bx + by + c = ax^2 + bx + c + ay^2 + by + c + xy.$$

Iš čia gauname, kad turi galioti lygybė $2axy = c + xy$, kai $x, y \in \mathbf{R}$.

Pasirinkę $x = 0$, gauname $c = 0$. Kai $x = y = 1$, gauname $a = \frac{1}{2}$.

Taigi $f(x) = \frac{x^2}{2} + bx$, $b \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$.

Ats.: $a = \frac{1}{2}$, *b* – bet kuris realusis skaičius, $c = 0$.

6. Paeiliui įrašykime (į lygtį) $n = 1, 2, 3, \ldots, k.$ Gausime tokią lygybių sistemą:

$$f(1) = f(0) + 2,$$
$$f(2) = f(1) + 2^2,$$
$$f(3) = f(2) + 2^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(k-1) = f(k-2) + 2^{k-1},$$
$$f(k) = f(k-1) + 2^k.$$

Sudėję jas, turėsime lygybę

$$f(k) = f(0) + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{k-1} + 2^k =$$
$$= f(0) + 2(1 + 2^2 + \ldots + 2^{k-2} + 2^{k-1}) =$$
$$= f(0) + 2(2^k - 1).$$

Remdamiesi sąlyga $f(1) = 1,$ iš pirmos lygybės gauname, kad $f(0) = 1 - 2 = -1.$

Taigi funkcijos f formulė yra tokia:

$$f(n) = -1 + 2(2^n - 1) = 2^{n+1} - 3.$$

Ats.: $2^{n+1} - 3,\ \ n \in \mathbf{N}.$

7. Kintamąjį x pakeitę $-x$, gauname lygtį $2f(-x^n) + f(x^n) = -3x$ (kadangi n yra nelyginis natūralusis skaičius). Toliau sprendžiame sistemą

$$\begin{cases} 2f(x^n) + f(-x^n) = 3x, \\ f(x^n) + 2f(-x^n) = -3x \end{cases}$$

(nežinomųjų $f(x^n)$ ir $f(-x^n)$ atžvilgiu). Iš jos gauname: $f(-x^n) = 3x - 2f(x^n)$ ir (iš antros lygties) $f(x^n) + 2(3x - 2f(x^n)) = -3x.$ Iš čia $f(x^n) = 3x,\ x \in \mathbf{R}.$

Vadinasi, $f(x) = 3x,\ x \in \mathbf{R}.$

Ats.: $f(x) = 3x,\ x \in \mathbf{R}.$

8. Akivaizdu, kad $f(x) \equiv 0$ yra lygties sprendinys.

Tegu $f(a) = b$, $b \neq 0.$ Kai $y = a,$ tada gauname, kad

$$f(bx) = x^{2009} f(b) \text{ su visais } x \in \mathbf{R}.$$

Kintamąjį bx pakeitę kintamuoju x, gauname, kad

$$f(x) = \frac{f(b)}{b^{2009}} \cdot x^{2009}, \; x \in \mathbf{R}.$$

Pažymėję $k = \dfrac{f(b)}{b^{2009}}$, turėsime tokią funkcijos f formulę:

$f(x) = kx^{2009}$, $x \in \mathbf{R}$; k – bet kuris realusis skaičius.

Ats.: $f(x) = kx^{2009}$, $x \in \mathbf{R}$; $k \in \mathbf{R}$.

9. Rasime f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, jeigu

$$f(x) \cdot f(y) = f(x-y), \text{ kai } x, y \in \mathbf{R}. \qquad (5)$$

Kai $y = x$, $x \in \mathbf{R}$, gauname lygybę $f^2(x) = f(0)$; ji galioja su visais $x \in \mathbf{R}$.

Kai $y = 0$, iš (5) gauname, kad $f(x) \cdot f(0) = f(x)$ su visais $x \in \mathbf{R}$. Vadinasi, $f(x) \equiv 0$, kai $f(0) = 0$.

Tegu $f(0) \neq 0.$ Tada iš sistemos

$$\begin{cases} f^2(x) = f(0), \\ f(x) \cdot f(0) = f(x), \; x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

išplaukia, kad $f(0) = 1.$ Vadinasi, $f(0) \cdot f(y) = f(-y)$, $y \in \mathbf{R}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $f(y) = f(-y)$, kai $y \in \mathbf{R}$.

Iš čia ir sąlygos (gautos iš (5), pasirinkus $x = -y$)

$$f(-y) \cdot f(y) = f(-2y), \; y \in \mathbf{R},$$

gauname: $f(-2y) = f^2(y) = 1$, kai $y \in \mathbf{R}$.

Dydį $-2y$ pakeitę dydžiu x, gauname galutinį rezultatą: $f(x) = 1$, kai $x \in \mathbf{R}$, t. y. $f(x) \equiv 1$.

Ats.: $f(x) \equiv 0$ arba $f(x) \equiv 1$.

10. Išspręsime funkcinę lygtį

$$2x\,f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=2x,\ x\in\mathbf{R},\ x\neq 1. \tag{6}$$

Dydį x pakeiskime dydžiu $\dfrac{1}{1-x}$ ir gausime lygtį

$$\frac{2}{1-x}\,f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{2}{1-x},\ x\neq 0. \tag{7}$$

Matome, kad atsirado naujas nežinomasis $f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$. Todėl kintamąjį x pakeiskime kintamuoju $\dfrac{x-1}{x}$. Gausime lygtį

$$\frac{2(x-1)}{x}\,f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f(x)=\frac{2(x-1)}{x}. \tag{8}$$

Iš (6)–(8) lygčių sudarykime sistemą

$$\begin{cases} 2x\,f(x)+f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=2x, \\ \dfrac{2}{1-x}\,f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=\dfrac{2}{1-x}, \\ \dfrac{2(x-1)}{x}\,f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+f(x)=\dfrac{2(x-1)}{x} \end{cases}$$

ir išspręskime ją dydžio $f(x)$ atžvilgiu. Pirmą lygtį padauginkime iš $\dfrac{-2}{1-x}$, trečią – iš $\dfrac{-x}{2(x-1)}$, o paskui sudėkime visas tris. Gausime lygtį

$$-\frac{4x}{1-x}\,f(x)-\frac{x}{2(x-1)}\,f(x)=-\frac{4x}{1-x}+\frac{2}{1-x}-1.$$

Iš čia (kadangi $x\neq 1$) $f(x)=\dfrac{6x-2}{7x},\ x\neq 0.$

Ats.: $f(x)=\dfrac{6x-2}{7x}$, kai $x\neq 1$ ir $x\neq 0$.

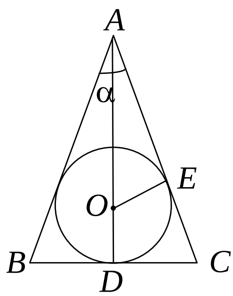
ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Sakykime, kad lygiašonio trikampio *ABC* kampas tarp šoninių kraštinių *AB* ir *AC* lygus α (1 pav.), taškas *O* – įbrėžto į trikampį apskritimo centras, taškuose *E* ir *D* įbrėžtas apskritimas liečia šoninę kraštinę *AC* ir pagrindą *BC*. Iš stačiojo trikampio *AOE* gauname, kad $\frac{AE}{OE} = \operatorname{ctg}\angle OAE$, t. y.

$AE = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Kadangi

$$\angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha,$$

tai $\angle OCE = \frac{1}{2}\angle C = 45^\circ - \frac{\alpha}{4}$. Iš stačiojo trikampio *OEC* turime



1 pav.

$$EC = r\operatorname{ctg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right).$$

Tada $AC = AE + EC = r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)\right) =$

$$= r\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}\right) = \frac{r\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)} =$$

$$= \frac{r\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)} = \frac{r\operatorname{ctg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

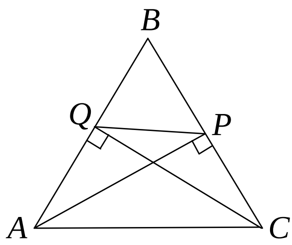
Tuomet trikampio plotas

$$S = \frac{1}{2}AC^2\sin\alpha = \frac{1}{2}\frac{r^2\operatorname{ctg}^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin\alpha =$$

$$=\frac{1}{2}\frac{r^2\,\mathrm{ctg}^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=r^2\,\mathrm{ctg}^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Ats.: $S=r^2\,\mathrm{ctg}^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

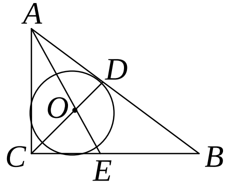
2. Iš stačiųjų trikampių *APB* ir *CQB* (2 pav.) turime $\cos B=\frac{BQ}{BC}=\frac{BP}{AB}$. Taigi $\frac{BQ}{BP}=\frac{BC}{AB}$, todėl trikampiai *ABC* ir *PBQ* yra panašieji, o jų panašumo koeficientas yra $\frac{BQ}{AB}=\cos B$. Kadangi panašiųjų trikampių perimetrų santykis lygus jų panašumo koeficientui, tai iš uždavinio sąlygos gauname, kad



2 pav.

$\frac{9}{15}=\frac{BQ}{AB}=\cos B$, t. y. $\cos B=\frac{3}{5}$. Kadangi apie panašiuosius trikampius apibrėžtų apskritimų spindulių santykis lygus jų panašumo koeficientui, tai apie trikampį *ABC* apibrėžto apskritimo spinduliui *R* turime $\frac{\frac{9}{5}}{R}=\frac{3}{5}$, t. y. $R=3$. Pagal sinusų teoremą trikampiui *ABC* randame $AC=2R\sin B=2\cdot 3\cdot\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{24}{5}$.

Ats.: $AC=\frac{24}{5}$.



3 pav.

3. Sakykime, kad *CD* – stačiojo kampo pusiaukampinė (3 pav.). Kadangi $\angle ACD=45^\circ$, tai $\angle ADC=180^\circ-45^\circ-\angle A=$

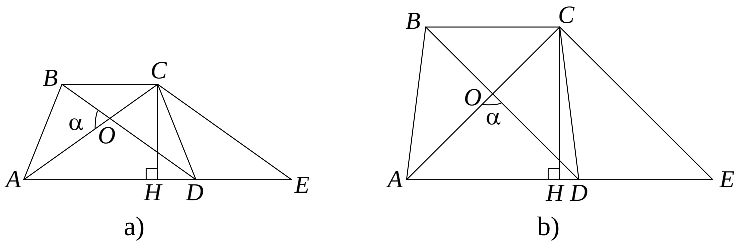
$=135^\circ - \angle A$. Iš sinusų teoremos trikampiams *AOC* ir *AOD* turime $\dfrac{CO}{\sin\frac{A}{2}} = \dfrac{AO}{\sin 45^\circ}$, $\dfrac{OD}{\sin\frac{A}{2}} = \dfrac{AO}{\sin(135^\circ - A)}$. Iš čia gauname

$$CO = \frac{AO\sin\frac{A}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}},\ OD = \frac{AO\sin\frac{A}{2}}{\sin(135^\circ - A)}.$$

Pagal uždavinio sąlygą $\dfrac{CO}{OD} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sin(135^\circ - A)}{\sqrt{2}}$. Iš čia seka $\sin(135^\circ - A) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$. Kadangi kampas *A* – smailusis, iš čia gauname, kad $135^\circ - A = 60^\circ$ arba $135^\circ - A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Todėl $\angle A = 75^\circ$, tuomet $\angle B = 15^\circ$, arba $\angle A = 15^\circ$, $\angle B = 75^\circ$.

Ats.: 15° ir 75°.

4. Sakykime, kad trapecijos *ABCD* įstrižainės *AC* ir *BD* susikerta taške *O*, $CH = h$ – trapecijos aukštinė (4 pav.). Nubrėžiame tiesę *CE* lygiagrečią su tiese *BD*. Kadangi keturkampis *BCED* – lygiagretainis, tai $DE = BC$ ir atkarpa *AE* yra lygi dvigubai trapecijos vidurio linijai. Nagrinėkime du atvejus: kampas *AOB* smailusis (4a pav.) ir kampas *AOD* smailusis (4b pav.). Abiem atvejais trikampio *ACE* plotas *S* lygus $S = \frac{1}{2}AE \cdot h = \frac{1}{2}AC^2 \sin\alpha$. Iš čia



4 pav.

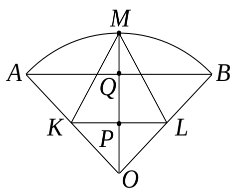
$AE = \dfrac{AC^2 \sin\alpha}{h}$. Iš trikampio ACH randame $AC = \dfrac{h}{\sin\angle CAD}$.
Kadangi trapecija lygiašonė, tai ir trikampis AOD lygiašonis, todėl $\angle CAD = \dfrac{1}{2}(180^\circ - \angle AOD)$. Pirmuoju atveju $\angle CAD = \dfrac{\alpha}{2}$, o antruoju $\angle CAD = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$. Tuomet $AC = \dfrac{h}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$ arba $AC = \dfrac{h}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$,

taigi $AE = \dfrac{h^2}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sin\alpha}{h} = \dfrac{2h\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}} = 2h\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, arba

$$AE = \frac{h^2}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sin\alpha}{h} = 2h\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Ats.: $h\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$ arba $h\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

5. Sakykime, kad taškas M yra lanko AB vidurio taškas, taškai K ir L yra spinduliuose OA ir OB atitinkamai ir trikampis KLM – lygiakraštis (5 pav.). Išpjova AOB yra simetriška tiesės OM atžvilgiu, todėl tiesė OM yra lygiašonių trikampių KML, AOB ir KOL aukštinė, pusiaukraštinė ir pusiaukampinė. Sakykime, kad spindulys OM atkarpas KL ir AB kerta taškuose P ir Q. Iš trikampių AOQ ir KOP panašumo gauname $\dfrac{KP}{AQ} = \dfrac{OP}{OQ}$. Kadangi



5 pav.

$$AQ = AO\sin\angle AOQ = R\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$OP = OM - MP = R - \frac{KL\sqrt{3}}{2},$$

$$OQ = AO \cdot \cos\angle AOQ = R\cos\frac{\alpha}{2}, \quad KP = \frac{1}{2}KL,$$

tai $\dfrac{\frac{1}{2}KL}{R\sin\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{R - KL\frac{\sqrt{3}}{2}}{R\cos\frac{\alpha}{2}}$.

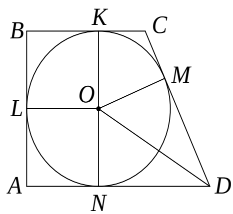
Iš šios lygties randame $KL = \dfrac{2R\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}}$. Pertvarkę turime

$$KL = \frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos 30^\circ \sin\frac{\alpha}{2} + \sin 30^\circ \cos\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Ats.: $KL = \dfrac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} = \dfrac{2R\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}}$.

6. Trapecijos *ABCD* pagrindai *AD* ir *BC*, $\angle A = \angle B = 90^\circ$, $\angle D = \alpha$ (6 pav.), taškas *O* – į ją įbrėžto apskritimo centras. Apskritimas liečia trapecijos kraštines *AB*, *BC*, *CD* ir *DA* atitinkamai taškuose *L*, *K*, *M*, *N*, taigi $OL = OK = ON = \frac{h}{2}$, čia $h = AB$ – trapecijos aukštinė. Pagal apskritimo liestinių, nubrėžtų iš vieno taško savybę, $DM = DN$, $CM = CK$, todėl trapecijos perimetrui *P* turime $P = 2DM + 2CM + 2h$. Iš trikampio *OND*



6 pav.

turime $ND = ON\,\mathrm{ctg}\angle NOD = \frac{h}{2}\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Kadangi $\angle BCD = 180^\circ - \alpha$, tai iš trikampio *OCM* randame

$$CM = OM\ \mathrm{ctg}\angle OCM = \frac{h}{2}\mathrm{ctg}\frac{180^\circ - \alpha}{2} =$$

$$= \frac{h}{2}\mathrm{ctg}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{h}{2}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

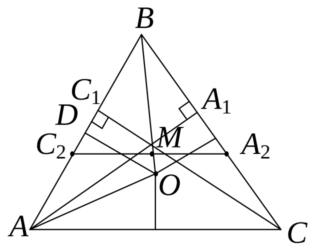
Taigi $P = h\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} + h\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + 2h$. Iš čia

$$h = \frac{P}{2 + \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{P}{2 + \dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}} = \frac{P\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} + 1} = \frac{P\sin\alpha}{2(1+\sin\alpha)}.$$

Ats.: $h = \dfrac{P}{2 + \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{P\sin\alpha}{2(1+\sin\alpha)}$.

7. Sakykime, kad trikampio *ABC* kraštinių *AB*, *BC* ir *AC* ilgiai yra *c*, *a*, *b*, taškas *D* yra kraštinės *AB* vidurio taškas, taškas *O* – apibrėžto apie trikampį apskritimo centras (7 pav.). Iš stačiųjų trikampių AA_1B ir AC_1C gauname $BA_1 = c\cos B$, $BC_1 = a\cos B$. Kadangi pagal uždavinio sąlygą $A_1B = A_2C$, tai $BA_2 = BC - A_2C = a - c\cos B$. Analogiškai $C_2B = c - a\cos B$, Kadangi taškas *O* yra apie trikampį apibrėžto apskritimo centras, tai $\angle AOB = 2\angle C$, $\angle BOD = \angle C$ ir



7 pav.

$\angle ABO = 90^\circ - \angle C$. Analogiškai $\angle CBO = 90^\circ - \angle A$. Jei tiesė OB atkarpą A_2C_2 kerta taške M, tai trikampiams BC_2M ir BA_2M pritaikę sinusų teoremą, gauname

$$\frac{C_2M}{\sin(90^\circ - C)} = \frac{C_2B}{\sin\angle BMC_2}, \quad \frac{A_2M}{\sin(90^\circ - A)} = \frac{BA_2}{\sin\angle BMA_2}.$$

Iš čia

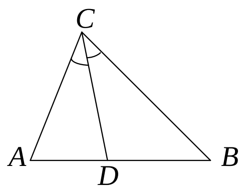
$$C_2M = \frac{C_2B\cos\angle C}{\sin\angle BMC_2}, \quad A_2M = \frac{A_2B\cos\angle A}{\sin\angle BMA_2}.$$

Kadangi BMC_2 ir BMA_2 – gretutiniai kampai, tai uždavinio sprendimui pakanka įsitikinti lygybės $C_2B\cos C = A_2B\cos A$ teisingumu. Įrašę atkarpų C_2B ir A_2B ilgių išraiškas, šią lygybę užrašome taip: $(c - a\cos B)\cos C = (a - c\cos B)\cos A$, bet tai yra lygybė, įrodyta 4 pavyzdyje.

8. Trikampyje ABC

$$AB = c,\quad BC = a,\quad AC = b,$$

kampo C pusiaukampinė $CD = l$ (8 pav.). Trikampių ACD ir BCD plotų suma lygi trikampio ABC plotui, todėl yra teisinga lygybė



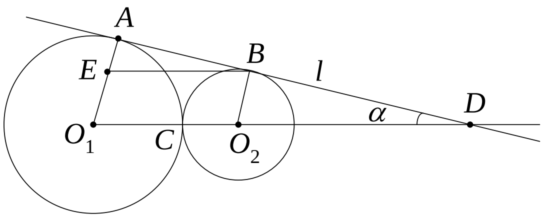
8 pav.

$$\frac{1}{2}AC\cdot CD\sin\angle ACD + \frac{1}{2}CB\cdot CD\sin\angle BCD =$$
$$= \frac{1}{2}AC\cdot CB\sin\angle C\text{, t. y. } (bl + al)\sin\frac{C}{2} = ab\sin C.$$

Iš čia $(bl + al)\sin\frac{C}{2} = 2ab\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$, o kadangi $\sin\frac{C}{2} \neq 0$, tai $\cos\frac{C}{2} = \frac{(a+b)l}{2ab}$. Taigi $\angle C = 2\arccos\frac{(a+b)l}{2ab}$.

Ats.: $2\arccos\frac{(a+b)l}{2ab}$.

9. Tarkime, kad apskritimai, kurių centrai O_1 ir O_2, o spindulių ilgiai R_1 ir R_2 ($R_1 > R_2$), išoriškai liečiasi taške C (9 pav.). Tiesė l, liečianti apskritimus atitinkamai taškuose A ir B, kerta centrų tiesę O_1O_2 taške D ir $\angle O_1DA = \alpha$. Nubrėžkime tiesę BE, lygiagrečią su tiese O_1O_2, tuomet keturkampis O_1EBO_2 yra lygiagretainis, $EB = O_1O_2 = R_1 + R_2$, $AE = R_1 - R_2$, o $\angle EBA = \alpha$. Kadangi tiesės AB ir AO_1 yra statmenos, tai trikampis EAB – statusis, todėl

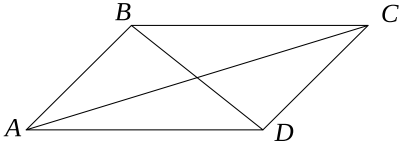


9 pav.

$$\sin\alpha = \frac{AE}{EB} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1 - \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_2}{R_1}}.\ \text{Iš čia}\ \frac{R_2}{R_1} = \frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}.$$

Ats.: $\dfrac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}$.

10. Pagal sąlygą $AB = mx$, $AD = nx$, $BD = py$, $AC = qy$ (10 pav.). Pagal lygiagretainio kraštinių ir įstrižainių savybę (1 pavyzdys) turime $p^2x^2 + q^2y^2 = 2(m^2x^2 + n^2x^2)$. Trikampiui ABD taikome kosinusų teoremą



10 pav.

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot BD \cos A,$$

t. y.

$$p^2y^2 = m^2x^2 + n^2x^2 - 2mnx^2\cos A.$$

Iš šios lygybės gauname $y^2 = \dfrac{x^2}{p^2}(m^2 + n^2 - 2mn\cos A)$. Įrašę į ankstesniąją lygybę ir suprastinę iš x^2 turime:

$$\frac{p^2+q^2}{p^2}(m^2 + n^2 - 2mn\cos A) = 2(m^2+n^2)\ .$$

Iš čia

$$\cos A = \frac{(q^2-p^2)(m^2+n^2)}{2mn(p^2+q^2)}.$$

Todėl

$$\angle A = \arccos\frac{(q^2-p^2)(m^2+n^2)}{2mn(p^2+q^2)},$$

$$\angle B = 180^\circ - \arccos\frac{(q^2-p^2)(m^2+n^2)}{2mn(p^2+q^2)}.$$

Ats.: $\arccos\dfrac{(q^2-p^2)(m^2+n^2)}{2mn(p^2+q^2)}$ ir

$180^\circ - \arccos\dfrac{(q^2-p^2)(m^2+n^2)}{2mn(p^2+q^2)}$.

SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

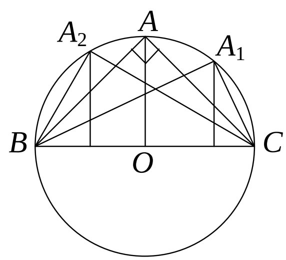
1. Jeigu $-\dfrac{\pi}{2} < x_1 \le x_2 < \dfrac{\pi}{2}$, tai $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{x_1+x_2}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ ir $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{x_1-x_2}{2} < \dfrac{\pi}{2}$. Tada

$$\frac{\cos x_1 + \cos x_2}{2} = \cos\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\cos\frac{x_1-x_2}{2} \le \cos\frac{x_1+x_2}{2},$$

nes $0 < \cos\dfrac{x_1-x_2}{2} \le 1$. Lygybė galima tik tada, kai $x_1 = x_2$.

Vadinasi, funkcija $f(x)=\cos x$ intervale $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ yra iškila aukštyn.

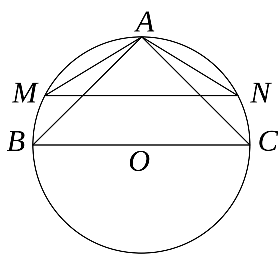
2. Pirmiausia nesunku įsitikinti, kad tarp visų į apskritimą įbrėžtų, stačiųjų trikampių didžiausio ploto yra lygiašonis statusis trikampis ABC (žr. 1 pav.). Jo plotas lygus R^2.



1 pav.

Įsitikinsime, kad bet kokio bukojo trikampio, įbrėžto į apskritimą, plotas yra mažesnis už į tą apskritimą įbrėžto lygiašonio stačiojo trikampio plotą.

2 paveiksle pavaizduotas statusis lygiašonis trikampis ABC ir bet koks bukasis trikampis AMN ($\angle MAN=\alpha$).



2 pav.

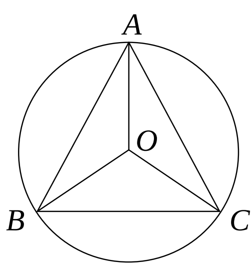
Kadangi $AM<AB$, $AN<AC$ ir $\alpha>90^\circ$, tai

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin 90^\circ=$$

$$=\frac{1}{2}AB\cdot AC>\frac{1}{2}AM\cdot AN\cdot\sin\alpha=S_{AMN}.$$

Dabar tarp visų smailiųjų trikampių, įbrėžtų į apskritimą, ieškosime didžiausio ploto trikampio ir jo plotą palyginsime su lygiašonio stačiojo trikampio, įbrėžto į šį apskritimą, plotu.

Sakykime, kad taškas O – apskritimo centras, o trikampio ABC kampų didumai yra atitinkamai α, β ir γ. Tada (žr. 3 pav.)



3 pav.

$$\angle AOB=2\angle C=2\gamma,\ \angle BOC=2\angle A=2\alpha\ \ \angle AOC=2\angle B=2\beta.$$

Tada $S_{ABC}=\frac{1}{2}R^2(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)$.

Funkcija $f(x)=\sin 2x$, kai $0<x<90^\circ$, yra iškila aukštyn. Todėl

$$\frac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma}{3}\le \sin\frac{2\alpha+2\beta+2\gamma}{3}=\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{ABC}\le\frac{1}{2}R^2\cdot 3\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

Lygybė $S_{ABC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$ galima tik tada, kai $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$.

Akivaizdu, kad $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2>R^2$.

Vadinasi, iš visų trikampių, įbrėžtų į spindulio R skritulį, didžiausią plotą turi lygiakraštis trikampis.

3. Remdamiesi trijų neneigiamų skaičių aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybe, gauname:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\le\left(\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}\right)^3.$$

Kadangi funkcija $f(x)=\cos x$ intervale $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ yra iškila aukštyn, tai

$$\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}\le\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

Taigi $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$.

Lygybė galima tik tada, kai $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}$.

4. Funkcija $f(x)=\mathrm{tg}\,x$ intervale $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ yra iškila žemyn, todėl

$$\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{2}\ge\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2},\quad \frac{\mathrm{tg}\,\beta+\mathrm{tg}\,\gamma}{2}\ge\mathrm{tg}\frac{\beta+\gamma}{2},\quad \frac{\mathrm{tg}\,\gamma+\mathrm{tg}\,\alpha}{2}\ge\mathrm{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

Sudėję šias nelygybes, gauname:

$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma \geq \mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta+\gamma}{2} + \mathrm{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2} =$$

$$= \mathrm{tg}\frac{\pi-\gamma}{2} + \mathrm{tg}\frac{\pi-\alpha}{2} + \mathrm{tg}\frac{\pi-\beta}{2} = \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

Lygybė galima tik tada, kai $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\pi}{3}$.

5. Pagal sinusų teoremą,

$$a = 2R\sin\alpha,\ b = 2R\sin\beta,\ c = 2R\sin\gamma;$$

čia $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$.

Tada $a+b+c = 2R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$.

Kadangi funkcija $f(x) = \sin x$ intervale $(0; \pi)$ yra iškila aukštyn, tai

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq 3\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Taigi $a+b+c \leq 2R\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\,R.$ Lygybė galima tik tada, kai $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\pi}{3}$, t. y. kai trikampis yra lygiakraštis.

6. **a)** Kadangi $f'(x) = 6x^5$, o $f''(x) = 30x^4 \geq 0$ su visomis x reikšmėmis, tai funkcija $f(x) = x^6$ yra iškila žemyn visoje apibrėžimo srityje.

b) Tegu $a, b \in R$. Remdamiesi funkcijos $f(x) = x^6$ iškilumu žemyn, gauname:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^6 \leq \frac{a^6+b^6}{2} \Rightarrow a^6 + b^6 \geq 2\cdot\frac{(a+b)^6}{2^6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 32(a^6+b^6) \geq (a+b)^6.$$

7. a) <u>1 būdas.</u> Kadangi $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, o $f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}<0$ su visais $x\in(0;+\infty)$, tai funkcija $f(x)=\sqrt{x}$ yra iškila aukštyn.

<u>2 būdas.</u> Kadangi $f(x)=\sqrt{x}>0$ su visais $x\in(0;+\infty)$, tai nagrinėdami skirtumą gausime:

$$f^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\left(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{2}\right)^2=\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_1+x_2+2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}}{4}=$$

$$=\frac{2(x_1+x_2)-x_1-x_2-2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}}{4}=\frac{x_1+x_2-2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}}{4}=$$

$$=\frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2}{4}\geq 0\Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Lygybė galima tik tada, kai $x_1=x_2$. Taigi funkcija $f(x)=\sqrt{x}$ yra iškila aukštyn.

b) Remdamiesi funkcijos $f(x)=\sqrt{x}$ iškilumu aukštyn, gauname:

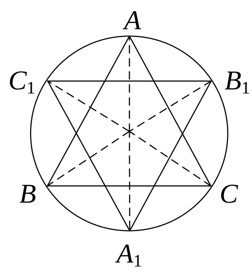
$$\frac{\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}}{3}\leq\sqrt{\frac{p-a+p-b+p-c}{3}}=$$

$$=\sqrt{\frac{3p-(a+b+c)}{3}}=\sqrt{\frac{p}{3}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\leq 3\sqrt{\frac{p}{3}}=\sqrt{3p}.$$

Lygybė galima tik tada, kai $a=b=c$.

8. Tegu trikampis *ABC* įbrėžtas į spindulio *R* apskritimą (žr. 4 pav.). Šio trikampio kampų pusiaukampinės kerta apskritimą



4 pav.

taškuose A_1, B_1 ir C_1 atitinkamai. Apskaičiuokime trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ perimetrus.

Tegu $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$, $\angle A_1=\alpha_1$, $\angle B_1=\beta_1$, $\angle C_1=\gamma_1$.

Tada

$$P_{ABC}=2R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma),$$

ir

$$P_{A_1B_1C_1}=2R(\sin\alpha_1+\sin\beta_1+\sin\gamma_1).$$

Įrodysime, kad

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\sin\alpha_1+\sin\beta_1+\sin\gamma_1.$$

Kadangi

$$\angle A_1=\frac{\angle B+\angle C}{2},\ \angle B_1=\frac{\angle A+\angle C}{2}\ \text{ir}\ \angle C_1=\frac{\angle A+\angle B}{2},$$

tai $\alpha_1=\dfrac{\beta+\gamma}{2}$, $\beta_1=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$ ir $\gamma_1=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

Remdamiesi funkcijos $f(x)=\sin x$ iškilumu aukštyn intervale $(0;\pi)$, gauname:

$$\sin\alpha+\sin\beta\le 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=2\sin\gamma_1,$$

$$\sin\beta+\sin\gamma\le 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}=2\sin\alpha_1,$$

$$\sin\gamma+\sin\alpha\le 2\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}=2\sin\beta_1;$$

Lygybės galios tik tada, kai $\alpha=\beta=\gamma$.

Sudėję šias nelygybes, gauname:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\sin\alpha_1+\sin\beta_1+\sin\gamma_1\Rightarrow P_{ABC}\le P_{A_1B_1C_1}.$$

Lygybė galima tik tada, kai trikampis ABC yra lygiakraštis.

9. Remdamiesi nelygybe tarp trijų neneigiamų skaičių aritmetinio ir geometrinio vidurkių, gauname:

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\ge 3\frac{1}{\sqrt[3]{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}}\ge 3\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}}=6.$$

(Rėmėmės nelygybe $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8}$ (žr. 1 pavyzdžio 1-ąją nelygybę)).

10. **a)** 1 būdas. Nagrinėdami skirtumą gauname:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{f(a)+f(b)}{2}=\frac{1}{1-\frac{a+b}{2}}-\frac{\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}}{2}=$$

$$=\frac{2}{2-a-b}-\frac{1-b+1-a}{2(1-a)(1-b)}=\frac{2}{2-a-b}-\frac{2-a-b}{2(1-a)(1-b)}=$$

$$=\frac{4(1-a)(1-b)-(2-a-b)^2}{2(2-a-b)(1-a)(1-b)}=$$

$$=\frac{4(1-a-b+ab)-(4+a^2+b^2-4a-4b+2ab)}{2(2-a-b)(1-a)(1-b)}=$$

$$=-\frac{(a-b)^2}{2(2-a-b)(1-a)(1-b)}\le 0,$$

nes $0<a<1,\ 0<b<1,\ 2-a-b>0.$ Lygybė galima tik tada, kai $a=b.$ Taigi funkcija $f(x)=\frac{1}{1-x}$ intervale (0; 1) yra iškila žemyn.

2 būdas. Kadangi

$$f'(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1'(1-x)-1\cdot(1-x)'}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2},$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)'=((1-x)^{-2})'=-2(1-x)^{-3}\cdot(1-x)'=$$

$$=2(1-x)^{-3}=\frac{2}{(1-x)^3}>0,\ \text{kai}\ x\in(0;1),$$

tai funkcija $f(x)=\frac{1}{1-x}$ intervale (0; 1) yra iškila žemyn.

b) <u>1 būdas.</u> Tegu $a_1 = \dfrac{a}{p}$, $b_1 = \dfrac{b}{p}$, $a_1 = \dfrac{a}{p}$, Tada $a_1 + b_1 + c_1 = \dfrac{a+b+c}{p} = \dfrac{2p}{p} = 2$ ir $0 < a_1 < 1$, $0 < b_1 < 1$, $0 < c_1 < 1$.

Kadangi funkcija $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ intervale (0; 1) yra iškila žemyn,

$$f\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}\right) - \frac{f(a_1)+f(b_1)+f(c_1)}{3} =$$

$$= \frac{1}{1-\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3}} - \frac{\dfrac{1}{1-a_1}+\dfrac{1}{1-b_1}+\dfrac{1}{1-c_1}}{3} =$$

$$= \frac{3}{3-(a_1+b_1+c_1)} - \frac{1}{3}\left(\frac{p}{p-a}+\frac{p}{p-b}+\frac{p}{p-c}\right) =$$

$$= 3 - \frac{1}{3}\left(\frac{p}{p-a}+\frac{p}{p-b}+\frac{p}{p-c}\right) \le 0 \Rightarrow \frac{p}{p-a}+\frac{p}{p-b}+\frac{p}{p-c} \ge 9.$$

Lygybė galima tik tada, kai $a_1 = b_1 = c_1$, t. y. $a = b = c$.

<u>2 būdas.</u> Tegu $p - a = a_1$, $p - b = b_1$ ir $p - c = c_1$. Tada $a_1 + b_1 + c_1 = 3p - (a+b+c) = 3p - 2p = p$ ir

$$\frac{p}{a_1}+\frac{p}{b_1}+\frac{p}{c_1} \ge 3p \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a_1 b_1 c_1}}.$$

Kita vertus,

$$a_1 b_1 c_1 \le \left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}\right)^3.$$

Todėl

$$\frac{p}{a_1}+\frac{p}{b_1}+\frac{p}{c_1} \ge 3p \cdot \frac{3}{a_1+b_1+c_1} = 9.$$

Taigi $\dfrac{p}{p-a}+\dfrac{p}{p-b}+\dfrac{p}{p-c} \ge 9.$ Lygybė galima tik tada, kai $a_1 = b_1 = c_1$, t. y. $a = b = c$.

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. I būdas. Sudarome lošimo kauliuko dviejų metimų baigčių aibę, pavaizduodami ją lentele (langeliuose – abiejų metimų rezultatų suma):

II \ I	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą tikimybė, kad atsivertusių akučių suma nelyginė (įvykis *A*), lygi: $P(A)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$.

II būdas. Įvykiai, kad I-uoju metimu lošimo kauliukas atsivers lyginiu (nelyginiu) akučių skaičiumi, ir, kad II-uoju metimu jis atsivers nelyginiu (lyginiu) akučių skaičiumi, yra nepriklausomi. Suma bus nelyginė, jeigu vieno metimo rezultatas bus lyginis, o kito – nelyginis. Todėl nagrinėjamojo įvykio *A* tikimybė, pritaikius (1) ir (3) formules, lygi: $P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Ats.: $\frac{1}{2}$.

2. Bandymo baigčių aibė sudaryta iš $C_9^2=\frac{9\cdot 8}{1\cdot 2}=36$ elementų. Įvykiui *A* – bus ištraukti skirtingų spalvų rutuliai – palankių baigčių yra $2\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 4=26$ (geltonas ir žalias arba geltonas ir raudonas, arba žalias ir raudonas). Pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą

$P(A)=\frac{26}{36}=\frac{13}{18}$.

Ats.: $\frac{13}{18}$.

3. <u>I būdas.</u> Trijų monetos metimų bandymo baigčių aibė yra $\{hhh, hsh, hhs, hss, sss, shs, shh, ssh\}$; čia h reiškia herbo atsivertimą, o s – skaičiaus atsivertimą metus monetą atitinkamai pirmą, antrą ir trečią kartą. Pagal klasikinę tikimybės formulę

$$P(X=0)=\frac{1}{8},\ \ P(X=1)=\frac{3}{8},\ \ P(X=2)=\frac{3}{8},\ \ P(X=3)=\frac{1}{8}.$$

Todėl atsitiktinio dydžio X skirstinys yra

m	0	1	2	3
$P(X=m)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

<u>II būdas.</u> Atsitiktinio dydžio X reikšmės k tikimybę galima apskaičiuoti naudojantis Bernulio formule

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ \text{kai}\ n=3,\ \ p=\frac{1}{2},\ \ k=0, 1, 2, 3.$$

4. Pagal (5), (6) ir (7) formules gauname

$$EX=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2},$$

$$DX=\left(0-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{8}+\left(1-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{8}+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{8}+\left(3-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{4},$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pastaba. Apskaičiavus $E(X^2)=3$, dispersijai rasti galima naudotis formule $DX=E(X^2)-(EX)^2$. Tuomet

$$DX=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}.$$

Ats.: $EX=\frac{3}{2},\ \ DX=\frac{3}{4},\ \ \sigma(X)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

5. Iš funkcijos $u=f(e)$ apibrėžimo išplaukia, kad

$$P((X,Y)=(1, 2))=P(\{e_1\})=\frac{1}{6},$$

$$P((X, Y) = (2, 1)) = P(\{e_2, e_3, e_4\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$
$$P((X, Y) = (3, 4)) = P(\{e_5, e_6\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Taigi dvimačio atsitiktinio dydžio (X, Y) skirstinys toks:

$X \backslash Y$	1	2	4
1	0	$\frac{1}{6}$	0
2	$\frac{1}{2}$	0	0
3	0	0	$\frac{1}{3}$

6. Apskaičiuokime tikimybes:

$P(X = 1, Y = 0) = \dfrac{4}{45}$, $\quad P(X = 1, Y = 1) = \dfrac{6}{45}$,

$P(X = 2, Y = 0) = \dfrac{6}{45}$, $\quad P(X = 2, Y = 1) = \dfrac{9}{45}$,

$P(X = 3, Y = 0) = \dfrac{8}{45}$, $\quad P(X = 3, Y = 1) = \dfrac{12}{45}$.

Taigi dvimačio atsitiktinio dydžio (X, Y) skirstinys toks:

$X \backslash Y$	0	1
1	$\frac{4}{45}$	$\frac{6}{45}$
2	$\frac{6}{45}$	$\frac{9}{45}$
3	$\frac{8}{45}$	$\frac{12}{45}$

Papildykime šią lentelę atsitiktinio dydžio *X* reikšmių tikimybių stulpeliu ir dydžio *Y* reikšmių tikimybių eilute:

$X \backslash Y$	0	1	p_i
1	$\frac{4}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{2}{9}$
2	$\frac{6}{45}$	$\frac{9}{45}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{8}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{4}{9}$
q_j	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

Kadangi visų šešių lygybių $\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{45}$, $\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{45}$, $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$, $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$, $\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{5}=\frac{8}{45}$, $\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{5}=\frac{4}{15}$ dešiniosios pusės sutampa su atitinkamomis skirtumo tikimybėmis, darome išvadą, kad atsitiktiniai dydžiai *X* ir *Y* yra nepriklausomi.

7. Atsitiktinio dydžio *X* galimos reikšmės yra 1 ir 2, atsitiktinio dydžio *Y* galimos reikšmės taip pat 1 ir 2. Apskaičiuokime tikimybes $P(X=x_i, Y=y_j)$:

$$P(X=1, Y=0)=P(X=1)\cdot P(Y=1/X=1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9},$$

$$P(X=1, Y=2)=P(X=1)\cdot P(Y=2/X=1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9},$$

$$P(X=2, Y=1)=P(X=2)\cdot P(Y=1/X=2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9},$$

$$P(X=2, Y=2)=P(X=2)\cdot P(Y=2/X=2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}.$$

Tuomet dvimačio atsitiktinio dydžio (X, Y) skirstinio, kartu su dydžio *X* ir dydžio *Y* skirstiniais, lentelė tokia:

Y / X	1	2	p_i
1	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$
q_j	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$	1

Kadangi, pavyzdžiui, $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{9} = \frac{10}{27} \neq \frac{4}{9}$, tai dydžiai X ir Y yra priklausomi.

8. Sudėję kiekvienos eilutės tikimybes, gauname dydžio X reikšmių tikimybes (stulpelis p_i), o sudėję stulpelių tikimybes – dydžio Y reikšmių tikimybes (eilutė q_j):

Y / X	–1	1	p_i
1	0,1	0,2	0,3
2	0,1	0,1	0,2
3	0,2	0,3	0,5
q_j	0,4	0,6	1

Taigi atsitiktinio dydžio X skirstinys yra

m	1	2	3
$P(X = m)$	0,3	0,2	0,5

Atsitiktinio dydžio Y skirstinys:

m	–1	1
$P(Y = m)$	0,4	0,6

Kadangi $0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12 \neq 0{,}1$, tai atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra priklausomi.

9. Papildykime skirstinio lentelę dydžio X ir dydžio Y reikšmių tikimybėmis:

$X \backslash Y$	1	2	p_i
0	0,08	0,32	0,4
1	0,12	0,48	0,6
q_j	0,2	0,8	1

Atsitiktinių dydžių skirstiniai tokie:

m	0	1
$P(X = m)$	0,4	0,6

m	0	1
$P(Y = m)$	0,2	0,8

Kadangi $0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08,$ $0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}32,$ $0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}12,$ $0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48,$ tai dydžiai X ir Y – nepriklausomi.

10. Kadangi dydžiai X ir Y nepriklausomi, tai

$P(X = 1, Y = -1) = P(X = 1) \cdot P(Y = -1) = 0{,}1 \cdot 0{,}7 = 0{,}07,$

$P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1) \cdot P(Y = 1) = 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}03,$

$P(X = 2, Y = -1) = P(X = 2) \cdot P(Y = -1) = 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}35,$

$P(X = 2, Y = 1) = P(X = 2) \cdot P(Y = 1) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15,$

$P(X = 3, Y = -1) = P(X = 3) \cdot P(Y = -1) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}28,$

$P(X = 3, Y = 1) = P(X = 3) \cdot P(Y = 1) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12,$

o (X, Y) skirstinys toks:

$X \backslash Y$	–1	1
1	0,07	0,03
2	0,35	0,15
3	0,28	0,12

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

1	2	3	4
± 2	0	3:7	$4\sqrt{2}+2\pi$

Išleistose LJMM knygelėse buvo nagrinėtos tokios temos:

I KNYGA

I. J. Šinkūnas. *Kvadratinis trinaris.*
II. G. Stepanauskas. *Rekurenčiosios sekos.*
III. R. Kašuba. *Elementarinės matematikos uždavinių sprendimo metodai.*
IV. A.Skūpas. *Funkcija.*
V. V. Pekarskas. *Sveikoji ir trupmeninė skaičiaus dalis. Jų savybės.*
VI. P. Survila. *Kombinatorikos ir tikimybių skaičiavimo pradmenys.*
VII. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. *Grafai.*

II KNYGA

I. J. Šinkūnas, A. Urbonas. *Funkcija.*
II. E. Mazėtis. *Apskritimų geometrija. Įbrėžtiniai ir apibrėžtiniai daugiakampiai. Taisyklingieji daugiakampiai.*
III. B. Vasylienė. *Skaičiaus modulis algebros uždaviniuose.*
IV. J. Šinkūnas. *Figūrų panašumas. Talio teorema ir jos taikymai.*
V. D. Jurgaitis. *Matematinės indukcijos metodas.*
VI. A. Urbonas. *Lygčių, nelygybių bei jų sistemų ekvivalentumas.*
VII. B. Grigelionis. *Urnų schemos ir baigtinės Markovo grandinės.*
VIII. A. Juozapavičius, J. Šinkūnas. *Koordinačių sistemos. Žemėlapiai.*

III KNYGA

I. E. Stankus. *Skaičių dalumas.*
II. R. Skrabutėnas. *Grandininės trupmenos.*
III. V. Vitkus. *Vidurkiai.*
IV. E. Mazėtis. *Vektoriai.*
V. J. Šinkūnas. *Plokščių figūrų plotai.*
VI. S. Staknienė. *Iracionaliosios lygtys ir nelygybės.*
VII. A. Apynis, E. Stankus. *Trigonometrinės lygtys ir nelygybės.*
VIII. G. Stepanauskas. *Sekos.*

IV KNYGA

V KNYGA

VI KNYGA

VII KNYGA

I. E. Stankus. *Skaičių dalumas, dalumo požymiai.*
II. E. Mazėtis. *Nelygybės geometrijoje.*
III. J. Šinkūnas. *Kraštinio elemento principas.*
IV. A. Apynis, E. Stankus. *Indukcijos principas.*
V. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. *Grafai. Oilerio formulė.*
VI. J. Vainavičienė. *Geometrinės vietos.*
VII. A. Apynis. *Aibės, taikymo uždaviniai.*
VIII. A. Skūpas. *Išvestinės ir integralai.*

VIII KNYGA

I. J. Šinkūnas. *Vidurkiai ir jų taikymai.*
II. I. Bagdonienė. *Dirichlė principas.*
III. E. Stankus. *Diofantinės lygtys.*
IV. L.Papreckienė. *Daugianarių dalumas.*
V. A. Apynis, J. Šinkūnas. *Niutono binomas.*
VI. E. Tumėnaitė. *Logaritminės ir rodiklinės lygtys, nelygybės ir tapatybės.*
VII. E. Mazėtis. *Stereometrijos uždaviniai.*
VIII. A. Apynis. *Trigonometriniai uždaviniai.*

IX KNYGA

I. A. Urbonas. *Dirichlė principas.*
II. A. Apynis. *Neapibrėžtųjų koeficientų metodas.*
III. A. Apynis. *Sumavimas.*
IV. E. Tumėnaitė. *Logaritminės lygtys ir nelygybės.*
V. E. Mazėtis. *Geometrijos uždavinių sprendimo analiziniai metodai.*
VI. E. Stankus, J. Šinkūnas. *Pilnosios tikimybės formulė.*
VII. E. Mazėtis. *Vektoriai erdvėje.*
VIII. E. Stankus, J. Šinkūnas. *Progresijos.*

X KNYGA