LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Jaunajam matematikui

12

2009–2011 mokslo metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Vilnius, 2016

Leidinio sudarytojai:
Antanas APYNIS
Edmundas MAZĖTIS
Eugenijus STANKUS
Juozas ŠINKŪNAS

Leidinį maketavo Kristina LYNDIENĖ

TURINYS

PRATARMĖ

Šioje dvyliktojoje Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos knygelėje „Jaunajam matematikui“ yra pateikta 2009–2011 mokslo metais nagrinėtų temų metodinė medžiaga, užduotys LJMM klausytojams ir jų sprendimai.

Knygelės turinį sudaro šios temos: Euklido algoritmas ir jo taikymas (R. Skrabutėnas), lygčių ir nelygybių sprendimas taikant funkcijų savybes (J. Šinkūnas), simetrinių lygčių sistemos (A. Apynis), svėrimo ir pilstymo uždaviniai (R. Kašuba), Pitagoro ir Herono skaičių trejetai (E. Stankus), sąlyginės tapatybės ir nelygybės (J. Šinkūnas), keturkampiai (E. Mazėtis), geriausio varianto pasirinkimo uždaviniai (A. Apynis). Skaitytojas taip pat ras 2009 metų stojamąją užduotį ir jos sprendimą bei 2011 metų baigiamosios užduoties pavyzdį.

Kad būtų lengviau naudotis knygelėmis „Jaunajam matematikui“, šio leidinio paskutiniuose puslapiuose yra įdėtas ankstesnių vienuolikos LJMM mokslo metų temų sąrašas.

Antanas Apynis
Eugenijus Stankus
Edmundas Mazėtis
Juozas Šinkūnas

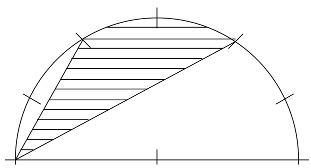
Metodinė medžiaga ir užduotys

STOJAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Sumažinus loterijos bilietų kainą 25 procentais, pajamos už parduotus bilietus išaugo 35 procentais. Keliais procentais padidėjo loterijos dalyvių skaičius?

2. Pusskritulio, kurio plotas lygus $\frac{9\pi}{2}$, lankas padalytas į 6 lygias dalis. Raskite užbrūkšniuotos dalies (žr. 1 pav.) plotą.



1 pav.

3. Raskite visas sveikųjų skaičių x ir y poras (x; y), tenkinančias lygtį $x^2 + y^2 + xy = 7$.

4. Sandėlyje yra dviejų tipų statinės, kurių bendra talpa 7000 litrų. Jeigu visos statinės būtų pirmojo tipo, tai bendra jų talpa būtų 1000 litrų didesnė; jeigu jos būtų tik antrojo tipo, tai bendra jų talpa būtų 4000 litrų mažesnė. Kokia yra pirmojo tipo statinių bendra talpa?

5. Ar galime skaičius nuo 1 iki 2009 suskirstyti į kelias grupes taip, kad kiekvienoje grupėje didžiausio ir mažiausio skaičių suma būtų lygi likusių tos grupės skaičių sumai? Atsakymą pagrįskite.

6. Raskite tokį triženklį skaičių, kurį padvigubinę gautume skaičių, lygų skaitmenų, reikalingų užrašyti visus skaičius nuo 1 iki ieškomojo skaičiaus, skaičiui.

7. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 + xy + y = 1, \\ y^2 + xy + x = 5. \end{cases}$$

8. Įrodykite, kad skaičius $m+7n$ dalijasi iš 31, kai $6m+11n$ dalijasi iš 31 (čia *m* ir *n* yra natūralieji skaičiai).

9. Raskite didžiojo stačiakampio perimetrą, kai žinomi penkių mažesniųjų stačiakampių perimetrai (žr. 2 pav.).

	11	
20	8	11
	12	

2 pav.

10. Taškas M nuo lygiašonio trikampio pagrindo nutolęs 10 cm atstumu, o nuo kiekvienos jo viršūnės – 20 cm atstumu. Raskite taško M atstumą iki trikampio plokštumos, jeigu trikampio perimetras lygus 128 cm.

I. EUKLIDO ALGORITMAS IR JO TAIKYMAS

Rimantas Skrabutėnas
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

Prisiminkime žinomus dalykus. Raide *N* žymime natūraliųjų skaičių aibę, o raide Z – sveikųjų skaičių aibę. Sveikuosius skaičius mokame sudėti, sudauginti ir atimti. Esame įpratę naudotis šių veiksmų savybėmis, kaip antai: $m+n=n+m,\ nm=mn,\ (mn)r=m(nr)$, $(m\pm n)k=mk\pm nk$ ir t.t.

Dalumo sąryšis sveikųjų skaičių aibėje, dalyba su liekana

Apibrėžimas. *Jei* $a, b\neq 0$ *yra sveikieji skaičiai ir egzistuoja toks sveikasis skaičius* q *, kad*

$$a=b\cdot q\,,$$

tai sakome, kad sveikasis skaičius b ***dalija*** *sveikąjį skaičių a ir rašome* $b\,|\,a$.

Kartais pasakoma: *skaičius a* ***dalijasi*** *iš skaičiaus b*.

Kai $a\neq 0$, tai išraiškos $a=bq$ sveikieji skaičiai b ir q vadinami skaičiaus *a dalikliais*, o a – kiekvieno iš skaičių b ir q *kartotiniu*.

Pavyzdžiui, 13 | 26, 8 | 320, nes 26 = 2 ·13, 320 = 8· 40. Bet –310 iš 15 ***nesidalija***, todėl rašome : $15 \nmid -310$.

Remiantis pateiktu dalumo sąryšio apibrėžimu, lengvai įrodomos jo *savybės*. Štai kelios iš jų:

- $a\,|\,b\Rightarrow(\pm a\,|\,\pm b)$,
- $(a\,|\,b\wedge b\,|\,c)\Rightarrow(a\,|\,c)$ (jei *a* dalija *b* ir *b* dalija *c*, tai *a* dalija *c*),
- $(a\,|\,b\wedge a\,|\,c)\Rightarrow(a\,|\,b\pm c)$ (jei *a* dalija *b* ir *a* dalija *c*, tai *a* dalija $b\pm c$);
- $(a\,|\,b\wedge b\neq 0)\Rightarrow(|b|\geq|a|)$ (jei *a* dalija *b* ir $b\neq 0$, tai $|b|\geq|a|$).

Matome, kad sveikojo skaičiaus ženklas dalumui įtakos neturi, todėl dažniausiai domimasi tiktai *teigiamais dalikliais*, kurie vadinami tiesiog *dalikliais*.

Pavyzdžiui, kadangi 13 | 26, tai skaičiai 1, 2, 13, 26 yra skaičiaus 26 dalikliai, o skaičius 26 yra kiekvieno iš jų kartotinis.

Dalyti sveikuosius skaičius vieną iš kito „kampu“ išmokome dar pradinėse klasėse, bet tokios dalybos nesame matematiškai pagrindę.

Galima sakyti, kad žemiau formuluojama teorema (ji vadinama dalybos su liekana teorema, sutrumpintai – DLT) ir yra sveikųjų skaičių dalybos „kampu“ teorinis pagrindas. Įrodoma ji gana paprastai, tačiau jos reikšmė matematikoje labai svarbi.

Teorema (DLT). Kai a ir b yra sveikieji skaičiai ($b \neq 0$), tai visada galima rasti tokius sveikuosius skaičius q ir r, kad galiotų lygybė:

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

Skaičiai q ir r randami vienareikšmiškai. Skaičius q vadinamas *nepilnuoju santykiu, r – liekana*.

Pavyzdžiui, $-27 = (-6) \cdot 5 + 3$, $29 = 4 \cdot 6 + 5$, $741 = 7 \cdot 100 + 41$ ir t. t. Galima užrašyti ir įprasčiau:

$$\begin{array}{r|l} -741 & \underline{100} \\ \underline{700} & 7 \\ 41 & \end{array}$$

DLT įgalina kai kuriuose uždaviniuose nagrinėti tik baigtinį atvejų skaičių. Pavyzdžiui, jei norime parodyti, kad su visais $n \in N$ skirtumas $n^3 - n$ dalijasi iš trijų, tai užtenka suvokti, kad natūralųjį skaičių n dalijant iš trijų, galimos liekanos yra tik 0, 1, 2. Remiantis DLT, skaičius n užrašomas tik tokiais pavidalais: $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$ su $k \in N$. Tada tai, kad $3 \mid n^3 - n$, išplaukia iš dalumo apibrėžimo, išnagrinėjus šiuos tris atvejus :

$$n = 3k \Rightarrow n^3 - n = n(n-1)(n+1) = 3k(n-1)(n+1) =: 3h_1, \; h_1 \in Z$$

(čia panaudotas ženklas $=:$ reiškia, kad reiškinys $k(n-1)(n+1)$ pažymėtas h_1; šį ženklą naudosime ir toliau);

$$n = 3k + 1 \Rightarrow n(n-1)(n+1) = n \cdot 3k \cdot (n+1) =: 3h_2, \; h_2 \in Z;$$

$$n = 3k + 2 \Rightarrow n(n-1)(n+1) = n \cdot (n-1) \cdot (3k+3) =: 3h_3, \; h_3 \in Z.$$

Didžiausias bendras daliklis. Mažiausias bendras kartotinis. Euklido algoritmas

Tarkime, *a* ir *b* yra natūralieji skaičiai. Prisiminkime didžiausio bendrojo daliklio (sutrumpintai – DBD) apibrėžimą:

Apibrėžimas. *Skaičių a ir b* ***didžiausiu bendruoju dalikliu*** *vadinamas natūralusis skaičius d tenkinantis dvi sąlygas*: 1) *d yra tų skaičių bendrasis daliklis*; 2) *d dalijasi iš bet kurio kito jų bendrojo daliklio*.

Kitoks šios sąvokos apibūdinimas gali būti toks.

Apibrėžimas. *Skaičių a ir b* ***didžiausiu bendruoju dalikliu*** *vadiname jų bendrųjų daliklių aibės didžiausią elementą d*. Skaičių a ir b didžiausią bendrą daliklį žymėsime: $d = D(a,b)$.

Pasirodo, – abu šie apibrėžimai yra ekvivalentūs. Todėl, esant reikalui, naudojamės bet kuriuo iš jų.

Panašiai galima suformuluoti ir mažiausio bendrojo kartotinio apibrėžimą.

Apibrėžimas. *Skaičius m vadinamas skaičių a* ir *b* ***mažiausiu bendruoju kartotiniu*** (sutrumpintai MBK), jei jis tenkina dvi sąlygas: 1) *m yra tų skaičių teigiamas bendrasis kartotinis*; 2) *bet kuris kitas bendrasis jų kartotinis dalijasi iš m*.

Apibrėžimas. *Skaičių a ir b* ***mažiausiu bendruoju kartotiniu*** *vadiname jų bendrųjų kartotinių aibės mažiausią teigiamą elementą m*. Skaičių a ir b mažiausią bendrą kartotinį žymėsime: $m = M(a,b)$.

Analogiškai galime apibrėžti ir kelių natūraliųjų skaičių $a_1, a_2, ..., a_n$ DBD ir MBK. Tada nesunkiai įrodomi tokie *rekurentiniai sąryšiai*:

$$d := D(a_1, a_2, ..., a_n) = D\big(D(a_1, a_2, ..., a_{n-1}), a_n\big),$$
$$m := M(a_1, a_2, ..., a_n) = M\big(M(a_1, a_2, ..., a_{n-1}), a_n\big).$$

Aišku, kad DBD ir MBK sąvokos sveikiesiems *nenuliniams* skaičiams apibrėžiamos lygiai taip pat.

Pavyzdžiui, kai $a = 20$, $b = -32$, tai, pažymėję skaičiaus a teigiamų daliklių aibę D_a, teigiamų kartotinių aibę M_a, turime:

$$D_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}, \; M_{20} = \{20, 40, 60, ...\},$$
$$D_{-32} = D_{32} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\},$$
$$M_{-32} = M_{32} = \{32, 64, 96, 128, 160, 192, ...\}.$$

Tada $D_{20,-32} = \{1, 2, 4\}$, yra šių skaičių bendrųjų teigiamų daliklių aibė, o $M_{20,-32} = \{160, 320, 480, ...\}$ – jų bendrųjų teigiamų kartotinių aibė.

Todėl, remiantis apibrėžimais, $D(20,-32) = 4$, o $M(20,-32) = 160$.

Atskiru atveju, iš apibrėžimo lengvai išplaukia tokios savybės:

kai $a \neq 0$, $D(a, 0) = a$, $D(a, 1) = 1$, $D(ab, a) = a$;

be to, su visais $k \in N$ turime:
$D(ka, kb) = kD(a,b)$ bei $M(ka, kb) = kM(a,b)$.

Pavyzdžiui, $D(17 \cdot 27, 17) = 17$,
$D(100,-160) = D(5 \cdot 20, 5 \cdot (-32)) = 5 \cdot D(20,-32) = 5 \cdot 4 = 20$;
$M(140,-224) = M(7 \cdot 20, 7 \cdot (-32)) = 7 \cdot M(20,-32) = 7 \cdot 160 = 1120$.

Žinotina, kad dviejų natūraliųjų skaičių DBD ir MBK sieja toks sąryšis:
$D(a, b) \cdot M(a, b) = ab$.

Pavyzdžiui, $D(20, 32) \cdot M(20, 32) = 20 \cdot 32$.

Pastaba. Pavyzdžiais nesunku įsitikinti, kad trijų (ir daugiau) skaičių atveju analogiškas teiginys ($D(a, b, c) \cdot M(a, b, c) = abc$) jau negalioja:
$D(2, 12, 10) \cdot M(2, 12, 10) = 2 \cdot 60 = 120 \neq 2 \cdot 12 \cdot 10 = 240$.

Pirminiai ir sudėtiniai skaičiai. Pagrindinė aritmetikos teorema

Kiekvienas nelygus nuliui sveikasis skaičius a dalijasi iš vieneto ir pats savęs. Skaičiaus a (teigiamieji) dalikliai 1 ir a vadinami *trivia-liaisiais dalikliais*.

Apibrėžimas. *Natūralieji skaičiai* $n > 1$, *turintys tik trivialiuosius daliklius, vadinami* ***pirminiais*** *skaičiais*.

Kiti natūralieji skaičiai $n > 1$ vadinami *sudėtiniais*. Skaičius 1 nelaikomas nei pirminiu, nei sudėtiniu. Pavyzdžiui, 17, 2003 yra pirminiai, o 39, 2009, – sudėtiniai.

Teorema. *Bet koks didesnis už vienetą natūralusis skaičius* n *turi bent vieną pirminį dalikl*į.

Pavyzdžiui, $17 \mid 1411$, o skaičius 409 yra pirminis, todėl $409 \mid 409$.

Išvada. Sudėtinis natūralusis skaičius n būtinai turi pirminį daliklį neviršijantį $\sqrt{n}$.

Ši pastaba palengvina skaičiaus kanoninio skaidinio paieškas. Pavyzdžiui, jei reikia patikrinti pirminis ar sudėtinis yra skaičius 509, tai tereikia patikrinti tik tuos *pirminius* daliklius p, kuriems $p \le \sqrt{509}$, t.y.: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Kadangi nė vienas iš šių pirminių skaičių nedalija 509, tai darome išvadą: 509 pats yra pirminis skaičius.

Iš DLT išplaukia labai svarbus matematinis faktas, kad *kiekvieną natūralųjį skaičių* $n > 1$ *galime vieninteliu būdu* (*neatsižvelgiant į* *daugiklių tvarką) išskaidyti pirminių skaičių sandauga*: $n = p_1 p_2 ... p_r$.

Šis teiginys vadinamas ***pagrindine aritmetikos teorema,*** o skaičiaus n išraiška – ***kanoniniu skaidiniu.***

Pavyzdžiui, $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, $12699 = 3 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 83$.

Kai žinomi skaičių $m, n \in N$ kanoniniai skaidiniai:

$$m = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_r^{a_r} \text{ ir } n = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot p_r^{\beta_r},$$

tai jų DBD ir MBK radimui naudojame tokias taisykles:

$$d = D(m,n) = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot ... \cdot p_r^{\gamma_r},$$

$$m = M(m,n) = p_1^{\lambda_1} \cdot p_2^{\lambda_2} \cdot ... \cdot p_r^{\lambda_r}.$$

Čia $\gamma_i := \min(\alpha_i, \beta_i)$, $\lambda_i := \max(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, 2, ..., r$.

Pavyzdžiui, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, o $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 17$. Tada $d = 2 \cdot 3 = 6$, $m = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17 = 3060$.

Euklido algoritmas ir jo taikymas

Kaip rasti DBD ir MBK praktiškai? Didesnių skaičių DBD ir MBK radimui naudoti apibrėžimą yra nepatogu ir neracionalu. Žinoma, visada galima pasinaudoti skaičių *kanoniniais skaidiniais*. Tačiau kanoninio skaidinio radimas kai kada irgi būna pakankamai komplikuotas. Pavyzdžiui, jei reiktų rasti skaičiaus (vadinamo *Ferma skaičiumi*) $F_5 := 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1$ kanoninį skaidinį, tai be kompiuterio tai padaryti būtų nelengva. Garsus prancūzų matematikas Pjeras Ferma (1608-1665), pastebėjęs, kad pirmieji penki tokie skaičiai $F_0 := 3$, $F_1 := 2^2 + 1 = 5$, $F_2 := 2^4 + 1 = 17$, $F_3 := 2^8 + 1 = 257$ ir $F_4 := 2^{16} + 1 = 65537$ yra pirminiai, spėjo, kad ir visi tokie skaičiai yra pirminiai ir ... suklydo. Skaičius F_5 yra jau sudėtinis, jis turi pirminį daliklį 641. Maža to, daugiau pirminių Ferma skaičių nerasta iki šiol.

Dabar susipažinsime su vadinamuoju *Euklido algoritmu* (sutrumpintai: EA; Euklidas, IV a.pr.Kr), kuris įgalina rasti DBD nenaudojant kanoninio skaidinio.

Galima sakyti, kad Euklido algoritmas, – tai baigtinė lygybių, gaunamų nuosekliai taikant DLT, seka.

Jei dalijant skaičių *a* iš *b*, gaunama nelygi nuliui liekana r_1, tai tada galima dalyti jau b iš r_1; jei gauta liekana (pažymėkime ją r_2) lygi nuliui, – darbą baigiame, jei ne, – liekana r_1 dalijama iš r_2. Dalijimo procesą tęsiame tol, kol gausime lygią nuliui liekaną. Procesas visada yra *baigtinis,* nes, remiantis DLT, liekanos *nuosekliai mažėja*. Gauta lygybių seka

$$
\begin{aligned}
&a = q_0 b + r_1,\ \ 0 \le r_1 < |b|,\\
&b = q_1 r_1 + r_2,\ \ 0 \le r_2 < r_1,\\
&r_1 = q_2 r_2 + r_3,\ \ 0 \le r_3 < r_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&r_{k-2} = q_{k-1} r_{k-1} + r_k,\ \ 0 \le r_k < r_{k-1},\\
&r_{k-1} = q_k r_k
\end{aligned}
$$

ir vadinama skaičių a ir b *Euklido algoritmu*. Nėra jokio požymio, leidžiančio numatyti, kiek konkrečiai eilučių sudarys skaičių a ir b Euklido algoritmas. Pavyzdžiui, skaičiams $a = 18$, $b = 8$ gausime tik dvi eilutes:

$$
\begin{aligned}
18 &= 2 \cdot 8 + 2,\\
8 &= 4 \cdot 2.
\end{aligned}
$$

Tuo tarpu, kai $a = -50$, $b = 111$, EA yra jau kiek ilgesnis:

$$
\begin{aligned}
-50 &= (-1) \cdot 111 + 61,\\
61 &= 1 \cdot 50 + 11,\\
50 &= 4 \cdot 11 + 6,\\
11 &= 1 \cdot 6 + 5,\\
6 &= 1 \cdot 5 + 1,\\
5 &= 5 \cdot 1.
\end{aligned}
$$

Jei paskutinė nelygi nuliui EA liekana yra r_k, tai teisinga tokia teorema.

1 teorema. $D(a,b) = r_k$.

Įrodymas išplaukia iš EA, kadangi iš lygybės $a = qb + r$ akivaizdu, jog skaičių a ir b bendrųjų daliklių aibė sutampa su skaičių b ir r bendrųjų daliklių aibe. Todėl, pagal mūsų pateiktą DBD apibrėžimą: $D(a, b) = D(b, r)$.

Tada iš EA nuosekliai ir gauname:

$$D(a, b) = D(b, r_0) = D(r_0, r_1) = \ldots = D(r_k q_k, r_k) = r_k .$$

Tad, pavyzdžiui, $D(18,8)=2$, o $D(-50,111)=1$.

Toliau mums bus naudinga ir tokia teorema.

2 teorema. (*DBD* tiesinės išraiškos savybė). *Kai* $d=D(a,b)$, *tai egzistuoja tokie sveikieji* x *ir* y, *kad* $ax+by=d$.

Ši lygybė vadinama skaičių a ir b *didžiausio bendro daliklio tiesine išraiška*. Jos įrodymas išplaukia iš 1 teoremos ir EA.

Pavyzdžiui, pasinaudodami parašytuoju skaičių $a=-50$ ir $b=111$ Euklido algoritmu, rasime jų DBD tiesinę išraišką.

Iš priešpaskutinės EA eilutės turime, kad $D(a,b)$ išreiškiamas skaičiais 6 ir 5:

$$D(-50,111)=1=6+(-1)\cdot 5.$$

Tačiau kitoje EA eilutėje (einant į viršų) turime, kad liekana 5 yra išreiškiama jau skaičiais 6 ir 11: $5=11+(-1)\cdot 6$. Įrašę pastarąją išraišką į ankstesnę ir sutraukę panašius narius, gausime $D(a,b)$ išraišką skaičiais 6 ir 11:

$$1=6+(-1)\cdot 5.=6+(-1)\cdot(11+(-1)\cdot 6)=2\cdot 6+(-1)\cdot 11.$$

Taip elgiamės ir toliau. Iš EA turime: $6=50-4\cdot 11$. Todėl gauname DBD išraišką skaičiais 11 ir – 50:

$$1=2\cdot 6+(-1)\cdot 11=2\cdot(50-4\cdot 11)-1\cdot 11=(-2)\cdot(-50)-9\cdot 11.$$

Dabar naudojame EA antrąją eilutę pavidalu: $11=61-1\cdot 50$:

$$1=(2)\cdot(-50)-9\cdot 11=(-2)\cdot(-50)-9\cdot(61-1\cdot 50)=(-11)(-50)-9\cdot 61.$$

Procesą baigiame, panaudodami iš pirmos eilutės gaunamą išraišką: $61=-50+1\cdot 111$. Tada

$$1=(-11)(-50)-9\cdot 61=(-11)(-50)-9\cdot(-50+111)=$$
$$=(-20)(-50)+(-9)\cdot 111$$

t.y. $D(-50,111)=1=(-50)x+111y$. Čia $x=-20$, o $y=-9$.

Tarpusavyje pirminiai skaičiai

Apibrėžimas. *Jei* $D(a_1,a_2,...,a_n)=1$, *tai sveikieji skaičiai* $a_1,...,a_n$ *vadinamai* ***tarpusavyje pirminiais***.

Pavyzdžiui, trys skaičiai 7, 28, 23 yra tarpusavyje pirminiai, nes $D(7,28,23)=1$. Kadangi $D(19,30)=1$, tai skaičiai 19 ir 30 irgi yra tarpusavyje pirminiai. Tuo tarpu skaičiai 50 ir 95 nėra tarpusavyje prminiai, nes $D(50, 95) = 5$.

Paminėsime kelias tarpusavyje pirminių skaičių savybes, kurios dažnai naudojamos dalumo uždaviniuose.

1. Skaičiai a, b yra tarpusavyje pirminiai tada ir tiktai tada, kai yra tokie sveikieji *x*, *y*, su kuriais $ax + by = 1$.

2. Jei $D(a, b) = d$, tai skaičiai $\frac{a}{d}, \frac{b}{d}$ yra tarpusavyje pirminiai.

3. *Kai* $c \mid ab$ *ir* $D(a, c) = 1$, *tai* $c \mid b$.

4. *Kai* $ab \mid c$ *ir* $D(a, b) = 1$, *tai* ir $a \mid c$, ir $b \mid c$.

5. *Kai* $a \mid c$, $b \mid c$ *ir* $D(a, b) = 1$, *tai ir* $ab \mid c$.

Pavyzdžiui, norint įrodyti, jog su visais natūraliaisiais *n*, skaičius $n^5 - n$ dalijasi iš 15, užtenka parodyti jo dalumą iš 3 ir iš 5, nes $D(3, 5) = 1$.

Neapibrėžtosios (diofantinės) lygtys

Kartais tenka ieškoti lygties su daugiau nei vienu kintamuoju sprendinių. Dažniausiai tokios *lygtys* turi be galo daug realiųjų sprendinių. Pavyzdžiui, lygtyje $x^2 - 3y = 0$ *x* reikšmę parinkę bet kaip, kaskart gausime konkrečią *y* reikšmę. Tačiau, kai ieškome tik *sveikųjų* tokių lygčių sprendinių, tai jų skaičius ir forma įgauna konkretesnį pavidalą. Senovės graikų matematiko Diofanto garbei, jos kartais vadinamos *diofantinėmis* lygtimis. Vieną tokią lygtį jau matėte stojamojoje užduotyje.

Aptarsime paprasčiausią pirmojo laipsnio neapibrėžtąją lygtį su dviem kintamaisiais
$$ax + by = c, \qquad a, b, c \in Z. \tag{1}$$

Parodysime, kad jos sprendimui galima sėkmingai panaudoti EA.

Teorema. *Jei* $D(a, b) = 1$, *o pora* (x_0, y_0) *yra* (1) *lygties sprendinys, tai sprendiniai yra visos sveikųjų skaičių poros*
$$(x_0 + bt,\ y_0 - at), \text{ kai } t \in Z. \tag{2}$$

Konkretus (1) lygties sprendinys (x_0, y_0) vadinamas jos *atskiruoju sprendiniu*, o (2) išraiška – *bendruoju sprendiniu.*

Jei $D(a, b) = d$ *ir* $d \nmid c$ *tai* (1) *lygtis sprendinių neturi*.

Pavyzdžiui, išspręskime diofantinę lygtį
$$-100x + 222y = 14.$$

Kadangi $D(100{,}222)=2$ ir $2\,|\,14$ tai duotoji lygtis turi sprendinių ir yra ekvivalenti lygčiai:

$$-50x+111y=7\,.$$

Kad galėtume taikyti (2) formulę, tereikia rasti kokį nors *atskirąjį* šios lygties sprendinį. Tai mes padarysime pasinaudodami mūsų jau anksčiau gauta skaičių –50 ir 111 DBD tiesine išraiška:

$$D(-50{,}111)=1=(-20)\,(-50)+(-9)\cdot 111.$$

Padauginę šią lygybę iš 7, matome, kad:

$$(-50)\,(-140)+111\cdot(-63)=7\,,$$

t. y. skaičių $x_0=-140$ ir $y_0=-63$ pora yra lygties $-50x+111y=7$ atskirasis sprendinys. Remiantis (2) formule, užrašome atsakymą: duotosios lygties bendrasis sprendinys yra visos skaičių poros:

$$(-140+111t,\,-63+50t),\ t\in Z\,.$$

Taigi sprendinių yra be galo daug. Kai $t=0$ gauname jau rastą sprendinį $(-140,-63)$. Kai $t=2$, sprendinys yra pora $(82,\,37)$ ir t.t.

Teisinga ir bendresnė **teorema**: kai $d=D(a_1,a_2,...,a_n)$, *tai neapibrėžtoji lygtis su n kintamųjų*

$$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=b$$

turi sprendinių tada ir tiktai tada, kai $d\,|\,b$.

Kai kintamųjų yra daugiau nei du, galime taikyti *rekurentinį sprendimo būdą*. Jo esmę paaiškinsime neapibrėžtosios lygties su trimis kintamaisiais atveju. Spręsime lygtį

$$ax+by+cz=d\,.$$

Kai $D(a,b,c)\nmid d$, tai sprendinių nėra. Jei $D(a,b,c)\,|\,d$, tai pirmiausia sprendžiame lygtį $ax+by=k$. Čia $k=D(a,b)$. Tarkime jos sprendinys yra pora (x_0,y_0).

Toliau sprendžiame tokią lygtį su dviem kintamaisiais u ir z:

$$ku+cz=d\,.$$

Kadangi, kaip minėjome, $D(k,c)=D(D(a,b),c)=D(a,b,c)$, o $D(a,b,c)\,|\,d$, tai ir ši lygtis turi sprendinių. Radę sprendinį (u_0,z_0), pastebime, kad į lygybę $ku_0+cz_0=d$ įrašius $k=ax_0+by_0$ ir išplaukia lygybė: $ax_0u_0+by_0u_0+cz_0=d$, reiškianti, kad sveikųjų skaičių trejetas

$$(x_0 u_0, y_0 u_0, z_0)$$

yra pradinės lygties sprendinys. Vietoje (x_0, y_0) įrašę bendrojo lygties $ax + by = k$ sprendinio išraišką, o vietoje (u_0, z_0), – atitinkamai, – bendrąjį lygties $kt + cz = d$ sprendinį, turėsime bendrąjį lygties $ax + by + cz = d$ sprendinį.

Išspręskime diofantinę lygtį

$$6x + 2y - 5z = -7 .$$

Vadovaukimės pateiktais nurodymais. Kadangi $D(6, 2, 5) = 1$ ir $1 | -7$, tai lygtis sprendinių turi. Sprendžiame lygtį $6x + 2y = 2$, t. y.

$$3x + y = 1,$$

nes $D(6, 2) = 2$.

Pastarosios lygties atskirąjį sprendinį nesunku atspėti ir be EA – tai, pavyzdžiui, pora $(1, -2)$. Tada bendrasis sprendinys yra $(1 + t, -2 - 3t),\ t \in Z.$ Toliau sprendžiame lygtį:

$$2u - 5z = -7 .$$

Jos atskirasis sprendinys irgi nesunkiai atspėjamas: $(-1, 1)$. Tuomet bendrasis sprendinys yra

$$(-1 - 5r, 1 - 2r),\ r \in Z .$$

Dabar galima užrašyti ir bendrąjį pradinės lygties sprendinį. Tai visi skaičių trejetai

$$((1 + t)(-1 - 5r),\ (-2 - 3t)(-1 - 5r),\ 1 - 2r\ ), \quad t, r \in Z .$$

Paėmę, pavyzdžiui, $t = 2,\ r = -5$, gauname vieną iš begalinės aibės sprendinių: $(72, -192, 11)$.

Skaičių teorijoje nagrinėjamos ne tik tiesinės diofantinės lygtys. Bendroji tokių lygčių sprendimo metodika nėra sukurta, tačiau daugelis atskirų atvejų išsamiai išnagrinėti.

Euklido algoritmas polinomams

Čia aptartosios sveikųjų skaičių aibės savybės – dalumas, dalyba su liekana, DBD ir MBK, kanoninis skaidinys – pastebimos ir kitokios prigimties aibėse, pavyzdžiui, polinomų (daugianarių), t.y. reiškinių

$$f(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 ,\quad a_k \in R,\ \ k = 0, 1, \ldots, n$$

su realiaisiais koeficientais $a_k,\ k = 0, 1, \ldots, n$, aibėje.

Dalybos su liekana teorema galioja ir polinomams. Tuo analogijos su sveikaisiais skaičiais tik prasideda. Pasirodo, polinomams vos ne pažodžiui performuluojami dalumo sąryšio, dviejų polinomų DBD bei MBK apibrėžimai. Dar daugiau, – polinomams irgi galima užrašyti Euklido algoritmą, jo paskutinė nelygi nuliui liekana, kaip ir sveikųjų skaičių atveju, yra lygi tų polinomų DBD. Apibūdinama pirminių polinomų sąvoka, parodoma, kad polinomus irgi galima išskaidyti tais pirminiais polinomais, t.y. užrašyti jų kanoninius skaidinius ir juos taikyti panašiai kaip ir sveikiesiems skaičiams.

Tiesa, polinomai taip kaip skaičiai nėra palyginami. Negalime, pavyzdžiui, apibūdinti kuris iš dviejų polinomų x^3-2x+7 ar x^4-1 yra „didesnis“, tačiau galima palyginti jų *laipsnius*. Polinomo x^4-1 laipsnis yra 4, o polinomo x^3-2x+7 laipsnis yra 3, taigi – mažesnis. Pasirodo, kad surikiavus polinomus pagal jų laipsnį, ir dabar Euklido algoritmas yra baigtinis procesas, nes, nuosekliai dalijant, mažėja liekanų laipsniai. Pavyzdžiui, tegu

$$f(x)=2x^5-3x^3+2x-1\text{, o } g(x)=x^3-2x^2+1.$$

Tuomet nuosekliai gauname:

$$\begin{array}{l|l}
_\,2x^5-3x^3+2x-1 & x^3-2x^2+1 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^5-4x^4+2x^2} & 2x^2+4x+5 \\
\qquad 4x^4-3x^3-2x^2+2x-1 & \\
\qquad \underline{4x^4-8x^3+4x} & \\
\qquad\qquad 5x^3-2x^2-2x-1 & \\
\qquad\qquad \underline{5x^3-10x^2+5} & \\
\qquad\qquad\qquad 8x^2-2x-6 &
\end{array}$$

Todėl galime užrašyti:

$$f(x)=\left(2x^2+4x+5\right)g(x)+8x^2-2x-6.$$

Čia *nepilnasis santykis* yra $q(x)=2x^2+4x+5$, o *liekana* $r(x)=8x^2-2x-8$ yra antrojo laipsnio polinomas. Dalijome tol, kol liekanos laipsnis pasidarė mažesnis už polinomo $g(x)$ laipsnį.

Kai liekana lygi nuliui, – sakome, kad polinomas $f(x)$ *dalijasi* iš

$g(x)$ ir rašome: $g(x) \mid f(x)$. Pavyzdžiui,

$$x^4 + 4 = \left(x^2 - 2x + 2\right)\left(x^2 + 2x + 2\right),$$

todėl rašome $x^2 + 2x + 2 \mid x^4 + 4$ ir polinomą $x^2 + 2x + 2$ vadiname polinomo $x^4 + 4$ *dalikliu*. Atkreipkime dėmesį, kad polinomų dalikliai nustatomi tik *pastovaus daugiklio* tikslumu – galima parašyti, kad

$$x^4 + 4 = \left(x^2 + 2x + 2\right)\left(x^2 - 2x + 2\right) = \left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right)\left(2x^2 - 4x + 4\right),$$

todėl ir polinomai $\frac{1}{2}x^2 + x + 1$ bei $2x^2 - 4x + 4$ yra polinomo $x^4 + 4$ dalikliai, ir apskritai: to paties polinomo $x^4 + 4$ dalikliai kartu su, pavyzdžiui, $x^2 + 2x + 2$ yra ir visi polinomai pavidalo $c\left(x^2 + 2x + 2\right)$, $c \neq 0$.

Tada ir dviejų polinomų DBD nustatomas tik pastovaus daugiklio tikslumu. Kad būtų patogiau, iš visų DBD susitarta imti tą, kuris yra „normalizuotas“, t.y. kurio *koeficientas prie vyriausiojo nario lygus vienetui*. O jo radimui galima vėl taikyti Euklido algoritmą tik jau polinomams.

Pavyzdžiui, tik ką pateiktame dalybos su liekana pavyzdyje, liekana nelygi nuliui, todėl, pagal analogiją su sveikųjų skaičių Euklido algoritmu, polinomą $g(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ galime toliau dalyti iš gautosios liekanos $r(x) = 8x^2 - 2x - 8$:

$$\begin{array}{rl|l}
_ & x^3 - 2x^2 + 1 & 8x^2 - 2x - 6 \\ \cline{3-3}
 & x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x & \frac{1}{8}x - \frac{7}{32} \\ \cline{2-2}
 & _ -\frac{7}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1 & \\
 & -\frac{7}{4}x^2 + \frac{7}{16}x + \frac{21}{16} & \\ \cline{2-2}
 & \frac{5}{16}x - \frac{5}{16} &
\end{array}$$

Gavome antrąją *Euklido algoritmo* polinomams

$$f(x)=2x^5-3x^3+2x-1 \text{ ir } g(x)=x^3-2x^2+1$$

eilutę:

$$x^3-2x^2+1=\left(\frac{1}{8}x-\frac{7}{32}\right)\left(8x^2-2x-6\right)+\left(\frac{5}{16}x-\frac{5}{16}\right),$$

kurioje liekana $\frac{5}{16}x-\frac{5}{16}$ yra jau tik pirmojo laipsnio polinomas. Dalijame toliau:

$$\begin{array}{r|l}
-\,8x^2-2x-6 & \frac{5}{16}x-\frac{5}{16} \\ \cline{2-2}
8x^2-8x & \frac{8\cdot 16}{5}x-\frac{6\cdot 16}{5} \\ \cline{1-1}
-\,6x-6 & \\
6x-6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Dalybos procesas baigtas, nes gavome lygią nuliui (nuliniam polinomui) liekaną. Tad visas EA polinomams

$$f(x)=2x^5-3x^3+2x-1 \text{ ir } g(x)=x^3-2x^2+1$$

atrodo taip:

$$2x^5-3x^3+2x-1=\left(2x^2+4x+5\right)\left(x^3-2x^2+1\right)+8x^2-2x-6,$$

$$x^3-2x^2+1=\left(\frac{1}{8}x-\frac{7}{32}\right)\left(8x^2-2x-6\right)+\left(\frac{5}{16}x-\frac{5}{16}\right),$$

$$8x^2-2x-6=\left(\frac{8\cdot 16}{5}x-\frac{6\cdot 16}{5}\right)\left(\frac{5}{16}x-\frac{5}{16}\right).$$

Remdamiesi teoremos apie DBD analogu, konstatuojame, kad pasirinktųjų polinomų DBD yra polinomas $d(x)=\frac{5}{16}(x-1)$ arba, laikantis susitarimo: $D\left(f(x),g(x)\right)=x-1$.

Vėlgi, kai $D\left(f(x),g(x)\right)=1$ polinomai $f(x)$ ir $g(x)$ vadinami *tarpusavyje pirminiais*. Lieka galioti ir minėtas sąryšis:

$$D\left(f(x),g(x)\right)\cdot M\left(f(x),g(x)\right)=f(x)\cdot g(x).$$

Pavyzdžiui, tiems patiems polinomams:

$$M\left(f(x), g(x)\right) = \frac{f(x)\cdot g(x)}{D\left(f(x), g(x)\right)} = \frac{\left(2x^5 - 3x^3 + 2x - 1\right)\left(x^3 - 2x^2 + 1\right)}{x-1} =$$
$$= x^7 - x^6 - 4x^5 + 3x^4 + 5x^3 - x^2 - 3x - 1 .$$

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Įrodykite, kad jokio sveikojo skaičiaus kvadratas negali būti pavidalo $7m + 6$.

2. Parašykite Euklido algoritmą sveikiesiems skaičiams $a = -371$ ir $b = 1771$. Raskite jų DBD ir jo tiesinę išraišką.

3. Naudodami Euklido algoritmą ir rekurentines formules, raskite $D(a, b, c)$, kai $a = 12463$, $b = 7931$, $c = 7313$. Apskaičiuokite $M(a, b, c)$.

4. Jei skaičiai a ir b yra tarpusavyje pirminiai, tai ir skaičiai $5a + 3b$ bei $13a + 8b$ yra tarpusavyje pirminiai. Įrodykite.

5. Yra 6 popieriaus lapai. Kelis iš jų padaliname į 6 gabalus kiekvieną. Tada vėl keletą iš visų gautų popieriaus gabalų daliname į 6 smulkesnes dalis. Taip kartojame keletą kartų. Ar galime šitaip gauti 2009 popieriaus gabalus?

6. Raskite asmens gimimo dieną x ir mėnesį y, jei žinoma, kad:

$$12x + 31y = 436 .$$

7. Išspręskite neapibrėžtąją lygtį

$$-371x + 1771y = 35 .$$

8. Parodykite, kad su visais natūraliaisiais n trupmena

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}$$

yra nesuprastinama.

9. Įrodykite: su visais natūraliaisiais $n > 1$ galioja lygybė

$$D\left(n^{2010} - 1, n^{2009} - 1\right) = n - 1.$$

10. Parašykite Euklido algoritmą polinomams

$$f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 6 \text{ ir } g(x) = 2x^3 + x^2 - 6x - 3.$$

Raskite jų DBD ir MBK.

II. LYGČIŲ IR NELYGYBIŲ SPRENDIMAS TAIKANT FUNKCIJŲ SAVYBES

Juozas Šinkūnas
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

Pagrindinėje mokykloje susipažinote su tiesioginio proporcingumo funkcija, tiesine funkcija, atvirkščio proporcingumo funkcija ir kvadratiniu trinariu. Šios užduoties nurodymuose susipažinsite ir su kitomis funkcijomis bei jų savybių taikymais sprendžiant lygtis ir nelygybes. Daugiau dėmesio skirsime iracionaliųjų lygčių ir nelygybių sprendimui. Tokių lygčių ir nelygybių standartinių sprendimo būdų čia nenagrinėsime.

Susipažinę su teorine medžiaga ir išnagrinėję pateiktų lygčių ir nelygybių sprendimus, Jūs sėkmingai atliksite šią užduotį.

1. Lygčių apibrėžimo sritis. Lygties $f(x)=g(x)$ (ar nelygybės $f(x)\geq g(x)$**)** *apibrėžimo sritimi* laikysime nežinomojo x reikšmių, priklausančių funkcijų f ir g apibrėžimo sričių bendrajai daliai, aibę. Pavyzdžiui, lygties $\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2-5x+6}+1$ apibrėžimo sritis yra funkcijų $f(x)=\sqrt{x-1}$ ir $g(x)=\sqrt{x^2-5x+6}+1$ apibrėžimo sričių bendroji dalis, t. y. nelygybių sistemos

$$\begin{cases} x-1\geq 0, \\ x^2-5x+6\geq 0 \end{cases}$$

sprendinių aibė.

Lygtys (nelygybės), kuriose nežinomasis x yra po šaknies ženklu, vadinamos *iracionaliosiomis* lygtimis (nelygybėmis). Pavyzdžiui, lygtis $\sqrt[3]{x-1}+2x=\sqrt{x}$ yra iracionalioji.

Sprendžiant iracionaliąsias lygtis ir nelygybes, kartais pakanka rasti tik jų apibrėžimo sritis. Kad būtų trumpiau, lygties apibrėžimo sritį žymėsime $D(L)$, o nelygybės – $D(N)$.

1 pavyzdys. Išspręskime:

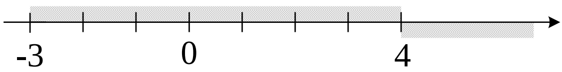
a) lygtį $x^2+\sqrt{12+x-x^2}=16-\sqrt[4]{x-4}$;

b) nelygybę $\sqrt{x^2+7}+\sqrt{3-x}>5-\sqrt{x-3}$.

Sprendimas. a) Lygties apibrėžimo sritį $D(L)$ rasime išsprendę nelygybių sistemą

$$\begin{cases} 12 + x - x^2 \geq 0, \\ x - 4 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4 - x)(x + 3) \geq 0, \\ x \geq 4. \end{cases}$$

Sistemos pirmosios nelygybės sprendinių aibė yra intervalas $[-3; 4]$, o antrosios – intervalas $[4; +\infty)$. Abiejų nelygybių sprendinius pavaizduokime skaičių ašyje (1 pav.).



1 pav.

Jų bendroji dalis, yra $D(L) = \{4\}$. Nesunku įsitikinti, kad $x = 4$ yra lygties sprendinys.

Ats.: 4.

b) Raskime nelygybės apibrėžimo sritį:

$$D(N): \begin{cases} x^2 + 7 \geq 0, \\ 3 - x \geq 0, \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 7 \geq 0, \\ x \leq 3, \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Kai $x = 3$, kairioji nelygybės pusė lygi 4, o dešinioji pusė lygi 5. Taigi nelygybė sprendinių neturi.

Ats.: ø.

2. Funkcijos monotoniškumas. Funkcija *f*: $(a; b) \in R \to R$ vadinama *didėjančia (mažėjančia)* intervale $(a; b)$, jeigu bet kuriems intervalo taškams x_1 ir x_2, $x_1 < x_2$, galioja nelygybė $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Didėjančios ir mažėjančios funkcijos vadinamos *monotoninėmis*.

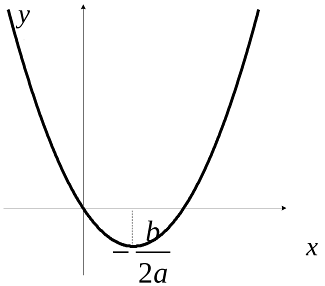
Pavyzdžiui, funkcija $f(x) = ax + b$, $a, b \in R$, yra didėjanti, kai $a > 0$, ir mažėjanti, kai $a < 0$, nes

$$f(x_1) - f(x_2) = ax_1 + b - (ax_2 + b) = a(x_1 - x_2) < 0,$$

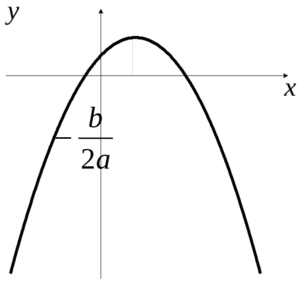
$$\text{kai } x_1 < x_2 \text{ ir } a > 0;$$

$$f(x_1) - f(x_2) > 0, \text{ kai } x_1 < x_2 \text{ ir } a < 0.$$

Kvadratinis trinaris $f(x) = ax^2 + bx + c$ intervale $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ mažėja, o intervale $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ didėja, kai $a > 0$ (žr. 2 pav.); taške $x = -\frac{b}{2a}$ jis įgyja mažiausią reikšmę. Jeigu $a < 0$, tai kvadratinis trinaris didėja intervale $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ ir mažėja intervale $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$, o taške $x = -\frac{b}{2a}$ įgyja didžiausią reikšmę (žr. 3 pav.).



2 pav. ($a > 0$)



3 pav. ($a < 0$)

2 pavyzdys. Įrodykime, kad funkcija $g(x) = \sqrt{f(x)}$ yra didėjanti, kai funkcija f yra didėjanti ir $f(x) \geq 0$.

Sprendimas. Tegul $x_1, x_2 \in D(f)$ ir $x_1 < x_2$. Tada

$$g(x_1) - g(x_2) = \sqrt{f(x_1)} - \sqrt{f(x_2)} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{\sqrt{f(x_1)} + \sqrt{f(x_2)}} < 0, \text{ nes}$$

$$f(x_1) - f(x_2) < 0.$$

Atkreipkime dėmesį, kad ir funkcija $\sqrt[4]{f(x)} = \sqrt{\sqrt{f(x)}}$ yra didėjanti, kai $f(x) \geq 0$ ir f yra didėjanti.

Pavyzdžiui, funkcija $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ yra didėjanti, o funkcija $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 4x + 10}$ yra mažėjanti intervale $(-\infty; 2)$ ir didėjanti intervale $(2; +\infty)$.

Pratimai. Įrodykite šiuos teiginius:

1) funkcija $f(x)=\sqrt[3]{x}$ yra didėjanti;

2) jeigu funkcijos f ir g intervale $(a;b)$ yra didėjančios (mažėjančios), tai jų suma $f+g$ yra didėjanti (mažėjanti) funkcija;

3) jeigu funkcija f yra didėjanti (mažėjanti), o funkcija g yra mažėjanti (didėjanti), tai jų skirtumas $f-g$ yra didėjanti (mažėjanti) funkcija.

Spręsdami lygtis ir nelygybes, remsimės akivaizdžiomis monotoninių funkcijų savybėmis:

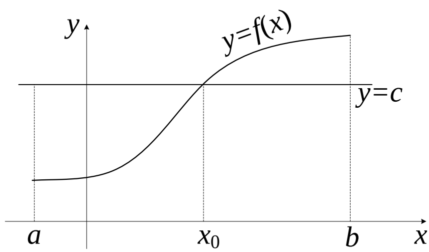
1) jeigu funkcija f yra didėjanti (mažėjanti), tai lygtis $f(x)=a$, $a\in R$, turi daugiausiai vieną sprendinį;

2) jeigu funkcija f yra didėjanti (mažėjanti), o funkcija g yra mažėjanti (didėjanti), tai lygtis $f(x)=g(x)$ turi daugiausiai vieną sprendinį;

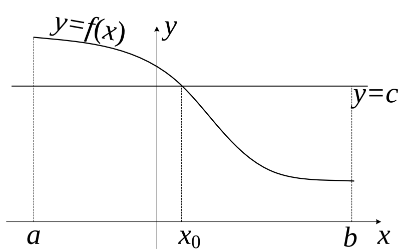
3) jeigu funkcija f: $(a;b)\to R$ yra didėjanti (mažėjanti) ir $f(x_0)=c$, $c\in R, a<x_0<b$, tai nelygybės $f(x)<c$ sprendinių aibė yra intervalas $(a;x_0)$ $((x_0;b))$;

4) jeigu funkcija f: $(a;b)\to R$ yra didėjanti (mažėjanti), o funkcija g: $(a;b)\to R$ yra mažėjanti (didėjanti), ir taške $x_0\in(a;b)$ galioja lygybė $f(x_0)=g(x_0)$, tai nelygybės $f(x)>g(x)$ sprendinių aibė yra intervalas $(x_0;b)$ $((a;x_0))$.

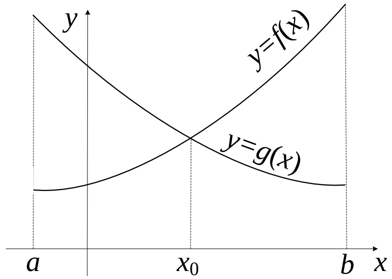
3–4 savybes pailiustruosime grafiškai (4 pav., a), b) ir (5 pav., a), b)



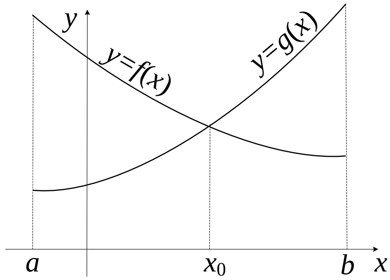
4 pav. a)



4 pav. b)



5 pav. a)



5 pav. b)

4 pratimas. Remdamiesi 4 pav. ir 5 pav., užrašykite nelygybių $f(x) > c$ ir $f(x) < g(x)$ sprendinius.

3 pavyzdys. Išspręskime lygtį $\sqrt{x^2+3x-4}+\sqrt{x-4}=12-x.$

Sprendimas. Pirmiausia raskime lygties apibrėžimo sritį

$$D(L): \begin{cases} x^2+3x-4 \ge 0, \\ x-4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)(x-1) \ge 0, \\ x \ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [4;+\infty).$$

Kadangi funkcijos $f_1(x)=x^2+3x-4$ ir $f_2(x)=x-4$ intervale $[4;+\infty)$ yra didėjančios, tai ir funkcija $f(x)=\sqrt{x^2+3x-4}+\sqrt{x-4}$ šiame intervale yra didėjanti. Kadangi funkcija $g(x)=12-x$ yra mažėjanti, tai lygtis gali turėti daugiausiai vieną sprendinį. Nesunku įsitikinti, kad $x=5$ yra šios lygties sprendinys.

Ats.: 5.

4 pavyzdys. Išspręskime nelygybes:

a) $\sqrt{6+x}-\sqrt{4-x} > 47-12x-x^2$;

b) $\sqrt{1-5x}+\sqrt{1-x} \ge 6.$

Sprendimas. a) Šios nelygybės apibrėžimo sritis yra $D(N)=[-6;4]$. Šioje srityje funkcija $f_1(x)=\sqrt{6+x}$ yra didėjanti, o funkcija $f_2(x)=\sqrt{4-x}$ yra mažėjanti. Todėl funkcija $f(x)=\sqrt{6+x}-\sqrt{4-x}$ yra didėjanti. Kadangi kvadratinis trinaris $g(x)=47-12x-x^2=$

$=-(x^2+12x-47)$ intervale $[-6;4]$ yra mažėjanti funkcija, o $x=3$ yra lygties $\sqrt{6+x}-\sqrt{4-x}=47-12x-x^2$ sprendinys, tai, pagal 4 savybę, nelygybės $\sqrt{6+x}-\sqrt{4-x}>47-12x-x^2$ sprendinių aibė yra intervalas $(3;4]$;

b) Nelygybės apibrėžimo sritis yra intervalas $DN=\left(-\infty;\frac{1}{5}\right]$.

Kadangi funkcija $f(x)=\sqrt{1-5x}+\sqrt{1-x}$ yra mažėjanti šiame intervale ir $f(-3)=6$, tai, pagal 3 savybę, nelygybės sprendinių aibė yra intervalas $(-\infty;-3]$.

Ats.: a) $(3;4]$; b) $(-\infty;-3]$.

3. Funkcijos didžiausia ir mažiausia reikšmės. Sakoma, kad funkcija *f*: $Df\subset R\to R$ taške $x_0\in Df$ įgyja didžiausią (mažiausią) reikšmę, jeigu $f(x_0)\geq f(x)$ ($f(x_0)\leq f(x)$) su visais *x*, $x\in Df$.

Spręsdami lygtis ir nelygybes, kartais naudosimės šiomis savybėmis:

1) jeigu $f(x)\leq A$ ir $g(x)\geq A$ funkcijų *f* ir *g* apibrėžimo sričių bendroje dalyje, tai lygtis $f(x)=g(x)$ ekvivalenti lygčių sistemai

$$\begin{cases} f(x)=A, \\ g(x)=A \end{cases}$$ (lygties ir lygčių sistemos sprendiniai sutampa);

2) jeigu $f(x)\leq A<a$ ($f(x)\geq A>a$) su visais $x\in Df$, tai lygtis $f(x)=a$ sprendinių neturi;

3) jeigu $f(x)\leq A<a$ ($f(x)\geq A>a$) su visais $x\in Df$, tai nelygybė $f(x)\geq a$ ($f(x)\leq a$) sprendinių neturi.

5 pavyzdys. Išspręskime šias lygtis:

a) $\dfrac{10x^2}{x^4+25}=x^2-4x+5$;

b) $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+5}=x^2+2x+5.$

Sprendimas. a) Kadangi $x^2-4x+5=(x-2)^2+1\geq 1$ ir lygybė galima, kai $x=2$, o $\dfrac{10x^2}{x^4+25}=\dfrac{10}{x^2+\dfrac{25}{x^2}}\leq\dfrac{10}{2\sqrt{x^2\cdot\dfrac{25}{x^2}}}=\dfrac{10}{2\sqrt{25}}=1$

(pritaikėme aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę skaičiams x^2 ir $\dfrac{25}{x^2}$), tai lygtis $\dfrac{10x^2}{x^4+25}=x^2-4x+5$ ekvivalenti lygčių sistemai

$$\begin{cases} x^2-4x+5=1, \\ \dfrac{10x^2}{x^4+25}=1. \end{cases}$$

Lygties $x^2-4x+5=1$ sprendinys yra $x=2,$ o lygybė $\dfrac{10x^2}{x^4+25}=1$ galima tik tada, kai $x^2=\dfrac{25}{x^2},$ t. y. kai $x=-\sqrt{5}$ arba $x=\sqrt{5}.$ Taigi lygčių sistema sprendinių neturi. Vadinasi, sprendinių neturi ir nagrinėjamoji lygtis.

Ats.: $\varnothing$.

b) Lygties $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+5}=x^2+2x+5$ apibrėžimo sritis yra $D(L)=[-5;3].$ Šioje srityje funkcija $f_1(x)=\sqrt{3-x}$ yra mažėjanti, funkcija $f_2(x)=\sqrt{x+5}$ – didėjanti, o funkcija $g(x)=x^2+2x+5$ – nei didėjanti, nei mažėjanti, todėl negalima taikyti 2-me skyrelyje nagrinėtų atvejų. Ieškome funkcijų $f(x)=\sqrt{3-x}+\sqrt{x+5}$ ir $g(x)=x^2+2x+5$ didžiausios ir mažiausios reikšmių.

Tegul $t=\sqrt{3-x}+\sqrt{x+5}>0$. Tada

$$t^2=8+2\sqrt{15-2x-x^2}=8+2\sqrt{16-(x+1)^2}\leq 16\Rightarrow t\leq 4;$$

lygybė $t=4$ galima tik tada, kai $x=-1.$ Akivaizdu, kad $g(x)=$ $=x^2+2x+5=(x+1)^2+4\geq 4$, o lygybė galima tik tada, kai $x=-1.$

Taigi lygtis $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+5}=x^2+2x+5$ ekvivalenti lygčių sistemai

$$\begin{cases} \sqrt{3-x}+\sqrt{x+5}=4, \\ x^2+2x+5=4, \end{cases}$$

kuri turi vienintelį sprendinį $x=-1$.

Ats.: –1.

6 pavyzdys. Išspręskime:

a) lygtį $\sqrt{x^2+2x+4}+\dfrac{4}{\sqrt{x^2+2x+4}}=4-x^2$;

b) nelygybę $\sqrt{2x+9}+\sqrt[4]{81-x}<3$.

Sprendimas. a) Lygties apibrėžimo sritis yra visa realiųjų skaičių aibė. Kairiąją lygties pusę pažymėkime $f(x)$, o dešiniąją – $g(x)$. Pasinaudoję dviejų skaičių aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybe, gauname:

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}+\frac{4}{\sqrt{x^2+2x+4}}\geq 2\sqrt{\sqrt{x^2+2x+4}\cdot\frac{4}{\sqrt{x^2+2x+4}}}=$$

$$=2\sqrt{4}=4;$$

lygybė galima tik tada, kai

$$\sqrt{x^2+2x+4}=\frac{4}{\sqrt{x^2+2x+4}}\Rightarrow x^2+2x+4=4\Rightarrow x=0 \text{ arba } x=-2.$$

Aišku, kad $g(x)=4-x^2\leq 4$; lygybė galima tik tada, kai $x=0$.

Taigi lygties kairiosios pusės mažiausia reikšmė lygi 4, o lygties dešiniosios pusės didžiausia reikšmė lygi 4; šios reikšmės įgyjamos taške $x=0$. Vadinasi, $x=0$ yra vienintelis sprendinys.

b) $D(N)=\left[-\dfrac{9}{2};81\right]$. Kai $x\in\left[-\dfrac{9}{2};0\right]$, tai $\sqrt{2x+9}\geq 0$, $\sqrt[4]{81-x}\geq 3$ ir $\sqrt{2x+9}+\sqrt[4]{81-x}\geq 3$. Kai $x\in[0;81]$, tai $\sqrt{2x+9}\geq 3$, $\sqrt[4]{81-x}\geq 0$, $\sqrt{2x+9}+\sqrt[4]{81-x}\geq 3$. Taigi, kai $x\in\left[-\dfrac{9}{2};81\right]$, kairioji nelygybės pusė ne mažesnė už 3. Todėl nelygybė sprendinių neturi.

Ats.: $\varnothing$.

4. Funkcijos grafikas. Funkcijos $y = f(x)$, $x \in Df$, grafiku stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje *Oxy* vadinama plokštumos taškų, kurių koordinatės yra $(x;\ f(x))$, $x \in Df$, aibė.

Remdamiesi funkcijos grafiku, išspręskime pavyzdį.

7 pavyzdys. Raskime lygties $\max\{4x - x^2;\ x^2 - 6\} = a$ sprendinių skaičių priklausomai nuo a reikšmės; čia $\max\{u; v\}$ – didžiausias iš skaičių u ir v.

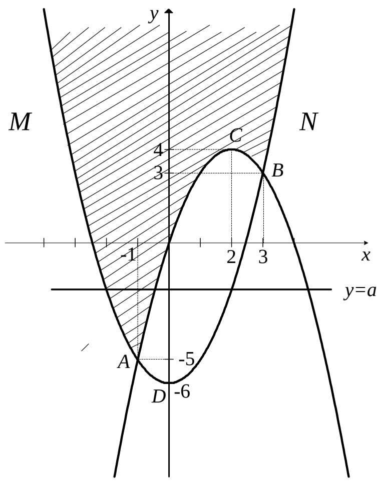
Sprendimas. Nubrėžkime funkcijos $f(x) = \max\{4x - x^2;\ x^2 - 6\}$ grafiką. Vienoje koordinačių sistemoje nubraižome funkcijų $f_1(x) = 4x - x^2$ ir $f_2(x) = x^2 - 6$ grafikus (6 pav.). Šių grafikų susikirtimo taškai yra sistemos

$$\begin{cases} y = 4x - x^2, \\ y = x^2 - 6 \end{cases}$$

sprendiniai: $A(-1; -5)$, $B(3; 3)$. Šių parabolių viršūnės yra taškuose $C(2; 4)$ ir $D(0; -6)$.

Iš brėžinio matome, kad

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6, & -\infty < x \le -1; \\ 4x - x^2, & -1 < x \le 3; \\ x^2 - 6, & x > 3. \end{cases}$$



6 pav.

Funkcijos f grafikas (žr. 6 pav.) yra subrūkšniuotos srities kontūras *MACBN*.

Rasime šio grafiko ir tiesės $y = a$ susikirtimo taškų skaičių priklausomai nuo parametro a.

Kai $a < -5$, tiesė $y = a$ grafiko nekerta. Kai $a = -5$, tiesė $y = -5$ ir grafikas kertasi viename taške; kai $-5 < a < 3$, tiesė $y = a$ ir grafikas kertasi dviejuose taškuose; kai $a = 3$, – trijuose taškuose; kai $3 < a < 4$ – keturiuose taškuose; kai $a = 4$, tiesė $y = a$ grafiką kerta trijuose taškuose, o kai $a > 4$ – dviejuose taškuose.

Ats.: Kai $a < -5$, lygtis sprendinių neturi; kai $a \in (-5; 3) \cup (4; +\infty)$ – du sprendinius; kai $a = 3$ ir $a = 4$ – tris sprendinius; o kai $a \in (3; 4)$ – keturis sprendinius.

5. Funkcijos lyginumas. Pasinaudojus į lygtį ar nelygybę įeinančių funkcijų lyginimu, kartais pavyksta supaprastinti uždavinio sprendimą.

Prisiminkime, kad funkcija f: $(-a; a) \in \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ vadinama lygine, jeigu su bet kuriuo $x \in (-a; a)$ yra teisinga lygybė $f(-x) = f(x)$. Pavyzdžiui, funkcija $f(x) = x^4 + 5$ yra lyginė, nes

$$f(-x) = (-x)^4 + 5 = x^4 + 5 = f(x).$$

8 pavyzdys. Ištirsime, su kuriomis parametro a reikšmėmis lygtis $x^2 - 3|x| - 4 = a$ turi tris skirtingus sprendinius.

Sprendimas. Jeigu $x_0 \neq 0$ yra šios lygties sprendinys, tai $(-x_0)$ taip pat yra sprendinys. Kad lygtis turėtų 3 sprendinius, vienas sprendinys turi būti 0. Nulis yra lygties sprendinys, kai $a = -4$. Tada lygtis yra tokia: $x^2 - 3|x| = 0$. Kai $x > 0$, gauname lygtį $x^2 - 3x = 0$ ir jos teigiamas sprendinys lygus 3. Kai $x < 0$, lygtis $x^2 - 3x = 0$ turi neigiamą sprendinį, lygų –3.

Ats.: $a = -4$; –3; 0; 3 – sprendiniai.

ANTROJI UŽDUOTIS

Išspręskite šias lygtis ir nelygybes:

1. $\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{5 + x^2} - \sqrt{x - 2} = 3$;

2. $\sqrt{x^2 + 2x - 8} + \sqrt{4 - x^2} < 3$;

3. $\sqrt{x^2 + 3x + 4} + \sqrt{x + 1} = 3 - 4x - x^2$;

4. $\sqrt{x + 3} - \sqrt{5 - x} < x^2 - 12x + 11$;

5. $\sqrt{4x-3}+\sqrt{x-2}\geq 4$;

6. $\sqrt{5-x}+\sqrt{x+13}=x^2+8x+22$;

7. $\sqrt{x+4}-\sqrt[4]{16-x}<2$;

8. $x^2-4x+10=\dfrac{12}{x^2+4x+6}$.

9. Raskite lygties $\min\{x^2-2x-3;\ x+1\}=a$ sprendinių skaičių priklausomai nuo parametro a reikšmės.

10. Nustatykite, su kuria parametro a reikšme lygtis $x^4-4x^2+5=a$ turi tris skirtingus sprendinius ir juos raskite.

III. SIMETRINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS

Antanas Apynis
(Vilniaus universitetas)

Pažintį su simetrinėmis lygtimis ir jų sistemomis pradėkime nuo simetrinio daugianario sampratos.

1. Simetriniai daugianariai. Daugianaris $P(x, y)$ su kintamaisiais x ir y vadinamas *simetriniu daugianariu*, jeigu jo išraiška nepasikeičia, sukeitus vietomis x ir y. Štai keli tokių daugianarių pavyzdžiai:

a) $x^4 + y^4 + 2x^3y + 2xy^3 + 7;$

b) $(x + y + 1)^2 + 7xy + 2;$

c) $(x^2 + xy + y^2)^2 - (x + y)^3.$

Daugianariai $x + y$ ir xy vadinami *pagrindiniais simetriniais daugianariais su dviem kintamaisiais*

Norėtume atkreipti mokinių dėmesį į labai svarbų teorinį rezultatą:

Kiekvieną simetrinį daugianarį $P(x, y)$ *su dviem kintamaisiais x ir y galima išreikšti pagrindiniais simetriniais daugianariais* $x + y$ *ir* xy.

Šio teiginio įrodymas yra palyginti nesunkus; vis dėlto jį praleiskime ir apsiribokime konkrečiais pavyzdžiais.

1 pavyzdys. Simetrinius daugianarius

$$P(x, y) = xy^3 + 3x^2y^2 + x^3y + 5$$

ir

$$Q(x, y) = x + x^2 + x^3 + y + y^2 + y^3$$

išreikškime pagrindiniais simetriniais daugianariais $x + y$ ir xy.

Sprendimas. Pažymėkime $u = x + y$ ir $v = xy.$ Tada

$$P(x, y) = xy^3 + 3x^2y^2 + x^3y + 5 = (xy^3 + x^3y) + 3x^2y^2 - 5 =$$

$$= xy(y^2 + x^2) + 3(xy)^2 - 5 = xy((x^2 + 2xy + y^2) - 2xy) + 3(xy)^2 - 5 =$$

$$= xy((x + y)^2 - 2xy) + 3(xy)^2 - 5 =$$

$$= v(u^2 - 2v) + 3v^2 - 5 = u^2v - 2v^2 + 3v^2 - 5 = u^2v + v^2 - 5;$$

$$Q(x,y) = x + x^2 + x^3 + y + y^2 + y^3 =$$
$$= (x+y) + (x^2+y^2) + (x^3+y^3) =$$
$$= (x+y) + ((x+y)^2 - 2xy) + (x+y)(x^2 - xy + y^2) =$$
$$= (x+y) + ((x+y)^2 - 2xy) + (x+y)((x+y)^2 - 3xy) =$$
$$= u + (u^2 - 2v) + u(u^2 - 3v) = u + u^2 - 2v + u^3 - 3uv.$$

Ats.: $P(x,y) = u^2v + v^2 - 5,$

$Q(x,y) = u^3 + u^2 + u - 3uv - 2v.$

2 pavyzdys. Pagrindiniais simetriniais daugianariais $x+y$ ir xy išreikškime laipsnių sumas (simetrinius daugianarius)

$$x^4 + y^4,\ x^5 + y^5 \text{ ir } x^6 + y^6.$$

Sprendimas. Atkreipkime dėmesį į tai, kad pirmajame pavyzdyje laipsnių sumas x^2+y^2 ir x^3+y^3 reiškėme pagrindiniais simetriniais daugianariais $u = x+y$ ir $v = xy$ taip:

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = u^2 - 2v; \tag{1}$$
$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)((x+y)^2 - 3xy) =$$
$$= u(u^2 - 3v) = u^3 - 3uv. \tag{2}$$

Pasinaudoję šiais rezultatais, keliaukime toliau:

1) $x^4 + y^4 = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - 2x^2y^2 = (x^2+y^2)^2 - 2(xy)^2 =$

$= (u^2 - 2v)^2 - 2v^2 = u^4 - 4u^2v + 2v^2;$

2) $x^5 + y^5 = (x^2+y^2)(x^3+y^3) - x^2y^3 - x^3y^2 =$

$= (x^2+y^2)(x^3+y^3) - x^2y^2(x+y) =$

$= (u^2 - 2v)(u^3 - 3uv) - uv^2 = u^5 - 5u^3v + 5uv^2;$

3) $x^6 + y^6 = (x^3+y^3)^2 - 2x^3y^3 = (u^3 - 3uv)^2 - 2v^3 =$

$= u^6 - 6u^4v + 9u^2v^2 - 2v^3.$

Aišku, kad nėra jokio būtinumo įsiminti nei čia gautų rezultatų, nei (1) ir (2) formulių. Pakanka išmokti kuo sklandžiau rasti reikiamas simetrinių daugianarių išraiškas pagrindiniais simetriniais daugianariais.

Pereikime prie daugianarių su trimis kintamaisiais.

Daugianaris $P(x, y, z)$ vadinamas simetriniu daugianariu su trimis kintamaisiais, jeigu jo išraiška nepasikeičia, bet kaip sukeitus vietomis kintamuosius x, y ir z. Pavyzdžiui,

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \text{ ir } x^3 + y^3 + z^3 - 7$$

yra simetriniai daugianariai.

Daugianariai $x + y + z$, $xy + yz + zx$ ir xyz vadinami *pagrindiniais simetriniais daugianariais su trimis kintamaisiais*; juos žymėkime atitinkamai u, v ir w:

$$u = x + y + z,$$
$$v = xy + yz + zx,$$
$$w = xyz.$$

Šiais daugianariais galima išreikšti kiekvieną simetrinį daugianarį $P(x, y, z)$. Nesileisdami į šio svarbaus teiginio įrodymą, iš karto eikime prie pavyzdžių.

3 pavyzdys. Tegu

$$P(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \; Q(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3.$$

Išreikškime šiuos simetrinius daugianarius su trimis kintamaisiais pagrindiniais simetriniais daugianariais $x + y + z$, $xy + yz + zx$ ir xyz.

Sprendimas. Tegu $u = x + y + z$, $v = xy + yz + zx$ ir $w = xyz$. Tada

$$P(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2xy - 2yz - 2zx =$$
$$= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = u^2 - 2v;$$
$$Q(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 =$$
$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) - x(y^2 + z^2) - y(x^2 + z^2) - z(x^2 + y^2) =$$
$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) - xy^2 - xz^2 - x^2y - yz^2 - x^2z - y^2z =$$
$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) - (xy^2 + x^2y) - (xz^2 + x^2z) - (yz^2 + y^2z) =$$
$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) - (xy^2 + x^2y + xyz) -$$
$$- (xz^2 + x^2z + xyz) - (yz^2 + y^2z + xyz) + 3xyz =$$
$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) - xy(y + x + z) -$$
$$- xz(z + x + y) - yz(z + y + x) + 3xyz =$$
$$= u(u^2 - 2v) - uv + 3w = u^3 - 3uv + 3w.$$

Taigi gavome, kad

$$x^2+y^2+z^2=u^2-2v, \tag{3}$$

$$x^3+y^3+z^3=u^3-3uv+3w. \tag{4}$$

4 pavyzdys. Raskime simetrinio reiškinio

$$R(x,\,y,\,z)=\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}+\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}$$

išraišką pagrindiniais simetriniais daugianariais

$$u=x+y+z,\quad v=xy+yz+zx \text{ ir } w=xyz.$$

Sprendimas.

$$R(x,\,y,\,z)=\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}+\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}=$$

$$=\frac{(x^2+y^2-z^2)z+(y^2+z^2-x^2)x+(z^2+x^2-y^2)y}{2xyz}.$$

Tvarkydami skaitiklį, gauname:

$$(x^2+y^2-z^2)z+(y^2+z^2-x^2)x+(z^2+x^2-y^2)y=$$

$$=(x^2+y^2+z^2)z-2z^3+(y^2+z^2+x^2)x-2x^3+(z^2+x^2+y^2)y-2y^3=$$

$$=(x^2+y^2+z^2)(z+x+y)-2(z^3+x^3+y^3)=$$

$$=(u^2-2v)u-2(u^3-3uv+3w)=-u^3+4uv-6w$$

(čia pasinaudojome (3) ir (4) išraiškomis). Vadinasi,

$$R(x,\,y,\,z)=\frac{4uv-6w-u^3}{2w}.$$

Matome, kad pagrindiniais simetriniais daugianariais kartais galima išreikšti ir trupmeninį racionalųjį reiškinį.

2. Simetrinių lygčių sistemos su dviem nežinomaisiais. Lygtis $f(x,\,y)=0$ su dviem nežinomaisiais x ir y vadinama simetrine lygtimi su dviem nežinomaisiais, jeigu $f(x,\,y)$ yra simetrinis reiškinys kintamųjų x ir y atžvilgiu (nesikeičia, sukeitus x ir y vietomis). Pavyzdžiui, lygtys $x^2+5xy+y^2=7$, $\sqrt{x^2+y^2}+xy=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ yra simetrinės, nes jas galima užrašyti pavidalu $f(x,\,y)=0$, kuriame reiškinys $f(x,\,y)$ yra simetrinis. Kaip ir bendruoju atveju simetrinės lygties $f(x, y) = 0$ sprendiniu vadinsime realiųjų skaičių x ir y porą (x, y), tenkinančią ją. Sprendinių visumą vadinsime lygties sprendinių aibe.

Kai ieškoma kelių lygčių, tarkime, $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0, \ldots,$ $f_m(x, y) = 0$ bendrų sprendinių, sakoma, kad sprendžiama lygčių sistema. Paprastai ji užrašoma taip:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x, y) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Išspręsti lygčių sistemą reiškia, kad reikia rasti visus šios sistemos sprendinius arba įrodyti, kad bendrų sprendinių lygtys, sudarančios sistemą, neturi (tada sakoma, kad sistemos sprendinių aibė yra tuščioji aibė $\varnothing$).

Šioje simetrinių lygčių sistemų temoje apsiribosime atveju, kai (6) sistemą sudarančiose lygtyse reiškiniai $f_i(x, y)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, yra simetriniai daugianariai arba dviejų simetrinių daugianarių santykiai (trupmenos). Be to, spręsime tik dviejų lygčių sistemas. Tokios simetrinių lygčių sistemos iš visų kitų išsiskiria tuo, kad visada galima taikyti keitinius $u = x + y$ ir $v = xy$.

Kad būtų aiškiau, išnagrinėkime porą pavyzdžių.

5 pavyzdys. Išspręskime simetrinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$$

Sprendimas. Abiejų lygčių daugianariai yra simetriniai. Pirmosios lygties daugianaris $x + y$ yra pagrindinis simetrinis daugianaris, o antrosios lygties daugianarį $x^3 + y^3$ nesunku išreikšti pagrindiniais simetriniais daugianariais $x + y$ ir xy (žr. 2 pvz.):

$$x^3 + y^3 = (x + y)((x + y)^2 - 3xy).$$

Taikydami „standartinius“ keitinius

$$u = x + y, \quad v = xy,$$

gausime naują lygčių sistemą

$$\begin{cases} u = 5, \\ u(u^2 - 3v) = 35. \end{cases}$$

Iš jos gauname, kad $u = 5$ ir $v = 6.$

Nežinomųjų x ir y reikšmėms rasti reikia išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Pagal Vijeto teoremą (kvadratinei lygčiai) x ir y yra kvadratinės lygties

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

sprendiniai $t_1 = 2$ ir $t_2 = 3.$ Taigi $x = 2,\ \ y = 3$ arba $x = 3,\ \ y = 2.$

Ats.: $\{(2; 3); (3; 2)\}.$

6 pavyzdys. Išspręskime simetrinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5. \end{cases} \tag{7}$$

Sprendimas. Taikydami keitinius $u = x + y$ ir $v = xy,$ gauname:

$$x^3 + x^3y^3 + y^3 = (x^3 + y^3) + (xy)^3 = (x + y)((x + y)^2 - 3xy) + (xy)^3 =$$
$$= u(u^2 - 3v) + v^3 = u^3 + v^3 - 3uv;$$
$$x + xy + y = u + v.$$

Todėl (7) sistemą pakeičiame lygčių sistema

$$\begin{cases} u^3 + v^3 - 3uv = 17, \\ u + v = 5. \end{cases} \tag{8}$$

Matome, kad nežinomųjų u ir v atžvilgiu ši sistema taip pat yra simetrinė. Ją spręskime, vėl taikydami „standartinius“ keitinius

$$a = u + v,\ \ b = uv.$$

Kadangi

$$u^3 + v^3 - 3uv = (u + v)((u + v)^2 - 3uv) - 3uv = a(a^2 - 3b) - 3b = a^3 - 3ab - 3b,$$

tai vietoj (8) turėsime tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} a^3 - 3ab - 3b = 17, \\ a = 5. \end{cases} \tag{9}$$

Matome, kad ši sistema turi vienintelį sprendinį – skaičių a ir b porą (5; 6).

Nežinomųjų u ir v reikšmių poroms $(u; v),$ tenkinančioms (8) sistemą, rasti sprendžiame lygčių sistemą:

$$\begin{cases} u + v = 5, \\ uv = 6. \end{cases} \tag{10}$$

Remdamiesi Vijeto teorema, ją keičiame kvadratine lygtimi $t^2 - 5t + 6 = 0.$ Šios lygties sprendiniai yra $t_1 = 2$ ir $t_2 = 3.$ Gauname du (10) (taigi ir (8)) sistemos sprendinius – skaičių *u* ir *v* poras (2; 3) ir (3; 2).

Nežinomųjų *x* ir *y* poroms $(x;\, y),$ kurios tenkina (7) sistemą, rasti turime išspręsti dvi lygčių sistemas:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 3 \end{cases} \text{ ir } \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Remdamiesi Vijeto teorema, jas atitinkamai keičiame kvadratinėms lygtims:

$$t^2 - 2t + 3 = 0 \text{ ir } t^2 - 3t + 2 = 0.$$

Pirmoji lygtis sprendinių neturi, o antrosios lygties sprendiniai yra 1 ir 2. Taigi (7) sistema turi du sprendinius: (1; 2) ir (2; 1).

Ats.: {(1; 2); (2; 1)}.

3. Simetrinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemos. Lygtis $f(x,\, y,\, z) = 0$ vadinama *simetrine lygtimi su trimis nežinomaisiais x, y ir z,* jeigu reiškinys $f(x,\, y,\, z)$ yra simetrinis kintamųjų *x, y* ir *z* atžvilgiu. Čia taip pat apsiribosime atveju, kai $f(x,\, y,\, z)$ yra simetrinis daugianaris arba simetrinių daugianarių santykis. Nepriklausomai nuo lygčių skaičiaus tokiai simetrinių lygčių sistemai spręsti galima taikyti šiuos keitinius:

$$u = x + y + z, \quad v = xy + yz + zx, \quad w = xyz. \tag{11}$$

Radus konkrečias *u, v* ir *w* reikšmes (jų trejetą $(u;\, v;\, w)$), reikėtų išspręsti tokią lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą:

$$\begin{cases} x + y + z = u, \\ xy + yz + zx = v, \\ xyz = w. \end{cases} \tag{12}$$

Tik atskirais atvejais ją nesunku išspręsti. Tačiau dažniausia gaunama kubinė lygtis su vienu nežinomuoju. Beje, nevisai paprasta ir tą kubinę lygtį užrašyti. Todėl suformuluosime dar vieną svarbų teorinį rezultatą – **Vijeto teoremą kubinei lygčiai:**

Jeigu $t_1,\ t_2,\ t_3$ *yra kubinės lygties*

$$t^3 + pt^2 + qt + r = 0 \tag{13}$$

sprendiniai, tai

$$t_1 + t_2 + t_3 = -p, \tag{14}$$

$$t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = q, \tag{15}$$

$$t_1 t_2 t_3 = -r. \tag{16}$$

Remiantis šia teorema (12) sistemos sprendimą galima pakeisti kubinės lygties

$$t^3 - ut^2 + vt - w = 0 \tag{17}$$

sprendimu.

Atkreipkime dėmesį į tai, kad Vijeto formulėse (14)–(16) kairiosios pusės yra pagrindiniai simetriniai daugianariai dydžių t_1, t_2, t_3 atžvilgiu.

Atskirai pagvildenkime (17) lygties sprendimo problemą. Pagal bendrąją teoriją (vidurinėje mokykloje ji nedėstoma) kubinė lygtis turi bent vieną realųjį sprendinį. Šiam sprendiniui rasti būtų galima taikyti vadinamąją Kardano (Girolamo Kardano, 1501–1576, italų matematikas) formulę. Tačiau jos išvedimas nėra visiškai elementarus; todėl nepateiksime net pačios formulės. Norėtume atkreipti mokinių dėmesį į kitą (gana patrauklų) kubinės lygties sprendimo būdą.

Tarkime, kad (17) lygties visi koeficientai ($-u$, v ir $-w$) yra sveikieji skaičiai. Galima įrodyti, kad tada kiekvienas (17) lygties sveikasis sprendinys yra laisvojo nario $-w$ daliklis. Šis teiginys sudaro galimybę vieną sprendinį rasti (žinoma, ne visada!) tarp (17) lygties laisvojo nario daliklių. O tada jau gana paprasta kairiąją lygties pusę išskaidyti dauginamaisiais ir baigti pačios lygties sprendimą.

7 pavyzdys. Išspręskime simetrinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ xy + yz + zx = 11, \\ xyz = 6. \end{cases} \tag{18}$$

Sprendimas. Kadangi visų trijų lygčių kairiosios pusės yra pagrindiniai simetriniai daugianariai su trimis nežinomaisiais, tai remdamiesi Vijeto formulėmis (14)–(16), lygčių sistemą pakeiskime kubine lygtimi

$$t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0. \tag{19}$$

Laisvojo nario dalikliai yra $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ ir ± 6. Tiesiogiai tikrindami, įsitikiname, kad 1, 2 ir 3 yra šios lygties sprendiniai.

Vadinasi, realiųjų skaičių *x*, *y* ir *z* trejetai (1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2) ir (3; 2; 1) yra (18) sistemos sprendiniai.

Ats.: $\{(1;\,2;\,3);\,(1;\,3;\,2);\,(2;\,1;\,3);\,(2;\,3;\,1);\,(3;\,1;\,2);\,(3;\,2;\,1)\}$.

8 pavyzdys. Išspręskime simetrinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=9, \\ x^3+y^3+z^3=1. \end{cases} \tag{20}$$

Sprendimas. Taikydami keitinius $u=x+y+z,\;\; v=xy+yz+zx,$ $w=xyz,$ simetrinius daugianarius $x^2+y^2+z^2$ ir $x^3+y^3+z^3$ išreikškime pagrindiniais simetriniais daugianariais. Gauname (žr. 3 pvz.):

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=u^2-2v,$$

$$x^3+y^3+z^3=$$

$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)(xy+xz+yz)+3xyz=$$

$$=u(u^2-2v)-uv+3w=u^3-3uv+3w.$$

Todėl vietoj (20) sistemos toliau nagrinėjame trijų lygčių su nežinomaisiais u, v ir w sistemą

$$\begin{cases} u=1, \\ u^2-2v=9, \\ u^3-3uv+3w=1 \end{cases}$$

ir nustatome, kad $u=1,\;\; v=-4,\;\; w=-4$ yra jos sprendinio $(u;v;w)$ komponentės.

Toliau sprendžiame lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ xy+yz+zx=-4, \\ xyz=-4. \end{cases} \tag{21}$$

Pagal Vijeto formules (14)–(16) šią sistemą keičiame kubine lygtimi $t^3-t^2-4t+4=0.$ Jos sprendinių ieškome tarp laisvojo nario daliklių $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ ir nustatome, kad skaičiai $1, 2$ ir -2 yra šios lygties sprendiniai. Tai (21), taigi ir (20), sistemos sprendinių $(x;\,y;\,z)$ komponentės. Keisdami jas vietomis, gauname šešis sprendinius: $(1;\,2;\,-2)$, $(1;\,-2;\,2)$, $(2;\,1;\,-2)$, $(2;\,-2;\,1)$, $(-2;\,1;\,2)$, $(-2;\,2;\,1)$.

Ats.: $\{(1;\,2;\,-2),\,(1;\,-2;\,2),\,(2;\,1;\,-2),\,(2;\,-2;\,1),\,(-2;\,1;\,2),\,(-2;\,2;\,1)\}$.

TREČIOJI UŽDUOTIS

Išspręskite šias simetrinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemas:

1. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x^2 y + xy^2 = 30; \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 12, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}; \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 + xy, \\ x^3 + y^3 = 6xy - 1; \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^4 + y^4 = 97. \end{cases}$

5. Nustatykite, su kuriomis parametro *a* reikšmėmis simetrinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + a), \\ (x + y)^2 = 14 \end{cases}$$

turi du realiuosius sprendinius.

6. Simetrinį daugianarį su trimis kintamaisiais

$$(x^2 + y^2)(x^2 + z^2)(y^2 + z^2)$$

išreikškite pagrindiniais simetriniais daugianariais

$$x + y + z, \quad xy + yz + zx \text{ ir } xyz.$$

7. Išspręskite simetrinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{13}{3}, \\ x + y + z = \dfrac{13}{3}, \\ xyz = 1. \end{cases}$$

8. Išspręskite lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{2}{z}, \\ y+z=\dfrac{2}{x}, \\ z+x=\dfrac{2}{y}. \end{cases}$$

9. Įrodykite, kad $abc=0$, kai $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=1$ ir $a^3+b^3+c^3=1$.

10. Trikampio *ABC* perimetras lygus 12. Raskite šio trikampio plotą, kai kraštinių ilgių kvadratų suma lygi 50, o kubų suma lygi 216.

IV. SVĖRIMO IR PILSTYMO UŽDAVINIAI

Romualdas Kašuba
(Vilniaus universitetas)

Įžanga

Svėrimo ir pilstymo uždaviniai visada patikdavo tiems, kurie turėdavo nors kiek daugiau laiko arba kuriems sekdavosi aiškiau galvoti, arba kam patikdavo spręsti.

Tai loginių uždavinių porūšis su gana aiškiai nusakytu tikslu ir paprastai gana aiškiomis priemonėmis – indais ar svarstyklėmis – tam tikslui pasiekti. Kaip ir kituose loginiuose uždaviniuose, tikslas kartais pasiekiamas nelengvai, bet suradus tinkamą sprendimą arba bent supratus sprendimo būdą abejonių, ar viskas čia gerai, beveik nebebūna.

Kaip ir kiti rimtesni loginiai uždaviniai, jie buvo ir yra labai paplitę ir žinomi nuo neatmenamų laikų. Vieni juose labiau įžiūri savo rūšies „proto gimnastiką“, arba, kaip dabar labiau sakoma, „smegenų apšiltinimą“, tą kiekvienam mąstančiam žmogui būdingą poreikį „pamatuoti“ ir „pamiklinti“ ar bent „pajudinti“ savo galvos galias.

Kitaip sakant, tai yra vienas iš būdų atsakyti sau į klausimą, „ar aš pajėgiu suvokti, kas ir kaip čia aplink mane vyksta?“. Tai vienas iš kertinių žmogaus intelektinės veiklos klausimų – tam gyvename.

Kitus gali patraukti graži, kartais literatūrinio kūrinio vardo verta pati tokio uždavinio pateikimo forma – pati uždavinio intriga gali būti surašyta su trijų muškietininkų siužeto nutrūktgalviškumu ar kitokiu kvapą gniaužiančiu nenuspėjamumu.

Dar kitiems gali patikti tai, kad tokios rūšies uždaviniams spręsti nereikia jokių specialių žinių ir neprireikia net kvadratinės lygties šaknų radimo formulės, o gana vien sugebėjimo nors kiek aiškiau ar logiškiau mąstyti, o tą gebėjimą, panašiai kaip ir kitus siektinus įgūdžius, geriausia vystyti kasdienėmis pastangomis.

Vienas pačių pirmųjų galvosenos, susijusios su svėrimais, pavyzdžių, galėtų būti susigaudymas, ką daryti tokiu atveju:

1 pavyzdys. Yra sugedusios svirtinės svarstyklės, yra kilograminis svarelis ir yra didelis maišas cukraus. Reikia dviem svėrimais at(si)sverti lygiai 1 kilogramą cukraus.

Pirmiausiai pastebėkime, kad jeigu svarstyklės būtų nesugesdusios, tai pakaktų ir vieno svėrimo – į vieną lėkštelę dėtume tą kilograminį svarelį, o į kitą piltume tiek cukraus, kad būtų pusiausvyra.

Tačiau svarstyklės yra sugedusios ir pripylus tiek cukraus, kad būtų pusiausvyra, toje kitoje svarstyklių lėkštelėje, kur nėra svarelio, ten dabar yra ne 1 kilogramas, o kitoks, visai neaiškus cukraus kiekis, nes svarstyklės, pakartosime, sugedusios.

Tačiau vis tiek, padarius tiek, kiek mes jau padarėme, viską tikrai galima baigti antruoju veiksmu, kad ir su sugadintomis svirtinėmis svarstyklėmis.

Dabar gana būtų nuimti tą kilograminį svarelį ir į jo vietą pilti cukrų – vėl iki pusiausvyros. Tada ten, kur ką tik buvo 1 kg svarelis, atsiras lygiai 1 kilogramas cukraus – nes sakėme, kad pylėme iki pusiausvyros.

Kitas labai minėtinas uždavinys būtų toks.

2 pavyzdys. Į vaistinę atvežė 10 buteliukų su vaistais, po 100 tablečių kiekviename indelyje, o kiekviena tabletė pati turi sverti 10 gramų. Dar nespėjus jų išpakuoti vaistinė buvo įspėta nepradėti pardavinėti vaistų, nes paaiškėjo, kad visose vieno buteliuko tabletėse yra po 1 gramą gydomosios medžiagos mažiau, negu turi būti, todėl kiekviena to vienintelio buteliuko tabletė ir sveria ne 10, o tik 9 gramus. Kaip turint svirtines svarstykles su svareliais surasti tą buteliuką su netikusiomis tabletėmis ir kiek mažiausiai svėrimų prireiks tam tikslui pasiekti?

Tai labai dažna uždavinių rūšis. Tokiuose uždaviniuose viena dalis dažnai būna pats klausimas, ar tai, ko mūsų klausia, apskritai įmanoma, o kita dalis dažnai būna susijusi su tuo, kaip greičiausiai tai padaryti, jeigu tai padaryti įmanoma.

Na, o jeigu ko nors padaryti neįmanoma, tai mūsų vėl gali paklausti, kodėl taip yra?

Šiuo atveju sėkmingam uždavinio sprendimui pirmiausiai svarbu suvokti, kad iš skirtingų buteliukų reikėtų mėginti imti po skirtingą tablečių kiekį, nes, matyt, tik taip ir galėtų „atsiskirti“ tas buteliukas su netikusiomis tabletėmis, kur kiekviena tabletė yra 1 gramu lengvesnė. Dar truputį pagalvojus ima aiškėti, kad sumaniau tvarkantis tą uždavinį galima išspręsti vienu vieninteliu svėrimu. Tam pakaktų iš pirmojo buteliuko paimti vieną tabletę, iš antrojo – jau 2, iš trečiojo – net 3 ir taip toliau, iš kiekvieno buteliuko imant vis po daugiau, iš dešimtojo buteliuko – pilną dešimtį tablečių.

Nesunku suvokti, kad iš viso yra paimta

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$$

tablečių, kurios, jeigu visos būtų tinkamos, kartu svertų

$$55\cdot 10=550$$

gramų. Tačiau, pagal sąlygą viename kuriame buteliuke yra netikusių – tų 1 gramu lengvesnių tablečių ir, kadangi šiuo atveju bent po vieną tabletę yra imta iš absoliučiai visų indų, tai visų paimtųjų tablečių svoris tų 550 gramų svorio „nepasieks“, o visi galimi paimtųjų tablečių svoriai gali būti

540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548 arba 549

gramai. Todėl jeigu tuo vieninteliu svėrimu pasvertosios atrinktosios tabletės „konkrečiai“ svertų, sakysime, 547 gramus, tai tada, aišku, yra prarasta 3 gramai svorio; vadinasi, ir pačios netikusios tabletės turi būti „atėjusios“ iš trečiojo buteliuko – nes būtent iš 3-iojo ir buvo paimtos sverti 3 tabletės.

3 pavyzdys. Labai paprasta, bet labai svarbi situacija. Iš trijų ką tik pagimdytų trynukų du sveria absoliučiai po tiek pat, o trečiasis yra 13 gramų lengvesnis. Kaip vienu svėrimu jautriomis ligoninės svirtinėmis svarstyklėmis nustatyti, kuris gi iš tų trynukų yra lengvesnis?

Tai labai praktiškas uždavinys, naudingas ir tuo, kad jo neįmanoma neišspręsti, tik kartais būna, kad ne visai suvoki, kad jau viskas atlikta.

Ką bedarytum, vis tiek, anksčiau ar vėliau, guldysi vieną iš tų trynukų ant vienos, o kitą – ant kitos kurios svarstyklių lėkštelės.

Dabar jeigu svarstyklės pasirodytų esančios pusiausvyroje, tai kadangi svarstyklės yra geros, tai abu jose esantys trynukai yra vienodo svorio; vadinasi, tas nesvertasis trynukas ir bus tas 13 gramų lengvesnis.

Jeigu svarstyklės nerodo pusiausvyros, tai viena kuri nors pusė nusveria, o kita pakyla aukštyn. Vėl viskas labai aišku. Toje aukštyn pakilusioje lėkštutėje ir guli tas vienintelis lengvesnis trynukas.

Gyvenime vietoj trynukų dažnai būna monetos, tada tas lengvesnis trynukas „virsta“ kitokia, išskirtine, vadinamąja netikra (kitokia) moneta, o tie sunkėlesni, vienodo svorio trynukai „virsta“ tikromis monetomis. O pati intriga – rasti tą vienintelę kitokią monetą – išlieka!

Tai natūralu ir nestebina, nes anksčiau, kaip ne sykį girdėjome, monetos „nominalas“ būdavo tiesiogiai priklausomas nuo į monetą „įlydyto“ vertingo metalo kiekio. Suprantama, kad netikrose monetose to metalo būdavo mažiau – iš čia ir pavadinimas. Todėl dažniausiai netikros monetos ir yra suvokiamos būtent kaip tokios, kurios yra lengvesnės už kitas.

Tačiau gali būti ir kitaip, netikromis monetomis gali būti laikomos ir tos, kurios sunkesnės už tikras. Net viename uždavinyje gali nutikti ir taip, kad vienos netikros monetos gali būti lengvesnės, o kitos – ir sunkesnės už tikras monetas.

Vadinamieji pilstymo uždaviniai, kuriuos mes irgi kažkiek panagrinėsime, yra kažkuo panašūs į svėrimo uždavinius, tik dabar mūsų monetos tarsi suskystėja, o jau skystos medžiagos paprastai nesunkiai perpylinėjamos, taigi gali būti ir dalijamos į dalis. Dėl to kartais atsiranda įdomių papildomų galimybių. Vienas iš tokių paprasčiausių uždavinių yra turint kelias talpas, būna, pilnas (sklidinas), būna, tuščias, atmatuoti prašomą skysčio kiekį.

Štai pats paprasčiausias uždavinys.

4 pavyzdys. Turime tris indus: 3 litrų indą, sklidiną vandens ir du tuščius – dviejų litrų ir vieno litro talpos. Kaip perpilti vandenį taip, kad visuose trijuose induose jo būtų po lygiai?

Sprendimas gali būti toks:

(A) litrinį indą pripilame pilną;

(B) vandenį iš to pilno litrinio indo perpilame į dvilitrinį;

(C) iš trilitrinio indo vėl pripilame pilną litrinį indą.

Neįmanoma nesuvokti, kad dabar visuose induose vandens yra po lygiai (po 1 litrą).

Ne paslaptis, kad galima ir greičiau, galima būtų ir „sutaupyti“ vieną veiksmą:

(A) pripilame pilną dvilitrinį indą;

(B) iš ką tik pripilto pilno dvilitrinio indo pripilame pilną litrinį indą.

Dabar vėl visuose induose yra po litrą vandens.

5 pavyzdys. Stebukladaris Edmundas moka pilstyti girą ne tik pilnomis statinėmis, bet sugeba pripilti ir lygiai pusę statinės. Jis turi išpilstęs 10,5 statinės giros taip, kad 8 statinės yra tuščios, o likusios 16 statinių yra arba pusiau, arba visai pilnos.

Jis norėtų absoliučiai teisingai atlyginti savanoriams Antanui, Eugenijui ir Juozui už jų nepabaigiamus darbus taip, kad kiekvienam išeitų ir po vienodai giros, ir po vienodai statinių.

Kadangi statinių (tuščių, pusiau ir visai pilnų) yra

$$8+16=24,$$

tai kiekvienam savanoriui turėtų tekti po $24:3=8$ statines ir kiekvienose 8 statinėse, kurias jie gaus, iš viso turėtų būti $10{,}5:3=3{,}5$ statinės giros.

Nesunku suvokti, kad išpilstyti 10,5 statinių giros į 16 statinių pilnomis ir pusiau pilnomis statinėmis galima taip: 5 statinės turi būti pilnos, likusios $16-5=11$ statinių pusiau pilnos.

Atsilygindamas Edmundas išlaikė visus paminėtus principus ir išpilstė girą taip, kad Antanui teko 3 pilnos, 1 pusiau pilna ir dar 4 tuščios statinės, Eugenijui – 2 pilnos, 3 pusiau pilnos ir dar 3 tuščios statinės, o Juozui – 7 pusiau pilnos ir dar 1 tuščia statinė.

Tai galime pavaizduoti lentelėje:

Savanoris	Pilnos statinės	Pusiau pilnos statinės	Tuščios Statinės
Antanas	3	1	4
Eugenijus	2	3	3
Juozas	0	7	1

Dar kartą siūlome pasitikrinti, kad kiekvienam buvo duotos 8 statinės, kuriose iš viso tikrai yra po 3,5 statinės (labai geros) giros.

6 pavyzdys. Iš 4 auksinių monetų, toliau vadinamų auksinukėmis, sensacingai iškastų paryčiais Lyduvėnų pilkapyje, trys yra visiškai vienodos ir sveria vienodai, o ketvirtoji auksinukė yra netikra ir jos svoris yra ne toks, koks yra likusių tikrųjų auksinukių svoris. Turime svarstykles, kuriomis galima iš karto nustatyti bendrą tikslų dviejų arba daugiau monetų svorį. Svėrinėti monetų po vieną negalima, nes sveriamos po vieną jos subyra. Raseinių Magdutė ryžtingai mano, kad ir tokiomis sąlygomis vis tiek galima ne daugiau kaip 4 svėrimais garantuotai nustatyti, ir kuri iš tų monetų yra netikra ir net ar ta netikroji moneta yra lengvesnė ar sunkesnė už likusiais auksinukes.

Ar Magdutė yra teisi?

Sprendimas (Kur jau ten Magdutė bus neteisi).

Ji gali daryti taip. Ji gali visais galimais būdais pasverti monetas, kaskart be kurios nors vienos – ir vis kitos – arba, kitaip sakant, Magdutė ant svarstyklių visais galimais būdais deda po 3 monetas.

Taip sverdama ji tris kartus turės vienodą vienokį svorį – taip bus tada, kai tarp sveriamųjų monetų bus ir ta netikroji, ir vieną kurį kartą ji turės kitokį svorį – taip bus tada, kai netikroji moneta bus atidėta į šalį.

Taip ji ir bus rasta.

Suprantama, jeigu tas ketvirtasis svoris bus didesnis už tuos vienodus tris, tai tada toji netikroji auksinukė yra sunkesnė, o jei mažesnis, tai tada netikroji auksinukė yra lengvesnė už likusias tikrąsias monetas.

7 pavyzdys. Monetų padirbinėtojas turi 40 iš pažiūros visai vienodų monetų, iš kurių 2 yra netikros, lengvesnės už tikrąsias, ir abi sveria vienodai. Visos likusios tikros monetos, suprantama, irgi sveria vienodai. Ar galima dviem svėrimais svirtinėmis svarstyklėmis be svarelių surasti 20 tikrų monetų?

Sprendimas. Padaliname monetas į keturias krūveles

A, B, C ir D,

po 10 monetų kiekvienoje krūvelėje.

Pirmuoju svėrimu imame kurias nors dvi iš jų, sakysime, A ir B ir dedame ant svarstyklių.

Jeigu svarstyklės yra pusiausvyroje, tai krūvelėse A ir B:

(◈) visos monetos yra tikros

arba

(◯) abiejose krūvelėse yra po 1 netikrą monetą.

Taigi tada krūvelėje

A + B

yra arba 20 tikrų monetų, arba 18. Taip abi netikros monetos atsiduria vienoje kurioje iš pusių – arba abi jos yra pusėje

A + B

arba abi jos yra pusėje

C + D.

Tada antram svėrimui ant svarstyklių dedame vienoje pusėje

A + B,

o kitoje pusėje dedame

C + D.

Dabar viena kuri pusė nusvers (netikros monetos „atskirtos“) ir toje pusėje, kuri nusvers, ir yra 20 tikrų monetų.

Liko išnagrinėti atvejį, kai po pirmo svėrimo pusiausvyros nėra – netikros monetos galėjo ir „neatsiskirti“. Tada toje krūvelėje, kuri nusvėrė, sakysime, krūvelėje A, visos 10 monetų yra tikros.

Dabar II svėrimui krūvelę A dedame sverti su kuria viena iš tų, dar „neliestų“, krūvelių, sakysime, su krūvele C.

Jeigu dabar pusiausvyra, tai ir krūvelės C monetos tikros ir krūvelėje

$$A + C$$

yra 20 tikrų monetų.

O jeigu II svėrimu vėl nusveria krūvelė A, tai tada krūvelėje C garantuotai yra ta antroji netikroji moneta; vadinasi, dabar visos krūvelės D monetos yra tikros ir todėl krūvelėje

$$A + D$$

yra 20 tikrų monetų.

Pastaba. Pagalvokite, kodėl dabar antruoju svėrimu negali nusverti krūvelė C?

8 pavyzdys. Yra 4 statinės, atitinkamai 24, 13, 11 ir 5 kibirų talpos kiekviena. Pradžioje didžiausioji statinė yra pilna giros, o likusios trys yra tuščios. Kaip būtų galima perpilti girą taip, kad 3 statinėse būtų po 8 kibirus giros.

Sprendimas. Galimą perpylinėjimą pateikiame žemiau esančioje lentelėje:

Statinės	24-kibirė statinė	13-kibirė statinė	11-kibirė statinė	5-kibirė statinė
Prieš pradedant	24	0	0	0
Po 1-ojo perpylimo	13	0	11	0
Po 2-ojo perpylimo	8	0	11	5
Po 3-ojo perpylimo	0	8	11	5
Po 4-ojo perpylimo	11	8	0	5
Po 5-ojo perpylimo	16	8	0	0
Po 6-ojo perpylimo	16	0	8	0
Po 7-ojo perpylimo	3	13	8	0
Po 8-ojo perpylimo	3	8	8	5
Po 9-ojo perpylimo	8	8	8	0

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Į vaistinę atvežė 10 buteliukų su vaistais, po 100 tablečių kiekviename indelyje, o kiekviena tabletė pati turi sverti 10 gramų. Nespėjus juos išdėlioti vaistinės lentynose vaistinė buvo įspėta nepradėti pardavinėti vaistų, nes sužinota, kad visose vieno buteliuko tabletėse yra po 1 gramą gydomosios medžiagos mažiau, negu nurodyta būti, todėl kiekviena tabletė tame buteliuke sveria ne 10, o tik 9 gramus. Ar vis dar galima turint svarstykles, sveriančias tik iki 500 gramų, vienu vieninteliu svėrimu nustatyti, kuriame buteliuke yra netikusios tabletės.

2. Yra 9 monetos: 8 tikros ir vienodo svorio, o viena netikra ir lengvesnė už likusias. Kaip turint geras svirtines svarstykles, bet neturint svarelių, garantuotai surasti tą netikrą monetą.

3. Yra 81 moneta, iš kurių visos, išskyrus vieną, yra tikros ir sveria vienodai, o netikroji moneta yra lengvesnė. Ar įmanoma, turint geras svirtines svarstykles, bet neturint svarelių, 4 svėrimais garantuotai surasti tą netikrąją monetą?

4. Iš 4 auksinių monetų, toliau vadinamų auksinukėmis, sensacingai iškastų paryčiais Lyduvėnų pilkapyje, trys yra visiškai vienodos ir sveria vienodai, o ketvirtoji auksinukė yra netikra ir jos svoris yra ne toks, koks yra likusių tikrųjų auksinukių svoris. Turime svarstykles, kuriomis galima iš karto nustatyti bendrą tikslų dviejų arba daugiau monetų svorį. Svėrinėti monetų po vieną negalima, nes sveriamos po vieną jos subyra.

Ar galima ne daugiau kaip 4 svėrimais garantuotai nustatyti, ir kuri iš tų monetų yra netikra, ir net sužinoti, ar ta netikroji moneta yra lengvesnė ar sunkesnė už likusias auksinukes, jeigu dabar Magdutė vienu kartu beleidžia sverti jau tik po 2 monetas?

Ar net ir dabar tai dar įmanoma padaryti?

5. Stebukladaris Edmundas moka pilstyti girą ne tik pilnomis statinėmis, bet sugeba pripilti ir lygiai pusę statinės. Jis turi išsipilstęs 10,5 statinės giros taip, kad 8 statinės yra tuščios, o likusios 16 statinių yra pusiau arba pilnai pripiltos giros.

Jis norėtų vėl absoliučiai teisingai atlyginti savanoriams Antanui, Eugenijui ir Juozui už jų nepabaigiamus darbus taip, kad kiekvienam išeitų ir po vienodai giros, ir po vienodai statinių, bet kad statinių paskirstymas būtų dar kitoks, negu tas, kuris buvo nurodytas paaiškinimuose.

Ar stebukladaris Edmundas sugebės ir tai padaryti (kitoks jau minėto skirstinio perskirstymas savanoriams nelaikomas skirtingu skirstymu).

O gal tai galima padaryti ir dar kitaip, jau trečiaip?

Kiekvienu atveju sudarykite atitinkamą lentelę

6. 10 litrų indas pilnas rožių aliejaus. Reikia tą rožių aliejų padalinti į dvi lygias dalis, po 5 litrus kiekvienoje, turint po ranka tik du tuščius indus – vieną 3, o kitą 7 litrų talpos.

Uždavinio sprendimą, suprantama, pateikite lentelėje.

7. Yra trys indai – vienas 3 litrų, antras 5, o trečias – 20 litrų talpos. Pirmieji du indai yra tušti, o trečias – sklidinas vandens. Kaip keliais perpylimais antrajame inde gauti 4 litrus vandens? Perpylinėjant leidžiama pilti į indą ne daugiau vandens, negu jame telpa, arba perpilti visą vandenį iš vieno indo į kitą, jeigu tas vanduo ten sutelpa.

Sprendimą vėl pateikite lentelėje.

9. Yra keturi svareliais su ant jų nurodytais svoriais: 100 gr., 200 gr., 300 gr., ir 400 gr. Pasirodė, kad vienas svarelis jau nebeatitinka ant jo nurodyto svorio – ir net neaišku, ar jis yra lengvesnis, ar sunkesnis, negu ant jo nurodyta. Ar galima dviem svėrimais svirtinėmis svarstyklėmis be svarelių sužinoti, kuris svarelis nebeatitinka ant jo nurodyto svorio ir nustatyti, ar jis yra sunkesnis, ar lengvesnis, negu kad ant jo yra nurodyta?

9. Ar galima dviem svėrimais svirtinėmis svarstyklėmis be svarelių surasti bent vieną tikrą monetą tarp penkių turimų iš pažiūros visai vienodų monetų, jeigu 3 iš jų yra tikros ir vienodo svorio, o 2 netikros – viena lengvesnė, o kita – sunkesnė už tikras monetas?

10. Iš 12 monetų 1 moneta yra netikra, tačiau nežinia, ar ji yra sunkesnė, ar lengvesnė už likusias 11 vienodai sveriančių tikrų monetų. Ar galima turint svirtines svarstykles be svarelių 4 svėrimais garantuotai surasti tą vienintelę netikrą monetą?

V. PITAGORO IR HERONO SKAIČIŲ TREJETAI

Eugenijus Stankus
(Vilniaus universitetas)

Natūraliųjų skaičių savybės domino žmoniją nuo neatmenamų laikų. Nemažai iš jų susietos su senovės matematikų Pitagoro (VI a. pr. Kr.), Herono (I a.), Diofanto (III a.) ir kitų vardais. Čia panagrinėsime natūraliųjų skaičių trejetus, tenkinančius tam tikras sąlygas.

Jeigu natūraliųjų skaičių *a, b* ir *c* trejetas (*a,b,c*) tenkina lygybę

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1}$$

tai jis vadinamas *Pitagoro trejetu*.

Nesunku patikrinti, kad trejetas (4, 3, 5) yra Pitagoro trejetas ($a = 4,\quad b = 3, c = 5$). Taip pat nesudėtinga įsitikinti, kad trejetai (4*k*, 3*k*, 5*k*) su bet kuriuo natūraliuoju (arba sveikuoju) skaičiumi *k* taip pat yra Pitagoro trejetai.

O kaip surasti visus Pitagoro trejetus? Aišku, kad atsakant į šį klausimą užteks mokėti surasti tik trejetus, panašius į (4, 3, 5) , t. y. tokius, kurie sudaryti iš skaičių, neturinčių bendrų daliklių.

Ši tema glaudžiai susijusi su I tema ,,Euklido algoritmas ir jo taikymai“. Čia taip pat svarbios kai kurios sveikųjų skaičių dalumo savybės, reikės kelių skaičių didžiausio bendrojo daliklio sąvokos. Todėl naudosime tuos pačius žymenis kaip ir I temoje.

Skaičių *a* ir *b didžiausią bendrąjį daliklį* žymėsime *D*(*a*, *b*) ; kai *D*(*a*, *b*) = 1, tuomet šie skaičiai vadinami *tarpusavyje pirminiais* (jie neturi bendrų daliklių). Trijų skaičių *a*, *b* ir *c didžiausią bendrąjį daliklį* žymėsime *D*(*a*, *b*, *c*) ; kai *D*(*a,b,c*) = 1, tai skaičiai *a*, *b* ir *c* neturi bendrų daliklių (yra tarpusavyje pirminiai). Pavyzdžiui, skaičiai 9, 6 ir 10 yra tarpusavyje pirminiai (*D*(9, 6, 10) = 1), nors *D*(9, 6) = 3 ir *D*(6,10) = 2 .

Kai Pitagoro trejetą (*a,b,c*) sudaro natūralieji tarpusavyje pirminiai skaičiai, tai jį vadinsime *primityviuoju Pitagoro trejetu*. Vadinasi, mūsų uždavinys – rasti visus primityviuosius Pitagoro trejetus.

Pirmiausia atkreipkime dėmesį į faktą:

1 teorema. Jei (*a, b, c*) yra primityvusis Pitagoro trejetas, tai *D*(*a, b*) = 1, *D*(*a, c*) = 1 ir *D*(*b, c*) = 1.

Įrodymas. Tarkime, kad, pavyzdžiui, *D*(*a*, *b*) = *d* > 1. Tuomet ir *a* (taip pat ir a^2), ir *b* (taip pat b^2) dalijasi iš *d*. Skaičiai *a*, *b* ir *c* tenkina (1) lygybę ir sumos $a^2 + b^2$ abu dėmenys dalijasi iš d, taigi ir jų suma, t. y. skaičius c^2 (taip pat ir c), dalijasi iš d. Vadinasi, gavome, kad $D(a, b, c) = d > 1$. Tačiau tai prieštarauja sąlygai, kad (a, b, c) yra primityvusis Pitagoro trejetas. Darome išvadą, kad prielaida neteisinga – taigi $D(a, b) = 1$.

Panašiai galima įrodoma, kad $D(a, c) = 1$ ir $D(b, c) = 1$. ¶ (Šiuo ženklu ir toliau žymėsime teoremos ar kitokio teiginio įrodymo pabaigą.)

2 teorema. Primityviajame Pitagoro trejete (a, b, c):
1) skaičiai a ir b negali būti abu lyginiai;
2) skaičiai a ir b negali būti abu nelyginiai.

Įrodymas. 1) Jeigu a ir b būtų lyginiai, tai jie dalytųsi iš 2. Tuomet iš 2 dalytųsi ir c. Tačiau taip būti negali, nes Pitagoro trejetas (a, b, c) yra primityvusis.

2) Tarkime, kad a ir b abu yra nelyginiai skaičiai: $a = 2k + 1$, $b = 2m + 1$ su kuriais nors natūraliaisiais k ir m. Tuomet $c^2 = a^2 + b^2 = (2k + 1)^2 + (2m + 1)^2 = 4(k^2 + m^2 + k + m) + 2$. Vadinasi, skaičius c^2 yra lyginis (atkreipkime dėmesį, kad jis dalijasi iš 2, bet iš 4 nesidalija), tada lyginis turi būti ir pats c. Tačiau tuomet c^2 turėtų dalytis iš 4. Gavome prieštarą prielaidai.

Išvada. Primityviajame Pitagoro trejete (a, b, c) vienas iš skaičių a ir b yra lyginis, kitas – nelyginis.

Dėl apibrėžtumo susitarkime, kad a yra lyginis, o b – nelyginis skaičius. Tuomet c – taip pat nelyginis.

Norėdami rasti primityviųjų Pitagoro trejetų išraiškas toliau samprotaukime taip. Perrašykime (1) lygtį taip:

$$a^2 = (c + b)(c - b). \qquad (2)$$

Kadangi skaičiai a, $c + b$, $c - b$ yra lyginiai, tai (2) lygybės abi puses padalykime iš 4. Gausime $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{c+b}{2} \cdot \frac{c-b}{2} = m_1 \cdot m_2$. Čia $D(m_1, m_2) = 1$. Tuo nesunku įsitikinti: tarus, kad $D(m_1, m_2) = d > 1$, iš d turėtų dalytis ir b, ir c (nes $m_1 + m_2 = c$ ir $m_1 - m_2 = b$). Tačiau iš 1 teoremos $D(b, c) = 1$.

Kadangi $m_1 \cdot m_2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ ir $D(m_1, m_2) = 1$, tai egzistuoja tokie natūralieji skaičiai m ir n, $D(m,n)=1$, kad $m_1=m^2$, $m_2=n^2$. Taigi $\left(\frac{a}{2}\right)^2=m^2\cdot n^2 \Rightarrow a=2mn$. Tuomet $b=m^2-n^2$, $c=m^2+n^2$. Dar atkreipkime dėmesį į tai, kad skaičiai m ir n turi būti priešingo lyginumo, nes b ir c yra nelyginiai skaičiai.

Vadinasi, įrodėme tokį teiginį.

3 teorema. Primityvieji Pitagoro trejetai yra pavidalo

$$(2m\cdot n; m^2-n^2; m^2+n^2), \tag{3}$$

kai $m > n$ – natūralieji skaičiai, vienas iš jų lyginis, kitas – nelyginis ir $D(m,n)=1$.

Ir atvirkščiai, kiekvienas (3) pavidalo trejetas tenkina (1) lygtį:

$$(2mn)^2+(m^2-n^2)^2=(m^2+n^2)^2.$$

Pasirinkę m ir n reikšmes, tenkinančias minėtas sąlygas, pagal (3) formulę gausime primityviuosius Pitagoro trejetus. Pavyzdžiui, kai $m = 2$, $n = 1$, turėsime trejetą (4, 3, 5) , o kai $m = 5$, $n = 4$, tai (40; 9; 41).

Gautus rezultatus galima interpretuoti geometriškai – egzistuoja statusis trikampis, kurio kraštinių ilgiai išreikšti natūraliaisiais skaičiais 4, 3 ir 5, taip pat – statusis trikampis su kraštinėmis, lygiomis 40, 9 ir 41. Kaip matome iš (3) formulės, stačiųjų trikampių, kurių kraštinių ilgiai – natūralieji skaičiai, yra be galo daug. Juos vadinsime *Pitagoro trikampiais*.

1 pavyzdys. Nustatykime, kiek yra stačiųjų trikampių, kurių vienas statinis lygus 40, o kitų dviejų kraštinių ilgiai – natūralieji skaičiai. Raskime juos.

Sprendimas. Kiek yra primityviųjų Pitagoro trejetų (a, b, c) su $a = 40$ (stačiųjų trikampių, kurių vienas statinis lygus 40) galima nustatyti iš išraiškos $a=2m\cdot n$. Kadangi $40=2\cdot 20=2\cdot 5\cdot 4=2\cdot 20\cdot 1$, tai egzistuoja tik du skaičių m ir n, tenkinančių 3 teoremos sąlygas, rinkiniai $m = 5$, $n = 4$ ir $m = 20$, $n = 1$. Taigi yra du statieji trikampiai kurių vienas statinis lygus 40, o kitų dviejų kraštinių ilgiai – natūralieji skaičiai. Vieną tokį trikampį jau žinome – tai (40, 9, 41), su $m = 5$, $n = 4$. Kitą gausime iš (3) formulės, kai $m = 20$, $n = 1$: $a = 40$, $b = 20^2 - 1^2 =$ $= 399$, $c = 20^2 + 1^2 = 401$.

Ats.: 2; (40, 9, 41), (40, 399, 401).

2 pavyzdys. Raskime visus stačiuosius trikampius, kurių vienas statinis lygus 105, o kitų dviejų kraštinių ilgiai – natūralieji skaičiai.

Sprendimas. Turime rasti primityviuosius Pitagoro trejetus (a, b, c), kurių $b = 105$, t. y. reikia rasti m ir n reikšmes (tenkinančias 3 teoremos sąlygas), su kuriomis galioja lygybė $105 = m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$. Taigi svarbu žinoti skaičiaus $b = 105$ išskaidymo dviejų dauginamųjų sandauga būdus. Kadangi $105 = 35\cdot 3 == 21\cdot 5 = 15\cdot 7$, tai m ir n reikšmėms rasti išspręsime tris lygčių sistemas:

$$\begin{cases} m+n=35, \\ m-n=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=19, \\ n=16; \end{cases}$$

$$\begin{cases} m+n=21, \\ m-n=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=13, \\ n=8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} m+n=15, \\ m-n=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=11, \\ n=4. \end{cases}$$

Pagal (3) formulę apskaičiuojame atitinkamus Pitagoro primityviuosius trejetus:

1) kai $m = 19$, $n = 16$, tai (608,105, 617) ;
2) kai $m = 13$, $n = 8$, tai (208, 105, 233) ;
3) kai $m = 11$, $n = 4$, tai (88,105, 137) .

Ats.: (608,105, 617) , (208, 105, 233) , (88,105, 137).

Žinomi keli 3 teoremos įrodymo metodai. Pirmasis šią teoremą įrodė Diofantas. Jo metodas, kurį čia panagrinėsime, – geometrinis, paremtas apskritimo ir tiesės susikirtimo racionaliųjų taškų radimu. Šis įrodymas nėra sudėtingas, tačiau reikalauja kai kurių matematikos žinių.

Stačiakampėje koordinačių sistemoje xOy:

- $x^2 + y^2 = r^2$ yra apskritimo, kurio spindulys r, o centras – koordinačių pradžios taškas $O(0; 0)$, lygtis;
- $y = kx + m$ yra tiesės, kurios kampinis koeficientas $k = \operatorname{tg}\alpha$ (α – kampas tarp tiesės ir Ox ašies teigiamosios krypties), einančios per Oy ašies tašką $(0; m)$, lygtis.

3 teoremos Diofanto įrodymas. Lygties (1) abi puses padalykime iš c^2. Gauname lygtį

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1. \tag{4}$$

Vadinasi, turime surasti trupmenas $x=\frac{a}{c}$ ir $y=\frac{b}{c}$, su kuriomis galiotų (4) lygybė. Kitaip tariant, turime rasti racionaliuosius lygties $x^2+y^2=1$ sprendinius, po to šias trupmenas subendravardiklinę rastume ir skaičius *a*, *b* ir *c*, sudarančius primityviuosius Pitagoro trejetus. Tuo tikslu įrodykime vieną pagalbinį teiginį.

Lema. Tiesės $y=kx-1$ su racionaliuoju *k* ir apskritimo $x^2+y^2=1$ susikirtimo taškas (x_k, y_k),

$$x_k=\frac{2k}{k^2+1},\ \ y_k=\frac{k^2-1}{k^2+1}, \tag{5}$$

yra taškas su racionaliosiomis koordinatėmis; visi racionalieji lygties $x^2+y^2=1$ sprendiniai išreiškiami (5) formulėmis.

Įrodymas. Ieškodami apskritimo ir tiesės susikirtimo taškų išspręskime lygčių sistemą, kai $k\neq 0$ (su *k* = 0 gauname apskritimo ir tiesės susikirtimo tašką (0, –1)):

$$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ y=kx-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+(kx-1)^2=1,\\ y=kx-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(k^2+1)x-2k=0,\\ y=kx-1\end{cases}\Rightarrow$$

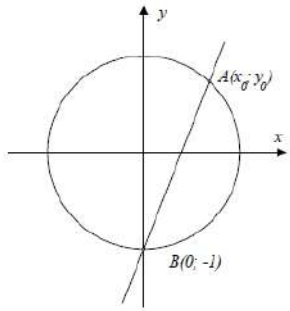
$$\Rightarrow\begin{cases}x_k=\dfrac{2k}{k^2+1},\\[2ex] y_k=\dfrac{k^2-1}{k^2+1}.\end{cases}$$

Kadangi *k* – racionalusis skaičius, tai racionalieji skaičiai yra ir trupmenos $x_k=\frac{2k}{k^2+1}$, $y_k=\frac{k^2-1}{k^2+1}$.

Dabar tegu $(x_0; y_0)$ yra kuris nors lygties $x^2+y^2=1$ racionalusis sprendinys (jo koordinatės – racionalieji skaičiai). Tam, kad tiesė $y=kx-1$ eitų per taškus $A(x_0; y_0)$ ir $B(0; -1)$ (žr. pav.), jos krypties koeficientas *k* turi būti racionalusis skaičius: $y_0=kx_0-1\Rightarrow$

$\Rightarrow k = \dfrac{y_0 + 1}{x_0} \Rightarrow k$, k– racionalusis skaičius. O tokios tiesės ir apskritimo $x^2 + y^2 = 1$ susikirtimo taškas yra (5) pavidalo. Lema įrodyta.

Tegu $k = \dfrac{m}{n}$ (m ir n tenkina 3 teoremos sąlygas). Tuomet $x_k = \dfrac{2\frac{m}{n}}{\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 1} = \dfrac{2mn}{m^2 + n^2}$



ir $y_k = \dfrac{\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 1}{\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 1} = \dfrac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$. Taigi radome, kad skaičiai $a = 2mn,\ b = m^2 - n^2,\ c = m^2 + n^2$ sudaro primityvųjį Pitagoro trejetą.

Dar vienas įdomus uždavinys, pasiekęs mus iš I amžiaus, yra Herono uždavinys.

Tarkime trikampio kraštinių ilgiai yra natūralieji skaičiai a, b ir c. Jeigu šio trikampio plotas S yra natūralusis skaičius, tai (a, b, c) vadinamas *Herono trejetu*, o pats trikampis – *Herono trikampiu*.

Kadangi Pitagoro trikampio plotas $S = mn(m^2 - n^2)$ yra sveikasis skaičius, tai kiekvienas Pitagoro trejetas yra ir Herono trejetas. Tačiau yra ir ne stačiųjų Herono trikampių. Pavyzdžiui, Herono trejetai yra (7, 15, 20), (9, 10, 17), (13, 14, 15). Šių trikampių plotai yra sveikieji skaičiai. Tuo nesunku įsitikinti pritaikius trikampio ploto skaičiavimo Herono formulę:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c).$$

Pirmojo trikampio plotas lygus 42, antrojo – 36, trečiojo – 84. Norėdami rasti visus Herono trejetus, turėtume rasti lygties

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c), \quad p = \frac{1}{2}(a+b+c). \qquad (6)$$

bendrąjį sprendinį (S, a, b, c), kurio visos komponentės – sveikieji skaičiai. (Kai ieškoma lygties sveikųjų sprendinių, sakoma, kad sprendžiama *diofantinė lygtis*.) Tačiau (6) diofantinės lygties bendrojo sprendinio formulė nežinoma. Taigi negalime užrašyti ir formulės, leidžiančios apskaičiuoti visus Herono trejetus.

Herono trejetų radimo uždavinys palengvėja, kai trikampio kraštinių ilgiai a, b ir c tenkina tam tikras sąlygas. Čia panagrinėkime atvejį, kai skaičiai a, b ir c yra aritmetinės progresijos su skirtumu d nariai, t. y. tegu $a = b - d$, $c = b + d$, $b > 1$. Apskaičiuokime trikampio su kraštinėmis $a = b - d$, b ir $c = b + d$ plotą:

$$p = \frac{1}{2}(b - d + b + b + d) = \frac{3}{2}b,$$

$$S = \sqrt{\frac{3}{2}b\left(\frac{3}{2}b - b + d\right)\left(\frac{3}{2}b - b\right)\left(\frac{3}{2}b - b - d\right)} = \frac{b}{4}\sqrt{3(b^2 - 4d^2)}.$$

Iš ploto išraiškos darome išvadą: kai b – nelyginis, tai S nėra sveikasis skaičius. Taigi prasminga tyrinėti tik lyginius skaičius b. Kai $b = 2x$, $x \in N$ (N – natūraliųjų skaičių aibė), tuomet $a = 2x - d$, $c = 2x + d$, $p = 3x$, $S = x\sqrt{3(x^2 - d^2)}$. Skaičius S bus natūralusis, jeigu $x^2 - d^2 = 3y^2$, Vadinasi, uždavinys suvedamas į diofantinės lygties

$$x^2 - 3y^2 = d^2, \quad d \in N, \qquad (7)$$

sprendimą.

Čia įdomi kintamojo y geometrinė interpretacija. Tegu r yra į trikampį su kraštinėmis $a = 2x - d$, $b = 2x$, $c = 2x + d$ įbrėžto apskritimo spindulys. Tuomet, kaip žinome, $S = pr$. Čia įrašę S ir p išraiškas, gauname: $x\sqrt{3(x^2 - d^2)} = 3xr \Rightarrow x^2 - 3r^2 = d^2$. Sugretinę su (7) lygtimi, matome, kad $y = r$, o tuomet $S = 3xy$. Ir dar – tokiame trikampyje, kai $y \in N$, tai ne tik $r \in N$, bet ir aukštinės h, nuleistos į kraštinę b, ilgis yra natūralusis skaičius, be to $h = 3y$ (įsitikinkite).

Panagrinėkime (7) diofantinę lygtį, kai $d = 1$. Lygtis

$$x^2 - 3y^2 = 1, \tag{8}$$

Skaičių teorijoje žinoma kaip Pelo (John Pell – anglų matematikas, 1611–1685) lygtis. Akivaizdus šios diofantinės lygties sprendinys $x = 2$, $y = 1$ apibrėžia Herono trikampį su kraštinėmis $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ (kuris yra ir Pitagoro trikampis). Žinoma, kad visi (8) lygties sprendiniai nusakomi rekurentinėmis formulėmis

$$x_{n+1} = 2x_n + 3y_n,\ \ y_{n+1} = y_n + 2y_n,\ \ x_1 = 2,\ \ y_1 = 1,\ \ n = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Įrašę čia $x_1 = 2$, $y_1 = 1$, gauname: $x_2 = 7$, $y_2 = 4 \Rightarrow a = 13$, $b = 14$, $c = 15$ – Herono trikampio kraštinės.

Kai $d \geq 1$, (7) diofantinės lygties sprendiniai (x; y) randami pagal formules

$$d = \frac{k}{2}(m^2 - 3n^2),\ \ y = mnk,\ \ x = \frac{k}{2}(m^2 + n^2), \tag{10}$$

k, m, n – natūralieji skaičiai.
(Žr., pavyzdžiui, В. Серпинский, О решении уравнений в целых числах, М: Наука, 1961, с. 35, 38). Naudojantis jomis randami ir kitokie Herono trikampiai (kurių kraštinių ilgiai sudaro aritmetinę progresiją su skirtumu d). Tokių trikampių kraštinių ilgiai randami pagal formules:

$$a = 2x - d = \frac{1}{2}k(m^2 + 9n^2),$$
$$b = 2x = k(m^2 + 3n^2),$$
$$c = 2x + d = \frac{3}{2}k(m^2 + n^2),$$

o plotas $S = 3xy = \frac{3}{2}k^2mn(m^2 + 3n^2)$. Čia k, m, n yra tokie natūralieji skaičiai, su kuriais a, b ir c – natūralieji. Suraskime kelis tokius Herono trikampius: kai $n = 1$, $m = k = 2$, tai $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$ $(d = 1)$, $S = 84$; kai $m = 5$, $n = k = 1$, tai $a = 17$, $b = 28$, $c = 39$ $(d = 11)$, $S = 210$; kai $m = 4$, $n = 1$, $k = 2$, tai $a = 25$, $b = 38$, $c = 51$ $(d = 13)$, $S = 456$.

Šioje temoje susipažinome su Pitagoro uždavinio sprendimu, panagrinėjome kelis Herono trikampių radimo būdus. Egzistuoja ir kitokių Herono trikampių radimo metodų, tačiau čia jų nenagrinėsime. Siūlome išspręsti šiuos uždavinius.

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Naudodamiesi (3) išraiška nustatykite kiek yra primityviųjų Pitagoro trejetų ir raskite juos, kai m ir n – natūralieji skaičiai, tenkinantys 3 teoremos sąlygas, ir $m \leq 8$.

2. Raskite visus primityviuosius Pitagoro trejetus (a, b, c), kurių $a = 84$.

3. Nustatykite, kiek yra stačiųjų trikampių, kurių vienas statinis lygus 140, o kitų dviejų kraštinių ilgiai – natūralieji skaičiai. Raskite juos.

4. Raskite visus primityviuosius Pitagoro trejetus (a, b, c), kurių $b = 35$.

5. Raskite visus stačiuosius trikampius, kurių vienas statinis lygus 165, o kitų dviejų kraštinių ilgiai – natūralieji skaičiai.

6. Raskite apskritimo $x^2 + y^2 = 1$ ir tiesės $y = \frac{5}{7}x - 1$ susikirtimo tašką.

7. Parašykite tiesės, einančios per tašką $A(0;1)$ ir tašką $B(7; 3)$, lygtį. Raskite šios tiesės ir apskritimo $x^2 + y^2 = 1$ susikirtimo tašką $C(x; y)$, $x \neq 0$. Kokį Pitagoro primityvųjį trejetą nusako taškas C?

8. Į statųjį trikampį įbrėžtas apskritimas. Jo lietimosi su trikampio įžambine taškas dalija įžambinę į 6 cm ir 8 cm ilgio atkarpas. Apskaičiuokite trikampio plotą. Ar šis trikampis yra Herono trikampis? (Atsakymą pagrįskite).

9. Ar trikampis, kurio kraštinių ilgiai yra 13, 20 ir 21, yra Herono trikampis? Apskaičiuokite šio trikampio aukštinės, nuleistos į kraštinę „21“, ilgį ir raskite dalių, į kurias šią kraštinę padalija aukštinės pagrindo taškas, ilgius.

10. Naudodamiesi Pelo lygties sprendinių rekurentinėmis formulėmis raskite keturis Herono trikampius, kurių kraštinių ilgiai sudaro aritmetinę progresiją su skirtumu $d = 1$. Apskaičiuokite jų plotus.

VI. SĄLYGINĖS TAPATYBĖS IR NELYGYBĖS

Juozas Šinkūnas
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

Įrodymo uždaviniai yra vieni iš pačių sunkiausių matematikos uždavinių. Ne išimtis ir lygybių bei nelygybių įrodymo uždaviniai.

Prisiminkime, kad lygybė

$$R_1(x, y, ...) = R_2(x, y, ...),$$

kuri galioja visoje reiškinių $R_1(x, y, ...)$, $R_2(x, y, ...)$ apibrėžimo bendroje srityje, vadinama *tapatybe*. Pavyzdžiui, lygybė

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

yra tapatybė, nes ji galioja su visomis realiųjų skaičių x ir y poromis. O lygybė

$$x^2 + y^2 = 2xy$$

nėra tapatybė.

Šioje temoje nagrinėsime tapatybių ir nelygybių įrodymo uždavinius, kuriuose kintamieji yra susieiti papildomomis sąlygomis. Tokios tapatybės vadinamos *sąlyginėmis tapatybėmis*, o nelygybės – *sąlyginėmis nelygybėmis*.

I. Bendros sąlyginių tapatybių ir sąlyginių nelygybių įrodymo uždavinių sprendimo teorijos nėra. Dažnai papildomoji sąlyga (sąlygos) pertvarkoma tol kol gaunama įrodomoji lygybė. Kartais vienas lygybės $R_1(x, y, ...) = R_2(x, y, ...)$ reiškinys, atsižvelgus į papildomąją sąlygą (sąlygas), pertvarkomas tol, kol gaunamas antrasis reiškinys.

1 pavyzdys. Įrodysime, kad $x^3 + y^3 = 1 - 3xy,$ kai $x + y = 1.$

Sprendimas. <u>1 būdas.</u> Lygybę $x + y = 1$ pakėlę kubu, gauname $(x+y)^3 = x^3 + 3xy(x+y) + y^3 = 1.$ Vadinasi $x^3 + y^3 = 1 - 3xy.$

<u>2 būdas.</u> Reiškinį $x^3 + y^3$ pertvarkome taip:
$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)((x+y)^2 - 3xy).$ Pasinaudoję sąlyga $x + y = 1,$ gauname, kad $x^3 + y^3 = 1 - 3xy.$

2 pavyzdys. Įrodysime, kad
$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}=4, \text{ jei } \frac{a-c}{b+c}+\frac{b-a}{c+a}+\frac{c-b}{a+b}=1.$$

Sprendimas. Papildomąją sąlygą pertvarkome taip:
$$\frac{a-c}{b+c}+1+\frac{b-a}{c+a}+1+\frac{c-b}{a+b}+1-3=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{a-c+b+c}{b+c}+\frac{b-a+a+c}{c+a}+\frac{c-b+b+a}{a+b}-3=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}=4.$$
Gavome įrodomąją lygybę.

3 pavyzdys. Įrodysime, kad
$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=0, \text{ jei } \frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1.$$

Sprendimas. Kadangi $x+y\neq 0,$ $x+z\neq 0$ ir $y+z\neq 0,$ tai $x+y+z\neq 0.$ Papildomąją sąlygą padauginę iš $x+y+z$, gauname:
$$\frac{x(x+y+z)}{y+z}+\frac{y(x+y+z)}{z+x}+\frac{z(x+y+z)}{x+y}=x+y+z\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{x^2}{y+z}+x+\frac{y^2}{z+x}+y+\frac{z^2}{x+y}+z=x+y+z\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=0.$$

4 pavyzdys. Įrodysime, kad $a^2+b^2\geq\frac{1}{80}$, jei $4a+8b=1.$

Sprendimas. Iš sąlygos $4a+8b=1$ išsireiškę a, gauname:
$$a^2+b^2=\left(\frac{1-8b}{4}\right)^2+b^2=\frac{1-16b+64b^2}{16}+b^2=$$
$$=\frac{80b^2-16b+1}{16}=\frac{80\left(b^2-\frac{16}{80}b\right)+1}{16}=$$

$$=\frac{80\left(b-\frac{1}{10}\right)^2-\frac{80}{100}+1}{16}=\frac{80\left(b-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{5}}{16}\geq\frac{\frac{1}{5}}{16}=\frac{1}{80}.$$

Lygybė galima tik tada, kai $b=\frac{1}{10}$ ir $a=\frac{1-\frac{8}{10}}{4}=\frac{1}{20}$.

5 pavyzdys. Įrodysime, kad $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, jeigu $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ir $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$.

Sprendimas. Tegul $\frac{x}{a}=u$, $\frac{y}{b}=v$, $\frac{z}{c}=w$. Tada $u+v+w=1$ ir $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=0$, arba $uv+uw+vw=0$. Lygybę $u+v+w=1$ pakėlę kvadratu, gauname:

$$1=(u+v+w)^2=u^2+v^2+w^2+2(uv+uw+vw)=u^2+v^2+w^2.$$

Vadinasi, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

6 pavyzdys. Realieji skaičiai x, y ir z tenkina lygybes $x+y+z=5$, $yz+zx+xy=8$. Įrodysime, kad $1\leq x\leq\frac{7}{3}$, $1\leq y\leq\frac{7}{3}$, $1\leq z\leq\frac{7}{3}$.

Sprendimas. Papildomąsias sąlygas pertvarkome taip:

$$\begin{cases} y+z=5-x, \\ yz+x(y+z)=8 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y+z=5-x \\ yz=8-x(5-x) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y+z=5-x, \\ yz=8-5x+x^2. \end{cases}$$

Taigi realieji skaičiai y ir z yra kvadratinės lygties

$$t^2-(5-x)t+8-5x+x^2=0$$

sprendiniai, kai $D=(5-x)^2-4\cdot1\cdot(8-5x+x^2)=-3x^2+10x-7\geq0$; taigi, kai $3x^2-10x+7\leq0$. Šios nelygybės sprendiniai sudaro intervalą $\left[1;\frac{7}{3}\right]$.

Analogiškai įrodoma, kad $y \in \left[1; \frac{7}{3}\right]$ ir $z \in \left[1; \frac{7}{3}\right]$.

II. Įrodant sąlygines nelygybes, kartais galima pasinaudoti šiomis nelygybėmis:

1) $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$;

2) $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}(x+y+z)^2$.

Jos gaunamos taip:

1) Akivaizdu, kad $(a-b)^2 \geq 0$, t. y. $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Šią nelygybę sudėję su tapatybe $a^2 + b^2 = a^2 + b^2$, gauname: $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$, t. y. $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$. Lygybė galima tik tada, kai $a = b$.

2) Nelygybes $x^2 + y^2 \geq 2xy$, $x^2 + z^2 \geq 2xz$, $y^2 + z^2 \geq 2yz$ sudėję su tapatybe $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$, gauname:

$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x+y+z)^2, \text{ t. y. } x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}(x+y+z)^2.$$

Lygybė galima tik tada, kai $x = y = z$.

7 pavyzdys. Įrodysime, kad $a + b + c \geq \frac{1}{3}$, jei $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$.

Sprendimas. Tegul $\sqrt{a} = x$, $\sqrt{b} = y$, $\sqrt{c} = z$. Tada $a = x^2$, $b = y^2$, $c = z^2$. Kadangi $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}(x+y+z)^2$, tai $a + b + c \geq$ $\geq \frac{1}{3}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) = \frac{1}{3}$. Lygybė galima tik tada, kai $a = b = c = \frac{1}{9}$.

8 pavyzdys. Įrodysime, kad

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3},$$

jeigu $a + b + c = 1$ ir $c > 0$.

Sprendimas. Pasinaudoję nelygybe $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}(x+y+z)^2$, gauname:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c}\right)^2 =$$

$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}\right)^2 =$$

$$=\frac{1}{3}\left(4+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)^2 =$$

$$=\frac{1}{3}\left(4+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\right)^2 \geq$$

$$\geq \frac{1}{3}\left(4+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}\right)^2 =$$

$$=\frac{1}{3}(4+2+2+2)^2=\frac{100}{3}.$$

Lygybė galima tik tada, kai $a=b=c=\frac{1}{3}$.

III. Daug *įdomių u*ždavinių galima išspręsti taikant sąryšį tarp neneigiamų skaičių aritmetinio ir geometrinio vidurkių. Priminsime, kad neneigiamų skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aritmetinis vidurkis $A_n=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ yra ne mažesnis už tų skaičių geometrinį vidurkį $G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$, t. y. $A_n \geq G_n$; lygybė galima tik tada, kai $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Plačiau apie vidurkius ir jų taikymą aiškinama [1] ir [2] knygelėse.

9 pavyzdys. Įrodysime, kad $(y^3+z)(z^3+x)(x^3+y) \geq 125xyz$, jeigu $x \geq 2$, $y \geq 2$, $z \geq 2$.

Įrodymas. Kadangi

$$y^3+z=y\cdot y^2+z \geq 4y+z=y+y+y+y+z \geq 5\sqrt[5]{y^4\cdot z},$$

$$z^3 + x \ge 5\sqrt[5]{z^4 \cdot x},$$

$$x^3 + y \ge 5\sqrt[5]{x^4 \cdot y},$$

tai

$$(y^3 + z)(z^3 + x)(x^3 + z) \ge 125\sqrt[5]{x^5 y^5 z^5} = 125xyz.$$

Lygybė galima tik tada, kai $x = y = z = 2.$

10 pavyzdys. Įrodysime, kad $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \ge 64,$ jeigu $x + y + z = 1$ ir $x > 0,\ \ y > 0,\ \ z > 0.$

Sprendimas. Atsižvelgę į sąlygą $x + y + z = 1,$ kiekvieną nelygybės kairiosios pusės dauginamąjį pertvarkome taip:

$$1+\frac{1}{x} = 1+\frac{x+y+z}{x} = 1+1+\frac{y+z}{x} \ge 2+\frac{2\sqrt{yz}}{x} = 2\left(1+\sqrt{\frac{yz}{x^2}}\right) \ge 4\sqrt[4]{\frac{yz}{x^2}}$$

(du kartus pritaikėme aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę). Lygybė galima tik tada, kai $y = z.$

Analogiškai gauname, kad $1+\frac{1}{y} \ge 4\sqrt[4]{\frac{xz}{y^2}},\ \ 1+\frac{1}{z} \ge 4\sqrt[4]{\frac{xy}{z^2}}.$ Lygybės galimos tik tada, kai $x = y = z.$

Sudauginę tris gautąsias nelygybes, turėsime:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \ge 64\sqrt[4]{\frac{yz}{x^2}\cdot\frac{xz}{y^2}\cdot\frac{xy}{z^2}} = 64.$$

Lygybė galima tik tada, kai $x = y = z = \frac{1}{3}.$

11 pavyzdys. Raskime mažiausią reiškinio

$$S = a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

reikšmę, kai $a + b + c \le \frac{3}{2}$ ir $c > 0.$

Sprendimas. Kadangi $S \ge 6\sqrt[6]{a \cdot b \cdot c \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} = 6,$ tai $S_{\text{maž.}} = 6,$ kai

$a=b=c=\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$, t. y. $a=b=c=1$. Tačiau tada $a+b+c=3>\frac{3}{2}$.
Tikėtina, kad šis reiškinys mažiausią reikšmę įgyja, kai $a=b=c=\frac{1}{2}$.
Todėl ieškosime tokio skaičiaus α, kad galiotų lygybė $a=b=c=$ $=\frac{1}{\alpha a}=\frac{1}{\alpha b}=\frac{1}{\alpha c}$. Kai $a=b=c=\frac{1}{2}$, turime: $\frac{2}{\alpha}=\frac{1}{2}$. Iš čia $\alpha=4$. Taigi

$$S=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=$$
$$=\left(a+b+c+\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{4c}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq$$
$$\geq 6\sqrt[6]{a\cdot b\cdot c\cdot\frac{1}{4a}\cdot\frac{1}{4b}\cdot\frac{1}{4c}}+\frac{3}{4}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{a\cdot b\cdot c}}=3+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\geq$$
$$\geq 3+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{\frac{a+b+c}{3}}\geq 3+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}}=3+\frac{9}{2}=\frac{15}{2}$$

(pritaikėme nelygybę tarp šešių teigiamų skaičių aritmetinio ir geometrinio vidurkių ir nelygybes tarp trijų teigiamų skaičių aritmetinio ir geometrinio vidurkių). Taigi $S_{\text{maž.}}=\frac{15}{2}$.

12 pavyzdys. Raskime reiškinio $S=\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}$ didžiausią reikšmę, kai

1) $a+b+c=1$; 2) $a+b+c=3$.

Sprendimas. 1) Kadangi $\sqrt{2a+1}=\sqrt{(2a+1)\cdot 1}\leq\frac{2a+1+1}{2}=a+1$, $\sqrt{2b+1}\leq b+1$, $\sqrt{2c+1}\leq c+1$, tai

$$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}\leq a+b+c+3.$$

Lygybė galima tik tada, kai $2a+1=1$, $2b+1=1$ ir $2c+1=1$, t. y. kai $a=b=c=0$. Tačiau $0+0+0\neq 1$. Tikėtina, kad nagrinėjamas reiškinys įgys didžiausią reikšmę, kai $a=b=c=\frac{1}{3}$, t. y., kai $2a+1=2\cdot\frac{1}{3}+1=\frac{5}{3}$.
Todėl reiškinį pertvarkome taip:

$$S=\sqrt{\frac{3}{5}}\left(\sqrt{(2a+1)\cdot\frac{5}{3}}+\sqrt{(2b+1)\cdot\frac{5}{3}}+\sqrt{(2c+1)\cdot\frac{5}{3}}\right)\le$$

$$\le\sqrt{\frac{3}{5}}\left(\frac{2a+1+\frac{5}{3}}{2}+\frac{2b+1+\frac{5}{3}}{2}+\frac{2c+1+\frac{5}{3}}{2}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{3}{5}}(a+b+c+4)=\sqrt{\frac{3}{5}}(1+4)=\sqrt{15}.$$

Lygybė galima tik tada, kai $a=b=c=\frac{1}{3}$. Taigi $S_{\text{didž.}}=\sqrt{15}$.

2) Turime:

$$S=\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{(2a+1)\cdot 3}+\sqrt{(2b+1)\cdot 3}+\sqrt{(2c+1)\cdot 3}\right)\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{2a+1+3}{2}+\frac{2b+1+3}{2}+\frac{2c+1+3}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}(a+b+c+6)=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 9=3\sqrt{3}.\ S_{\text{didž.}}=3\sqrt{3},$$

kai $a=b=c=1$.

UŽDAVINIAI SAVARANKIŠKAM DARBUI

Spręsdami juos, esant reikalui, remkitės pateiktais nurodymais. Sprendimų pateikti nereikia!

Įrodykite tapatybes ir nelygybes:

1. $(5x-3y+4z)(5x-3y-4z)=(3x-5y)^2$, jei $x^2=y^2+z^2$;

2. $\left(x^2+y^2\right)\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}\right)=\frac{6a^2-5a+1}{a^3}$, jei $x+y=1$, $xy=a$;

3. $\dfrac{a}{b^3-1}-\dfrac{b}{a^3-1}=\dfrac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$, jei $a+b=1$;

4. $a>b$, jei $1\le a\le b+c<a+1$ ir $b\le c$;

5. $a^3+b^3\ge a^2b+ab^2$, jei $a+b\ge 0$;

6. $(2ap+bc)(2bp+ac)(2cp+ab)=(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2$, jei a, b, c – trikampio kraštinių ilgiai, o $2p$ – trikampio perimetras;

7. $(a^3+b^3-a^3b^3)^3+27a^6b^6=0$, jei $a+b=ab$;

8. $x^6+3x^2y^2+y^6=1$, jei $x^2+y^2=1$;

9. $a+b\le 4$, jei $a^2+b^2\le 4$;

10. $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}>c^{\frac{2}{3}}$, jei $a+b=c$ ir $b>0$;

11. $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\ge 9$, jei $x+y=1$ ir $x>0$, $y>0$;

12. $(1-a)(1-b)\ge\dfrac{9}{16}$, jei $a\le 1$, $b\le 1$ ir $a+b\ge\dfrac{1}{2}$;

13. $a+b+c+ab+ac+bc\ge 6$, jei $abc=1$ ir

14. $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd\ge 10$, jei $abcd=1$ ir $c>0$, $d>0$;

15. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge 9$, jei $a+b+c=1$ ir

16. a) $xyz\le\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ ir

b) $\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}\geq 9$, jei $xy+xz+yz=1$ ir $x>0,\ \ y>0,\ \ z>0$;

17. $\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\left(\frac{1}{a_3}-1\right)\left(\frac{1}{a_4}-1\right)\left(\frac{1}{a_5}-1\right)\geq 1024$,
jei $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1$ ir $a_i>0,\ \ i=1,2,\ldots,5$;

18. $x^2y^2z^2t\leq\frac{1}{512}$, jei $2x+xy+z+yzt=1$ ir $x\geq 0,\ \ y\geq 0,\ \ z\geq 0,$
$t\geq 0$;

19. $\frac{x^2+3xy}{x+y}+\frac{y^2+3yz}{y+z}+\frac{z^2+3xy}{z+x}\leq 2$, jei $x+y+z=1$ ir $x>0,$
$y>0,\ \ z>0$;

20. $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\geq\sqrt{3}$, jei $x^2+y^2+z^2=1$ ir $x>0,\ \ y>0,\ \ z>0$;

21. $a\cdot b+\frac{1}{a\cdot b}\geq\frac{17}{4}$, jei $a+b\leq 1$ ir $b>0$;

22. $\sqrt[3]{a(b+2c)}+\sqrt[3]{b(c+2a)}+\sqrt[3]{c(a+2b)}\leq 3\sqrt[3]{3}$, jei $a+b+c=3$ ir
$a\geq 0,\ \ b\geq 0,\ \ c\geq 0$;

23. $\frac{a^3}{b(2c+a)}+\frac{b^3}{c(2a+b)}+\frac{c^3}{a(2b+c)}\geq 1$, jei $a+b+c=3$ ir

24. $\frac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^3}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^3}{(c+a)(c+b)}\geq\frac{3}{4}$, jei $a+b+c=3$
ir $a>0,\ \ b>0,\ \ c>0$.

Nurodymai

5. Grupuodami ir pasinaudoję sąlyga $a+b\geq 0,$ įrodykite, kad $a^3+b^3-a^2b-ab^2\geq 0;$ lygybė galima tik tada, kai $a=\pm b$;

6. Įrodykite, kad $2ap+bc=(a+b)(a+c),\ \ 2bp+ac=\ldots$ ir t. t.

9. Naudokitės prieštaros metodu.

10. Lygybę $c^{\frac{1}{3}}\cdot c^{\frac{2}{3}}=a+b$ padalinkite iš $c^{\frac{1}{3}}$ ir remkitės nelygybėmis $c>a$ ir $c>b.$

11. $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=\left(1+\frac{x+y}{x}\right)\left(1+\frac{x+y}{y}\right)=\left(2+\frac{y}{x}\right)\left(2+\frac{x}{y}\right).$

Sudauginkite ir pasinaudokite nelygybe $a+b\geq 2\sqrt{ab}.$

12. Skaičiams $1-a$ ir $1-b$ taikykite vidurkių nelygybę.

13–14. Remkitės vidurkių nelygybėmis.

15. Pastebėję, kad $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$ remkitės vidurkių nelygybėmis.

16. a) Skaičiams *xy*, *xz* ir *yz* taikykite vidurkių nelygybę;

b) Skaičiams $\frac{1}{xy},\ \frac{1}{xz},\ \frac{1}{yz},$ taikykite vidurkių nelygybę ir remkitės a) nelygybe.

17. Nelygybės kairiosios pusės daugiklius pertvarkyti taip:

$$\frac{1}{a_1}-1=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5-a_1}{a_1}=\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_1}+\frac{a_4}{a_1}+\frac{a_5}{a_1},$$

$\dfrac{1}{a_2} - 1 = \ldots$ ir t. t.; jiems pritaikę nelygybes tarp aritmetinio ir geometrinio vidurkių, gautąsias nelygybes sudauginkite.

18. Skaičiams $2x$, xy, z ir yzt taikykite vidurkių nelygybę.

19. Pastebėję, kad $x^2 + y^2 \geq 2xy$ ir $(x+y)^2 \geq 4xy$, nelygybės kairiosios pusės kiekvieną dėmenį pertvarkykite taip:

$$\frac{x^2+3xy}{x+y} = \frac{x^2+xy+2xy}{x+y} = x + \frac{2xy}{x+y} \leq x + \frac{x+y}{2},$$

$$\frac{y^2+3yz}{y+z} \leq y + \frac{y+z}{2},$$

$$\frac{z^2+3xy}{z+x} \leq z + \frac{z+x}{2}$$

ir nelygybes sudėkite.

20. Tegul $S = \dfrac{xy}{z} + \dfrac{yz}{x} + \dfrac{zx}{y}$. Tada

$$S^2 = \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + 2(x^2+y^2+z^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{z^2x^2}{y^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{y^2z^2}{x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{x^2y^2}{z^2}\right) + 2.$$

Taikykite vidurkių nelygybes.

21. Reiškinį $ab + \dfrac{1}{ab}$ pertvarkykite taip:

$ab + \dfrac{1}{ab} = \left(ab + \dfrac{1}{16ab}\right) + \dfrac{15}{16ab}$ ir taikykite vidurkių nelygybes.

22. Kairiosios nelygybės pusės kiekvieną narį pertvarkykite taip: $\sqrt[3]{a(b+2c)} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{9}} \cdot \sqrt[3]{3a \cdot (b+c) \cdot 3}$, ... ir taikykite vidurkių nelygybes.

23. Reiškiniams $\dfrac{9a^3}{b(2c+a)}+3b+(2c+a)$, $\dfrac{9b^3}{c(2a+b)}+3c+(2a+b)$, $\dfrac{9c^3}{a(2b+c)}+3a+(2b+c)$ taikykite sąryšius tarp vidurkių ir gautąsias nelygybes sudėkite.

24. Reiškiniams

$\dfrac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{a+b}{8}+\dfrac{a+c}{8}$, $\dfrac{b^3}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{b+c}{8}+\dfrac{b+a}{8}$, ir $\dfrac{c^3}{(c+a)(c+b)}+\dfrac{c+a}{8}+\dfrac{c+b}{8}$

taikykite sąryšius tarp vidurkių ir gautąsias nelygybes sudėkite.

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Įrodykite, kad $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{19}{10}$, jeigu $a+b+c=7$ ir $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=\dfrac{7}{10}$.

2. Įrodykite, kad $a^2+4b^2\geq\dfrac{1}{5}$, jei $a+4b=1$.

3. Realieji skaičiai x, y ir z tenkina lygybes $x+y+z=xyz$, $x^2=yz$, $x\cdot y\cdot z\neq 0$. Įrodykite, kad $x^2\geq 3$.

4. Įrodykite, kad $a^4+b^4+c^4=\dfrac{1}{2}$, jeigu $a+b+c=0$ ir $a^2+b^2+c^2=1$.

5. Įrodykite, kad $a^4+b^4\geq\dfrac{1}{8}$, jeigu $a+b\geq 1$.

6. Įrodykite, kad $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$, jei $a+b=1$ ir $b>0$.

7. Įrodykite, kad $(x+2y)(y+2z)(z+2x) \geq 27$, jeigu $xyz=1$ ir $x>0$, $y>0$, $z>0$.

8. Įrodykite, kad $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right) \geq 8$, jei $x+y+z=1$ ir $x>0$, $y>0$, $z>0$.

9. Raskite mažiausią reiškinio $x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ reikšmę, kai $x+y+z \leq \frac{3}{4}$ ir $x>0$, $y>0$, $z>0$.

10. Raskite reiškinio $\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1}$ didžiausią reikšmę, jeigu $x+y+z=1$.

Literatūra. 1. V. Vitkus. Vidurkiai. Jaunajam matematikui 3. Danieliaus leidykla, Vilnius, 2002, 25–31, 94–98.

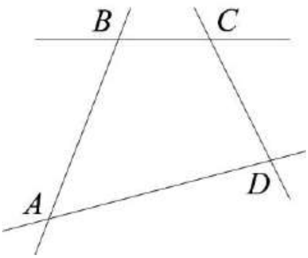
2. J. Šinkūnas. Vidurkiai ir jų taikymai. Jaunajam matematikui 8. Danieliaus leidykla, Vilnius, 2007, 9–19, 94–99.

VII. KETURKAMPIAI

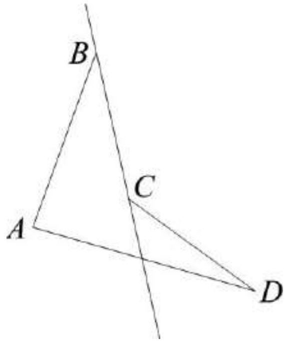
Edmundas Mazėtis
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

Matematikos pamokose nagrinėjote kai kuriuos keturkampius – lygiagretainius ir jų atskirus atvejus stačiakampius, rombus, kvadratus, o taip pat trapecijas. Atlikdami šią užduotį, Jūs ne tik pagilinsite žinias apie minėtus keturkampius, bet sužinosite daugiau įdomių savybių, kuriomis pasižymi bet kurie keturkampiai.

Keturkampis vadinamas *iškiliuoju*, jei jis yra vienoje bet kurios tiesės, kuriai priklauso keturkampio kraštinė, pusėje. Pvz., 1 a) paveiksle nubrėžtas keturkampis yra iškilusis, o 1 b) – ne, nes jo viršūnės A ir D yra skirtingose tiesės BC pusėse. Šiame darbe nagrinėsime tik iškiliuosius keturkampius.

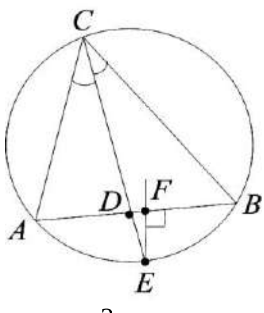


1a pav.



1 b pav.

1. Kaip žinome, apie keturkampį $ABCD$ galima apibrėžti apskritimą tada ir tik tada, kai priešingųjų jo kampų sumos yra lygios: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$. Iš šio teiginio seka, kad a) apie lygiagretainį galima apibrėžti apskritimą tada ir tik tada, kai jis yra stačiakampis; b) apie trapeciją galima apibrėžti apskritimą tada ir tik tada, kai ji lygiašonė.



2 pav.

1 pavyzdys. Trikampio ABC pusiaukampinė

CD kerta apibrėžtą apie jį apskritimą taške *E* (2 pav.), kuris yra lanko *AB* vidurio taškas. Jei taškas *F* yra atkarpos *AB* vidurys, tai tiesės *EF* ir *AB* yra statmenos. Taigi jei taške *E* kertasi trikampio *ABC* pusiaukampinė *CD* ir kraštinės *AB* vidurio statmuo, tai taškai *A*, *B*, *C* ir *E* yra viename apskritime.

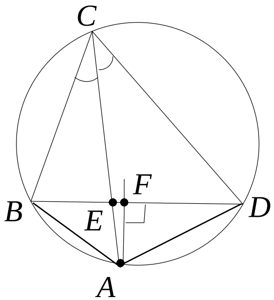
2 pavyzdys. Iškiliojo keturkampio *ABCD* įstrižainės *AC* ir *BD* susikerta taške *E*, kraštinių *AB* ir *AD* ilgiai vienodi, o įstrižainė *AC* yra kampo *C* pusiaukampinė. Rasime kampą *CDB*, jei $\angle BAD = 140^\circ$, $\angle BEA = 110^\circ$.

Apibrėžkime apie trikampį *BCD* apskritimą (3 pav.) ir nuleiskime iš taško *A* statmenį *AF* į įstrižainę *BD*. Iš stačiųjų trikampių *ABF* ir *ADF* lygumo gauname, kad taškas *F* yra įstrižainės *BD* vidurio taškas. Taigi taške *A* kertasi trikampio *BCD* kampo *C* pusiaukampinė ir kraštinės *BD* vidurio statmuo, t. y. taškas *A* yra apie trikampį *BCD* apibrėžtame apskritime. Pagal įbrėžtinio keturkampio savybę

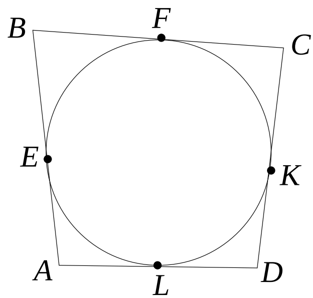
$$\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD = 40^\circ, \ \angle ABD = \angle ACD = \frac{1}{2}\angle BCD = 20^\circ,$$

$$\angle CDB = \angle CAB = \angle EAB = 180^\circ - \angle ABD - \angle BEA =$$

$$= 180^\circ - 20^\circ - 110^\circ = 50^\circ.$$



3 pav.



4 pav.

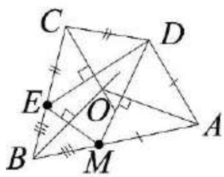
2. Sakykime, kad keturkampis *ABCD* yra įbrėžtas į apskritimą, t. y. jo kraštinės *AB*, *BC*, *CD* ir *DA* liečia apskritimą atitinkamai taškuose *E*, *F*, *K* ir *L* (4 pav.). Pagal apskritimo liestinių, nubrėžtų iš vieno taško, savybę teisingos lygybės $AE = AL$, $BE = BF$, $CF = CK$, $DK = DL$. Todėl

$$AB + CD = (AE + EB) + (CK + KD) = AL + BF + CF + DL =$$

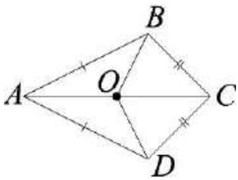
$$= (AL + LD) + (BF + CF) = AD + BC,$$

t. y. apibrėžto apie apskritimą keturkampio priešintųjų kraštinių sumos yra lygios.

Įrodysime atvirkščią teiginį. Sakykime, kad keturkampio *ABCD* kraštinėms teisinga lygybė $AB + CD = AD + BC$. Iš čia $AB - AD = BC - CD$. Tarkime, kad $AB > AD$, tuomet $BC > CD$. Taigi atkarpoje *AB* yra taškas *M* toks, kad $AM = AD$, o atkarpoje *BC* – taškas *E* toks, kad $CE = CD$ (5 pav.). Iš lygybės $AB + CD = AD + BC$ seka, kad $BM = BE$. Nagrinėjame tris lygiašonius trikampius *AMD*, *BME* ir *CED*. Jų aukštines, nubrėžtos į pagrindus *DM*, *ME* ir *ED*, yra trikampių pusiaukampinės ir pusiaukraštinės, t. y. jos yra trikampio *DEM* kraštinių vidurio statmenys. Šios tiesės susikerta taške *O*, kuris yra apie trikampį *DEM* apibrėžto apskritimo centras, o kadangi tiesės *AO*, *BO*, *CO* yra kampų *A*, *B* ir *C* pusiaukampinės, tai taškas *O* yra vienodai nutolęs nuo tiesių *AB* ir *AD*, nuo tiesių *BA* ir *BC* ir nuo tiesių *CB* ir *CD*, t. y. vienodai nutolęs nuo keturkampio *ABCD* kraštinių. Taigi taškas *O* yra į keturkampį *ABCD* įbrėžto apskritimo centras.



5 pav.



6 pav.

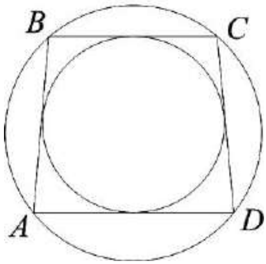
Jei $AB = AD$, tai ir $BC = CD$ (6 pav.). Tuomet trikampiai *ABC* ir *ADC* yra lygūs, todėl tiesė *AC* yra keturkampio kampų *A* ir C pusiaukampinė ir keturkampio *ABCD* simetrijos ašis. Jei kampo *B* pusiaukampinė tiesę *AC* kerta taške *O*, tai dėka simetrijos tiesės *AC* atžvilgiu tiesė *OD* yra kampo *D* pusiaukampinė. Taigi visų keturkampio kampų pusiaukampinės susikerta viename taške *O*, kuris yra į keturkampį įbrėžto apskritimo centras.

Taigi įrodėme teiginį: *į keturkampį galima įbrėžti apskritimą tada ir tik tada, kai jo priešintųjų kraštinių sumos yra vienodos*.

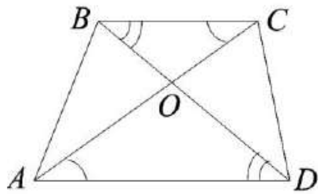
3 pavyzdys. Rasime būtinas ir pakankamas sąlygas, kad apie trapeciją būtų galima apibrėžti apskritimą, ir kad į ją būtų galima įbrėžti apskritimą.

Sakykime, kad apie trapeciją *ABCD* galima apibrėžti apskritimą (7 pav.). Tuomet $\angle A + \angle C = 180^\circ$. Bet $\angle A + \angle B = 180^\circ$, taigi $\angle B = \angle C$, t. y. trapecija *ABCD* – lygiašonė. Kadangi į trapeciją *ABCD* galima įbrėžti apskritimą, tai $AB + CD = AD + BC$. Kadangi $AB = CD$, o trapecijos pagrindų suma $AB + BC$ yra du kartus ilgesnė už jos vidurinę liniją, tai trapecijos šoninė kraštinė yra lygi jos vidurinei linijai. Atvirkščiai, jei trapecija *ABCD* lygiašonė, tai $\angle A + \angle B = \angle A + \angle C = 180^\circ$, t. y. apie ją galima apibrėžti apskritimą. Jei lygiašonės trapecijos šoninė kraštinė lygi vidurinei linijai, tai $AB = \frac{1}{2}(AD + BC)$, t. y. $2AB = AD + BC$, $AB + CD = AD + BC$, todėl į trapeciją galima įbrėžti apskritimą.

Taigi įrodėme, kad apie trapeciją galima apibrėžti apskritimą ir į ją galima įbrėžti apskritimą tada ir tik tada, kai ji lygiašonė, o jos šoninė kraštinė lygi vidurinei linijai.



7 pav.

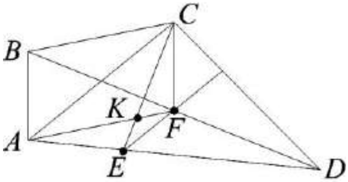


8 pav.

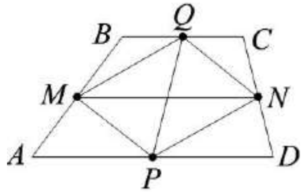
3. Trapecijos *ABCD* $(AD \parallel BC)$ įstrižainės *AC* ir *BD* kertasi taške *O* (8 pav.). Trikampiai *AOD* ir *COB* yra panašieji, todėl $\frac{AO}{OC} = \frac{DO}{OB}$, arba $AO \cdot OB = DO \cdot OC$. Kadangi $\angle AOB = \angle COD$, tai $\frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin \angle AOB = \frac{1}{2} DO \cdot OC \cdot \sin \angle COD$, t. y.trikampių *AOB* ir *COD* plotai lygūs.

4 pavyzdys. Tiesė, lygiagreti su keturkampio *ABCD* įstrižaine *AC* ir einanti per įstrižainės *BD* vidurio tašką, kerta keturkampio kraštinę *AD* taške *E*. Įrodysime, kad tiesė *CE* dalija keturkampio *ABCD* plotą pusiau.

Sakykime, kad taškas F yra įstrižainės BD vidurio taškas (9 pav.). Kadangi trikampių BCF ir CFD plotai lygūs, trikampių ABF ir ADF plotai taip pat lygūs, tai keturkampio $ABCF$ plotas lygus pusei keturkampio $ABCD$ ploto. Kadangi tiesės AC ir EF lygiagrečios, tai keturkampis $ACFE$ – trapecija, jos įstrižainės AF ir CE kertasi taške K ir kaip jau įrodėme trikampių AKE ir CKF plotai yra lygūs. Keturkampis $ABCK$ yra ir keturkampio $ABCE$, ir keturkampio $ABCF$ dalis, o trikampių CKF ir AKE plotai lygūs, tai lygūs ir keturkampių $ABCE$ ir $ABCF$ plotai, t. y. keturkampio $ABCE$ plotas lygus pusei duotojo keturkampio ploto.



9 pav.



10 pav.

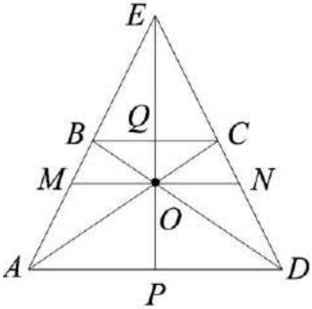
4. Trapecijos $ABCD$ $(AD \| BC)$ šoninių kraštinių AB ir CD vidurio taškus M ir N jungianti atkarpa yra vadinama trapecijos viduriniąja linija, kaip žinome, ji yra lygiagreti su trapecijos pagrindais ir lygi pagrindų sumos pusei. Ši vidurinės linijos savybė yra taikoma daugelio uždavinių sprendime. Yra ir kita rečiau sutinkama ir taikoma trapecijos vidurinė linija – atkarpa, jungianti pagrindų AD ir BC vidurio taškus P ir Q (10 pav.). Atkarpa PQ yra vadinama trapecijos antrąja vidurine linija. Kadangi atkarpos MP ir NQ yra trikampių ABD ir BCD vidurio linijos, tai $MP \| NQ \| BD,$ ir $MP = NQ = \frac{1}{2} BD.$ Taigi keturkampis $MQNP$ yra lygiagretainis, todėl trapecijos vidurio linijos yra jo įstrižainės, jos susikirtimo taške dalijamos pusiau. Trapecijos vidurinės linijos yra statmenos tada ir tik tada, kai keturkampis $MQNP$ yra rombas, t. y. $MP = PN,$ arba $AC = BD,$ o trapecija, kurios įstrižainės lygios, yra lygiašonė. Trapeci-jos vidurinės linijos yra lygios tada ir tik tada, kai jos įstrižainės statmenos, nes lygiagretainio $MPNQ$ įstrižainės lygios tada ir tik tada, kai jis stačiakampis.

5 pavyzdys. Įrodysime, kad trapecijos $ABCD$ įstrižainių sankirtos taškas O ir taškas E, kuriame susikerta šoninių kraštinių AB ir CD tęsiniai, yra tiesėje, kuriai priklauso trapecijos antroji vidurinė linija.

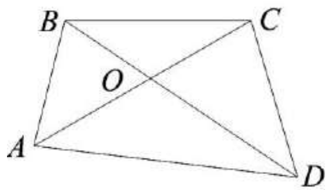
Per trapecijos *ABCD* šoninių kraštinių *AB* ir *CD* ir įstrižainių *AC* ir *BD* sankirtos taškus *E* ir *O* atitinkamai nubrėžiame tiesę, kuri trapecijos pagrindą *AD* kerta taške *P*, o pagrindą *BC* – taške *Q* (11 pav.). Per tašką *O* nubrėžkime tiesę, lygiagrečią su trapecijos pagrindais, kuri šonines kraštines *AB* ir *CD* kerta taškuose *M* ir *N*. Iš trikampių *BMO* ir *BAD*, o taip pat iš trikampių *AOM* ir *ACB* panašumo turime $\frac{MO}{AD}=\frac{BM}{AB}$, $\frac{MO}{BC}=\frac{AM}{AB}$. Sudėję šias lygybes gauname

$$MO\left(\frac{1}{AD}+\frac{1}{BC}\right)=\frac{BM+AM}{AB}, \text{ arba } MO\frac{AB+AD}{AD\cdot BC}=\frac{AB}{AB}=1,$$

t. y. $MO=\frac{AD\cdot BC}{AB+AD}$. Analogiškai randame (atlikite tai savarankiškai), kad $NO=\frac{AD\cdot BC}{AB+AD}$, t. y. $MO=NO$. Iš trikampių *APE* ir *MOE* panašumo gauname $\frac{AP}{MO}=\frac{AE}{ME}$, o iš trikampių *DEP* ir *NOE* panašumo – $\frac{DP}{NO}=\frac{DE}{NE}$. Iš trikampių *ADE* ir *MNE* panašumo turime $\frac{AE}{ME}=\frac{DE}{NE}$. Todėl $\frac{AP}{MO}=\frac{DP}{NO}$, ir iš $MO=NO$ seka $AP=DP$, t. y. taškas *P* yra pagrindo *AD* vidurio taškas. Analogiškai įrodoma, kad taškas *Q* yra pagrindo *BC* vidurio taškas.



11 pav.



12 pav.

Sakykime, kad keturkampio *ABCD* įstrižainės *AC* ir *BD* kertasi taške *O* (12 pav.). Tuomet keturkampio plotas lygus trikampių *AOB, BOC, COD* ir *DOA* plotų sumai. Pažymėkime $\angle AOB = \angle COD = \alpha,$ tuomet $\angle BOC = \angle AOD = 180^\circ - \alpha.$ Keturkampio *ABCD* plotui S turime:

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} =$$

$$= \frac{1}{2} AO \cdot OB \sin\alpha + \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin(180^\circ - \alpha) + \frac{1}{2} CO \cdot OD \sin\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2} DO \cdot OA \sin(180^\circ - \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}(AO \cdot OB + BO \cdot OC + CO \cdot OD + DO \cdot OA)\sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}((AO \cdot OB + OB \cdot OC) + (CO \cdot OD + OD \cdot OA))\sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}(OB(OA + OC) + OD(OC + OA))\sin\alpha =$$

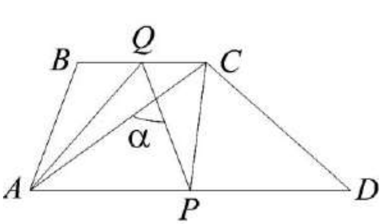
$$= \frac{1}{2}(OA + OC)(OB + OD)\sin\alpha = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin\alpha.$$

Taigi įrodėme, kad bet kurio keturkampio plotas lygus jo įstrižainių sandaugos pusei, padaugintai iš kampo tarp jų sinuso.

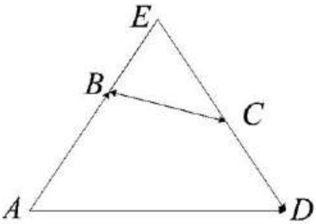
6 pavyzdys. Trapecijos plotas lygus jos antrajai vidurinei linijai, padaugintai iš trapecijos įstrižainės ir kampo tarp jų sinuso. Įrodysime tai.

Jei taškai *P* ir *Q* yra trapecijos *ABCD* pagrindų *AD* ir *BC* vidurio taškai, tai trapecijos *AQCP* plotas lygus pusei trapecijos *ABCD* ploto (13 pav.), nes trapecijos *AQCP* pagrindai yra du kartus mažesni už trapecijos *ABCD* pagrindus, o šių trapecijų aukštinės lygios. Jei kampas tarp antrosios vidurinės linijos *PQ* ir įstrižainės *AC* lygus α, tai kaip įrodėme anksčiau, trapecijos *AQCP* plotas lygus $\frac{1}{2} AC \cdot PQ \cdot \sin\alpha,$ taigi trapecijos *ABCD* plotas $S = AC \cdot PQ \cdot \sin\alpha,$ ką ir reikėjo įrodyti.

5. Trikampio kraštinių ir kampų tarpusavio ryšius nustato gerai žinomos kosinusų ir sinusų teoremos. Įrodysime dvi teoremas, išreiškiančias ryšius tarp keturkampio kraštinių, jo įstrižainių ir keturkampio kampų, kurios yra analogiškos trikampių kosinusų teoremoms ir vadinamos kosinusų teoremomis keturkampiams.



13 pav.



14 pav.

1 teorema (pirmoji kosinusų teorema keturkampiams). Iškilojo keturkampio kraštinės kvadratas lygus kitų trijų jo kraštinių kvadratų sumos ir dvigubų šių kraštinių porų sandaugų, padaugintų iš kosinusų kampų tarp šių kraštinių, sumos, skirtumui.

Įrodymas. Keturkampio $ABCD$ kraštinės AB ir CD kertasi taške E (14 pav.). Reikia įrodyti lygybę

$$AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 - 2AB\cdot CD\cos\angle E -$$
$$- 2AB\cdot BC\cdot\cos\angle B - 2BC\cdot CD\cos\angle C.$$

Vektorinės lygybės $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$ abi puses skaliariškai pakeliame kvadratu:

$$\vec{AD}^2 = \vec{AB}^2 + \vec{BC}^2 + \vec{CD}^2 +$$
$$+ 2AB\cdot BC\cdot\cos\angle(\vec{AB}, \vec{BC}) + 2AB\cdot CD\cdot\cos\angle(\vec{AB}, \vec{CD}) +$$
$$+ 2AB\cdot CD\cdot\cos\angle(\vec{BC}, \vec{CD}).$$

Kadangi

$$\vec{AB}^2 = AB^2,\ \ \vec{BC}^2 = BC^2,\ \ \vec{CD}^2 = CD^2,\ \ \angle(\vec{AB}, \vec{BC}) = 180^\circ - \angle B,$$
$$\angle(\vec{AB}, \vec{CD}) = 180^\circ - \angle E,\ \ \angle(\vec{BC}, \vec{CD}) = 180^\circ - \angle C,$$

tai iš čia ir išplaukia įrodomoji lygybė.

7 pavyzdys. Ant trikampio kraštinių jo išorėje nubrėžti trys lygiakraščiai trikampiai. Įrodysime, kad tų trikampių centrai yra lygiakraščio trikampio viršūnės.

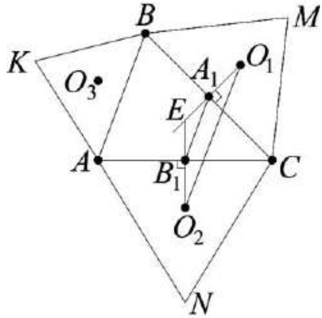
Sakykime, kad taškai A_1 ir B_1 yra trikampio ABC kraštinių AC ir BC vidurio taškai, trikampiai ABK, BCM ir ACN yra lygiakraščiai, taškai

O_3, O_1 ir O_2 – jų centrai, *a*, *b*, *c* – trikampio kraštinių *BC*, *AC* ir *AB* ilgiai (15 pav.). Akivaizdu, kad taškas O_1 yra trikampio *BMC* pusiaukraštinių sankirtos taškas, todėl

$$A_1O_1 = \frac{1}{3}A_1M = \frac{1}{3}BC\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Analogiškai

$$B_1O_2 = \frac{1}{3}B_1N = \frac{1}{3}AC\frac{\sqrt{3}}{2} = b\frac{\sqrt{3}}{6}.$$



15 pav.

Be to, $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}c$, $\angle O_2B_1A_1 = 90^\circ + \angle A$, $\angle O_1A_1B_1 = 90^\circ + \angle B$. Jei tiesės O_1A_1 ir O_2B_1 kertasi taške *E*, tai keturkampio CA_1EB_1 du kampai A_1 ir B_1 – statieji, todėl $\angle E = 180^\circ - \angle C$. Taikome pirmąją kosinusų teoremą keturkampiui $O_1A_1B_1O_2$:

$$O_1O_2^2 = O_1A_1^2 + A_1B_1^2 + O_2B_1^2 - 2O_1A_1 \cdot A_1B_1 \cos\angle O_1A_1B_1 -$$

$$- 2A_1B_1 \cdot O_2B_1 \cos\angle O_2B_1A_1 - 2O_1A_1 \cdot O_2B_1 \cos\angle E =$$

$$= \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b\sqrt{3}}{6}\right)^2 + 2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{c}{2}\sin\angle B +$$

$$+ 2\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{b\sqrt{3}}{6}\sin\angle A + 2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{b\sqrt{3}}{6}\sin\angle C =$$

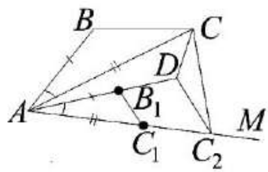
$$= \frac{1}{12}(a^2+b^2) + \frac{c^2}{4} + \frac{ac\sqrt{3}}{6}\sin\angle B + \frac{bc\sqrt{3}}{6}\sin\angle A + \frac{ab}{6}\sin\angle C.$$

Bet $ac\sin\angle B = bc\sin\angle A = 2S$, čia *S* – trikampio *ABC* plotas, o pagal kosinusų teoremą $ab\cos\angle C = \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)$. Įrašę visa tai į $O_1O_2^2$ išraišką ir atlikę veiksmus, gauname $O_1O_2^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3}S)$. Taip pat apskaičiavę atkarpų O_1O_3 ir O_2O_3 ilgių kvadratus (atlikite tai savarankiškai), gauname tokį patį rezultatą. Taigi $O_1O_2 = O_1O_3 = O_2O_3$.

2 teorema (antroji kosinusų teorema keturkampiui). Keturkampio įstrižainių sandaugos kvadratas lygus jo priešingųjų kraštinių sandaugų kvadratų sumos ir visų keturkampių kraštinių bei dviejų priešingų jo kampų sumos kosinuso dvigubos sandaugos skirtumui:

$$AC^2 \cdot BD^2 = AB^2 \cdot CD^2 + AD^2 \cdot BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA\cos(\angle A + \angle C).$$

Įrodymas. Spindulyje AD atidėkime atkarpą $AB_1 = AB$ (taškas B_1 gali būti keturkampio kraštinėje AD, jos tęsinyje, arba sutapti su tašku D) ir nubrėžiame spindulį AM, su tiese AD sudarantį kampą, lygų kampui BAC (16 pav.). Spindulyje AM atidėkime atkarpą $AC_1 = AC$. Trikampiai ABC ir AB_1C_1 yra lygūs. Per tašką D brėžiame tiesę, lygiagrečią su tiese B_1C_1, kuri tiesę AM kerta taške C_2. Trikampiai ADC_2 ir AB_1C_1 yra panašieji, todėl $\angle ABC = \angle AB_1C_1 = \angle ADC_2$, taigi $\angle CDC_2 = \angle B + \angle D$ arba $\angle CDC_2 = 360^\circ - (\angle B + \angle D)$. Trikampiams CDC_2 ir CAC_2 taikome kosinusų teoremą, išreikšdami atkarpą C_1C_2:



16 pav.

$$C_1C_2^2 = CD^2 + DC_2^2 - 2CD \cdot DC_2\cos(\angle B + \angle D) =$$
$$= CA^2 + AC_2^2 - 2CA \cdot AC_2\cos\angle CAC_2.$$

Iš trikampių ADC_2 ir ABC panašumo randame $\frac{DC_2}{AD} = \frac{BC}{AB}$ ir $\frac{AC_2}{AD} = \frac{AC}{AB}$, t. y. $DC_2 = \frac{BC \cdot AD}{AB}$ ir $AC_2 = \frac{AD \cdot AC}{AB}$. Kadangi $\angle CAC_2 = \angle CAD + \angle DAC_2 = \angle CAD + \angle CAB = \angle A$, tai iš trikampio ABD randame $\cos\angle A = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD}$. Kadangi $\cos(\angle B + \angle D) = \cos(\angle A + \angle C)$, tai

$$CD^2 + \frac{BC^2 \cdot AD^2}{AB^2} - 2\frac{CD \cdot BC \cdot AD}{AB}\cos(\angle A + \angle C) =$$
$$= CA^2 + \frac{AD^2 \cdot AC^2}{AB^2} - 2\frac{CA \cdot AD \cdot AC}{AB} \cdot \frac{AB^2 \cdot AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD}.$$

Suprastinę ir padauginę abi šios lygybės puses iš AB^2, gauname įrodomąją formulę:

$$CD^2 \cdot AB^2 + BC^2 \cdot AD^2 - 2AB \cdot CD \cdot BC \cdot AD\cos(\angle A + \angle C) = AC^2 \cdot BD^2.$$

1 išvada. Jei keturkampio priešingųjų kampų suma lygi 90°, tai jo įstrižainių sandaugos kvadratas lygus priešingųjų kraštinių sandaugų kvadratų sumai.

Jei keturkampio *ABCD* kampų *A* ir *C* suma lygi 90°, tai $\cos(A + C) = 0;$ todėl pagal antrąją kosinusų teoremą

$$AC^2 \cdot BD^2 = AB^2 \cdot CD^2 + AD^2 \cdot BC^2.$$

2 išvada. Įbrėžto į apskritimą keturkampio įstrižainių sandauga lygi jo priešingųjų kraštinių sandaugų sumai (Ptolemėjo teorema).

Kadangi įbrėžtam į apskritimą keturkampiui teisinga lygybė $\angle A + \angle C = 180^\circ$, tai $\cos(A + C) = -1$; tada, remdamiesi antrąja kosinusų teorema, gauname:

$$AC^2 \cdot BD^2 = AB^2 \cdot CD^2 + AD^2 \cdot BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA =$$
$$= (AB \cdot CD + AD \cdot BC)^2,$$

t. y. $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1. Du vienodo spindulio apskritimai liečiasi išoriškai, jų centrai yra trapecijos įstrižainėse, o kiekvienas tų apskritimų liečia abu trapecijos pagrindus ir po vieną šoninę kraštinę. Raskite trapecijos kampus.

2. Iškiliojo keturkampio *ABCD* įstrižainės kertasi taške *E*, atkarpos *AB* ir *BC* – lygios, įstrižainė *BD* – kampo *D* pusiaukampinė. Raskite kampą *CAD*, jei $\angle ABC = 100^\circ$, $\angle BEA = 70^\circ$.

3. Du apskritimai kertasi taškuose *A* ir *B*. Per tašką *B* nubrėžta tiesė, kuri minėtus apskritimus kerta taškuose *C* ir *D*. Per apskritimo tašką *C* jam nubrėžta liestinė, analogiškai per tašką *D* nubrėžta kito apskritimo liestinė. Šios liestinės kertasi taške *P*. Įrodykite, kad taškai *A*, *C*, *D* ir *P* yra viename apskritime.

4. Į stačiąją trapeciją įbrėžto apskritimo centras nutolęs nuo jos šoninės kraštinės galų per 3 ir 9. Apskaičiuokite trapecijos kraštinių ilgius.

5. Jei į keturkampį *ABCD* galima įbrėžti apskritimą, tai į trikampius *ABC* ir *CDA* įbrėžti apskritimai liečiasi. Įrodykite.

6. Keturkampio *ABCD* kraštinės *AD* tęsinyje yra taškas *E* toks, kad tiesės *CE* ir *BD* lygiagrečios. Raskite keturkampio *ABCD* ir trikampio *ABE* plotų santykį.

7. Trapecijos pagrindų ilgiai a ir b, $a > b$, o kampų prie mažesniojo pagrindo suma lygi 270°. Raskite trapecijos antrosios vidurinės linijos ilgį.

8. Trapecijos plotas lygus jos antrosios vidurinės linijos sandaugai su dviejų į tą vidurinę liniją iš trapecijos priešingų viršūnių nuleistų statmenų ilgių suma. Įrodykite.

9. Trikampio *ABC* išorėje nubraižyti kvadratai, kurių kraštinės yra atkarpos *BC*, *AB* ir *AC*. Jų centrai yra taškai O_1, O_2 ir O_3. Įrodykite, kad atkarpos CO_2 ir O_1O_3 yra lygios.

10. Lygiakraščio trikampio *ABC* plokštumoje yra bet kuris taškas *M*. Įrodykite, kad viena iš atkarpų *MA*, *MB* arba *MC* yra nedidesnė už likusiųjų dviejų atkarpų ilgių sumą. Su kuriais taškais M gaunama lygybė?

VIII. GERIAUSIO VARIANTO PASIRINKIMO UŽDAVINIAI

Antanas Apynis
(Vilniaus universitetas)

Tarp daugybės matematikos uždavinių yra ir tokių, kuriuose reikia rasti nagrinėjamų charakteristikų kraštutines reikšmes; pavyzdžiui, didžiausią trikampio plotą, kai perimetras pastovus, arba mažiausią perimetrą, kai trikampio plotas nekinta.

Geriausio (paprastai sakoma – optimalaus) sprendinio (varianto, plano pasirinkimo ir pan.) paieškos problema atsiranda tik tada, kai nagrinėjamasis uždavinys turi daugiau kaip vieną sprendinį. Pavyzdžiui, yra be galo daug taškų, lygiai nutolusių nuo konkretaus plokštumos taško M, bet tik dviejuose taškuose apskritimo liestinė yra lygiagreti su Dekarto koordinačių sistemos abscisių ašimi; viename iš jų apskritimo taško ordinatė yra didžiausia, o kitame – mažiausia.

Geriausio varianto pasirinkimo uždaviniai mokyklinės matematikos vadovėliuose vadinami ekstremumų uždaviniais ir nagrinėjami jie pirmiausia taikant išvestinės funkcijos savybes.

Šioje jauniesiems matematikams siūlomoje temoje uždavinių pavyzdžius nagrinėsime, taikydami įvairius kitus būdus. Taip siekiama praplėsti mokinių akiratį ir (iš dalies) parodyti, kad daugeliui ekstremumų paieškos uždavinių išspręsti visiškai pakanka žemesnėse klasėse įgytų žinių.

Žingeidesniems mokiniams galėtume pasiūlyti pasiskaityti Juozo Šinkūno knygelę „Ekstremumai be išvestinių“ (Vilnius, leidykla TEV, 2008). Joje patrauklių uždavinių (su išsamiais sprendimo būdų paaiškinimais) turėtų rasti ir žemesnių klasių gimnazijos mokiniai.

Iš karto pereikime prie konkrečių uždavinių nagrinėjimo ir jų sprendimo.

1 pavyzdys. Ar galima skaičius 1, 2, 3, ..., 33 suskirstyti į tris grupes taip, kad kiekvienoje grupėje didžiausias skaičius būtų lygus likusių tos grupės skaičių sumai?

Sprendimas. Tarkime, kad kuri nors skaičių 1, 2, 3, ..., 33 grupė tenkina uždavinio sąlygą – jos didžiausias skaičius, sakykime, m yra lygus likusių grupės skaičių sumai.

Aišku, kad tos grupės skaičių suma lygi $2m$. Jei į tokias grupes pasisektų suskirstyti visus 33 skaičius, tai bendra skaičių 1, 2, ..., 33 suma

$1+2+3+...+33$ turėtų būti lyginis skaičius. Tačiau taip nėra, nes $1+2+3+...+33=561$.

Ats.: Negalima.

2 pavyzdys. Vieną toną grūdų reikia supilti į maišus; vienų maišų talpa 60 kg, o kitų – 80 kg. Raskime mažiausią maišų skaičių.

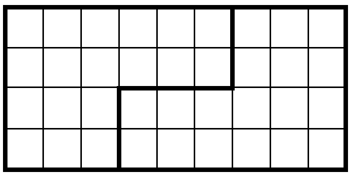
Sprendimas. Tegu x yra pilnų maišų po 60 kg skaičius, o y – pilnų maišų po 80 kg skaičius. Pagal uždavinio sąlygą turi galioti lygybė $60x+80y=1000$, kurią galima pakeisti ekvivalenčia lygybe $3x+4y=50$.

Lengva suprasti, kad x turi būti mažesnis už 16, o y – mažesnis už 12 skaičius. Toliau taikome x ir y galimų porų $(x;\, y)$ *perrankos metodą* ir gauname tokį optimalų (geriausią) variantą: $x=2,\;\; y=11$.

Ats.: 2 maišai po 60 kg ir 11 maišų po 80 kg.

3 pavyzdys. Stačiakampį, kurio matmenys 4×9, reikia sukarpyti taip, kad iš gautų dalių būtų įmanoma sudėti kvadratą. Raskime mažiausią tokių dalių skaičių.

Sprendimas. Kadangi stačiakampio plotas lygus 36, tai iš jo dalių galima sudėti kvadratą, kurio matmenys 6×6. Karpymo būdų, tenkinančių uždavinio sąlygą, yra įvairių. Geriausiu atveju gausime dvi dalis, iš kurių įmanoma sudėti kvadratą; galima kirpti, pavyzdžiui, taip:



Taigi ir šį uždavinį išsprendėme, taikydami galimų variantų perrankos metodą.

4 pavyzdys. Du tiesūs keliai susikerta stačiu kampu. Šiais keliais link sankryžos važiuoja du automobiliai; pirmas yra už 20 kilometrų nuo sankryžos ir važiuoja 60 km/h greičiu, o antras yra už 35 kilometrų nuo sankryžos ir važiuoja 40 km/h greičiu. Apskaičiuokime, po kurio laiko atstumas tarp šių automobilių bus mažiausias, taip pat raskime tą atstumą.

Sprendimas. Pagal uždavinio sąlygą laiko momentu t pirmas automobilis bus už $|20-60t|$, o antras už $|35-40t|$ kilometrų nuo sankryžos.

Pagal Pitagoro teoremą, atstumas tarp automobilių laiko momentu t (pažymėkime jį $s(t)$) bus

$$s(t)=\sqrt{(20-60t)^2+(35-40t)^2}=5\sqrt{(4-12t)^2+(7-8t)^2}.$$

Pertvarkykime pašaknyje esantį reiškinį:

$$(4-12t)^2+(7-8t)^2=16-96t+144t^2+49-112t+64t^2=$$

$$=208t^2-208t+65=208(t^2-t)+65=$$

$$=208\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right)+65=208\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-52+65=208\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+13.$$

Dabar jau visai nesunku įvertinti atstumo $s(t)$ didumą:

$$s(t)=5\sqrt{208\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+13}\geq 5\sqrt{13};$$

Lygybė galioja tik kai $t=\dfrac{1}{3}$.

Taigi mažiausias atstumas tarp automobilių, lygus $5\sqrt{13}$ km, bus po pusės valandos.

5 pavyzdys. Raskime mažiausią sandaugos

$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

reikšmę, kai $a>0$, $b>0$ ir $c>0$.

Sprendimas. Nagrinėjamą sandaugą pertvarkykime taip:

$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=$$

$$=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)=$$

$$=3+\left(\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2+2\right)+\left(\left(\sqrt{\frac{a}{c}}-\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2+2\right)+\left(\left(\sqrt{\frac{b}{c}}-\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2+2\right)=$$

$$=9+\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{a}{c}}-\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{c}}-\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2.$$

Kadangi $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 \geq 0,$ $\left(\sqrt{\frac{a}{c}}-\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 \geq 0$ ir $\left(\sqrt{\frac{b}{c}}-\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2 \geq 0$ esant bet kuriems teigiamiems realiesiems skaičiams *a*, *b* ir *c*, o visos trys lygybės galioja tik kai $a=b=c,$ o visos trys lygybės galioja tik kai $a=b=c,$ tai

$$\min\,(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=9.$$

6 pavyzdys. Tarp trikampių, kurių pagrindai lygūs 6, o šoninių kraštinių ilgių sumos lygios 10, raskime didžiausio ploto trikampį.

Sprendimas. Tegu x yra viena trikampio šoninė kraštinė; tada kita šoninė kraštinė lygi $10-x.$ Trikampio plotą žymėkime $S(x).$ Jį skaičiuokime, taikydami Herono formulę. Gausime:

$$S(x)=\sqrt{8\cdot(8-6)(8-x)(8-(10-x))}=\sqrt{(8-x)(x-2)}=$$

$$=4\sqrt{-x^2+10x-16}=4\sqrt{-(x^2+10x+16)}=$$

$$=4\sqrt{-((x-5)^2-9)}=4\sqrt{9-(x-5)^2}\geq 4\sqrt{9}=12.$$

Lygybė galioja tik kai $x=5.$

Vadinasi, didžiausią plotą, lygų 12, įgyja lygiašonis trikampis, kurio pagrindas 6, o šoninės kraštinės lygios 5.

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Vienoje eilėje auga 5 medžiai. Atstumai tarp gretimų medžių tokie: 120 m, 30 m, 67,5 m ir 15 m. Raskite mažiausią skaičių medžių, kuriuos reiktų pasodinti toje eilėje, kad atstumai tarp gretimų medžių joje būtų vienodi.

2. Kiek mažiausiai reikia to paties spindulio skritulių, kad būtų galima jais uždengti dvigubai ilgesnio spindulio skritulį?

3. Plokštumoje yra n taškų; atstumas tarp bet kurių dviejų taškų nemažesnis už 1. Raskite mažiausią didžiausio atstumo tarp dviejų šios sistemos taškų reikšmę dviem atvejais: 1) $n=3;$ 2) $n=4.$

4. Du turistai, keliaujantys pėsčiomis, nori kuo greičiau pasiekti stovyklą, esančią už 39 kilometrų. Jiems sutiko pagelbėti vietos gyventojas, kuris pasisiūlė pavėžėti juos savo motociklu. Tačiau motociklininkas gali vežti tik vieną keleivį. Raskite optimalų pagalbos turistams planą ir apskaičiuokite trumpiausią laiką, per kurį abu turistai gali (padedami motociklininko) pasiekti stovyklą; skaičiuodami turėkite mintyje, kad turistų ėjimo pėsčiomis greitis 5 km/h, o motociklo greitis 65 km/h.

5. Raskite sveikąsias kintamojo x reikšmes, kurioms esant funkcija

$$f(x)=\frac{x^2-x-17}{x-2}$$

įgyja mažiausią sveikąją reikšmę.

6. Raskite funkcijos $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2+1}$ mažiausią reikšmę.

7. Nustatykite, su kuria parametro a reikšme kvadratinio trinario $x^2+ax-1-a=0$ šaknų kvadratų suma yra pati mažiausia.

Pastaba. Kai diskriminantas lygus nuliui, kvadratinis trinaris turi dvi lygias šaknis.

8. Įrodykite, kad funkcija $y=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}$ mažiausią reikšmę, lygią 2, įgyja taške $x=0$.

9. Tarp lygiašonių trapecijų, kurių kampas prie pagrindo lygus 45°, o perimetras 4, raskite tokią, kurios plotas didžiausias.

10. Iš visų stačiųjų trikampių, kurių aukštinės, nuleistos į įžambinę, lygios 2, išrinkite tokį, kurio pusiaukraštinė, nubrėžta į ilgesnįjį statinį, yra trumpiausia.

BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

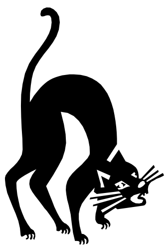
1. Ūkininkas 113 litrų pieno supilstė į 5 litrų ir 7 litrų talpos indus. Raskite galimai mažiausią indų skaičių.

2. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8. \end{cases}$$

3. Įrodykite, kad reiškinys $S = \sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+3} + \sqrt{2z+3}$, kai $x + y + z = 1$, įgyja didžiausią reikšmę. Raskite tą reikšmę.

4. Į lygiašonę trapeciją, kurios pagrindų ilgiai a ir b, įbrėžtas skritulys. Raskite jo plotą.

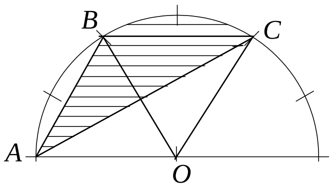


Užduočių sprendimai

STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tegu x Lt – pajamos už parduotus bilietus, o y – bilieto kaina. Tada $\frac{x}{y}$ – loterijos dalyvių skaičius. Pagal sąlygą: $\frac{1{,}35x}{0{,}75y} = 1{,}8\frac{x}{y}$ – loterijos dalyvių skaičius sumažinus loterijos bilieto kainą. Taigi loterijos dalyvių skaičius padidėjo – 80 %.

2. Kadangi trikampių BAC ir BOC plotai yra lygūs (bendras pagrindas BC ir aukštinė yra lygios!), tai ieškomosios figūros (žr. 1 pav.) plotas lygus išpjovos OBC plotui. Akivaizdu, kad šios išpjovos plotas lygus trečdaliui skritulio ploto, t. y. $\frac{1}{3} \cdot \frac{9\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$.



1 pav.

Ats.: $\frac{3\pi}{2}$.

3. $x^2 + y^2 + xy = 7 \sim x^2 + xy + y^2 - 7 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 - 4(y^2 - 7)}}{2} = \frac{-y \pm \sqrt{28 - 3y^2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 28 - 3y^2 \geq 0 \Rightarrow |y| \leq \sqrt{\frac{28}{3}}.$$

Taigi lygties sprendinių $(x; y)$ antroji komponentė gali būti tik: ± 1; ± 2; ± 3. Šias reikšmes įrašę į formulę pirmai sprendinio komponentei apskaičiuoti, gauname 12 sprendinių: (–3; 1), (1; –3), (–1; 3), (3; –1), (–3; 2), (2; –3), (–2; 3), (3; –2), (1; 2), (2; 1), (–1; –2), (–2; –1).

4. Tegu pirmo tipo statinių yra n, antro tipo statinių – m, o jų bendra talpa x litrų. Tada antro tipo statinių bendra talpa yra $(7000 - x)$ litrų. Taigi pirmo tipo statinės talpa yra $\frac{x}{n}$ litrų, o antro tipo statinės talpa $\frac{7000-x}{m}$ litrų. Sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} (m+n)\cdot\frac{x}{n} = 8000, \\ (m+n)\cdot\frac{7000-x}{m} = 3000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8000n}{m+n}, \\ 7000 - x = \frac{3000m}{m+n}. \end{cases}$$

Sudėję abi lygtis, randame, kad $n = 4m$. Vadinasi,

$$x = \frac{8000\cdot 4m}{m+4m} = 6400.$$

Ats.: 6400 litrų.

5. Tegu bet kurios skaičių grupės mažiausias skaičius yra m, o didžiausias – n. Tada šios grupės skaičių suma lygi $2(m+n)$. Vadinasi, visų grupių skaičių suma yra lyginė. Tačiau

$$1+2+3+...+2009 = \frac{1+2009}{2}\cdot 2009 = 1005\cdot 2009$$

yra nelyginis skaičius. Prieštara. Taigi skaičių nuo 1 iki 2009 negalima suskirstyti į grupes, pasižyminčias nurodytomis savybėmis.

6. Tegu x – ieškomasis skaičius. Sudarome lygtį

$$9+90\cdot 2+(x-99)\cdot 3 = 2x$$

ir gauname, kad $x = 108$.

Ats.: 108.

7. $$\begin{cases} x^2+xy+y=1, \\ y^2+xy+x=5 \end{cases} \sim \begin{cases} x^2+xy+y=1, \\ x^2+2xy+y^2+x+y=6 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x^2+xy+y=1, \\ (x+y)^2+(x+y)=6 \end{cases} \sim$$

$$\sim\begin{cases} x^2+xy+y=1, \\ (x+y)=2 \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} x^2+xy+y=1, \\ x+y=-3. \end{cases} \Rightarrow \quad x_1=-1,\ y_1=3$$

arba $x_2=-1,\ y_2=-2.$

Ats.: (–1; 3); (–1, –2).

8. Kadangi $6(m+7n)=(6m+11n)+31n$ ir $6m+11n$ dalijasi iš 31, tai $6(m+7n)$ dalijasi iš 31. Iš čia išplaukia, kad $m+7n$ dalijasi iš 31.

9. Didžiojo stačiakampio kraštinių dalių ilgiai brėžinyje pažymėti raidėmis x, y, z, u, v ir w.

	u	v	w
x		11	
y	20	8	11
z		12	

Sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 4y+2u+2v+2w=39, \\ 4v+2x+2y+2z=31. \end{cases}$$

Sudėję abi lygtis, gauname:

$$2(2y+2v)+2(x+y+z)+2(u+v+w)=70 \Rightarrow$$

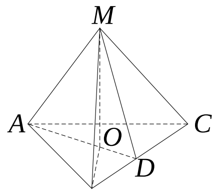
$$\Rightarrow P=70-2(2y+2v)=70-2\cdot 8=54.$$

Ats.: 54.

10. Iš stačiojo trikampio MDC: $DC=\sqrt{MC^2-MD^2}=\sqrt{26^2-10^2}=24.$

Kadangi $BC=2DC$, tai $BC=48$ ir

$$AB=\frac{128-48}{2}=40\,.$$



2 pav.

Iš stačiojo trikampio ADB gauname, kad

$$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{40^2-24^2}=32 \text{ (cm).}$$

Kadangi $AM=MB$, tai $AO=OB$ (pasvirųjų projekcijos!) Iš stačiojo trikampio BDO gauname:

$$OB^2=(AD-AO)^2+BD^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OB^2=(32-OB)^2+24^2 \Rightarrow OB=25\,.$$

Tada (iš stačiojo trikampio MOD)

$$MO^2=MB^2-OB^2 \Rightarrow MO^2=26^2-25^2=51 \Rightarrow MO=\sqrt{51}\,.$$

Ats.: $\sqrt{51}$ cm.

PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Remiamės DLT. Tarę, kad yra toks $n \in Z$, su kuriuo $n^2 = 7m + 6$, nagrinėjame galimus skaičiaus n pavidalus dalumo iš 7 atžvilgiu: $n = 7k + r$, $k \in Z$, $0 \le r \le 6$ ir kaskart gauname prieštarą. Pavyzdžiui, kai $n = 7k + 5$, tai $(7k+5)^2 = 7\left(7k^2 + 10k + 3\right) + 4$ ir šis skaičius nėra pavidalo $7m + 6$. Prieštara.

2. Nuosekliai dalydami, gauname:

$$-371 = (-1) \cdot 1771 + 1400,$$
$$1771 = 1 \cdot 1400 + 371,$$
$$1400 = 3 \cdot 371 + 287,$$
$$371 = 1 \cdot 287 + 84,$$
$$287 = 3 \cdot 84 + 35,$$
$$84 = 2 \cdot 35 + 14,$$
$$35 = 2 \cdot 14 + 7,$$
$$14 = 2 \cdot 7.$$

Euklido algoritmas parašytas. Matome, kad paskutinė nelygi nuliui liekana yra skaičius 7. Todėl $D(-371, 1771) = 7$.

BDD tiesinę išraišką gausime iš Euklido algoritmo nuosekliai išreikšdami liekanas ir sutraukdami panašius narius:

$$D(-371, 1771) = 7 = 35 - 2 \cdot 14 =$$
$$= 35 - 2 \cdot (84 - 2 \cdot 35) = (-2) \cdot 84 + 5 \cdot 35 =$$
$$= (-2) \cdot 84 + 5 \cdot (287 - 3 \cdot 84) = 5 \cdot 287 + (-17) \cdot 84 =$$
$$= 5 \cdot 287 + (-17) \cdot (371 - 1 \cdot 287) = (-17) \cdot 371 + 22 \cdot 287 =$$
$$= (-17) \cdot 371 + 22 \cdot (1400 - 3 \cdot 371) = 22 \cdot 1400 + (-83) \cdot 371 =$$
$$= 22 \cdot 1400 + (-83) \cdot (1771 - 1 \cdot 1400) = 105 \cdot 1400 + (-83) \cdot 1771 =$$
$$= (-83) \cdot 1771 + 105 \cdot (-371 + 1771) = 105 \cdot (-371) + 22 \cdot 1771.$$

Ats.: $D(-371, 1771) = 7$, $\quad 7 = 105 \cdot (-371) + 22 \cdot 1771$.

3. Kadangi $D(a,b,c)=D(D(a,b),c)$, tai iš pradžių rasime $D(a,b)$, nors skaičiuoti galima bet kokia tvarka. Rašome Euklido algoritmą skaičiams a ir b :

$$12463=1\cdot 7931+4532,$$
$$7931=1\cdot 4532+3399,$$
$$4532=1\cdot 3399+1133$$
$$3399=3\cdot 1133.$$

Taigi $D(a,b)=1133$. Dabar skaičiuojame $D(1133,\ 7313)$:

$$7313=6\cdot 1133+515,$$
$$1133=2\cdot 515+103,$$
$$515=5\cdot 103$$

Darome išvadą: $D(a,b,c)=103$.

Apskaičiuosime $M(a,b,c)=M(M(a,b),c)$. Kadangi jau radome $D(a,b)=1133$, tai, pasinaudoję sąryšiu

$$M(a,b)D(a,b)=ab,$$

gauname:

$$M(12463,7931)=\frac{12463\cdot 7931}{1133}=87241.$$

Tolesniems skaičiavimams supaprastinti, pasinaudokime minėta savybe $M(ka,kb)=kM(a,b)$. Tada

$$M(87241,7313)=103\cdot M(847,\ 71).$$

Tereikia apskaičiuoti $M(847,71)$:

$$847=11\cdot 71+66,$$
$$71=1\cdot 66+5,$$
$$66=13\cdot 5+1,$$
$$5=5\cdot 1.$$

Taigi $D(847,71)=1$ ir $M(847,71)=\dfrac{847\cdot 71}{1}=60137.$

Galutinai:

$$M(a,b,c)=103\cdot 60137=6194111.$$

Ats.: $D(a,b,c)=103$, $M(a,b,c)=6194111$.

4. Parašome Euklido algoritmo analogą duotiesiems skaičiams:

$$13a+8b=2\cdot(5a+3b)+3a+2b,$$
$$5a+3b=1\cdot(3a+2b)+2a+b,$$
$$3a+2b=1\cdot(2a+b)+a+b,$$
$$2a+b=1\cdot(a+b)+a,$$
$$a+b=1\cdot a+b.$$

Iš šios lygybių sekos darome išvadą, kad

$$D(13a+8b,\,5a+3b)=D(a,b)=1.$$

5. Ši užduotis, iliustruoja, kad ne visos neapibrėžtosios pirmojo laipsnio lygtys turi sprendinių.

Tarkime, kad pradžioje smulkiname x popieriaus lapų. Tada iš viso gauname

$$x\cdot 6+(6-x)=6+5x$$

popieriaus gabalų. Jei dabar smulkiname y gabalų, tai iš viso gauname

$$y\cdot 6+((6+5x)-y)=6+5x+5y$$

gabalų, ir t.t. Tarus, kad po tam tikro žingsnių skaičiaus pavyks gauti 2009 lapus, išeitų, kad neapibrėžtoji lygtis

$$6+5x+5y+\ldots+5z=2009,$$

arba kitaip

$$5x+5y+\ldots+5z=2003,$$

turi sprendinių. Tačiau, to būti negali, nes $5\nmid 2003$.

Ats.: Negalime.

6. Kadangi $D(12,\,31)=1$, tai tokia diofantinė lygtis turi be galo daug sprendinių. Aišku, kad mus domina tik tie iš jų, kurie tenkina sąlygas: $1\le x\le 31$ ir $1\le y\le 12$.

Iš Euklido algoritmo skaičiams 12 ir 31 :

$$31=2\cdot 12+7,$$
$$12=1\cdot 7+5,$$
$$7=1\cdot 5+2,$$
$$5=2\cdot 2+1,$$

randame jų DBD tiesinę išraišką:

$$1 = 5 - 2\cdot 2 = 5 - 2\cdot(7-5) = 3\cdot 5 - 2\cdot 7 = 3\cdot(12-7) - 2\cdot 7 =$$
$$= (-5)\cdot 7 + 3\cdot 12 = (-5)\cdot(31 - 2\cdot 12) + 3\cdot 12 =$$
$$= 13\cdot 12 + (-5)\cdot 31 .$$

Taigi skaičių pora $(13\cdot 436, -5\cdot 436)$ yra *atskirasis* lygties sprendinys. Bendrasis sprendinys yra visos poros :

$$(13\cdot 436 + 31t, -5\cdot 436 - 12t), t \in Z .$$

Dabar pareikalaukime, kad galiotų sąlygos:

$$1 \le 13\cdot 436 + 31t \le 31, \; 1 \le -5\cdot 436 - 12t \le 12 .$$

Nesunku įsitikinti, kad vienintelis sveikasis šios nelygybių sistemos sprendinys yra $t = -182$. Įrašę šią reikšmę į bendrąjį sprendinį randame atsakymą:

$$x = 13\cdot 436 - 31\cdot 182 = 26, \; y = -5\cdot 436 + 12\cdot 182 = 4 .$$

Ats.: Asmuo gimęs balandžio 26 d.

7. Pasinaudoję rezultatu $D(-371, 1771) = 7$, galime teigti, kad ši lygtis turi sprendinių. Kadangi $7 \mid 35$, tai duotoji diofantinė lygtis turi be galo daug sprendinių ir, suprastinus iš 7, ekvivalenti lygčiai:

$$-53x + 253y = 5 .$$

Čia: $D(-53, 253) = 1$.

Dabar, pasinaudoję antroje užduotyje rastąja $D(-371, 1771)$ tiesine išraiška, surasime pastarosios lygties *atskirąjį sprendinį*. Buvome gavę, kad $7 = 105(-371) + 22\cdot 1771$, arba suprastinus iš 7:

$$1 = 105(-53) + 22\cdot 253 .$$

Padauginę šią lygybę iš 5, gauname:

$$5 = 525(-53) + 110\cdot 253 .$$

Matome, kad suprastintos lygties *atskirasis sprendinys* yra skaičių pora $(525, 110)$. Pasinaudoję bendrojo sprendinio išraiška, gauname atsakymą:

Ats.: $(525 + 253t, 110 + 53t), t \in Z$.

8. Skaičiams $21n+4$ ir $14n+3$ parašome Euklido algoritmą:
$21n+4=1\cdot(14n+3)+7n+1,\ \ 14n+3=2\cdot(7n+1)+1,$
iš kurio ir darome išvadą: su visais $n\in N$,
$$D(21n+4,14n+3)=D(7n+1,1)=1,$$
taigi trupmena $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ nesuprastinama.

9. Akivaizdi lygybė
$n^{2010}-1=n^{2009}\cdot n-1=\left(n^{2009}-1+1\right)\cdot n-1=\left(n^{2009}-1\right)\cdot n+n-1$
yra tuo pat metu ir pirmoji Euklido algoritmo eilutė skaičiams $n^{2010}-1$ ir $n^{2009}-1$. Iš čia išplaukia, kad
$$D\left(n^{2010}-1,n^{2009}-1\right)=D\left(n^{2009}-1,n-1\right).$$
Bet, kaip žinome, $n-1\,|\,n^{2009}-1$, t.y. $n^{2009}-1=k\cdot(n-1)$ su $k\in Z$, todėl $n-1$ ir yra paskutinė nelygi nuliui Euklido algoritmo liekana. Išvada:
$$D\left(n^{2010}-1,n^{2009}-1\right)=n-1.$$

10. Euklido algoritmas susideda tik iš 2 eilučių:
$$f(x)=\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)g(x)+\left(-\frac{5}{4}x^2+\frac{15}{4}\right),$$
$$g(x)=\left(-\frac{8}{5}x^2-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{4}x^2+\frac{15}{4}\right).$$
Laikydamiesi susitarimo, paskutinę nelygią nuliui liekaną $\left(-\frac{5}{4}x^2+\frac{15}{4}\right)$ „normalizuojame“, t.y. padauginame iš tokio skaičiaus, kad koeficientas prie x^2 būtų lygus vienetui. Tada
$$D(f(x),g(x))=-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{4}x^2+\frac{15}{4}\right)=x^2-3,$$

$$M\left(f(x), g(x)\right) = \frac{\left(x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 6\right)\left(2x^3 + x^2 - 6x - 3\right)}{x^2 - 3} =$$
$$= 2x^5 - x^4 - 11x^3 + x^2 + 15x + 6.$$

ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Randame lygties apibrėžimo sritį $D(L)$:

$$\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0, \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-2) \leq 0, \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2;\, 2], \\ x \in [2;\, +\infty) \end{cases} \Rightarrow x = 2.$$

Taigi $D(L) = \{2\}$. Nesunku įsitikinti, kad $x = 2$ yra lygties sprendinys.

Ats.: 2.

2. $D(N)$:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 8 \geq 0, \\ 4 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)(x-2) \geq 0, \\ (x+2)(x-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x \in (-\infty;\, -4] \cup [2;\, +\infty), \\ x \in [-2;\, 2] \end{cases} \Rightarrow x = 2.$$

Taigi $D(N) = 2$. Kai $x = 2$, gauname teisingą nelygybę $0 < 3$.

Ats.: 2.

3. Lygties apibrėžimo sritis yra intervalas $[-1; +\infty)$. Kadangi para– bolės $f_1(x) = x^2 + 3x + 4$ viršūnės abscisė yra $-\frac{3}{2}$, o parabolės $g(x) = 3 - 4x - x^2$ viršūnės abscisė yra –2, tai funkcija $f_1(x) = x^2 + 3x + 4$ intervale $[-1; +\infty)$ yra didėjanti, o funkcija $g(x) = 3 - 4x - x^2$ – mažėjanti. Taigi funkcija

$f(x)=\sqrt{x^2+3x+4}+\sqrt{x+1}$ yra didėjanti. Vadinasi, lygtis gali turėti daugiausiai vieną sprendinį. Akivaizdu, kad $x=0$ ir yra vienintelis šios lygties sprendinys.

Ats.: 0.

4. Nelygybės apibrėžimo sritis yra intervalas $[-3;5]$. Šiame intervale funkcija $f_1(x)=\sqrt{x+3}$ yra didėjanti, o funkcija $f_2(x)=\sqrt{5-x}$ – mažėjanti, todėl funkcija $f(x)=\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}$ yra didėjanti. Kadangi funkcija $g(x)=x^2-12x+11$ intervale $[-3;5]$ yra mažė–janti ir $f(1)=g(1)$, tai nelygybės sprendiniai yra intervalas $[-3;1)$.

5. Nelygybės apibrėžimo sritis yra intervalas $[2;+\infty)$. Kadangi šiame intervale funkcija $f(x)=\sqrt{4x-3}+\sqrt{x-2}$ yra didėjanti ir $f(3)=4,$ tai nelygybės sprendiniai yra intervalas $[3;+\infty)$.

6. Lygties kairiosios pusės funkcija $f(x)=\sqrt{5-x}+\sqrt{x+13}>0$ apibrėžimo srityje $[-13;5]$ nėra monotoninė. Lygtį spręsime ieškodami į lygtį įeinančių funkcijų didžiausios ir mažiausios reikšmių. Turime:

$$g(x)=x^2+8x+22=(x+4)^2+6\geq 6;\ g(x)=6,$$

kai $x=-4$ ir

$$[f(x)]^2=(\sqrt{5-x}+\sqrt{x+13})^2=18+2\sqrt{81-(x+4)^2}\leq$$
$$\leq 18+2\cdot 9=36,$$

t. y. $f(x)\leq 6$; $f(x)=6$, kai $x=-4$. Taigi lygtis ekvivalenti lygčių sistemai

$$\begin{cases}\sqrt{5-x}+\sqrt{x+13}=6,\\ x^2+8x+22=6,\end{cases}$$

kuri turi vienintelį sprendinį $x=-4$.

Ats.: –4.

7. $D(N)=[-4;16]$. Kai $x\in[-4;0]$, tai $\sqrt{x+4}\ge 0$ ir $\sqrt[4]{16-x}\ge 2$; kai $x\in[0;16]$, tai $\sqrt{x+4}\ge 2$, ir $\sqrt[4]{16-x}\ge 0$. Taigi, kai $x\in[-4;16]$, $\sqrt{x+4}+\sqrt[4]{16-x}\ge 2$. Todėl nelygybė sprendinių neturi.

Ats.: $\varnothing$.

8. Kadangi $f(x)=x^2-4x+10=(x-2)^2+6\ge 6$ ($f(x)=6$, kai $x=2$), o $g(x)=\dfrac{12}{x^2+4x+6}=\dfrac{12}{(x+2)^2+2}\le\dfrac{12}{2}=6$ ($g(x)=6$, kai $x=-2$), tai lygčių sistema

$$\begin{cases} x^2-4x+10=6, \\ \dfrac{12}{x^2+4x+6}=6 \end{cases}$$

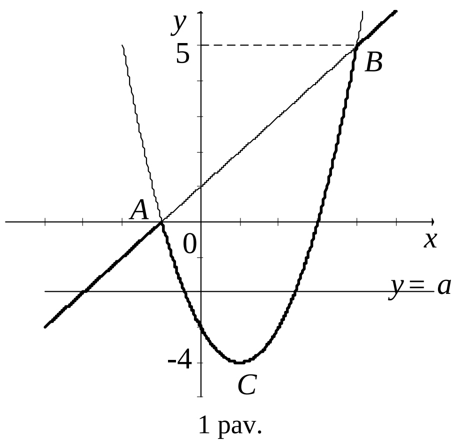
yra ekvivalenti nagrinėjamajai lygčiai. Kadangi ši lygčių sistema sprendinių neturi, tai neturi sprendinių ir nagrinėjamoji lygtis.

Ats.: $\varnothing$.

9. Pažymėkime $h(x)=\min\{x^2-2x-3;\ x+1\}$. Vienoje koordinačių sistemoje *xOy* nubrėžkime funkcijų $f(x)=x^2-2x-3$ ir $g(x)=x+1$ grafikus (1 pav.). Šių grafikų susi–kirtimo taškai yra sistemos

$$\begin{cases} y=x^2-2x-3, \\ y=x+1 \end{cases}$$

sprendiniai $A(-1;0)$ ir $B(4;5)$.



1 pav.

Parabolės $y=x^2-2x-3$

viršūnė yra taške $C(1;-4)$. Iš brėžinio matome, kad

$$h(x)=\begin{cases} x+1, & -\infty<x\le -1, \\ x^2-2x-3, & -1<x\le 4, \\ x+1, & x>4. \end{cases}$$

Šios funkcijos grafikas pavaizduotas 7 paveiksle pastorinta linija. Tirsime tiesės $y=a$ priklausomai nuo a reikšmės, ir grafiko susikirtimo taškus.

Kai $a<-4,$ tiesė $y=a$ grafiką kerta viename taške;

kai $a=-4,$ tiesė $y=-4$ grafiką kerta dviejuose taškuose;

kai $-4<a<0$ – trijuose taškuose;

kai $a=0,$ – dviejuose taškuose, o kai $a>0$ – viename taške.

Ats.: Kai $a\in(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$, lygtis turi vieną sprendinį; kai $a=-4$ ir $a=0$ – du sprendinius, o kai $-4<a<0$ – tris sprendinius.

10. Jeigu $x_0\ne 0$ yra šios lygties sprendinys, tai ir $(-x_0)$ taip pat yra šios lygties sprendinys. Kad lygtis turėtų tris sprendinius, vienas sprendinys turi būti nulinis. Nulis yra lygties sprendinys, kai $a=5.$ Tada lygtis yra tokia $x^4-4x^2=0$. Jos sprendiniai $x_1=-2,$ $x_2=0,$ $x_3=2.$

Ats.: $a=5$; –2; 0; 2.

TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Pažymėję $u=x+y,$ $v=xy,$ gauname:

$$x^3+y^3=u^3-3uv, \qquad x^2y+xy^2=xy(x+y)=uv.$$

Tada

$$\begin{cases} x^3+y^3=35, \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3-3uv=35, \\ uv=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3-90=35, \\ uv=30 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u^3 = 125, \\ uv = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 5, \\ v = 6. \end{cases}$$

Toliau sprendžiame sistemą

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Pagal Vijeto teoremą jos sprendinių komponentės x ir y yra kvad– ratinės lygties

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

sprendiniai $t_1 = 2$ ir $t_2 = 3$.

Gauname du (1) sistemos sprendinius: (2; 3) ir (3; 2).

Ats.: (2; 3), (3; 2).

2. Taikydami keitinius $u = x + y$, $v = xy$, gauname:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 12, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 12xy, \\ 3(x + y) = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 - 3uv = 12v, \\ v = 3u \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u^3 - 9u^2 - 36u = 0, \\ v = 3u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \text{ arba } u^2 - 9u - 36 = 0, \\ v = 3u \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = 0, \\ v = 0 \end{cases} \text{arba} \begin{cases} u = -3, \\ v = -9, \end{cases} \text{arba} \begin{cases} u = 12, \\ v = 36. \end{cases}$$

Toliau sprendžiame tris lygčių sistemas:

1) $\begin{cases} x + y = 0, \\ xy = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = -3, \\ xy = -9; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 12, \\ xy = 36. \end{cases}$

Pirmoji sistema turi vienintelį sprendinį (0; 0); tačiau jis nėra (2) sistemos sprendinys.

Kitas dvi sistemas keičiame (remdamiesi Vijeto teorema) ati– tinkamomis kvadratinėmis lygtimis:

$$t^2 + 3t - 9 = 0 \text{ ir } t^2 - 12t + 36 = 0.$$

Išsprendę jas, gauname tris (2) sistemos sprendinius:

$$\left(-\frac{3(1+\sqrt{5})}{2};-\frac{3(1-\sqrt{5})}{2}\right),\ \left(-\frac{3(1-\sqrt{5})}{2};-\frac{3(1+\sqrt{5})}{2}\right),\ (6;6).$$

Ats.:

$$\left(-\frac{3(1+\sqrt{5})}{2};-\frac{3(1-\sqrt{5})}{2}\right),\ \left(-\frac{3(1-\sqrt{5})}{2};-\frac{3(1+\sqrt{5})}{2}\right),\ (6;6).$$

3. Pažymėję $u=x+y,\ \ v=xy,$ gauname:

$$\begin{cases}x^2+y^2=7+xy,\\ x^3+y^3=6xy-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u^2-2v=7+v,\\ u^3-3uv=6v-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}u^2-3v=7,\\ u(u^2-3v)=6v-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u^2-3v=7,\\ 7u=6v-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3v=u^2-7,\\ 7u=2(u^2-7)-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3v=u^2-7,\\ 2u^2-7u-15=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3v=u^2-7,\\ u=\frac{1}{4}(7\pm13)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=-\frac{3}{2},\\ v=-\frac{19}{12}\end{cases}\text{arba}\ \begin{cases}u=5,\\ v=6.\end{cases}$$

Lygčių sistemas

$$\begin{cases}x+y=-\frac{3}{2},\\ xy=-\frac{19}{12}\end{cases}\quad\text{ir}\quad\begin{cases}x+y=5,\\ xy=6\end{cases}$$

keičiame kvadratinėmis lygtimis

$$t^2+\frac{3}{2}t-\frac{19}{12}=0\ \ \text{ir}\ \ t^2-5t+6=0.$$

Pirmoji lygtis turi du sprendinius –

$$t_1=\frac{-9-\sqrt{309}}{12}\quad\text{ir}\quad t_2=\frac{-9+\sqrt{309}}{12};$$

todėl gauname du (3) sistemos sprendinius:

$$\left(\frac{-9-\sqrt{309}}{12};\frac{-9+\sqrt{309}}{12}\right)\text{ ir }\left(\frac{-9+\sqrt{309}}{12};\frac{-9-\sqrt{309}}{12}\right).$$

Išsprendę antrą lygtį, gauname dar du (3) sistemos sprendinius: (2; 3) ir (3; 2).

Ats.: $\left(\frac{-9-\sqrt{309}}{12};\frac{-9+\sqrt{309}}{12}\right)$, $\left(\frac{-9+\sqrt{309}}{12};\frac{-9-\sqrt{309}}{12}\right)$, (2; 3), (3; 2).

4. Taikome keitinius $u = x + y$ ir $v = xy.$ Gauname:

$$\begin{cases} x+y=5, \\ x^4+y^4=97 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=5, \\ u^4-4u^2v+2v^2=97 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=5, \\ 625-100v+2v^2=97 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=5, \\ v^2-50v+264=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=5, \\ v=25\pm 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=5, \\ v=6 \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} u=5, \\ v=44. \end{cases}$$

Lygčių sistema

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6 \end{cases}$$

turi du sprendinius: (2; 3) ir (3; 2), o antroji lygčių sistema

$$\begin{cases} x+y=5, \\ v=44 \end{cases}$$

sprendinių neturi, nes kvadratinės lygties $t^2-5t+44=0$ diskriminantas yra neigiamas. Taigi (4) lygčių sistema turi du sprendinius: (2; 3) ir (3; 2).

Ats.: (2; 3), (3; 2).

5. Atlikę kintamųjų pakeitimą pagal formules $u = x + y,\ \ v = xy,$ gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} u^2-2v=2(1+a), \\ u^2=14, \end{cases}$$

iš kurios randame galimas u ir v reikšmes:

$$u = \pm\sqrt{14},$$
$$v = \frac{u^2}{2} - 1 - a = 6 - a.$$

Galimoms nežinomųjų x ir y poroms $(x; y)$ rasti reikia išspręsti dvi lygčių sistemas:

$$\begin{cases} x + y = -\sqrt{14}, \\ xy = 6 - a \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} x + y = \sqrt{14}, \\ xy = 6 - a. \end{cases}$$

Vietoj jų nagrinėkime kvadratines lygtis

$$t^2 + \sqrt{14}t + 6 - a = 0 \quad \text{ir} \quad t^2 - \sqrt{14}t + 6 - a = 0.$$

Ir vienos, ir kitos lygties diskriminantas yra tas pats skaičius

$$D = 14 - 4(6 - a) = 4a - 10.$$

Po vieną sprendinį abi lygtys turi tik tada, kai $D = 0$, t. y. Kai $a = 2{,}5.$ Ir tik šiuo atveju (5) sistema turi du realiuosius spren– dinius – realiųjų skaičių poras $(-\sqrt{3{,}5}; -\sqrt{3{,}5})$ ir $(\sqrt{3{,}5}; \sqrt{3{,}5})$.

Ats.: $a = 2{,}5.$

6. Pažymėkime:

$$u = x + y + z, \quad v = xy + yz + zx, \quad w = xyz.$$

Nagrinėjamąjį simetrinį daugianarį pertvarkykime taip:

$$(x^2 + y^2)(x^2 + z^2)(y^2 + z^2) =$$
$$= ((x^2 + y^2 + z^2) - z^2)((x^2 + y^2 + z^2) - y^2)((x^2 + y^2 + z^2) - x^2) =$$
$$= ((u^2 - 2v) - z^2)(u^2 - 2v) - y^2)(u^2 - 2v) - x^2);$$

čia $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z^2) - 2(xy + yz + zx) = u^2 - 2v.$

Kad būtų trumpiau, pažymėkime

$$a = u^2 - 2v.$$

Tada turėsime reiškinį $(a - x^2)(a - y^2)(a - z^2).$ Jį tvarkykime taip:

$$(a - x^2)(a - y^2)(a - z^2) = (a^2 - a(x^2 + y^2) + x^2y^2)(a - z^2) =$$
$$= a^3 - a^2(x^2 + y^2 + z^2) + a(z^2(x^2 + y^2) + x^2y^2) - x^2y^2z^2 =$$

$$= a^2 - a^2(u^2 - 2v) + a(xy + yz + zx)^2 -$$
$$- 2(xy^2 z + x^2 yz + xyz^2)) - (xyz)^2 =$$
$$= a(v^2 - 2uw) - w^2 = (u^2 - 2v)(v^2 - 2uw) - w^2.$$

Taigi

$$(x^2 + y^2)(x^2 + z^2)(y^2 + z^2) = u^2v^2 - 2u^3w - 2v^3 + 4uvw - w^2.$$

Ats.: $u^2v^2 - 2u^3w - 2v^3 + 4uvw - w^2.$

7. Lygčių sistemą spręskime, taikydami keitinius:

$$u = x + y + z,\ \ v = xy + yz + zx,\ \ w = xyz.$$

Pakeitę kintamuosius, vietoj (6) sistemos turėsime tokią:

$$\begin{cases} \dfrac{v}{w} = \dfrac{13}{3}, \\ u = \dfrac{13}{3}, \\ w = 1. \end{cases}$$

Iš jos gauname vienintelį nežinomųjų u, v ir w trejetą: $u = \dfrac{13}{3}$, $v = \dfrac{13}{3}$, $w = 1$.

Nežinomųjų x, y ir z trejetams, kurie tenkina (6) sistemą, rasti reikia išspręsti šią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x + y + z = \dfrac{13}{3}, \\ xy + yz + zx = \dfrac{13}{3}, \\ xyz = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Ją keičiame (pagal Vijeto formules) trečiojo laipsnio lygtimi

$$t^3 - \frac{13}{3}t^2 + \frac{13}{3}t - 1 = 0. \tag{8}$$

Aišku, kad $t=1$ yra šios lygties sprendinys. Tai reiškia, kad daugianaris $t^3-\frac{13}{3}t^2+\frac{13}{3}t-1$ dalijasi iš dvinario $t-1$. Kitaip sakant, daugianarį $t^3-\frac{13}{3}t^2+\frac{13}{3}t-1$ galima užrašyti sandauga $(t-1)(t^2+bt+c)$, kurioje b ir c yra kurie nors realieji skaičiai.

Skaidykime taip:

$$t^3-\frac{13}{3}t^2+\frac{13}{3}t-1=(t^3-1)-\left(\frac{13}{3}t^2-\frac{13}{3}t\right)=$$

$$=(t-1)(t^2+t+1)-\frac{13}{3}t(t-1)=(t-1)\left(t^2-\frac{10}{3}t+1\right).$$

Taigi (8) lygtis ekvivalenti lygčiai

$$(t-1)\left(t^2-\frac{10}{3}t+1\right)=0.$$

Spręsdami kvadratinę lygtį $t^2-\frac{10}{3}t+1=0$, gauname du sprendinius: $t_1=\frac{1}{3}$ ir $t_2=3$.

Dabar jau turime visus tris (8) lygties sprendinius: $t_1=\frac{1}{3}$, $t_2=3$, $t_3=1$. Jie yra (8) lygties, taigi ir (6) sistemos sprendinių $(x;\,y;\,z)$ komponentės. Keisdami vietomis, gausime šešis spren– dinius: $\left(\frac{1}{3};\,3;\,1\right)$, $\left(\frac{1}{3};\,1;\,3\right)$, $\left(3;\,\frac{1}{3};\,1\right)$, $\left(3;\,1;\,\frac{1}{3}\right)$, $\left(1;\,\frac{1}{3};\,3\right)$; $\left(1;\,3;\,\frac{1}{3}\right)$.

Ats.: $\left(\frac{1}{3};\,3;\,1\right)$, $\left(\frac{1}{3};\,1;\,3\right)$, $\left(3;\,\frac{1}{3};\,1\right)$, $\left(3;\,1;\,\frac{1}{3}\right)$, $\left(1;\,\frac{1}{3};\,3\right)$; $\left(1;\,3;\,\frac{1}{3}\right)$.

8. Iš karto atkreipkime dėmesį į tai, kad sistemą sudarančios lygtys nėra simetrinės. Tačiau, keisdami nežinomuosius vietomis, visada gausime arba tą pačią lygtį, arba kurią nors kitą (9) sistemos lygtį. Kitaip sakant, keisdami nežinomuosius vietomis, visada turėsime tą pačią lygčių sistemą.

Sistemą išspręskime dviem būdais.

1 būdas. Iš pradžių sudėkime visas tris lygtis ir gausime simet–rinę lygtį

$$x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}. \qquad (10)$$

Sudauginę visas tris lygtis (atskirai kairiąsias ir dešiniąsias puses, gausime kitą simetrinę lygtį:

$$(x + y)(y + z)(z + x) = \frac{8}{xyz}. \qquad (11)$$

Trečią simetrinę lygtį galima gauti taip. Pirmą lygtį padauginkime iš z $(z \neq 0)$, antrą padauginkime iš x $(x \neq 0)$, o trečią – iš y $(y \neq 0)$. Tada gautąsias lygtis (jos ekvivalenčios pradinėms lygtims, kai $x \neq 0$, $y \neq 0$ ir $z \neq 0$) sudėkime, ir turėsime simetrinę lygtį

$$xy + yz + zx = 3. \qquad (12)$$

Toliau spręskime simetrinių lygčių (10) – (12) sistemą. Taikydami keitinius

$$u = x + y + z,\ \ v = xy + yz + zx,\ \ w = xyz,$$

gausime tokią sistemą:

$$\begin{cases} u = \dfrac{v}{w}, \\ uv - w = \dfrac{8}{w}, \\ v = 3. \end{cases} \qquad (13)$$

Antrąją lygtį užrašėme išreiškę pagrindiniais simetriniais daugia–nariais kairiąją (11) lygties pusę:

$$(x + y)(y + z)(z + x) = (u - z)(u - x)(u - y) =$$
$$= u^3 - u^2(x + y + z) + u(xy + yz + zx) - xyz = uv - w.$$

Spręsdami (13) sistemą, gauname: $v = 3,\ \ u = \dfrac{3}{w}$ ir $w^2 = 1;$ todėl $v = 3,\ \ w = \pm 1,\ \ u = \pm 3.$

Nežinomiesiems *x, y* ir *z* rasti reikia išspręsti dvi lygčių sistemas:

$$\begin{cases} x + y + z = -3, \\ xy + yz + zx = 3, \\ xyz = -1 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} x + y + z = 3, \\ xy + yz + zx = 3, \\ xyz = 1. \end{cases}$$

Jas keičiame trečiojo laipsnio lygtimis (pagal Vijeto teoremą):

$$t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0 \quad \text{ir} \quad t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0,$$

kurias galima užrašyti taip: $(t+1)^3 = 0$ ir $(t-1)^3 = 0.$ Iš čia $t = -1$ arba $t = 1.$ Vadinasi, $x = y = z = -1$ arba $x = y = z = 1.$

Gauname du (9) sistemos sprendinius:

(–1; –1; –1) ir (1; 1; 1).

Ats.: (–1; –1; –1), (1; 1; 1).

2 būdas. Iš pirmos lygties atėmę antrąją lygtį (atskirai kairiąją pusę iš kairiosios ir dešiniąją pusę iš dešiniosios), gauname lygybę

$$x - z = \frac{2(x - z)}{xz},$$

iš kurios išplaukia lygybė $z = x$ arba $xz = 2.$ Jei būtų $xz = 2,$ tai iš pirmos lygties gautume $y = 0;$ tačiau turi būti $x \neq 0,\ \ y \neq 0$ ir $z \neq 0.$ Taigi $xz \neq 2.$ Taip įrodome, kad $z = x.$

Analogiškai įrodome, kad $y = z.$ Atėmę trečiąją lygtį iš pirmosios lygties, gauname lygybę

$$y - z = \frac{2(y - z)}{yz},$$

iš kurios išplaukia dvi galimybės: $y = z$ arba $yz = 2.$ Lygybė $yz = 2$ negalima (gautume $x = 0$), todėl būtinai $y = z$. Vadinasi, $x = y = z.$ Tada iš bet kurios (9) sistemos lygties gauname lygtį $2x = \dfrac{2}{x},$ turinčių du (9) sistemos sprendinius: (–1; –1; –1) ir (1; 1; 1).

Ats.: (–1; –1; –1), (1; 1; 1).

9. Kadangi $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$,

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc$,

tai įrašę į šias išraiškas $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=1$ ir $a^3+b^3+c^3=1$, gauname sistemą

$$\begin{cases} ab+bc+ca=0, \\ ab+bc+ca-abc=0, \end{cases}$$ iš kurios išplaukia, kad $abc=0$.

10. Tegu a, b ir c yra trikampio ABC kraštinių ilgiai. Pagal uždavinio sąlygą galioja šios lygybės: $a+b+c=12$, $a^2+b^2+c^2=50$ ir $a^3+b^3+c^3=216$. Jų kairiosios pusės yra simetriniai daugianariai (kintamųjų a, b ir c atžvilgiu).

Pažymėkime

$$u=a+b+c,\ \ v=ab+bc+ca,\ \ w=abc.$$

Tada (žr. 3 pvz.)

$$a^2+b^2+c^2=u^2-2v,\ \ a^3+b^3+c^3=u^3-3uv+3w.$$

Todėl spręsdami sistemą

$$\begin{cases} a+b+c=12, \\ a^2+b^2+c^2=50, \\ a^3+b^3+c^3=216, \end{cases}$$

gauname:

$$\begin{cases} u=12, \\ u^2-2v=50, \\ u^3-3uv+3w=216 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=12, \\ 12^2-2v=50, \\ 12^3-36v+3w=216 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=12, \\ v=47, \\ w=60 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=12, \\ ab+bc+ca=47, \\ abc=60. \end{cases}$$

Pastarąją sistemą keičiame kubine lygtimi

$$t^3-12t^2+47t-60=0.$$

Kadangi visi koeficientai yra sveikieji skaičiai, tai jos sprendinių ieškome tarp laisvojo nario daliklių

$$(\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 30, \pm 60).$$

Tiesiogiai tikrindami nustatome, kad 3, 4 ir 5 tenkina šią lygtį. Vadinasi, trikampio kraštinių ilgiai yra 3, 4 ir 5.

Kadangi $5^2 = 3^2 + 4^2$, tai pagal Pitagoro teoremą *ABC* yra statusis trikampis. Jo plotas (pažymėkime *S*) yra $S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6.$

Ats.: 6.

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Užduoties įvado paaiškinimuose buvo pasakyta, kad sėkmingam uždavinio sprendimui būtina iš skirtingų buteliukų (mėginti) imti po skirtingą tablečių kiekį, nes, matyt, tik taip ir „išsiskiria“ tas buteliukas su netikusiomis tabletėmis, kur kiekviena tabletė 1 gramu lengvesnė.

Dar truputį pagalvojus ima aiškėti, kad sumaniau tvarkantis įmanoma „išsiversti“ vienu vieninteliu svėrimu.

Tam pakanka iš pirmojo buteliuko paimti vieną tabletę, iš antrojo – jau 2, iš trečiojo – net 3 ir taip toliau, iš kiekvieno buteliuko imant vis po daugiau, iš dešimtojo buteliuko – pilną dešimtį tablečių.

O dabar viskas bus taip pat iki pat dešimto buteliuko, iš kurio užduoties paaiškinimuose buvo imama 10 tablečių, o dabar nebebus imama – nė vienos.

Tada bendras paimtų sverti tablečių skaičius neprašoks 450 gramų, o leidžiama sverti iki 500 gramų, todėl svarstyklės jį tiksliai pasvers, o toliau jau viskas taip pat, pagal tai, kiek gramų pasvėrus truks iki tų 450 gramų, visai kaip užduoties įvado paaiškinimuose.

2. Suskirstykime visas monetas į 3 grupes po tris monetas ir pirmu svėrimu ant svarstyklių lėkštelių uždėkime po 3 monetas.

Jeigu svarstyklės yra pusiausvyroje, tai netikra moneta (toji, kuri lengvesnė) yra likusiame dar nesvertame trejete – jį ir paliksime antrajam veiksmui.

Jeigu nusveria kuri nors iš sveriamų lėkštelių, tai netikra moneta yra toje svarstyklių lėkštelėje, kuri pakilo aukštyn – tada tas 3 monetas ir paliksime antrajam veiksmui.

Antruoju veiksmu imame dvi paliktojo trejeto monetas ir dedame jas po vieną į skirtingas lėkšteles.

Jeigu svarstyklės pusiausvyroje, tai toji nesvertoji trejeto moneta yra netikra, o jeigu svarstyklės nėra pusiausvyroje, tai ta netikroji moneta yra aukštyn iškilusioje svarstyklių lėkštelėje.

3. Sprendimo būdas „pratęsia“ ką tik papasakotą sprendimą.

Pirmuoju veiksmu padalijame 81 monetą į tris lygias krūveles po 27 monetas kiekvienoje krūvelėje ir pirmuoju veiksmu į kiekvieną svarstyklių lėkštelę dedame po vieną krūvelę.

Toliau viskas panašiai: jeigu yra pusiausvyra, tai netikra moneta (ta, kuri lengvesnė) yra tarp tų dar nesvertų 27 monetų, o jeigu pusiausvyros nėra, tada tarp tų 27-ų, kurios iškilo aukštyn.

Taip abiem atvejais po pirmojo veiksmo visada nustatome, tarp kurių 27-ų monetų yra ieškomoji netikroji moneta.

Antruoju veiksmu tas atrinktas 27 monetas dalijame į tris krūveles, jau po 9 monetas kiekvienoje krūvelėje ir dvi krūveles dedame po vieną į kiekvieną lėkštelę.

Vėl jeigu yra pusiausvyra, tai netikroji moneta yra tarp to 9-to, kuris nebuvo ant svarstyklių, o jeigu ne – tai tarp to 9-to, kuris dabar buvo nesveriamas.

Trečiuoju veiksmu imame atrinktąjį devynetą ir turime dar 2 svėrimus ir lygiai taip pat, kaip tai buvo 2-ojo uždavinio sprendimo apraše, surandame tą netikrąją monetą.

4. Sakykime, monetos turi vardus: moneta A, moneta B, moneta C ir moneta D.

Tada 1 veiksmu pasveriame monetas A ir B, antruoju – A ir C, o trečiuoju A ir D.

Jeigu visais trim atvejais svarstyklės rodo tokį patį svorį, tai moneta A yra netikra ir lieka tik nustatyti, ar ji lengvesnė, ar sunkesnės už likusias.

Tuo tikslu ketvirtuoju reikia pasverti kurias nors 2 likusias tikras moneta, sakykime, B ir C ir palyginti gautąjį svorį su buvusiu (triskart vienodu) svoriu.

Jeigu ne visais trimis atvejais svarstyklės rodo vienodą svorį, tai tada dviem atvejais svoris bus vienodas, o trečiuoju atveju – skirtingas.

Nemažindami bendrumo, tarkime, kad tas nevienodas svoris gautas sveriant monetas A ir B. Tada moneta B netikra ir pagal tai ar tas dvejetas sveria daugiau, ar mažiau už tuos kitus du dvejetus, nustatysime, ar moneta B yra lengvesnė, ar sunkesnė už tas likusias tikras monetas.

Jeigu dabar gavome mažiau, negu tada, tai netikra moneta yra sunkesnė, o jeigu daugiau, tai lengvesnė už likusias monetas.

5. Radome dar tokius 2 būdus, kaip stebukladaris Edmundas galėtų skirstyti girą kitaip, negu jis darė pačios užduoties paaiškinimuose

1 būdas	**Savanoris**	**Pilnos statinės**	**Pusiau pilnos statinės**	**Tuščios Statinės**
	Antanas	**2**	**3**	**3**
	Eugenijus	**2**	**3**	**3**
	Juozas	**1**	**5**	**4**

2 būdas	**Savanoris**	**Pilnos statinės**	**Pusiau pilnos statinės**	**Tuščios Statinės**
	Antanas	**3**	**1**	**4**
	Eugenijus	**1**	**5**	**2**
	Juozas	**1**	**5**	**2**

6. Pilstyti galima kad ir taip:

10 l indas	**7 l indas**	**3 l indas**
10	**0**	**0**
7	**0**	**3**
7	**3**	**0**
4	**3**	**3**
4	**6**	**0**
1	**6**	**3**
1	**7**	**2**
8	**0**	**2**

8	**2**	**0**
5	**2**	**3**
5	**5**	**0**

7. Jį vėl patogu parodyti veiksmų lentelėje, rodančią vieną iš galimų pilstymo būdų.

20 l indas	**5 l indas**	**3 l indas**
20	**0**	**0**
17	**0**	**3**
17	**3**	**0**
14	**3**	**3**
14	**5**	**1**
19	**0**	**1**
19	**1**	**0**
16	**1**	**3**
16	**4**	**0**

8. Pirmiausiai svirtinėmis svarstyklėmis „tikriname“ lygybę 100 + 300 = 400, arba į vieną lėkštelę dedame 100 ir 300 gramų svarelius, o į kitą 400 gramų svarelį.

Jeigu svarstyklės pusiausviros, tai visi „dalyvaujantieji“ svareliai yra „geri“, arba tiek ir sveria, kiek ant jų pažymėta.

Tada dar neliestas 200 gr. svarelis turi sverti ne tiek, kiek ant jo parašyta, ir kad nustatytume, ar jis sunkesnis, ar lengvesnis, negu kad ant jo parašyta, antruoju veiksmu ant svirtinių svarstyklių „išdėliojame“ lygybę

$$100 + 400 = 200 + 300.$$

Ji negali būti teisinga, nes 200 gr. svarelis netikras. Tada, jei nusveria ta pusė, kur yra 100 ir 400 gramų svareliai, tai 200 svarelis yra lengvesnis, negu kad ant jo parašyta, o jeigu nusveria ta pusė, kur yra 200 ir 300 gramų svareliai, tai 200 gramų svarelis yra sunkesnis, negu kad ant jo parašyta.

Jeigu tikrindami negauname lygybės

$$100 + 300 = 400,$$

tai galimi du atvejai:

$$(A): 100 + 300 > 400 \quad \text{arba} \quad (B): 100 + 300 < 400.$$

atveju tai reiškia:

atvejis (100+): arba 100 gramų svarelis yra sunkesnis, negu kad ant jo nurodyta,

atvejis (300+): arba 300 gramų svarelis yra sunkesnis, negu kad ant jo nurodyta,

atvejis (400 –): arba 400 gramų svarelis yra lengvesnis, negu kad ant jo nurodyta.

Tada antruoju svėrimu “tikriname” lygybę

$$100 + 200 = 300,$$

(primename, kad 200 gr. svarelis yra tikras!)

Jeigu

$$100 + 200 = 300,$$

tai tikri yra ir 100, ir 300 gramų svareliai, vadinasi, 400 gr. svarelis yra lengvesnis, negu nurodyta

(atvejis 400–).

Jeigu

$$100 + 200 < 300,$$

tai tada turime atvejį

(300+),

o jeigu

$$100 + 200 > 300,$$

tai galioja atvejis

(100+).

Atvejis (A) yra išnagrinėtas.

Analogiškai nagrinėjame atvejį (B):

$$100 + 300 < 400.$$

Šiuo atveju tai reiškia, kad:

arba 100 gramų svarelis yra lengvesnis, negu kad ant jo nurodyta, (atvejis (100–)),

arba 300 gramų svarelis yra lengvesnis, negu kad ant jo nurodyta (atvejis (300–)),

arba 400 gramų svarelis yra sunkesnis, negu kad ant jo nurodyta (atvejis (400+)).

Tada antruoju svėrimu vėl „tikriname“ lygybę

$$100 + 200 = 300,$$

(vėl primename, kad 200 gr. svarelis yra tikras!)

Jeigu

$$100 + 200 = 300,$$

tai tikri yra ir 100, ir 300 gramų svareliai, vadinasi, 400 gr. svarelis yra sunkesnis, negu nurodyta

(atvejis 400+).

Jeigu

$$100 + 200 < 300,$$

tai tada turime atvejį

(100–),

o jeigu

$$100 + 200 > 300,$$

tai atvejis

(300–).

9. Duokime monetoms vardus: A, B, C, D, E.

Pirmuoju veiksmu dedame ant svarstyklių (skirtingose lėkštelėse) monetas

A ir B,

o antruoju – C ir D.

Jeigu nei vienu, nei kitu atveju nebuvo pusiausvyros, tai kiekvienu veiksmu ant svarstyklių buvo nedaugiau kaip 1 tikra moneta, vadinasi, nesvertoji 5-toji moneta

E

yra tikra.

O jeigu pirmuoju ar antruoju svėrimu matėme pusiausvyrą, tai net abi tokios svėrimo monetos yra tikros.

10. Iš pradžių padalijame tas 12 monetų į 3 krūveles po 4 monetas kiekvienoje krūvelėje.

Pirmuoju svėrimu dedame ant skirtingų svirtinių svarstyklių lėkštelių po 4 monetas. Jei svarstyklės yra pusiausvyroje, tai likusi moneta yra tarp dar nesvertųjų 4 (monetos 9–12).

Tada monetas 9-12 dedame su bet kuriuo ketvertu (sakysime, su monetomis 1–4) ir pagal tai, ar nusveria ketvertas 9–12 ar ketvertas 1–4, nustatome, ar netikroji ketverto 9–12 moneta yra atitinkamai sunkesnė ar lengvesnė už tikrąsias monetas.

Jeigu svarstyklės nėra pusiausvyroje, tai tarkime kad nusvėrė kuri nors lėkštelė (tarkime, monetos 1–4). Tada nuimame kitas keturias monetas (monetos 5–8) ir dedame monetas 9–12.

Jeigu dabar yra pusiausvyra, tai netikra moneta yra tarp monetų 5–8 ir yra lengvesnė už tikrąsias.

Jeigu ir dabar nusveria ta pusė su monetomis 1–4, tai netikra moneta yra tarp jų ir yra sunkesnė už tikrąsias.

Taigi po dviejų svėrimų nustatome tą monetų ketvertą A, B, C, D, kuriame yra netikra moneta, sakykime, A. Nemažindami bendrumo galime sakyti, kad netikra moneta A lengvesnė už likusias.

Atvejis, kai netikroji moneta A yra sunkesnė, būtų nagrinėjamas analogiškai, sukeičiant vietomis žodį

„lengvesnė“su žodžiu „sunkesnė“.

Vadinasi, turime, kad netikra moneta A yra lengvesnioji iš likusių tikrinti keturių monetų.

Tas keturias monetas dalijame bet kaip į 2 dalis po dvi monetas ir dedame ant skirtingų svirtinių svarstyklių likučių.

Ta pusė, kur yra moneta A, pakyla aukštyn.

Sužinojome, tarp kurių dviejų monetų yra moneta A.

Paskutiniuoju svėrimu palyginame to dvejeto monetas.

Aukštyn pakilusioje svarstyklių lėkštelėje esanti moneta yra ieškomoji moneta A .

PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Perrinkime m ir n reikšmes, tenkinančias 3 teoremos sąlygas, kai $n < m \leq 8$ – yra 15 primityviųjų Pitagoro trejetų:

Nr.	*n*	*m*	*P. P. t.*
1.	1	2	4, 3, 5
2.	1	4	8, 15, 17
3.	1	6	12, 35, 37
4.	1	8	16, 63, 65
5.	2	3	12, 5, 13
6.	2	5	20, 21, 29
7.	2	7	28, 45, 53
8.	3	4	24, 7, 25
9.	3	8	48, 55, 73

10.	4	5	40, 9, 41
11.	4	7	56, 33, 65
12.	5	6	60, 11, 61
13.	5	8	80, 39, 89
14.	6	7	84, 13, 85
15.	7	8	112, 15, 113

2. Kadangi $a = 84 = 2mn = 2 \cdot 42 \cdot 1 = 2 \cdot 21 \cdot 2 = 2 \cdot 14 \cdot 3 = 2 \cdot 7 \cdot 6$, tai yra 4 primityvieji Pitagoro trejetai, kurių $a = 84$:

Nr.	*n*	*m*	*P. P. t.*
1.	1	42	84, 1763, 1765
2.	2	21	84, 437, 445
3.	3	14	84, 187, 205
4.	6	7	84, 13, 85

3. Kadangi $a = 140 = 2mn = 2 \cdot 70 \cdot 1 = 2 \cdot 35 \cdot 2 = 2 \cdot 14 \cdot 5 = 2 \cdot 10 \cdot 7$, tai visi tokių stačiųjų trikampių kraštinių ilgiai yra primityvieji Pitagoro trejetai:

Nr.	*n*	*m*	*P. P. t.*
1.	1	70	140, 4899, 4901
2.	2	35	140, 1221, 1229
3.	5	14	140, 171, 221
4.	7	10	140, 51, 149

4. Galimi skaičiaus *b* skaidiniai dauginamaisiais yra:
$b = 35 = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n) = \quad 35 \cdot 1 = 7 \cdot 5$. Taigi
$\begin{cases} m + n = 35, \\ m - n = 1 \end{cases}$ arba $\begin{cases} m + n = 7, \\ m - n = 5. \end{cases}$
Iš čia $m = 18, n = 17$ arba $m = 6, n = 1$. Todėl gauname du primityviuosius Pitagoro trejetus $(612, 35, 613)$ ir $(12, 35, 37)$

5. Galimi skaičiaus 165 skaidiniai dauginamaisiais yra:

$$165 = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n) = 165 \cdot 1 = 55 \cdot 3 = 33 \cdot 5 = 15 \cdot 11\,.$$

Tuomet $\begin{cases} m+n=165, \\ m-n=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=83, \\ n=82 \end{cases}$ arba $\begin{cases} m+n=55, \\ m-n=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=29, \\ n=26, \end{cases}$

arba $\begin{cases} m+n=33, \\ m-n=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=19, \\ n=14, \end{cases}$ arba $\begin{cases} m+n=15, \\ m-n=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=13, \\ n=2. \end{cases}$

Visi keturi *m* ir *n* skaičių rinkiniai tenkina 3 teoremos sąlygas.Todėl gauname šiuos primityviuosius Pitagoro trejetus: $(13612, 165, 13613)$, $(1508, 165, 1517)$, $(532, 165, 557)$, $(52, 165, 173)$, kurie ir yra ieškomųjų stačiųjų trikampių kraštinių ilgiai.

6. Sprendžiame lygčių sistemą: $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y=\frac{5}{7}x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{35}{37}, \\ y=-\frac{12}{37}. \end{cases}$

Ats.: $(\frac{35}{37}, -\frac{12}{37})$

7. Per tašką $A(0;-1)$ einančios tiesės yra pavidalo $y=kx-1$. Čia įrašę taško $B(7;3)$ koordinates, gauname:

$7k-1=3 \Rightarrow k=\frac{4}{7} \Rightarrow y=\frac{4}{7}x-1$. Tuomet ieškomasis tiesės ir apskritimo susikirtimo taškas yra

$$x=\frac{2k}{k^2+1}=\frac{2\cdot\frac{4}{7}}{\left(\frac{4}{7}\right)^2+1}=\frac{56}{65},\quad y=\frac{\left(\frac{4}{7}\right)^2-1}{\left(\frac{4}{7}\right)^2+1}=-\frac{33}{65}.$$

Vadinasi, atitinkamas Pitagoro primityvusis trejetas yra $(56, 33, 65)$.

Ats.: $y=\frac{4}{7}x-1$; $\left(\frac{56}{65}; -\frac{33}{65}\right)$; $(56, 33, 65)$.

8. Įbrėžtojo apskritimo spindulio ilgį pažymėkime *r* ir apskaičiuokime trikampio *ABC* plotą: $S=\frac{1}{2}(6+r)(8+r)=\frac{1}{2}(r^2+14r+48)$. Pagal

Pitagoro teoremą: $(6+r)^2+(8+r)^2=196 \Rightarrow r^2+14r=48$. Taigi $S=\frac{1}{2}(r^2+14r+48)=48$. Kad trikampis būtų Herono trikampis, jo kraštinių ilgiai turi būti natūralieji skaičiai. Apskaičiuokime įbrėžtinio apskritimo spindulį:
$r^2+14r-48=0 \Rightarrow r=-7+\sqrt{97} \notin N$. Taigi trikampis nėra Herono.

9. Pagal Herono formulę apskaičiuokime trikampio plotą:

$$p=\frac{1}{2}\cdot 54=27,\ S=\sqrt{27\cdot 14\cdot 7\cdot 6}=\sqrt{15876}=126.$$

Taigi trikampis – Herono. Kadangi $S=\frac{1}{2}\cdot 21\cdot h$, tai $h=12$. Pagal Pitagoro teoremą rasime ieškomųjų kraštinės dalių x ir y ($x+y=21$) ilgius: $x=\sqrt{13^2-12^2}=5$, $x=\sqrt{20^2-12^2}=16$. Atkreipkime dėmesį, kad šio Herono trikampio aukštinė – taip pat natūralusis skaičius.

10. Naudodamiesi formulėmis

$$x_{n+1}=2x_n+3y_n,\ y_{n+1}=x_n+2y_n,\ \ x_1=2,\ y_1=1,\ n=1,2,\ldots,$$

gauname: $x_1=2,\ y_1=1 \Rightarrow x_2=7,\ y_2=4 \Rightarrow x_3=26,\ y_3=15 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_4=97,\ y_4=56$. Pagal šias reikšmes gauname Herono trikampius ($a=2x-1,\ \ b=2x,\ \ c=2x+1$): $(3,4,5)$, $(13,14,15)$, $(51,52,53)$, $(193,194,195)$, kurių plotai pagal Herono formulę atitinkamai lygūs: 6, 84, 1170, 16296.

ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Pasinaudoję pirmąja papildomąja lygybe, antrąją lygybę pertvarkome taip:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{7}{10} \Rightarrow \frac{a+b+c}{7(a+b)}+\frac{a+b+c}{7(b+c)}+\frac{a+b+c}{7(c+a)}=\frac{7}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\frac{c}{a+b}+1+\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}=\frac{49}{10}\Rightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{49}{10}-3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{19}{10}.$$

2. Iš lygybės $a+4b=1$ išsireiškę a, reiškinį a^2+4b^2 pertvarkome taip:

$$a^2+4b^2=(1-4b)^2+4b^2=1-8b+20b^2=20\left(b^2-\frac{2}{5}b\right)+1=$$

$$=20\left(b-\frac{1}{5}\right)^2-\frac{20}{25}+1=20\left(b-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{1}{5}\geq\frac{1}{5}.$$

Lygybė galima tik tada, kai $b=\frac{1}{5}$ ir $a=\frac{1}{5}$.

3. Realieji skaičiai x, y ir z tenkina lygybes $x+y+z=xyz$, $x^2=yz$, $x\cdot y\cdot z\neq 0$. Įrodykite, kad $x^2\geq 3$.

Įrodymas. Papildomąsias sąlygas pertvarkome taip:

$$\begin{cases} y+z=xyz-x, \\ yz=x^2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y+z=x^3-x, \\ yz=x^2. \end{cases}$$

Taigi realieji skaičiai y ir z yra kvadratinės lygties

$$t^2+(x-x^3)t+x^2=0$$

sprendiniais, jeigu

$$D=(x-x^3)^2-4x^2=x^2-2x^4+x^6-4x^2=x^2(x^4-2x^2-3)=$$

$$=x^2[(x^2-1)^2-4]\geq 0\Rightarrow (x^2-1)^2\geq 4\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x^2-1\geq 2, \\ x^2-1\leq -2 \end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x^2\geq 3, \\ x^2\leq -1 \end{array}\right.\Rightarrow x^2\geq 3.$$

Taigi nelygybė yra įrodyta.

4. <u>1 būdas.</u> Lygybę $a+b+c=0$ pertvarkome taip:

$$a+b=-c \Rightarrow a^2+2ab+b^2=c^2 \Rightarrow ab=\frac{c^2-(a^2+b^2)}{2}.$$

Kadangi $a^2+b^2=1-c^2$, tai

$$ab=\frac{c^2-(1-c^2)}{2} \Rightarrow ab=\frac{2c^2-1}{2}.$$

Turime:

$$a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2)^2+c^4-2a^2b^2=(1-c^2)^2+c^4-2\left(\frac{2c^2-1}{2}\right)^2=$$

$$=1-2c^2+2c^4-\frac{4c^4-4c^2+1}{2}=\frac{2-4c^2+4c^4-4c^4+4c^2-1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Taigi $a^4+b^4+c^4=\dfrac{1}{2}$.

<u>2 būdas.</u> $a+b+c=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=0 \Rightarrow ab+bc+ac=-\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2abc\,(a+b+c)=\frac{1}{4} \Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=\frac{1}{4}.$$

Turime: $a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-$

$$2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)=1-2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

Taigi $a^4+b^4+c^4=\dfrac{1}{2}$, kai $a+b+c=0$ ir $a^2+b^2+c^2=1$.

5. Remsimės nelygybe $a^2+b^2\geq\dfrac{1}{2}(a+b)^2$. Kadangi $a+b\geq 1$, tai $a^2+b^2\geq\dfrac{1}{2}$. Taigi

$$a^4+b^4=(a^2)^2+(b^2)^2\geq\frac{1}{2}(a^2+b^2)^2\geq\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}.$$

Vadinasi, $a^4+b^4\geq\frac{1}{8}$, kai $a+b\geq1$.

6. Remdamiesi nelygybe $x^2+y^2\geq\frac{1}{2}(x+y)^2$ ir lygybe $a+b=1$ gauname:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}\right)^2=$$

$$\frac{1}{2}\left(1+1+\frac{b}{a}+1+\frac{a}{b}\right)^2=\frac{1}{2}\left(3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2\geq\frac{1}{2}\left(3+2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}\right)^2=\frac{25}{2}.$$

Taigi $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{25}{2}$.

7. Turime:

$$(x+2y)(y+2z)(z+2x)=(x+y+y)(y+z+z)(z+x+x)\geq$$

$$\geq3\sqrt[3]{xy^2}\cdot3\sqrt[3]{yz^2}\cdot3\sqrt[3]{zx^2}=27\sqrt[3]{(xyz)^3}=27,\text{ nes } xyz=1.$$

Taigi $(x+2y)(y+2z)(z+2x)\geq27$, jei $xyz=1$ ir $x>0$, $y>0$, $z>0$.

8. Remdamiesi lygybe $x+y+z=1$, gauname:

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)=\left(\frac{x+y+z}{x}-1\right)\left(\frac{x+y+z}{y}-1\right)\left(\frac{x+y+z}{z}-1\right)=$$

$$=\frac{y+z}{x}\cdot\frac{x+z}{y}\cdot\frac{x+y}{z}\geq\frac{2\sqrt{yz}\cdot2\sqrt{xz}\cdot2\sqrt{xy}}{xyz}=\frac{8\sqrt{x^2y^2z^2}}{xyz}=8.$$

Taigi $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)\geq 8$, jei $x+y+z=1$ ir $x>0$, $y>0$, $z>0$.

9. Kadangi $S\geq 6\sqrt[6]{x\cdot y\cdot z\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}}=6$, tai $S_{\text{maž.}}=6$, kai $x=y=z=$ $=\frac{1}{x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$, t. y. kai $x=y=z=1$. Tačiau tada $x+y+z=3>\frac{3}{4}$. Tikėtina, kad šis reiškinys mažiausią reikšmę įgyja, kai $x=y=z=\frac{1}{4}$. Todėl ieškosime tokio skaičiaus α, kad galiotų lygybė

$$x=y=z=\frac{1}{\alpha x}=\frac{1}{\alpha y}=\frac{1}{\alpha z}.$$

Kai $x=y=z=\frac{1}{4}$, turime: $\frac{4}{\alpha}=\frac{1}{4}$. Iš čia $\alpha=16$. Taigi

$$S=x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=$$

$$=x+y+z+\frac{1}{16x}+\frac{1}{16y}+\frac{1}{16z}+\frac{15}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq$$

$$\geq 6\sqrt[6]{x\cdot y\cdot z\cdot\frac{1}{16x}\cdot\frac{1}{16y}\cdot\frac{1}{16z}}+\frac{15}{16}\cdot 3\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}\geq$$

$$\geq 6\cdot\frac{1}{4}+\frac{15}{16}\cdot\frac{3}{\frac{x+y+z}{3}}=\frac{3}{2}+\frac{15}{16}\cdot\frac{3}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}+\frac{45}{4}=\frac{51}{4}.$$

Vadinasi, $S_{\text{maž.}}=\frac{51}{4}$, kai $x=y=z=\frac{1}{4}$.

Ats.: $S_{\text{maž.}}=\frac{51}{4}$, kai $x=y=z=\frac{1}{4}$ ir $x>0$, $y>0$, $z>0$.

10. Kadangi

$$\sqrt{4x+1}=\sqrt{(4x+1)\cdot 1}\le\frac{4x+1+1}{2}=2x+1,$$

$$\sqrt{4y+1}\le 2y+1,$$

$$\sqrt{4z+1}\le 2z+1,$$

tai

$$S=\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1}\le 2(x+y+z)+3.$$

Lygybė galima tik tada, kai $4x+1=1,\;\; 4y+1=1,\;\; 4z+1=1,$ t. y. kai $x=y=z=0.$ Tačiau tada $x+y+z=0+0+0=0\ne 1.$ Tikėtina, kad nagrinėjamas reiškinys įgys didžiausią reikšmę, kai $x=y=z=\frac{1}{3}$ (tada $x+y+z=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$), t. y., kai $4\cdot\frac{1}{3}+1=\frac{7}{3}.$ Todėl reiškinį pertvarkome taip:

$$S=\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1}=$$

$$=\sqrt{\frac{3}{7}}\left(\sqrt{(4x+1)\cdot\frac{7}{3}}+\sqrt{(4y+1)\cdot\frac{7}{3}}+\sqrt{(4z+1)\cdot\frac{7}{3}}\right)\le$$

$$\le\sqrt{\frac{3}{7}}\left(\frac{4x+1+\frac{7}{3}}{2}+\frac{4y+1+\frac{7}{3}}{2}+\frac{4z+1+\frac{7}{3}}{2}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{3}{7}}\,\big(2x+2y+2z+5\big)=\sqrt{\frac{3}{7}}\big(2+5\big)=\sqrt{21}.$$

Lygybė (didžiausia reiškinio reikšmė) galima tik tada, kai $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Taigi $S_{\text{didž.}}=\sqrt{21},$ kai $x=y=z=\frac{1}{3}$.

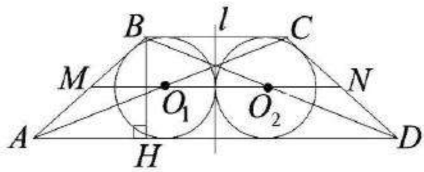
Ats.: $S_{\text{didž.}}=\sqrt{21},$ kai $x=y=z=\frac{1}{3}$.

SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Sakykime, kad apskritimų spindulių ilgis yra R, jų centrai O_1 ir O_2 yra trapecijos įstrižainėse AC ir BD (1 pav.). Dėka simetrijos tiesės l, statmenos trapecijos $ABCD$ pagrindams ir einančios per duotųjų apskritimų lietimosi tašką, atžvilgiu akivaizdu, kad $ABCD$ – lygiašonė trapecija. Kadangi apskritimai liečia trapecijos pagrindus, tai jų centrai yra trapecijos vidurinėje linijoje MN. Taigi atkarpa MO_1 yra trikampio ABC vidurinė linija, todėl $MO_1 = \frac{1}{2}BC.$ Analogiškai

$$NO_1 = \frac{1}{2}AD,$$

$$NO_2 = \frac{1}{2}BC.$$



1 pav.

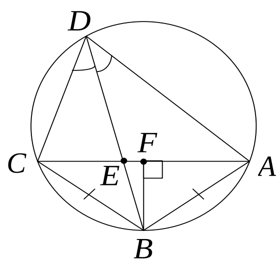
Bet $NO_1 = O_1O_2 + O_2N,$

t. y. $\frac{1}{2}AD = 2R + \frac{1}{2}BC.$

Iš čia $2R = \frac{1}{2}(AD - BC).$ Nubrėžiame trapecijos aukštinę BH, $BH = 2R = \frac{1}{2}(AD - BC).$ Kita vertus $AH = \frac{1}{2}(AD - BC),$ t. y. $AH = BH$, statusis trikampis ABH – lygiašonis, todėl $\angle A = 45^\circ.$

Ats.: $\angle A = \angle D = 45^\circ,\ \angle B = \angle C = 135^\circ.$

2. Apie trikampį ADC apibrėžkime apskritimą (2 pav.). Iš taško B nuleiskime statmenį BF į keturkampio įstrižainę AC. Iš stačiųjų trikampių AFB ir CFB lygumo gauname, kad $AF = FC,$ t. y. tiesė FB yra įstrižainės AC vidurio statmuo. Kadangi taške B kertasi trikampio ADC kampo D pusiaukampinė ir kraštinės AC vidurio statmuo, tai taškai A,



2 pav.

B, *C* ir *D* yra viename apskritime (1 pavyzdys). Iš įbrėžtųjų kampų savybių turime

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 80^\circ,$$

$$\angle CDB = \angle CAB = \angle ACB = 40^\circ,$$

$$\angle CAD = \angle CBD = \angle CBE = 180^\circ - \angle ACB - \angle CEB =$$

$$= (180^\circ - \angle CEB) - \angle ACB = \angle AEB - \angle ACB = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ.$$

Ats.: 30°.

3. Nubrėžkime stygas *AB*, *AC* ir *AD*. Iš įbrėžtinių kampų bei kampų tarp liestinės ir stygos savybių gauname

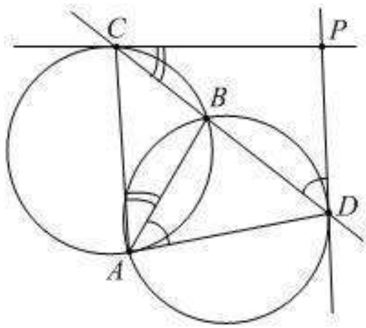
$$\angle BAD = \angle BDP,$$

$$\angle CAB = \angle BCP.$$

Iš čia seka, kad

$$\angle CAD = \angle BAD + \angle CAB =$$

$$= \angle BDP + \angle BCP = 180^\circ - \angle CPD,$$

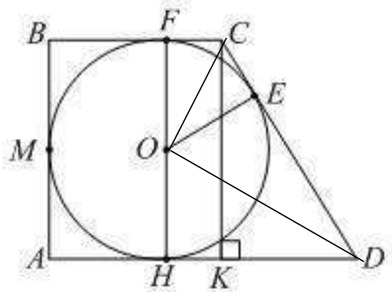


3 pav.

t. y. $\angle CAD + \angle CPD = 180^\circ$.

Pagal įbrėžtinių keturkampių savybę *ACPD* – įbrėžtas į apskritimą keturkampis.

4. Sakykime, kad trapecijos *ABCD* kampai *A* ir *B* – statieji, taškas *O* – įbrėžto į trapeciją apskritimo centras, *R* – jo spindulio ilgis (4 pav.). Kadangi $OA = OB$, tai sąlygoje duoti atstumai iki trapecijos viršūnių yra $OC = 3$ $OD = 9$. Sakykime, kad taškuose *M*, *F*, *E* ir *H* įbrėžtas į trapeciją apskritimas liečia jos kraštines *AB*, *BC*, *CD* ir *DA*. Kadangi tiesės *CO* ir *DO* yra



4 pav.

trapecijos kampų *C* ir *D* pusiaukampinės, o $\angle C + \angle D = 180^\circ$, tai

$$\angle OCD + \angle ODC = \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle D = 90^\circ,$$

todėl $\angle COD = 90^\circ$ ir $CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = 3\sqrt{10}.$

Iš stačiųjų trikampių COF ir DOF turime

$$OF = \sqrt{3^2 - CF^2} = OE = \sqrt{9^2 - ED^2} = \sqrt{9^2 - (\sqrt{90} - CF)^2},$$

t. y. $9 - CF^2 = 81 - (\sqrt{90} - CF)^2.$

Pertvarkę gauname

$$2\sqrt{90}\cdot CF = 18,\quad CF = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

Taigi

$$R = OF = \frac{9\sqrt{10}}{10}.$$

Tuomet

$$AB = 2R = \frac{9\sqrt{10}}{5},\quad BC = R + CF = \frac{6\sqrt{10}}{5},$$

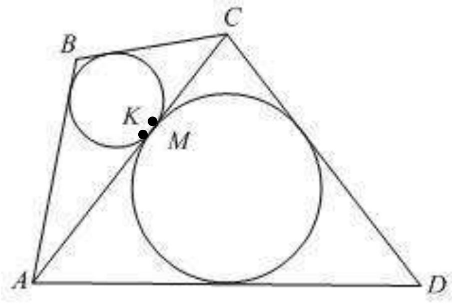
$$AD = R + DF = R + \sqrt{OD^2 - OE^2} = \frac{18\sqrt{10}}{5}.$$

Ats.: $AB = \frac{9\sqrt{10}}{5},\ BC = \frac{6\sqrt{10}}{5},\ CD = 3\sqrt{10},\ AD = \frac{18\sqrt{10}}{5}.$

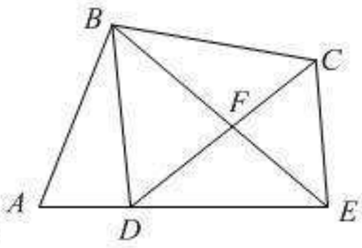
5. Sakykime, kad į trikampį ABC įbrėžtas apskritimas įstrižainę AC liečia taške K, o į trikampį ACD įbrėžtas apskritimas ją liečia taške M (5 pav.). Jei P_{ABC} ir P_{ACD} – atitinkamai trikampių ABC ir ACD pusperimetriai, tai $CK = P_{ABC} - AB$, o $CM = P_{ACD} - AD$. Tuomet

$$MK = |CM - CK| =$$
$$= \frac{1}{2}|CD + AC - AD - BC - AC + AB| =$$
$$= \frac{1}{2}|(AB + CD) - (AD + BC)| = 0,$$

nes apie keturkampį $ABCD$ galima apibrėžti apskritimą. Taigi taškai M ir K sutampa, todėl apskritimai, liečiantieji tiesę AC tame pačiame taške, tame taške liečiasi.



5 pav.



6 pav.

6. Kadangi tiesės *BD* ir *CE* lygiagrečios, tai keturkampis *BDEC* – trapecija. Jei jos įstrižainės *CD* ir *BE* kertasi taške *F* (6 pav.), tai trikampių *BCF* ir *DEF* plotai lygūs. Kadangi keturkampis *ABFD* yra ir keturkampio *ABCD* ir trikampio *ABE* bendroji dalis, o trikampių *BCF* ir *DEF* plotai lygūs, tai trikampio *ABE* plotas lygus keturkampio *ABCD* plotui.

Ats.: Plotai lygūs.

7. Kaip įrodyta 5 pavyzdyje, trapecijos *ABCD* $(AD \parallel BC)$ pagrindų *AD* ir *BC* vidurio taškai *P* ir *Q*, o taip pat trapecijos šoninių kraštinių sankirtos taškas *E* yra vienoje tiesėje (7 pav.). Kadangi

$$\angle ABC + \angle DCB = 270^\circ,$$

tai

$$\angle A + \angle D = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ,$$

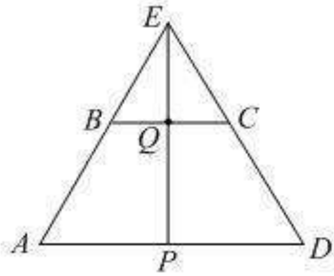
t. y. kampas *AED* – statusis. Stačiojo trikampio *BEC* pusiaukraštinė *EQ* yra lygi įžambinės *BC* pusei, t. y.

$$EQ = \frac{1}{2}b;$$

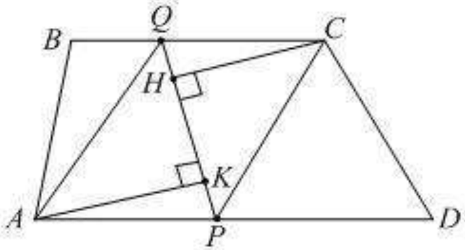
analogiškai stačiojo trikampio *AED* pusiaukraštinė *EP* lygi įžambinės *AD* pusei, t. y. $EP = \frac{1}{2}a.$ Kadangi $PQ = EP - EQ,$ tai

$$PQ = \frac{1}{2}(a-b).$$

Ats.: $\frac{1}{2}(a-b).$



7 pav.



8 pav.

8. Sakykime, kad trapecijos *ABCD* pagrindų *AD* ir *BC* vidurio taškai yra *P* ir *Q* (8 pav.). Kaip parodėme 6 pavyzdyje, keturkampio *AQCP* plotas lygus pusei trapecijos *ABCD* ploto. Bet keturkampio *AQCP* plotas lygus trikampių *APQ* ir *CPQ* plotų sumai. Jei *AK* ir *CH* – statmenys, nuleisti iš priešingųjų trapecijos viršūnių *A* ir *C* į jos antrąją vidurinę liniją, tai trikampių *APQ* ir *CPQ* plotai lygūs atitinkamai $S_1 = \frac{1}{2} PQ \cdot AK$, $S_2 = \frac{1}{2} PQ \cdot CH$, tuomet trapecijos *ABCD* plotas lygus dvigubam keturkampio *APCQ* plotui, t. y. $S = PQ \cdot AK + PQ \cdot CH = PQ \cdot (AK + CH)$, ką ir reikėjo įrodyti.

9. Trikampio *ABC* kraštinių *BC*, *AC* ir *AB* ilgius pažymėkime atitinkamai *a*, *b*, *c*. Sakykime, kad taškai A_1 ir B_1 yra kraštinių *BC* ir *AC* vidurio taškai, o taške *E* susikerta tiesės O_1A_1 ir O_3B_1 (9 pav.). Tuomet

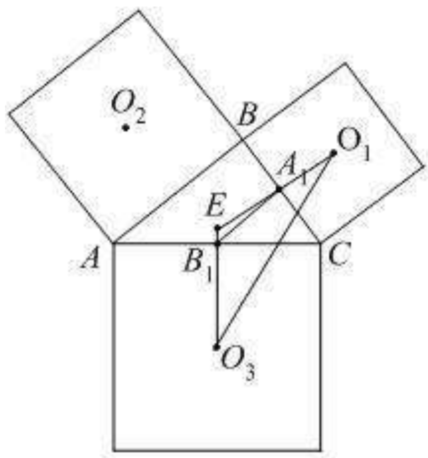
$$B_1O_3 = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} b,$$

$$A_1B_1 = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} c,$$

$$A_1O_1 = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} a,$$

$$\angle O_3B_1A_1 = 90^\circ + \angle A,$$

$$\angle O_1A_1B_1 = 90^\circ + \angle B.$$



9 pav.

Keturkampio CA_1EB_1 du kampai A_1 ir B_1 – statieji, todėl $\angle E = 180^\circ + \angle C$. Keturkampiui $B_1O_3O_1A_1$ taikome pirmąją kosinusų teoremą ir gauname

$$O_1O_3^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{a^2}{4} - 2\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2}\cos(90^\circ + A) - 2\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{a}{2}\cos(180^\circ - C) -$$

$$-2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{c}{2}\cos(90^\circ + B) =$$

$$= \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{bc}{2}\sin A + \frac{ac}{2}\sin B + \frac{ab}{2}\cos C.$$

Bet $\frac{bc}{2}\sin A = \frac{ac}{2}\sin B = S$ (trikampio ABC plotas), o $ab\cos C = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$. Taigi

$$O_1O_3^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + 2S - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2) = 2S + \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Kita vertus iš trikampio AO_2C turime

$$CO_2^2 = CA^2 + AO_2^2 - 2CA\cdot AO_2\cos(45^\circ + \angle A) =$$

$$= b^2 + \left(\frac{\sqrt{2}\,c}{2}\right)^2 - 2b\frac{\sqrt{2}}{2}c\cdot\cos(45^\circ + \angle A) =$$

$$= b^2 + \frac{c^2}{2} - \sqrt{2}bc(\cos 45^\circ\cos A - \sin 45^\circ\sin A) =$$

$$= b^2 + \frac{c^2}{2} - \sqrt{2}bc\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos A - \sin A) =$$

$$= b^2 + \frac{c^2}{2} - bc\cos A + bc\sin A = b^2 + \frac{c^2}{2} - \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) + 2S =$$

$$= b^2 + \frac{a^2}{2} + 2S = O_1O_3^2.$$

Taigi $O_1O_3 = CO_2$.

10. Jei iš atkarpų *MA*, *MB* ir *MC* bent dvi yra lygios, tai įrodomoji nelygybė akivaizdi. Taigi įrodysime, kai visos atkarpos *MA*, *MB* ir *MC* yra skirtingo ilgio. Sakykime, kad atkarpa *MB* yra iš jų ilgiausia (10 pav.). Keturkampiui *ABCM* taikome antrąją kosinusų teoremą:

$$MB^2 \cdot AC^2 =$$
$$= AB^2 \cdot MC^2 + BC^2 \cdot MA^2 - 2MA \cdot AB \cdot BC \cdot MC \cdot \cos(\angle B + \angle AMC).$$

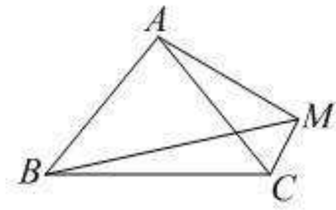
Kadangi $AB = BC = AC,$ tai

$$MB^2 = MC^2 + MA^2 -$$
$$- 2MA \cdot MC \cdot \cos(60^\circ + \angle BMC).$$

Kadangi

$\cos(60^\circ + \angle BMC) \geq -1,$ tai

$$MB^2 \leq MA^2 + MC^2 + 2MA \cdot MC =$$
$$= (MA + MC)^2,$$



10 pav.

t. y. $MB \leq MA + MC$. Lygybė $MB = MA + MC$ galima, kai $\cos(60^\circ + \angle AMC) = -1,$ t. y. kai $60^\circ + \angle AMC = 180^\circ$, o tai reiškia, kad taškai *A*, *B*, *C* ir *M* yra viename apskritime. Taigi lygybė galima kai taškas *M* – apibrėžto apie trikampį *ABC* apskritimo taškas.

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tegu M_1, M_2, M_3, M_4 ir M_5 yra gretimai augantys medžiai, o atstumai tarp jų atitinkamai 120, 30, 67,5 ir 15 metrų. Aišku, kad tarp M_4 ir M_5 medžių reikia pasodinti bent vieną medį, nes, padalinę 67,5 iš 15, negauname sveikojo skaičiaus.

Jei tarp M_4 ir M_5 pasodintume *k* medžių, tai atstumas tarp gretimų medžių (jį pažymėkime *d*) būtų $d = \dfrac{15}{k+1}$. Tada tarp M_1 ir M_2 turėtume pasodinti

$$\frac{120}{d} - 1 = 8(k+1) - 1 = 8k + 7$$

medžių, tarp M_2 ir M_3

$$\frac{30}{d}-1=2(k+1)-1=2k+1$$

medžių, o tarp M_3 ir M_4

$$\frac{67{,}5}{d}-1=\frac{9(k+1)}{2}-1=\frac{9k+7}{2}$$

medžių.

Bendras papildomai pasodintų medžių skaičius būtų

$$(8k+7)+(2k+1)+\frac{9k+k}{2}+k=\frac{31k+23}{2}.$$

Mažiausias natūralusis skaičius *k*, kuriam esant $31k+23$ dalijasi iš 2, yra 1.

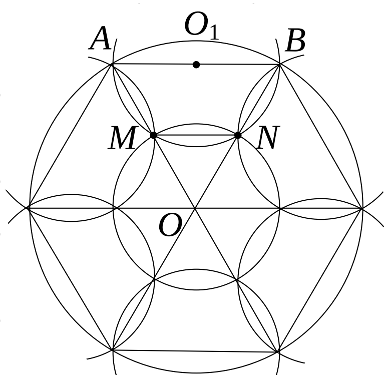
Taigi reikia pasodinti 27 medžius; tarpai tarp gretimų medžių tada bus 7,5 m.

Ats.: 27.

2. Nubrėžkime spindulio $2R$ apskritimą (centras O) ir įbrėžkime į jį taisyklingąjį šešiakampį (1 pav.).

Raskime kiekvienos kraštinės vidurio tašką ir iš jo nubrėžkime spindulio R apskritimą. Šeši skrituliai uždengs dalį didžiojo skritulio.

Mažųjų apskritimų susikirtimo taškai (M, N ir kiti) yra atstumu R nutolę nuo didžiojo apskritimo centro. Tokią išvadą galima padaryti, įrodžius, kad MN yra trikampio OAB vidurinė linija.



1 pav.

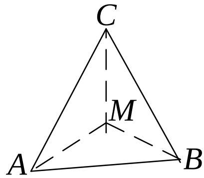
Vadinasi, spindulio R skritulys, nubrėžtas iš taško O, uždengs likusią didžiojo skritulio dalį.

Iš viso reikia 7 skritulių.

Ats.: 7.

3. Kai $n = 3$, tai didžiausio atstumo tarp taškų galimai mažiausia reikšmė lygi 1 (kai taškai yra lygiakraščio trikampio, kurio kraštinės ilgis lygus1, viršūnės).

Kai $n = 4$, reikia išnagrinėti dvi galimybes.



2 pav.

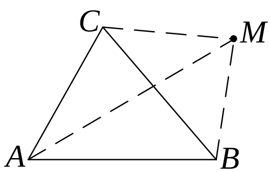
1) Trys taškai, tarkime, *A*, *B* ir *C* sudaro trikampį, kurio kraštinės netrumpesnės už 1, o ketvirtas taškas *M* yra to trikampio viduje (žr. 2 pav.). Pagal sąlygą $MA \geq 1$, $MB \geq 1$ ir $MC \geq 1$, todėl ilgiausios trikampio *ABC* kraštinės ilgis negali būti mažesnis už $\sqrt{3}$.

2) Trys taškai, tarkime, *A*, *B* ir *C* sudaro trikampį, kurio kraštinės netrumpesnės už 1, o ketvirtas taškas *M* yra jo išorėje (žr. 3 pav.). Aišku, kad $AB \geq 1$, $BC \geq 1$, $CA \geq 1$; be to, $MC \geq 1$ ir $MB \geq 1$.

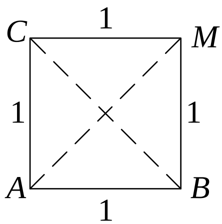
Reikia išsiaiškinti galimas atstumų *AM* ir *BC* reikšmes. Kai *ABMC* kvadratas (4 pav.), kurio kraštinės lygios 1, tai $AM = BC = \sqrt{2}$. Kitais atvejais ilgesnioji įstrižainė ilgesnė už $\sqrt{2}$.

Vadinasi, atveju $n = 4$ didžiausio atstumo tarp taškų galimai mažiausia reikšmė lygi $\sqrt{2}$.

Ats.: a) Kai $n = 3$, gauname 1. b) Kai $n = 4$, gauname $\sqrt{2}$.

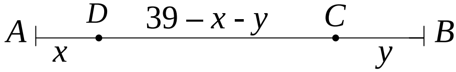


3 pav.



4 pav.

4. Turistų buvimo vietą pažymėkime *A*, o stovyklos vietą pažymėkime *B*.



5 pav.

Nagrinėkime tokį planą. Motociklininkas nuveža pirmąjį turistą iki taško C (žr. pav.) ir šis baigia kelionę pėsčiomis. Antrasis turistas eina pėsčiomis, kol sugrįš motociklininkas; nuo taško D iki B jį veža motociklininkas.

Taigi tašką C reikia pasirinkti taip, kad abu turistai stovyklą pasiektų kartu.

Tegu $AD = x$, $CB = y$, o t – visas kelionės laikas.

Tada $t = \frac{x}{5} + \frac{39-x}{65} = \frac{39-y}{65} + \frac{y}{5}$. Iš pastarosios lygybės išplaukia, kad $x = y$.

Atstumą $AC + CD$, lygų $AD + 2DC = 78 - 3x$ motociklininkas nuvažiuotų per $0{,}2x$ valandų. Vadinasi, turi galioti lygybė

$$\frac{78-3x}{65} = 0{,}2x.$$

Iš čia gauname $x = \frac{39}{8}$, o tada $t = 1{,}5$.

Ats.: 1,5 h.

5. Kadangi

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 17}{x-2} = \frac{(x^2-2x)+(x-2)-15}{x-2} =$$

$$= \frac{x(x-2)+(x-2)-15}{x-2} = x + 1 - \frac{15}{x-2},$$

tai nesunku nustatyti, kurioms kintamojo x sveikosioms reikšmėms esant $f(x)$ yra sveikasis skaičius. Galimos dvinario $x-2$ reikšmės tokios: ± 1, ± 3, ± 5, ± 15.

Vadinasi, galimos x reikšmės yra 2 ± 1, 2 ± 3, 2 ± 5, 2 ± 15. Apskaičiavę funkcijos reikšmes, matome, kad $f(-13) = f(3) = -11$, o kituose taškuose reikšmės didesnės.

Ats.: –13; 3.

6. Pertvarkykime funkciją apibrėžiantį reiškinį taip:

$$\frac{x^4+1}{x^2+1} = \frac{(x^4-1)+2}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{2}{x^2+1} = (x^2+1) + \frac{2}{x^2+1} - 2 =$$

$$=\left(\sqrt{x^2+1}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2+2\sqrt{2}-2.$$

Vadinasi, $f(x)\geq 2\sqrt{2}-2$ su visais realiaisiais skaičiais x. Lygybė galima tik tada, kai

$$\sqrt{x^2+1}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}}=0.$$

Išsprendę šią lygtį, gauname

$$x^2=\sqrt{2}-1,$$

o iš čia $x=\pm\sqrt{\sqrt{2}-1}$.

Taigi $\min f(x)=2\sqrt{2}-2$.

Ats.: $2\sqrt{2}-2$.

7. Kvadratinio trinario $x^2+ax-1-a$ diskriminantas D yra teigiamas arba lygus nuliui skaičius:

$$D=a^2+4(1+a)=(a+2)^2.$$

Todėl kvadratinio trinario $x^2+ax-1-a$ šaknys x_1 ir x_2 yra realieji skaičiai.

Pagal Vijeto teoremą $x_1+x_2=-a$ ir $x_1\cdot x_2=-1-a$. Todėl

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-a)^2-2(-1-a)=$$

$$=a^2+2a+2=(a+1)^2+1\geq 1;$$

lygybė galioja tik tada, kai $a+1=0$, t. y. kai $a=-1$.

Ats.: –1.

8. Kvadratiniai trinariai x^2+x+1 ir x^2-x+1 yra teigiami su visais realiaisiais skaičiais x, todėl funkcija apibrėžta visoje realiųjų skaičių tiesėje. Sumą $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}$ pertvarkykime taip:

$$\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=\left(\sqrt[4]{x^2+x+1}-\sqrt[4]{x^2-x+1}\right)^2+$$

$$+2\sqrt[4]{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=\left(\sqrt[4]{x^2+x+1}-\sqrt[4]{x^2-x+1}\right)^2+$$

$$+2\sqrt[4]{x^4+x^2+1}\geq 2\sqrt[4]{x^4+x^2+1}\geq 2\cdot 1=2;$$

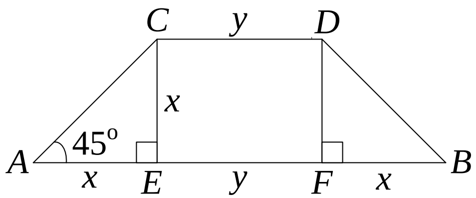
lygybė galima tik tada, kai $x=0$.

Vadinasi, $\min\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)=2$; šią reikšmę funkcija įgyja taške $x=0$.

9. Pagal uždavinio sąlygą (pažymėjus $AE=FB=x,\quad EF=CD=y$) $CE=x,\ \ AC=BD=x\sqrt{2}.$ Todėl

$$AB+BD+DC+CA=2x+2y+2\sqrt{2}x=4.$$

Iš čia $y=2-(1+\sqrt{2})x.$



5 pav.

Trapecijos plotas (pažym. S) yra

$$S=\frac{(AB+CD)\cdot CE}{2}=(x+y)\cdot x=(2-\sqrt{2}x)\cdot x.$$

Nagrinėdami šią formulę, gauname:

$$S=\left(2-\sqrt{2}x\right)x=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-x\right)x=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}x-x^2\right)=$$

$$=-\sqrt{2}\left(x^2-\sqrt{2}x\right)=-\sqrt{2}\left(\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\leq\frac{\sqrt{2}}{2};$$

lygybė galioja tik tada, kai $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Taigi didžiausio ploto, lygaus $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, trapecijos kraštinės tokios:

$$CD = 2 - \left(1 + \sqrt{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2},$$

$$AB = \sqrt{2} + \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}, \quad AC = BD = 1.$$

Ats.: $AB = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}$, $BC = CA = 1$, $BC = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}$; $S = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

10. Nubrėžkime statųjį trikampį ABC ($\angle BAC = 90^\circ$), kuriame $AB \geq AC$. Šiame trikampyje $AE \perp BC$, $AE = 2$; $AD = DB$, CD – pusiaukraštinė. Tegu $AB = a$, $AC = b$, $BE = c_1$, $EC = c_2$, $CD = l$. Pagal Pitagoro teoremą

$$a^2 = 4 + c_1^2, \; b^2 = 4 + c_2^2, \; a^2 + b^2 = (c_1 + c_2)^2.$$

Iš šių sąryšių gauname:

$$(c_1 + c_2)^2 = 8 + c_1^2 + c_2^2 \Rightarrow 2c_1c_2 = 8 \Rightarrow c_1c_2 = 4.$$

Iš stačiojo trikampio ADC

$$l^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 = \frac{a^2 + 4b^2}{4} = \frac{4 + c_1^2 + 16 + 4c_2^2}{4} =$$

$$= \frac{(2c_2 - c_1)^2 + 4c_1c_2 + 20}{4} = \frac{(2c_2 - c_1)^2 + 36}{4} = \left(\frac{2c_2 - c_1}{2}\right)^2 + 9 \geq 9;$$

čia lygybė galima tik tada, kai $2c_2 - c_1 = 0$, t. y. $c_1 = 2c_2$.

Taigi galimai trumpiausia pusiaukraštinė CD lygi 3. Tokio ilgio ji bus tik tada, kai $c_1 = 2c_2$.

Iš lygybės $c_1c_2 = 4$ gauname, kad $c_2 = \sqrt{2}$ ir $c_1 = 2\sqrt{2}$. Tada $a^2 = 4 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 12$, $b^2 = 4 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 6$. Vadinasi, ieškomojo trikampio kraštinių ilgiai tokie: $AB = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $AC = \sqrt{6}$, $BC = 3\sqrt{2}$.

Ats.: $2\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$.

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

1	**2**	**3**	**4**
17	(2; 4), (4; 2), (–2; –4), (–4; –2)	$\sqrt{33}$	$\frac{\pi ab}{4}$

Išleistose LJMM knygelėse buvo nagrinėtos tokios temos:

I KNYGA

I. J. Šinkūnas. *Kvadratinis trinaris.*
II. G. Stepanauskas. *Rekurenčiosios sekos.*
III. R. Kašuba. *Elementarinės matematikos uždavinių sprendimo metodai.*
IV. A.Skūpas. *Funkcija.*
V. V. Pekarskas. *Sveikoji ir trupmeninė skaičiaus dalis. Jų savybės.*
VI. P. Survila. *Kombinatorikos ir tikimybių skaičiavimo pradmenys.*
VII. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. *Grafai.*

II KNYGA

I. J. Šinkūnas, A. Urbonas. *Funkcija.*
II. E. Mazėtis. *Apskritimų geometrija. Įbrėžtiniai ir apibrėžtiniai daugiakampiai. Taisyklingieji daugiakampiai.*
III. B. Vasylienė. *Skaičiaus modulis algebros uždaviniuose.*
IV. J. Šinkūnas. *Figūrų panašumas. Talio teorema ir jos taikymai.*
V. D. Jurgaitis. *Matematinės indukcijos metodas.*
VI. A. Urbonas. *Lygčių, nelygybių bei jų sistemų ekvivalentumas.*
VII. B. Grigelionis. *Urnų schemos ir baigtinės Markovo grandinės.*
VIII. A. Juozapavičius, J. Šinkūnas. *Koordinačių sistemos. Žemėlapiai.*

III KNYGA

I. E. Stankus. *Skaičių dalumas.*
II. R. Skrabutėnas. *Grandininės trupmenos.*
III. V. Vitkus. *Vidurkiai.*
IV. E. Mazėtis. *Vektoriai.*
V. J. Šinkūnas. *Plokščių figūrų plotai.*
VI. S. Stakněnė. *Iracionaliosios lygtys ir nelygybės.*
VII. A. Apynis, E. Stankus. *Trigonometrinės lygtys ir nelygybės.*
VIII. G. Stepanauskas. *Sekos.*

IV KNYGA

I. G. Stepanauskas. *Skaičiavimo sistemos.*
II. P. Vaškas. *Antrosios eilės kreivės.*
III. L. Maliaukienė. *Įdomioji logika.*
IV. A. Urbonas. *Atvirkštinės funkcijos.*
V. A. Apynis. *Optimizavimo uždaviniai.*
VI. P. Survila. *Kombinatorikos pradmenys.*
VII. P. Survila. *Tikimybių teorijos pradmenys.*
VIII. A. Nagelė. *Kompleksiniai skaičiai.*

V KNYGA

I. O. Jablonskienė. *Planimetrijos uždaviniai.*
II. V. Pekarskas. *Antrosios eilės kreivės.*
III. G. Stepanauskas. *Skaičių dalikliai.*
IV. V. Stakėnas. *Šifrai ir skaičiai.*
V. A. Apynis. *Tiesinių lygčių sistemos.*
VI. R. Skrabutėnas. *Algebrinės lygtys.*
VII. V. Vitkus. *Brėžimo uždaviniai.*
VIII. R. Kašuba. *Sudėtis, atimtis ir daugyba stulpeliu bei dalyba kampu.*

VI KNYGA

I. A. Bakštys. *Finansų matematika.*
II. E. Mazėtis. *Geometrinės transformacijos.*
III. B. Galbogienė. *Funkcijos reikšmių sritis.*
IV. V. Stakėnas. *Paskalio trikampis.*
V. A. Apynis. *Tiesinių lygčių sistemų taikymo uždaviniai.*
VI. L. Narkevičius. *Invariantų metodas.*
VII. J. Šinkūnas. *Tiesinės rekurenčiosios sekos.*
VIII. A. Apynis. *Uždaviniai su parametru.*

VII KNYGA

I. E. Stankus. *Skaičių dalumas, dalumo požymiai.*
II. E. Mazėtis. *Nelygybės geometrijoje.*
III. J. Šinkūnas. *Kraštinio elemento principas.*
IV. A. Apynis, E. Stankus. *Indukcijos principas.*
V. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. *Grafai. Oilerio formulė.*
VI. J. Vainavičienė. *Geometrinės vietos.*
VII. A. Apynis. *Aibės, taikymo uždaviniai.*
VIII. A. Skūpas. *Išvestinės ir integralai.*

VIII KNYGA

I. J. Šinkūnas. *Vidurkiai ir jų taikymai.*
II. I. Bagdonienė. *Dirichlė principas.*
III. E. Stankus. *Diofantinės lygtys.*
IV. L.Papreckienė. *Daugianarių dalumas.*
V. A. Apynis, J. Šinkūnas. *Niutono binomas.*
VI. E. Tumėnaitė. *Logaritminės ir rodiklinės lygtys, nelygybės ir tapatybės.*
VII. E. Mazėtis. *Stereometrijos uždaviniai.*
VIII. A. Apynis. *Trigonometriniai uždaviniai.*

IX KNYGA

I. A. Urbonas. *Dirichlė principas.*
II. A. Apynis. *Neapibrėžtųjų koeficientų metodas.*
III. A. Apynis. *Sumavimas.*
IV. E. Tumėnaitė. *Logaritminės lygtys ir nelygybės.*
V. E. Mazėtis. *Geometrijos uždavinių sprendimo analiziniai metodai.*
VI. E. Stankus, J. Šinkūnas. *Pilnosios tikimybės formulė.*
VII. E. Mazėtis. *Vektoriai erdvėje.*
VIII. E. Stankus, J. Šinkūnas. *Progresijos.*

X KNYGA

I. A. Apynis, E. Stankus. *Racionaliosios lygtys.*
II. A. Urbonas. *Nestandartiniai uždaviniai.*
III. V. Pekarskas. *Trigonometrinių keitinių taikymas sprendžiant uždavinius.*
IV. A. Apynis. *Nelygybės tekstiniuose uždaviniuose.*
V. J. Šinkūnas. *Kompleksiniai skaičiai ir jų taikymas.*
VI. E. Mazėtis. *Kai kurios planimetrijos teoremos ir jų taikymai.*
VII. E. Stankus. *Bernulio formulės ir jų taikymas.*
VIII. E. Mazėtis. *Briaunainiai.*

XI KNYGA

I. E. Tumėnaitė. *Kvadratinės lygtys tekstiniuose uždaviniuose.*
II. A. Apynis. *Bezu teorema.*
III. J. Šinkūnas. *Masių centras ir jo taikymas.*
IV. E. Stankus. *Lyginiai ir jų taikymas.*
V. A. Apynis. *Funkcinės lygtys.*
VI. E. Mazėtis. *Trigonometrijos taikymas geometrijoje.*
VII. J. Šinkūnas. *Iškilosios funkcijos ir nelygybės.*
VIII. E. Stankus. *Priklausomi ir nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.*