LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Jaunajam matematikui

13

2010–2012 mokslo metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Vilnius, 2016

Leidinio sudarytojai:
Antanas APYNIS
Edmundas MAZĖTIS
Eugenijus STANKUS
Juozas ŠINKŪNAS

Leidinį maketavo Kristina LYNDIENĖ

TURINYS

PRATARMĖ

Šioje tryliktojoje Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos knygelėje „Jaunajam matematikui“ yra pateikta 2010–2012 mokslo metais nagrinėtų temų metodinė medžiaga, užduotys LJMM klausytojams ir jų sprendimai.

Knygelės turinį sudaro šios temos: kvadratinio trinario savybių taikymo uždaviniai (A. Apynis), apskritimų geometrija (E. Mazėtis), pirminiai skaičiai (G. Stepanauskas), kaip spręsti, kai nelabai žinai kaip (R. Kašuba), simetrinės tapatybės, lygtys ir nelygybės (J. Šinkūnas), nelygybės su parametrais (V. Pekarskas), atsitiktiniai dydžiai (E. Stankus), sukiniai (E. Mazėtis). Skaitytojas taip pat ras 2010 metų stojamąją užduotį ir jos sprendimą bei 2012 metų baigiamosios užduoties pavyzdį.

Kad būtų lengviau naudotis knygelėmis „Jaunajam matematikui“, šio leidinio paskutiniuose puslapiuose yra įdėtas ankstesnių dvylikos LJMM mokslo metų temų sąrašas.

Antanas Apynis
Edmundas Mazėtis
Eugenijus Stankus
Juozas Šinkūnas

Metodinė medžiaga ir užduotys

STOJAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Iš vietovės A į vietovę B išvyko motociklininkas. Tuo pačiu laiku iš vietovės B į vietovę A išvyko dviratininkas. Važiuodami pastoviais greičiais jie susitiko po 45 min. ir nesustodami tęsė kelionę toliau. Apskaičiuokite, kiek laiko motociklininkas važiavo iš A į B, jeigu dviratininkas kelionėje užtruko dviem valandomis ilgiau.

2. Parke augo klevai ir liepos. Klevų buvo 60 procentų visų medžių. Pavasarį parke liepų pasodino tiek, kad klevų skaičius sudarė jau tik 20 procentų, o rudenį klevų pasodino tiek, kad jų dalis vėl tapo 60 procentų. Kiek kartų padidėjo medžių skaičius parke?

3. Žymus Lietuvos visuomenės veikėjas gimė po Žalgirio mūšio. Jo gimimo metų skaitmenų suma dalijasi iš penkių. Atėmus iš gimimo metų skaičiaus 270, gaunamas skaičius, užrašytas tais pačiais skaitmenimis tik atvirkščia tvarka. Kuriais metais gimė šis žmogus? Gal žinote jo pavardę?

4. Iš kokio mažiausio skaičiaus reikia padauginti skaičių 2940, kad gautoji sandauga būtų natūraliojo skaičiaus kubas?

5. Lentoje parašyti penki sveikieji skaičiai. Sudėjus juos po du, gaunamos tokios sumos: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Kokie skaičiai buvo parašyti lentoje?

6. Su kuriais natūraliaisiais skaičiais n skaičius $\dfrac{n^3-1}{5}$ yra pirminis?

7. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y+z=4, \\ 2xy-z^2=16. \end{cases}$$

8. Į statųjį trikampį ABC (kampas C – statusis), kurio perimetras 36 cm, įbrėžtas apskritimas. Apskritimas trikampio įžambinę liečia taške D. Apskaičiuokite trikampio kraštines, kai $AD : DB = 2 : 3$.

9. Trapecijos, kurios kampai prie vieno pagrindo yra $40°$ ir $50°$, vidurinė linija lygi 4, o atkarpos, jungiančios pagrindų vidurio taškus, ilgis lygus 1. Raskite trapecijos pagrindų ilgius.

10. Futbolo kamuolys aptrauktas tinkleliu, kuriame iš kiekvieno mazgo išeina 3 virvutės. Ar gali tinklelis turėti 2011 mazgų?

I. KVADRATINIO TRINARIO SAVYBIŲ TAIKYMO UŽDAVINIAI

Antanas Apynis
(Vilniaus universitetas)

Kintamojo x atžvilgiu reiškinys $ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$ vadinamas *kvadratiniu trinariu*; skaičiai a, b ir c vadinami jo *koeficientais*, o c – dar ir *laisvuoju nariu*. Turėsime mintyje, kad koeficientai a, b ir c bei kintamojo x reikšmės yra realieji skaičiai.

Kintamojo x reikšmė $\bar{x}$, kuriai esant kvadratinio trinario reikšmė lygi nuliui, vadinama šio trinario *šaknimi*.

Kvadratinio trinario $ax^2 + bx + c, \; a \neq 0,$ šaknų paieška labai supaprastėja, išskyrus jame dvinario kvadratą. Tada iš lygybės

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x\right) + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0,$$

gauname lygybę

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

iš kurios aiškiai matyti, kad kvadratinis trinaris gali turėti realiųjų šaknų tik kai $b^2 - 4ac \geq 0.$ Reiškinys $b^2 - 4ac$ paprastai žymimas raide D ir vadinamas kvadratinio trinario *diskriminantu*. Kvadratinio trinario šaknų formulė tokia:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Du kvadratiniai trinariai

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 \text{ ir } a_2x^2 + b_2x + c_2 \; (a_1 \neq 0, \; a_2 \neq 0)$$

vadinami *lygiais*, jeigu $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ ir $c_1 = c_2$.

Funkcija, apibrėžiama lygtimi $y = f(x)$, $f(x) = ax^2 + bx + c,$ $a \neq 0,$ vadinama *kvadratine funkcija*.

Stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje kvadratinės funkcijos grafikas yra *parabolė*. Šios parabolės šakos kyla aukštyn, kai $a > 0$; jos leidžiasi žemyn, kai $a < 0$.

Kvadratinę funkciją $y = ax^2 + bx + c,\ \ a \neq 0,$ užrašius lygtimi

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

lengva nustatyti, kad tiesė

$$x + \frac{b}{2a} = 0$$

yra parabolės simetrijos ašis, o taškas $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$ yra parabolės viršūnė.

Išnagrinėkime kelis uždavinius, kuriuos gana lengva išspręsti taikant kvadratinio trinario ir kvadratinės funkcijos savybes.

1 pavyzdys. Nustatykime, ar yra koeficiento *b* reikšmių, kurioms esant viena kvadratinio trinario

$$f(x) = 3x^2 + bx - 14$$

šaknis mažesnė už –1, o kita – didesnė už 2.

Sprendimas. Kadangi diskriminantas $D = b^2 + 168$ yra teigiamas skaičius, tai kvadratinis trinaris turi dvi realiąsias šaknis su visomis koeficiento *b* reikšmėmis. Šaknų formulės tokios:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 + 168}}{6} \text{ ir } x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 168}}{6}.$$

Pagal uždavinio sąlygą reikia ieškoti koeficiento *b* reikšmių, kurioms esant galioja nelygybės

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 + 168}}{6} < -1 \text{ ir } \frac{-b + \sqrt{b^2 + 168}}{6} > 2.$$

Šių nelygybių sistemos sprendimas yra sunkokas, todėl samprotaukime kitaip.

Funkcijos $y = 3x^2 + bx - 14$ grafikas yra parabolė, kurios šakos kyla aukštyn. Kadangi taškai $x = -1$ ir $x = 2$ turi būti tarp trinario šaknų x_1 ir x_2, tai turi galioti nelygybės $f(-1)<0$ ir $f(2)<0.$

Spręsdami šių nelygybių sistemą, gauname:

$$\begin{cases} 3\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)-14<0, \\ 3\cdot 2^2+b\cdot 2-14<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b-11<0, \\ 2b-2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b>-11, \\ b<1 \end{cases} \Rightarrow -11<b<1.$$

Taigi viena kvadratinio trinario $3x^2+bx-14$ šaknis yra mažesnė už –1, o kita – didesnė už 2, kai b priklauso intervalui (–11; 1).

2 pavyzdys. Realiųjų skaičių x ir y pora yra lygčių sistemos

$$\begin{cases} x+y=2a-1, \\ x^2+y^2=a^2+2a-3 \end{cases}$$

sprendinys. Raskime parametro a reikšmę, kuriai esant sandauga xy įgyja didžiausią reikšmę.

Sprendimas. Nagrinėdami lygčių sistemą, gauname:

$$(x+y)^2=(2a-1)^2=4a^2-4a+1,$$

$$(x+y)^2-(x^2+y^2)=2xy.$$

Todėl

$$2xy=(4a^2-4a+1)-(a^2+2a-3)=3a^2-6a+4=$$

$$=3(a^2-2a)+4=3((a-1)^2-1)+4=3(a-1)^2+1.$$

Iš čia

$$xy=\frac{3}{2}(a-1)^2+\frac{1}{2}.$$

Jei nebūtų jokių apribojimų parametrui a, darytume išvadą, kad didžiausios reikšmės sandauga xy neįgyja.

Viena sąlyga, susijusi su parametro a reikšmėmis, aiškiai matoma. Kadangi $x^2+y^2\geq 0,$ tai būtinai turi galioti nelygybė $a^2+2a-3\geq 0,$ iš kurios išplaukia, kad $a\leq -3$ arba $a\geq 1.$ Tačiau šios sąlygos neapriboja sandaugos xy didumo.

Atkreipkime dėmesį į tai, kad x ir y turi būti realieji skaičiai. Pagal Vijeto teoremą skaičiai x ir y yra kvadratinės lygties

$$z^2-(x+y)z+xy=0$$

sprendiniai. Jie bus realieji tik kai kvadratinio trinario diskriminantas $D=(x+y)^2-4xy$ bus teigiamas arba lygus nuliui skaičius.

Įrašę $2a-1$ vietoj $x+y$ (pagal pirmąją lygtį) ir $\frac{3}{2}(a-1)^2+\frac{1}{2}$ vietoj xy, gauname, kad

$$D=(2a-1)^2-4\cdot\left(\frac{3}{2}(a-1)^2+\frac{1}{2}\right)=4a^2-4a+1-6a^2+12a-8=$$

$$=-2a^2+8a-7.$$

Spręsdami nelygybę $D\geq 0$ gauname:

$$-2a^2+8a-7\geq 0\Rightarrow 2a^2-8a+7\leq 0\Rightarrow 2(a^2-4a)+7\leq 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2((a-2)^2-4)+7\leq 0\Rightarrow 2(a-2)^2-1\leq 0\Rightarrow (a-2)^2\leq\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}\leq a-2\leq\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow 2-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq a\leq 2+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Gautoji sąlyga parametro a reikšmėms derinasi tik su viena iš aukščiau gautų sąlygų $(a\geq 1)$.

Vadinasi, sandaugos

$$xy=\frac{3}{2}(a-1)^2+\frac{1}{2}$$

didžiausios reikšmės turime ieškoti ne aibėje $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$, o tik intervale $\left[2-\frac{\sqrt{2}}{2};2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Jei pažymėtume $t=xy$, tai galėtume sakyti, kad funkcijos $t=\frac{3}{2}(a-1)^2+\frac{1}{2}$ grafikas yra parabolė, kurios šakos kyla į viršų, o viršūnės abscisė yra $a=1$. Kadangi taškas $a=1$ yra kairėje intervalo $\left[2-\frac{\sqrt{2}}{2};2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ pusėje, tai didžiausią dydžio t, taigi ir sandaugos xy, reikšmę turėsime taške $a=2+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ats.: $a=2+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3 pavyzdys. Iškilojo keturkampio įstrižainės tarpusavyje statmenos, o jų ilgių suma lygi 6 cm. Kokį didžiausią plotą gali įgyti šis keturkampis?

Sprendimas. Tegu x ir y yra keturkampio įstrižainių ilgiai. Pagal uždavinio sąlygą $x+y=6$. Keturkampio plotą pažymėkime S. Aišku, kad

$$S=\frac{xy}{2}=\frac{x(6-x)}{2}=\frac{6x-x^2}{2}=\frac{-(x^2-6x)}{2}=\frac{-((x-3)^2-9)}{2}=$$

$$=\frac{9-(x-3)^2}{2}\le\frac{9}{2},$$

lygybė galima tik su $x=3$.

Taigi uždavinio sąlygas tenkinančio keturkampio galimai didžiausias plotas lygus 4,5 cm^2.

Ats.: 4,5 cm^2.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Nustatykite, su kuriomis parametro a reikšmėmis funkcijos

$$f(x)=x^2+(a+4)x+2a+3$$

mažiausia reikšmė intervale [0; 2] lygi –4.

2. Raskite kvadratinio trinario ax^2+bx-2 koeficientus a ir b, žinodami, kad mažiausia šio trinario reikšmė lygi –6 ir ji įgyjama, kai $x=-2$.

3. Nustatykite, su kuriomis parametro p reikšmėmis kvadratinio trinario $x^2+(2p-1)x+p^2$ šaknys yra skirtingi realieji skaičiai ir abi didesnės už vienetą.

4. Su kuriomis parametrų p ir q reikšmių poromis $(p;q)$ kvadratinės lygties $x^2+px+q=0$ sprendiniai yra D ir $1-D$; čia D yra kvadratinio trinario x^2+px+q diskriminantas.

5. Kokią mažiausią reikšmę gali įgyti reiškinys $x+5y$, jeigu x ir y yra teigiami realieji skaičiai, kurie tenkina nelygybę

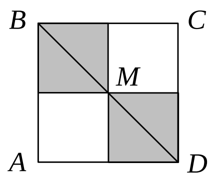
$$x^2-6xy+y^2+21\le 0?$$

6. Raskite visas parametro a reikšmes, kurioms esant kvadratinio trinario $P(x)=3x^2-2ax-4$ mažiausia reikšmė yra lygi kvadratinio trinario $Q(x)=3ax^2-2ax-8$ didžiausiai reikšmei.

7. Raskite funkcijos $f(x)=\dfrac{x^4+x^2+5}{x^4+2x^2+1}$ mažiausią reikšmę ir visus taškus, kuriuose ši reikšmė įgyjama.

8. Raskite funkcijos $f(x)=\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}$ didžiausią ir mažiausią reikšmes; taip pat taškus, kuriuose jos įgyjamos.

9. Kvadrato *ABCD*, kurio kraštinė lygi 1, įstrižainėje *BD* pažymėtas taškas *M* ir per jį nubrėžtos dvi atkarpos, lygiagrečios su kvadrato kraštinėmis (žr. 1. pav.). Kurioje įstrižainės vietoje turėtų būti taškas *M*, kad pilkųjų kvadratų plotų suma būtų mažiausia?



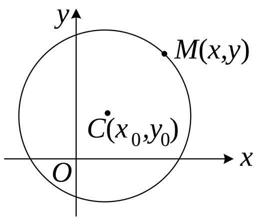
1 pav.

10. Dviejų trikampio kraštinių ilgių suma lygi a, o kampas tarp jų yra 30°. Raskite didžiausio ploto trikampio kraštinių ilgius.

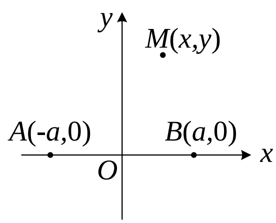
II. APSKRITIMŲ GEOMETRIJA

Edmundas Mazėtis
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. *Apskritimas* – tai aibė plokštumos taškų, duotuoju atstumu R nutolusių nuo duotojo plokštumos taško C. Taškas C yra vadinamas *apskritimo centru*, o skaičius R – jo *spindulio ilgiu*. Jei stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje Oxy apskritimo centras $C(x_0, y_0)$, tai taškas $M(x, y)$ yra apskritimo, kurio centras – taškas C, o spindulys lygus R, taškas tada ir tik tada, kai $CM = R$ (1 pav.), t. y. kai $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$. Tai yra apskritimo lygtis stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje.



1 pav.



2 pav.

1 pavyzdys. Rasime aibę plokštumos taškų, kurių atstumų iki dviejų duotųjų plokštumos taškų santykis lygus duotajam skaičiui $k \neq 1$.

Uždavinį spręsime koordinatiniu metodu. Pasirinkime koordinačių sistemą Oxy taip, kad Ox ašis eitų per duotuosius taškus A ir B, o jos pradžios taškas būtų atkarpos AB vidurio taškas (2 pav.). Sakykime, kad atstumas tarp taškų A ir B lygus $2a$, tuomet $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$. Taškas $M(x, y)$ yra ieškomosios taškų aibės taškas tada ir tik tada, kai $\frac{AM}{BM} = k$. Kadangi $AM = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$, $BM = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$, tai $\frac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = k$. Iš čia seka, kad $\sqrt{(x+a)^2 + y^2} = k\sqrt{(x-a)^2 + y^2}$.

Pakėlę abi lygybės puses kvadratu ir suprastinę, gauname

$$(x+a)^2 + y^2 = k^2(x-a)^2 + k^2y^2,$$

$$(k^2-1)x^2+(k^2-1)y^2-2a(k^2+1)x=(1-k^2)a^2.$$

Padaliję iš $k^2-1\neq 0$, turime $x^2+y^2-2a\dfrac{k^2+1}{k^2-1}x=-a^2$,

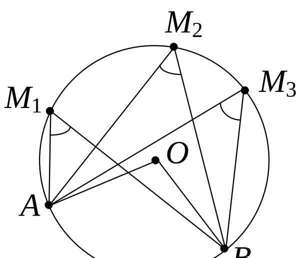
$$\left(x-a\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2+y^2=-a^2+a^2\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2,$$

t. y. $$\left(x-a\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2+y^2=\frac{4a^2k^2}{(k^2-1)^2}.$$

Ši lygtis yra apskritimo, kurio centras $C\left(a\dfrac{k^2+1}{k^2-1},0\right)$, o spindulys $R=\dfrac{2ka}{|k^2-1|}$, lygtis, taigi ieškomoji taškų aibė yra apskritimas.

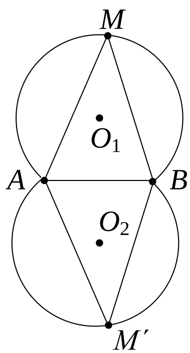
2. Kampas, kurio viršūnė yra apskritimo taškas, o kraštinės kerta apskritimą, vadinamos *įbrėžtiniu kampu*.

1 teorema. Įbrėžtiniai į apskritimą, kurio centras – taškas O, kampai, kurių kraštinės eina per du apskritimo taškus A ir B, o jų viršūnės yra vienoje tiesės AB pusėje, yra lygūs pusei centrinio kampo AOB (3 pav.).



$$\angle AM_1B=\angle AM_2B=$$
$$=\angle AM_3B=\frac{1}{2}\angle AOB$$

3 pav.



4 pav.

2 teorema. Aibė plokštumos taškų M, tenkinančių sąlygą $\angle AMB=$ $=\alpha$ yra du apskritimų lankai, simetriški tiesės AB atžvilgiu (4 pav.).

3 teorema. Kampas, kurį apskritimo styga AB sudaro su apskritimo liestine taške A, lygus pusei centrinio kampo AOB (5 pav.).

4 teorema. Keturkampis $ABCD$ yra įbrėžtas į apskritimą tada ir tik tada, kai jo priešingų kampų suma lygi 180°:

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ.$$

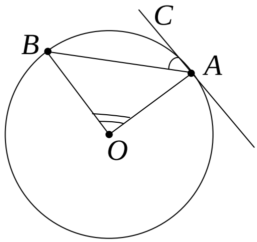
Šias teoremas Jūs įrodinėjote matematikos pamokose.

2 pavyzdys. Du apskritimai kertasi taškuose A ir B. Per tašką B nubrėžta tiesė, kertanti duotuosius apskritimus dar ir taškuose C ir D (6 pav.). Per taškus C ir D nubrėžtos apskritimų liestinės susikerta taške P. Įrodysime, kad taškai A, C, D ir P yra viename apskritime.

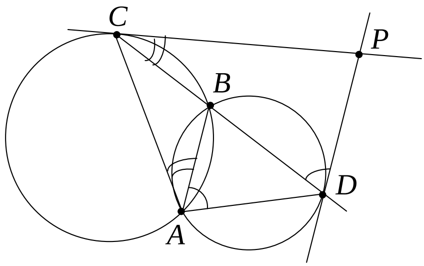
Nubrėžkime stygas AB, AC ir AD. Iš 3 teoremos išplaukia, kad $\angle BAD = \angle BDP,\ \angle CAB = \angle BCP.$ Iš čia

$$\angle CAD = \angle BAD + \angle CAB = \angle BDP + \angle BCP = 180^\circ - \angle CPD.$$

Taigi $\angle CAD + \angle CPD = 180^\circ$ ir pagal 4 teoremą keturkampis $ADPC$ yra įbrėžtas į apskritimą.



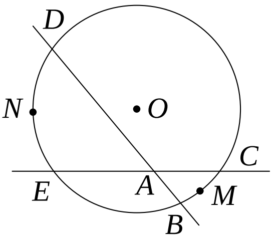
5 pav.



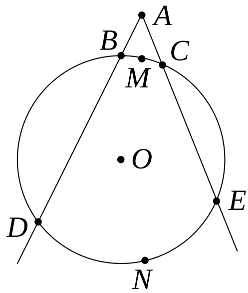
6 pav.

5 teorema. Sakykime, kad dvi tiesės susikerta taške A ir iškerta apskritime lankus BMC ir DNE. Jei taškas A yra apskritimo viduje, tai $\angle DAE = \frac{1}{2}(\angle DOE + \angle BOC)$, o jei taškas A yra apskritimo išorėje, tai $\angle DAE = \frac{1}{2}(\angle DOE - \angle BOC)$ (7 pav.).

Teoremos įrodymui užtenka per vienos stygos (pvz., BD) galą nubrėžti stygą, lygiagrečią su kita styga.



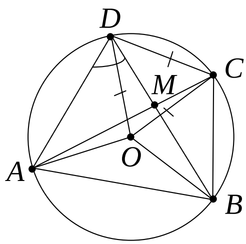
7a pav.



7b pav.

3 pavyzdys. Keturkampis *ABCD* yra įbrėžtas į apskritimą, kraštinė *CD* lygi apskritimo spinduliui, o kampas *ADB* lygus 50°. Rasime kampą tarp keturkampio įstrižainių.

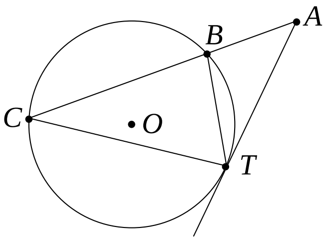
Sakykime, kad keturkampio *ABCD* įstrižainės *AC* ir *BD* susikerta taške *M* (8 pav.). Kadangi taškas *M* yra apskritimo viduje, tai kampas tarp įstrižainių *AMB* pagal 5 teoremos tvirtinimą lygus $\frac{1}{2}(\angle AOB + \angle DOC)$. Kadangi atkarpa *CD* lygi apskritimo spinduliui, tai trikampis *DOC* – lygiakraštis, taigi $\angle DOC = 60^\circ$. Kadangi $\angle ADB = 50^\circ$, tai centrinis kampas $\angle AOB = 100^\circ$. Taigi



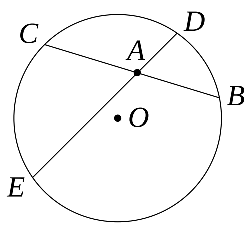
8 pav.

$$\angle AMB = \frac{1}{2}(\angle AOB + \angle DOC) = \frac{1}{2}(100^\circ + 60^\circ) = 80^\circ.$$

6 teorema. Per apskritimo išorėje esantį tašką A nubrėžta apskritimo liestinė *AT* ir kirstinė, kertanti apskritimą taškuose *B* ir *C* (9 pav.). Tuomet $AB \cdot AC = AT^2$.



9 pav.



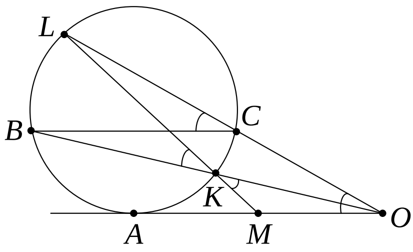
10 pav.

Teoremos įrodymas seka iš trikampių ATC ir ABT panašumo.

7 teorema. Per apskritimo viduje esantį tašką A nubrėžtos apskritimo kirstinės BC ir ED (10 pav.). Tuomet teisinga lygybė $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

Teoremos įrodymas seka iš trikampių ABD ir ACE panašumo.

4 pavyzdys. Per apskritimo išorėje esantį tašką O nubrėžta apskritimo liestinė, liečianti jį taške A. Atkarpa BC – apskritimo styga, lygiagreti su tiese OA. Tiesės OB ir OC apskritimą kerta dar ir taškuose K ir L. Įrodysime, kad tiesė KL dalija atkarpą OA pusiau.



11 pav.

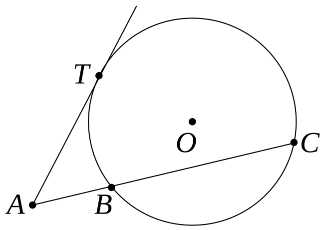
Sakykime, kad tiesė KL kerta atkarpą OA taške M (11 pav.). Kadangi tiesės OA ir BC lygiagrečios, tai $\angle LOM = \angle LCB = \angle LKB = \angle OKM$. Taigi trikampiai KOM ir OLM – panašieji, t. y. $\dfrac{OM}{KM} = \dfrac{LM}{OM}$. Iš čia $OM^2 = KM \cdot LM$.

Kadangi pagal 6 teoremą $AM^2 = MK \cdot ML$, tai iš čia gauname, kad $OM = AM$.

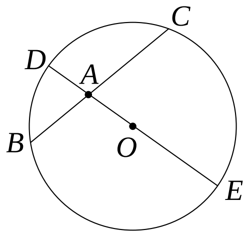
3. Sakykime, kad taškas A yra nutolęs nuo apskritimo centro O atstumu d, apskritimo spindulys yra R. Skaičius $d^2 - R^2$ yra vadinamas taško A *laipsniu* duotojo apskritimo atžvilgiu. Jei taškas A yra apskritimo išorėje, ir AT – apskritimo liestinė, tai iš trikampio OAT (12 pav.) gauname, kad $d^2 - R^2 = AT^2$. Jei BC – bet kuri kirstinė einanti per tašką A, tai $AB \cdot AC = AT^2$ (6 teorema). Taigi šiuo atveju taško A laipsnis lygus iš taško A nubrėžtos apskritimo liestinės kvadratui, o taip pat bet kurios per tašką A išvestos kirstinės atkarpų sandaugai. Jei taškas A yra apskritimo viduje, BC – bet kuri kirstinė, einanti per tašką A (13 pav.), o DE – per tą tašką einantis apskritimo skersmuo, tai pagal 7 teoremą

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE = (R-d)(R+d) = R^2 - d^2 = -(d^2 - R^2).$$

Taigi, apskritimo viduje esančio taško laipsnis šio apskritimo atžvilgiu yra neigiamas, to laipsnio modulis lygus bet kurios per tašką *A* einančios apskritimo kirstinės atkarpų sandaugai.



12 pav.



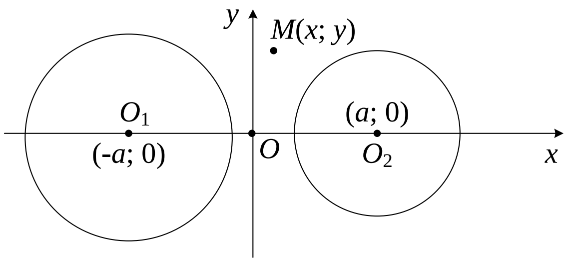
13 pav.

8 teorema. Aibė plokštumos taškų, kurių laipsniai dviejų apskritimų su nesutampančiais centrais atžvilgiu yra vienodi, yra tiesė, statmena tų apskritimų centrus jungiančiai tiesei.

Teoremos įrodymui tarsime, kad atstumas tarp apskritimų centrų O_1O_2 lygus $2a$, parinksime koordinačių sistemą *Oxy* taip, kaip nurodyta 1 pavyzdyje (14 pav.), tada $O_1(-a; 0)$, $O_2(a; 0)$. Jei $M(x; y)$ – ieškomosios taškų aibės taškas, R_1 ir R_2 – duotųjų apskritimų spinduliai, tai taško *M* laipsnių šių apskritimų atžvilgiu lygybė užrašoma taip

$$(x+a)^2 + y^2 - R_1^2 = (x-a)^2 + y^2 - R_2^2.$$

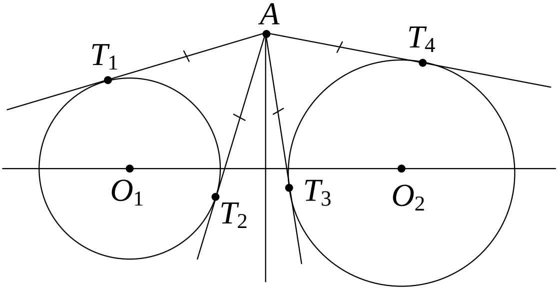
Pertvarkę gauname tokią ieškomosios taškų aibės lygtį $x = \dfrac{R_2^2 - R_1^2}{4a}$; aišku, jog tai yra lygiagrečios su *Oy* ašimi tiesės lygtis.



$$AT_1 = AT_2 = AT_3 = AT_4$$

14 pav.

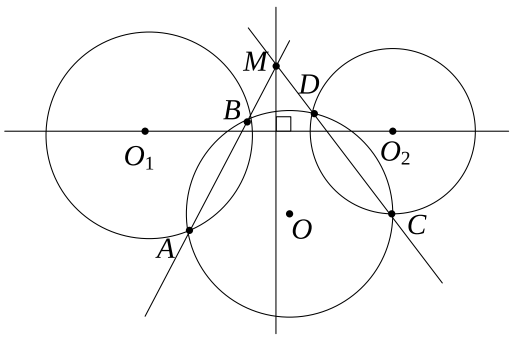
Teoremos formuluotėje minima tiesė yra dviejų apskritimų radikalioji ašis. Radikaliosios ašies taškai, nesantys duotųjų apskritimų viduje, pasižymi tokia savybe: iš jų nubrėžtų liestinių abiem apskritimams atkarpos iki lietimosi taškų yra lygios (15 pav.).



15 pav.

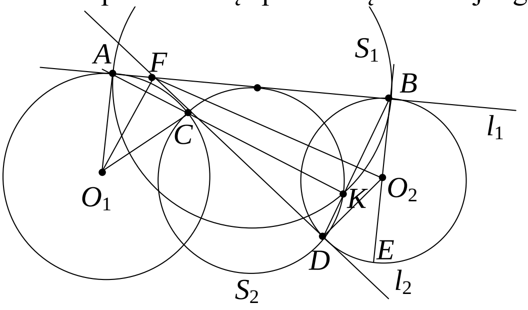
Jei apskritimai kertasi taškuose *A* ir *B*, tai taškų *A* ir *B* laipsniai abiejų apskritimų atžvilgiu lygūs nuliui. Kadangi tiesė *AB* statmena apskritimų centrus jungiančiai tiesei, tai pagal 8 teoremą ji yra tų apskritimų radikalioji ašis. Analogiškai, jei du apskritimai liečiasi taške *A*, tai per tą tašką nubrėžta jų bendroji liestinė yra tų apskritimų radikalioji ašis.

Jei apskritimai neturi bendrų taškų, tai pasirenkame tašką *O*, nepriklausantį duotųjų apskritimų centrus jungiančiai tiesei ir iš jo kaip iš centro brėžiame apskritimą, kertantį abu duotuosius (16 pav.). Sakykime, kad pirmąjį apskritimą jis kerta taškuose *A* ir *B*, o kitą – taškuose *C* ir *D*. Tiesių *AB* ir *CD* sankirtos taško *M* laipsniai duotųjų apskritimų atžvilgiu yra vienodi (paaiškinkite, kodėl). Pagal 8 teoremą statmuo, nuleistas iš taško *M* apskritimų centrus jungiančiai tiesei, yra jų radikalioji ašis.



16 pav.

5 pavyzdys. Du apskritimai neturi bendrų taškų. Nubrėžta jų bendroji išorinė liestinė l_1, liečianti apskritimus taškuose A ir B, ir bendroji vidinė liestinė l_2, liečianti juos taškuose C ir D. Įrodysime, kad tiesių AC ir BD sankirtos taškas priklauso tų apskritimų centrus jungiančiai tiesei.



17 pav.

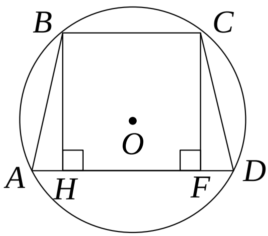
Nubrėžkime apskritimu S_1 ir S_2, kurių skersmenys yra atkarpos AB ir CD (17 pav.). Sakykime, kad tiesės l_1 ir l_2 susikerta taške F ir nubrėžkime tieses O_1F ir O_2F. Sakykime, kad $\angle DBO_2 = \alpha = \angle BDO_2$. Kadangi atkarpa BE – apskritimo skersmuo, kai kampų AO_1C ir DO_2E kraštinės O_1A ir O_2E statmenos tiesei l_1, o kraštinės O_1C ir O_2D – tiesei l_2. Todėl $\angle AO_1C = \angle DO_2E = 2\alpha$. Kadangi $FA = FC$, tai $O_1F \perp AC$, t. y. $\angle FAC = \angle FO_1A = \frac{1}{2}\angle AO_1C = \alpha$. Tuomet $\angle AFO_1 =$ $= 90^\circ - \alpha = \angle FBD$. Taigi tiesės O_1F ir BD yra lygiagrečios, todėl $AC \perp BD$. Iš čia seka, kad tiesių AC ir BD sankirtos taškas K yra ir apskritime S_1, ir apskritime S_2, t. y. yra jų radikaliojoje ašyje. Iš to, kad $O_1A \perp AB$ ir $O_1C \perp CD$ seka, kad atkarpos O_1A ir O_1C yra apskritimų S_1 ir S_2 liestinės. Kadangi $O_1A = O_1C$, tai taškas O_1 yra apskritimų S_1 ir S_2 radikaliojoje ašyje. Analogiškai įsitikiname, kad ir taškas O_2 yra toje pačioje radikaliojoje ašyje. Taigi taškai O_1, K ir O_2 yra vienoje tiesėje.

4. Kaip žinome, apskritimo, kurio spindulys R, ilgis skaičiuojamas pagal formulę $C = 2\pi R$. Skaičius π yra lygus apskritimo ilgio ir skersmens santykiui; tai iracionalusis skaičius užrašomas begaline neperiodine dešimtaine trupmena. Apytikslė jo reikšmė $\pi \approx 3{,}1415926..$ Jei spindulio R apskritimo centrinio kampo AOB didumas α laipsnių, tai lanko AB ilgis yra lygus $l = \frac{\pi R \alpha^\circ}{180^\circ}$, jei centrinio kampo AOB didumas α radianų, tai lanko AB ilgis lygus $l = R\alpha$.

Skritulio, kurio spindulys R, plotui skaičiuoti taikoma formulė $S = \pi R^2$; jei skritulio išpjovos AOB centrinio kampo didumas α laipsnių, tai išpjovos plotas lygus $S = \frac{\pi R^2 \alpha^\circ}{360^\circ}$, o jei kampo AOB didumas α radianų – $S = R^2\alpha$.

6 pavyzdys. Trapecijos pagrindų ilgiai a ir b $(a > b)$, aukštinės ilgis h. Apskaičiuosime apie trapeciją apibrėžto skritulio plotą.

Kadangi įbrėžtam į apskritimą keturkampiui $ABCD$ teisinga lygybė $\angle A + \angle C = 180^\circ$, o trapecijai $ABCD$, kurios pagrindai AD ir BC (18 pav.) teisinga lygybė $\angle A + \angle B = 180^\circ$, tai $\angle B = \angle C$, t. y. jei trapecija įbrėžta į apskritimą, tai ji lygiašonė. Nubrėžę aukštines $BH \perp AD$, $CF \perp AD$, turime



18 pav.

$$AH = FD = \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{1}{2}(a-b).$$

Tuomet $AB = \sqrt{AH^2 + HB^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}$. Kadangi apie trapeciją $ABCD$ apibrėžtas apskritimas yra ir apie trikampį ABD apibrėžtas apskritimas, tai jo spindulį rasime iš formulės

$$R = \frac{AD \cdot AB \cdot BD}{4S} = \frac{AD \cdot AB \cdot BD}{2AD \cdot BH} = \frac{AB \cdot BD}{2BH} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\sqrt{((a-b)^2 + 4h^2)((a+b)^2 + 4h^2)}}{2h} =$$

$$= \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 8h^2(a^2 + b^2) + 16h^2}}{8h}.$$

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Raskite apskritimo $x^2+y^2-18x+22y-23=0$ centro koordinates ir spindulio ilgį. Nustatykite, ar taškas $M(6;-3)$ yra apskritimo viduje, ar išorėje.

2. Raskite aibę taškų, kurių atstumų iki dviejų duotųjų taškų kvadratų suma lygi duotajam skaičiui a^2.

3. Du apskritimai kertasi taškuose *P* ir *Q*. Per pirmojo apskritimo tašką *A* nubrėžtos tiesės *AP* ir *AQ* antrąjį apskritimą dar kartą kerta atitinkamai taškuose *B* ir *C*. Per tašką *A* pirmajam apskritimui nubrėžta liestinė yra lygiagreti su tiese *BC*. Įrodykite.

4. Per tašką *P*, nepriklausantį apskritimui, nubrėžtos dvi apskritimo liestinės, liečiančios apskritimą taškuose *A* ir *B*. Jei taškas *O* – apskritimo centras, o atkarpa *BC* – skersmuo, tai tiesės *AC* ir *OP* lygiagrečios. Įrodykite.

5. Keturkampis *ABCD* yra įbrėžtas į apskritimą, kraštinė *AB* – apskritimo skersmuo, kraštinė *CD* lygi apskritimo spinduliui. Raskite kampą tarp tiesių *AD* ir *BC*.

6. Apie trapeciją, kurios aukštinės ilgis lygus *h*, apibrėžtas apskritimas. Trapecijos šoninė kraštinė iš apskritimo centro matoma 60° kampu. Raskite trapecijos plotą.

7. Du apskritimai kertasi taškuose *A* ir *B*. Tiesė *MN* – jų bendroji liestinė (taškai *M* ir *N* – lietimosi taškai). Raskite kokiu santykiu tiesė *AB* dalija atkarpą *MN*.

8. Nubrėžtos dviejų nesikertančių apskritimų keturios bendrosios liestinės *AB*, *CD*, *EF* ir *GH* (taškai *A*, *C*, *E*, *G* priklauso vienam apskritimui, o taškai *B*, *D*, *F* ir *H* – kitam). Įrodykite, kad atkarpų *AB*, *CD*, *EF* ir *GH* vidurio taškai yra vienoje tiesėje.

9. Du spindulio *R* apskritimai susikerta taip, kad kiekvienas jų eina per kito centrą. Kitų dviejų to paties spindulio apskritimų centrai yra pirmųjų dviejų apskritimų susikirtimo taškai. Raskite visų keturių skritulių bendrosios dalies plotą.

10. Apskritimas kerta kiekvieną lygiakraščio trikampio *ABC* kraštinę dviejuose taškuose, dalijančiuose tą kraštinę į tris lygias dalis:

$$AB_1 = B_1B_2 = B_2C, \quad CA_1 = A_1A_2 = A_2B, \quad BC_1 = C_1C_2 = C_2A.$$

Apskaičiuokite lanko B_1B_2 ilgį, jei trikampio kraštinės ilgis lygus a.

III. PIRMINIAI SKAIČIAI

Gediminas Stepanauskas
(Vilniaus universitetas)

1. Pirminiai ir sudėtiniai skaičiai.

Skaičių teorijoje pirminiai skaičiai užima labai svarbią vietą. Jie tarsi plytos, iš kurių statomi visi skaičių teorijos rūmai. Prisiminkime jų apibrėžimą. Natūralusis skaičius $p > 1$ vadinamas *pirminiu*, jei jis dalijasi tik iš 1 ir iš paties savęs. Visi kiti natūralieji skaičiai $n > 1$ vadinami *sudėtiniais.* Nesunku būtų įrodyti tokį teiginį.

1 teiginys. Kiekvienas sudėtinis skaičius n turi pirminį daliklį $p \le \sqrt{n}$.

O iš šio teiginio išplaukia dar vienas.

2 teiginys. Jei natūralusis skaičius n neturi daliklių d, $1 < d \le \sqrt{n}$, tai jis yra pirminis.

Remdamiesi pastaraisiais dviem teiginiais, galime nustatyti, ar skaičius n yra pirminis, ar sudėtinis. Pakanka patikrinti, ar jis turi pirminį daliklį p, $p \le \sqrt{n}$.

Pirminių skaičių išskyrimo iš visų natūraliųjų skaičių vienas metodas žinomas labai seniai. Jis vadinamas *Eratosteno rėčiu.*

1 teorema (Eratosteno rėčio). Jei iš natūraliųjų skaičių $2, 3, \dots, N$ išbraukiama keletas pirmųjų pirminių skaičių ir visi jų kartotiniai, tai pirmasis likęs neišbrauktas skaičius bus pirminis.

Jeigu iš natūraliųjų skaičių $2, 3, \dots, N$ pirminiai nebraukiami, o išbraukiami tik visi pirminių skaičių p, $p \le \sqrt{N}$, kartotiniai kp, $k = 2, 3, \dots$, tai visi likusieji skaičiai bus pirminiai.

Vienas iš sunkesnių uždavinių yra skaičiaus pirminių daliklių radimas. Ar skaičiaus dalikliai randami vienareikšmiškai? Atsakymas – taip, vienareikšmiškai. Be įrodymo suformuluokime keletą pirminių skaičių pagrindinių savybių.

2 teorema (Euklido). Pirminių skaičių aibė yra begalinė.

3 teorema (pagrindinė aritmetikos). Kiekvienas sudėtinis skaičius vieninteliu būdu (neatsižvelgiant į daugiklių tvarką) išskaidomas pirminių skaičių (pirminių skaičių laipsnių) sandauga:

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_l^{k_l} .$$

Toks skaidinys vadinamas *kanoniniu skaidiniu.* Pavyzdžiui, skaičiaus 440 kanoninis skaidinys:

$$440 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11.$$

2. Natūraliųjų skaičių dalikliai.

4 teorema (dalybos su liekana). Bet kuriems dviems natūraliesiems skaičiams a ir b galima rasti du sveikuosius skaičius q ir r, $q \geq 0$, $0 \leq r < b$, kad

$$a = qb + r.$$

Jeigu $r = 0$, tai sakoma, kad skačius a dalijasi iš b, o q, šiuo atveju, vadinamas skaičiaus a dalybos iš b *dalmeniu.* Jei $r \neq 0$, tai skaičius q vadinamas skaičiaus a dalybos iš b *nepilnuoju dalmeniu, o r liekana.* Pavyzdžiui, 38 dalydami iš 7, gauname, kad nepilnasis dalmuo yra 5, o liekana 3:

$$38 = 5 \cdot 7 + 3.$$

Tarkime, turime n natūraliųjų skaičių $a_1, a_2, ..., a_n$, ir jie visi dalijasi iš natūraliojo skaičiaus d. Tuomet d vadinamas jų *bendruoju dalikliu.* Bendrųjų daliklių gali būti daug. Pats didžiausias iš visų bendrųjų daliklių D vadinamas skaičių rinkinio $a_1, a_2, ..., a_n$ *didžiausiu bendruoju dalikliu.* Didžiausias bendrasis daliklis žymimas naudojant paprastus skliaustus: $D = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Pavyzdžiui,

$$(24, 60, 126) = 6.$$

Norint rasti skaičių didžiausią bendrąjį daliklį galima naudotis skaičių kanoniniais skaidiniais, bet yra ir kitas kelias – Euklido algoritmas. Jį naudojant nereikia ieškoti skaičių kanoninių skaidinių. Jeigu skaičiai dideli, paprastai taikomas Euklido algoritmas, nes rasti jų kanoninius skaidinius gana sudėtinga.

Euklido algoritmu vadinamas nuoseklus dalybos su liekana taikymas: pirmiausia – skaičiams a ir b, po to skaičiams b ir r, skaičiams r ir r_1 (r_1 yra b dalybos iš r liekana) ir t. t., kol gaunama lygi 0 liekana r_{k+1}:

$$\begin{aligned} a &= qb + r, & 0 &\leq r < b, \\ b &= q_1 r + r_1, & 0 &\leq r_1 < r, \\ r &= q_2 r_1 + r_2, & 0 &\leq r_2 < r_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\dots\dots\dots\dots && \dots\dots\dots\dots\\ &r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k, && 0 \le r_k < r_{k-1},\\ &r_{k-1} = q_{k+1} r_k. \end{aligned}$$

5 teorema. Dviejų natūraliųjų skaičių *a* ir *b* didžiausias bendrasis daliklis yra lygus paskutinei nelygiai nuliui liekanai, gautai, taikant Euklido algoritmą skaičiams *a* ir *b*.

Raskime skaičių 120 ir 924 didžiausią bendrąjį daliklį. Taikome Euklido algoritmą:

$$\begin{aligned} 924 &= 7 \cdot 120 + 84,\\ 120 &= 1 \cdot 84 + 36,\\ 84 &= 2 \cdot 36 + 12,\\ 36 &= 3 \cdot 12. \end{aligned}$$

Paskutinė nelygi nuliui liekana yra 12. Taigi

$$(120, 924) = 12.$$

Jei reikia rasti daugiau nei dviejų skaičių didžiausią bendrąjį daliklį, taip pat galime remtis Euklido algoritmu. Iš pradžių reikia rasti kurių nors dviejų skaičių didžiausią bendrąjį daliklį D_1, po to ieškoti didžiausio bendrojo daliklio tarp D_1 ir trečiojo skaičiaus ir t. t. Teisingas toks teiginys.

3 teiginys. Skaičių $a_1, a_2, ..., a_n$ didžiausiam bendrajam dalikliui yra teisingos lygybės:

$$(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2), ..., a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2, ..., a_{n-1}), a_n).$$

Pavyzdžiui,

$$(24, 60, 126) = ((24, 60), 126) = (12, 126) = 6.$$

Skaičiai (*n* skaičių) $a_1, a_2, ..., a_n$ vadinami *tarpusavyje pirminiais,* kai jų didžiausias bendrasis daliklis yra lygus 1, t.y.

$$(a_1, a_2, ..., a_n) = 1.$$

3. Merseno ir Ferma pirminiai skaičiai.

Didelių pirminių skaičių radimas yra sudėtingas, daug ilgų skaičiavimų reikalaujantis uždavinys. O šiandien pirminiai skaičiai ir jų savybės yra daug kur taikomi. Verta paminėti mažąją Ferma teoremą. Ji labai svarbi skaičių teorijoje, algebroje, o paskutiniu metu ir kriptografijoje.

Ši teorema tvirtina, kad bet kuriam natūraliajam skaičiui a ir bet kuriam pirminiam p skaičius $a^p - a$ dalijasi iš p. Ferma atrado šį dėsnį, tyrinėdamas tobuluosius skaičius. Dideli pirminiai skaičiai labai reikalingi kodavimo teorijoje. Pastaroji naudojama informacijos teorijoje. Dideli pirminiai reikalingi perduodant, koduojant ir dešifruojant informaciją. Dažnai sudėtingi ekonominiai ar fizikiniai procesai sprendžiami iš pradžių sudarant jų matematinius modelius. Toks sprendimo kelias paprastai yra daug greitesnis ir mažiau kainuoja už kitus problemų sprendimo būdus. Jei susiduriama su didžiuliais duomenų masyvais, tai paprastai vienintelė išeitis yra stochastiniai modeliai. Juose naudojami pseudoatsitiktiniai skaičiai. O kuriant gerus pseudoatsitiktinių skaičių generatorius naudojamasi žiniomis apie pirminius skaičius.

Didelių pirminių skaičių ieškojimas istoriškai, visų pirma, susijęs su kai kuriais ypatingais pirminiais skaičiais.

Jei n sudėtinis skaičius, tai $2^n - 1$ taip pat yra sudėtinis. Bet jeigu p yra pirminis skaičius, tai $2^p - 1$ gali būti ir pirminis, ir sudėtinis skaičius. Skaičiai

$$M_n = 2^n - 1$$

vadinami *Merseno skaičiais.* Taip jie pavadinti prancūzų matematiko Merseno (M.Mersenne, 1588–1648) garbei. Kai skaičius

$$M_p = 2^p - 1$$

yra pirminis, tai jis vadinamas *Merseno pirminiu skaičiumi.* Merseno pirminius skaičius gauname, kai p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, tačiau, kai p = 11, 23, 29, skaičiai M_p yra sudėtiniai. Iki šių dienų nėra žinoma, ar Merseno pirminių skaičių aibė yra begalinė, ar baigtinė. Merseno pirminiai skaičiai dažnai pasitaiko įvairiuose uždaviniuose.

Matematikus domina ir $2^n + 1$ pavidalo skaičiai. Kai n turi bent vieną nelyginį (nelygų 1) daliklį, tai $2^n + 1$ yra sudėtinis skaičius. Skaičiai

$$F_k = 2^{2^k} + 1$$

vadinami *Ferma skaičiais* (taip pavadinti prancūzų matematiko Ferma (P. de Fermat, 1601–1665) garbei). Jie gali būti ir pirminiai, ir sudėtiniai, nors pats P. Ferma spėjo, kad jie visi yra pirminiai. Jei skaičius F_k yra pirminis, jis vadinamas *Ferma pirminiu skaičiumi.* Iš tikrųjų, Ferma skaičiai, kai k = 0, 1, 2, 3, 4, yra pirminiai, o skaičius F_5 yra sudėtinis. Kaip ir apie Merseno pirminius skaičius, taip ir apie Ferma pirminius skaičius nėra žinoma, ar jų yra be galo daug, ar tik baigtinis skaičius. Ferma skaičiai taip pat yra susiję su kitais matematikos uždaviniais. Pavyzdžiui, taisyklingą n-kampį galima nubrėžti su skriestuvu ir liniuote tik tada, kai n yra Ferma pirminis skaičius arba skiriasi nuo tokio skaičiaus daugikliu 2^m.

4. Skaičiaus daliklių suma. Tobulieji ir su jais susiję skaičiai.

Panagrinėkime funkciją – visų skaičiaus *n daliklių sumą.* Žymėkime šią funkciją $\sigma(n)$ Pavyzdžiui, 10 dalijasi iš 1, 2, 5 ir 10. Todėl

$$\sigma(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18.$$

Kad būtų lengviau skaičiuoti daliklių sumos funkcijos reikšmes, pateiksime keletą svarbių jos savybių.

Tegul funkcija $f(n)$ apibrėžta natūraliosioms argumento n reikšmėms. Jeigu teisinga lygybė

$$f(m\,n) = f(m)\,f(n), \text{ kai } (m\,n) = 1,$$

tai funkcija $f(n)$ vadinama *multiplikatyviąja* funkcija.

4 teiginys. Funkcija $\sigma(n)$ yra multiplikatyvioji.

Tegul skaičiaus n kanoninis skaidinys pirminių skaičių laipsniais yra

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_l^{k_l},$$

tuomet

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{k_1})\sigma(p_2^{k_2})\cdots\sigma(p_l^{k_l}).$$

Kai p^m yra m-tasis pirminio skaičiaus p laipsnis, tai

$$\sigma(p^m) = 1 + p + ... + p^m = \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}.$$

Skaičius n, kurio daliklių suma yra dvigubai didesnė už n, t.y.

$$\sigma(n) = 2n,$$

vadinamas *tobuluoju skaičiumi.* Pirmasis tobulasis skaičius yra 6, antrasis 28. Jų pavadinimas ir patys skaičiai buvo siejami su gamtos reiškiniais. Dievas pasaulį kūrė 6 dienas, o mėnulis aplink žemę apsisuka per 28 dienas. Prancūzų filosofas, matematikas ir fizikas

Dekartas (R.Descartes, 1596–1650) laiške Mersenui 1638 m. rašė, kad tobulų skaičių kaip ir tobulų žmonių yra labai labai mažai. Dar Euklidas nustatė, kad lyginius tobuluosius skaičius n galima rasti iš formulės:

$$n = 2^{p-1} M^{p} = 2^{p-1}(2^{p} - 1),$$

kurioje M_p yra Merseno pirminis skaičius. Iki šiol nerasta nė vieno nelyginio tobulojo skaičiaus ir nežinoma, ar iš viso jų yra. Skaičius n, kurio daliklių suma didesnė už $2n$, t.y.

$$\sigma(n) > 2n,$$

vadinamas *pertekliaus skaičiumi*; jei daliklių suma mažesnė už $2n$, t.y.

$$\sigma(n) < 2n,$$

jis vadinamas *nepritekliaus skaičiumi.* Šie skaičiai irgi buvo charakterizuojami, ieškoma moralinių ir biologinių analogų. Pavyzdžiui, graikų matematikas Nikomakas apie 100 m. rašė: pertekliaus skaičiai yra kaip gyvūnai su dešimčia burnų ar devyniomis lūpomis, turintys tris eiles dantų ar šimtą rankų ...; nepritekliaus skaičiai yra kaip gyvūnai su viena akimi, ar viena ranka, kuri turi mažiau kaip penkis pirštus, arba neturintys liežuvio...

Du skaičiai m ir n vadinami *draugiškaisiais skaičiais,* jei

$$\sigma(m) = \sigma(n) = m + n.$$

Draugiškieji skaičiai pasižymi įdomiomis dalumo savybėmis. Jau Pitagoras surado pirmąją tokių skaičių porą: 220 ir 284. Šiuo metu žinoma labai daug draugiškųjų skaičių porų, bet nežinoma, ar jų yra baigtinis skaičius, ar jų yra be galo daug.

Apžvelgėme tik nedidelę dalį natūraliųjų skaičių aibės poaibių, paminėjome kai kurias svarbias, įdomias, gal ir keistas jų savybes. Bet tai tik maža dalelytė milžiniško ir įdomaus skaičių teorijos rūmo.

Ši teorinė medžiaga paruošta naudojantis K. Bulotos ir P. Survilos knyga *Algebra ir skaičių teorija II* (Vilnius, Mokslas, 1977), o taip pat J. Sandor ir B. Crstici knyga *Handbook of number theory II* (Dordrecht/Boston/London, Kluwer, 2004). Nurodytoje literatūroje skaitytojas gali daug plačiau pasiskaityti apie minimus šiame straipsnelyje dalykus.

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Nustatykite, ar yra pirminiai tokie skaičiai: 2659, 2743, 2809, 2197, 2741.

2. Raskite, kurie iš skaičių n, $3101 \le n \le 3200$, yra pirminiai.

3. Raskite skaičių didžiausius bendruosius daliklius ir nustatykite, ar jie yra tarpusavyje pirminiai:

a) 714, 1638, 434;

b) 53497, 69601, 152317;

c) 34579, 52246;

d) 59411, 29039;

e) 4697, 1547, 143.

4. Įrodykite, kad skaičiai $2n + 1$ ir $9n + 4$ yra tarpusavyje pirminiai; čia n yra bet kuris natūralusis skaičius.

5. Įrodykite, kad pirminio skaičiaus dalybos iš 30 liekana yra taip pat pirminis skaičius arba 1.

6. Įrodykite, kad, pirminio skaičiaus $p \ge 5$ kvadratą dalydami iš 24, gauname liekaną, lygią 1.

7. Įrodykite, kad skaičius 2047 yra Merseno skaičius, bet nėra Merseno pirminis skaičius, o skaičius 127 yra Merseno pirminis skaičius.

8. Įrodykite, kad skaičius 257 yra Ferma pirminis skaičius.

9. Raskite visus skaičių 496 ir 8128 daliklius ir juos susumavę įsitikinkite, kad šie skaičiai yra tobulieji.

10. Raskite, kurie iš skaičių n, $100 \le n \le 120$, yra pertekliaus skaičiai, o kurie nepritekliaus skaičiai.

IV. KAIP SPRĘSTI, KAI NELABAI ŽINAI KAIP?

Romualdas Kašuba
(Vilniaus universitetas)

1. Įvadiniai žodeliai.

Kadangi niekas nėra sugalvojęs jokios teorijos, kuri mums, paprastiems, o net ir jums, arba visiems kitiems, būtų naudingesnė už kokį nors visiškai nesunkų „be vargo, be kančios" suvokiamą uždavinį, tai jau yra visiškai natūralu, kad būtent nuo vieno kokio nors tokio uždavinio mes ir dabar pradėsime.

Dar daugiau: iš karto visiškai atvirai prisipažinsime maną, kad būtent tokių uždavinių (pa)nagrinėjimas kartu su skaitančiuoju ir dar kelių kitų tokių uždavinių pasiūlymas panagrinėti skaitytojui ir yra ne tik šios užduoties tikslas, bet ir šio teksto surašymo priežastis.

Iš kitų galimų siekiamybių norėtume truputį aiškiau deklaruoti autoriaus troškimą sudėlioti visus tuos tikrai labai paprastus, bet gal visai neprastus dalykus kokia nors „neužsnūdusia" kalba ar tarme.

Bet dabar jau tikrai imkimės tų pažadėtųjų paprastų neprastų uždavinių, kalbų apie jų sprendimus bei kitų nepaskutinių dalykų.

2. Uždavinys.

Tvarkinguolė voverytė Julė, įsikūrusi Pavoveriuose (veikiausiai tuose pačiuose, pavyzdžiui, kurie yra taip arti prisiglaudę prie garbiosios Pabradės) savo žiemai skirtas gigantinių riešutaičių atsargas jau yra suslapsčiusi 5 drevėse. Jokia save gerbianti tų ar kitų padangių voverė nė už ką nelaiko ir niekada nelaikys jokios drevės visai tuščios, jeigu joje galima būtų pasidėti nors vieną riešutaitį. Lygiai taip pat jokia voverė niekada dviejose skirtingose drevėse nelaiko ir nelaikys po tiek pat riešutų. Na, o voverytė Julė dar griežtai prisilaiko nepažeidžiamo principo suslapstyti riešutus taip, kad bet kuriose trijose drevėse būtų paslėpta daugiau riešutaičių negu kad jų yra likusiose dviejose drevėse. Kaip sako voverytė Julė, gyvenimo elegancija labai paakina iki panagių gerbti save ir todėl nepalenkiamai laikytis modernaus principo:

„Didesnėje pusėje drevių – didesnė pusė riešutų".

Nedelsiant kyla du klausimai:

pirmasis egzistencinis (A):

ir

antrasis maksimalistinis, arba apie-kai-ką-pagalvota klausimas (B):

(A): ar tokia situacija Pavoverėje (prie pat Pabradės), ar Palūšėje (visai netoli Ignalinos), ar net pačiame Žvėryne (jau Vilniuje), ar net dar kitur yra įmanoma (egzistencinis tinkamu pavyzdžiu įveikiamas nerimas)?

(B): su kokiu pačiu mažiausiu arba minimaliu riešutų skaičiumi jau galima „sutverti“ tokią situaciją (maksimalistinis klausimas „pagal mažumą“, arba minimalistinis – „pagal didumą“).

Truputį pagalvojus yra visiškai aišku, kad minėtą egzistencinį nerimą

negi šitaip „va ir va kaip“ tikrai nutinka ne vien užduočių formuluotėse, bet net ir realiame gėlavandeniame Gelgaudiškyje

turėtų sudoroti apylygis, bet visur skirtingas riešutų kiekis.

Na, pavyzdžiui, visai aišku, kad visur palikdami beveik po šimtą, bet niekur ne po tiek pat riešutų, pavyzdžiui,

98, 99, 100, 101 ir 102

jau turėtume tinkamą tą egzistencinį aritmetinį nerimą išvarantį pavyzdį.

Iš tikrųjų viskas čia yra gerai: mes juk dar neprimiršome, kad riešutų skaičiai visose drevėse skirtingi (juk taip norėjome mes, atsiprašome, ne mes pirmiau, o voverytė Julė taip norėjo), o dar – ir kad daugumoje drevių yra ir dauguma riešutų – taip pat yra aiškiau, negu aišku.

Nes dabar juk gana būtų kiekvienam dėl to sunerimusiam pasakyti, kad bet kurioje iš tų trijų drevių yra praktiškai lygiai trys, o bet kuriose dviejose drevėse – praktiškai lygiai du šimtai riešutaičių, o praktiškai visada maždaug lygiai trys šimtai yra praktiškai visada daugiau negu praktiškai visada maždaug lygiai du šimtai.

Lieka maksimalistinis klausimas: kaip čia su kuo mažiau riešutų tokią padėtį sutvėrus? Griebdami „iš paties krašto“, galėtume mėginti imti patį mažiausią skirtingų riešutų rinkinį, arba

1, 2, 3, 4 ir 5

riešutus ir tikėtis sėkmės jau su

1 + 2 + 3 + 4 + 5,

arba jau su dar vos

15

riešutų.

Šiuo atveju vienintelė „baimelė“ jau tebūtų tik ta, kad „didesnėje pusėje drevių dar gal nebus didesnės pusės riešutų“. Tikrai, visai aišku, jog trijose „skysčiausiose“ drevėse yra

$$1 + 2 + 3,$$

arba

$$6,$$

o dviejose likusiose

$$4 + 5,$$

o tai jau iš karto net

$$9$$

riešutai – o tai daugiau negu prieš tai tose trijose drevėse – ir tuo blogiau, nes daugumos principas tada jau būtų pažeistas.

Todėl teks parašinėti: jeigu pažymėsime tuos skirtingus skaičius, didėjančius būtent tokia tvarka, kokia apačioje tos raidės surašytos, arba atitinkamai

$$A, B, C, D \text{ ir } E,$$

tai dėl nuoseklaus tų skaičių didėjimo (tada tikrai ir riešutų skaičius visose drevėse skirtingas) turime:

$$B \leq D - 2,$$
$$C \leq E - 2,$$

todėl, suprantama, kad sudėjus galioja tokia teisybė:

$$B + C \leq D + E - 4,$$

o veikiant minėtam (beje, labai Dauguose mėgstamam) principui

„*daugumoje – dauguma*“

privalo juk būti

$$A + B + C > D + \mathrm{E},$$

tai, vadinasi,

$$A \geq 5.$$

Tačiau tada B yra bent 6, C – bent 7, D – bent 8 ir E – bent jau 9.

Todėl visai nesunku matyti, kad rinkinys, kuriame yra

ir 5, ir 6, ir 7, ir 8, ir dar 9

riešutai, ir yra tasai rinkinys su pačiu mažiausiu riešutų skaičiumi

$$5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

(tų riešutų tada prisirenka net 35).

Tas rinkinys tikrai tenkina sąlygą, kad trijų pačių mažiausių skaičių suma, atsiprašome, voverytės Julės bendras bet kurioje trijose drevėse paliktų riešutaičių kiekis yra garantuotai didesnis už bendrą likusių dviejų drevių riešutaičių kiekį – nes mes juk ką tik patikrinome, kad trijų pačių mažiausių kiekių suma yra didesnė už likusių pačių didžiausiųjų dviejų!

3. Kitas pavyzdys.

Raskite nedidesnį už 1000 natūralųjį skaičių, kuris užbraukus vieną kurį jo skaitmenį sumažėja 9 kartus.

Pirmiausiai primintume dalumo iš 9 požymį:

Natūralusis skaičius turi lygiai tokią pačią dalybos iš 9 liekaną, kokią turi to skaičiaus skaitmenų suma.

Mūsų uždavinio sąlygomis nedelsianti išvada iš to, kas pasakyta aukščiau, yra surašyta žemiau:

Jeigu jau toks skaičius egzistuoja, tai jis tikrai dalijasi iš

$$9$$

(*nes juk pasakyta*, *kad skaičius*

$$9$$

kartus sumažėja).

Tada, pavyzdžiui, tokius iš 9 besidalijančius dviženklius skaičius galima tiesiog visus imti iš eilės ir patikrinti, gal kuris nors iš jų ir tiks. Tokių besidalijančių iš 9 dviženklių skaičių yra vos keli, imant juos iš eilės tai

9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90 ir dar 99.

Ir iš karto matome, kad vienas tinkamas skaičius tarp jų tikrai yra ir jį mes iš karto matome – tai

$$45.$$

Užbraukus

$$45$$

pirmąjį skaitmenį

$$4$$

lieka

$$5,$$

o tai tikrai yra

$$9$$

kartus mažiau negu buvo pradžioje.

O kaip ieškoti toliau? Negi dabar taip pat darysime su triženkliais skaičiais? Juk jų jau daug daugiau – nors patikrinti visus juos kad ir iš eilės dar būtų įmanoma – tik pagalvokite – jų dar tebūtų, Jūs gal nustebsite, bet lygiai lygiai viena šimtinė.

Apskritai paprasto darbo nereikėtų labai vengti ar bijotis – žmogiškoji tiesa sako, kad nėra blogų darbų, o tiktai – būna juk retsykiais iš tikrųjų taip – ne patys ištvermingiausi darbininkai.

O kad tinkamų triženklių skaičių pasidairyti verta, kad tai nėra tuščias reikalas, rodo mums tinkamas, beveik iš karto sutiktinas triženklis skaičius

$$135.$$

Tai gal imkim ir viską surašykim, kad jau visiškai nieko nepraleistume.

Jeigu turime triženklį skaičių

$$ABC,$$

arba, kitaip tariant,

$$100A + 10B + C,$$

tai jame galime užbraukti:

(♣) Jo pirmąjį skaitmenį A;

(♠) Jo antrąjį skaitmenį B;

(☻) Jo trečiąjį skaitmenį C.

Atvejis (♣) veda prie lygybės

$$100A + 10B + \mathrm{C} = 9(10B + C),$$

kuri reiškia

$$100A = 80B + 8C$$

ir, vadinasi,

$$8C$$

privalo baigtis

$$0,$$

ir todėl pats

$$C$$

tada yra arba

$$0,$$

arba

$$5.$$

Pirmuoju iš tų paskiausiųjų atvejų turėsime, kad

$$5A = 4B$$

ir, kadangi jie dabar jau negali būti nuliai, tai pagal turimas likusias galimybes

$$A$$

yra

$$4,$$

o

$$B$$

yra

$$5.$$

Būtent taip mąstant horizonte ir atsiranda skaičius

$$450.$$

Jis labai jau „primena“ mūsų jau sutiktą skaičių

$$45,$$

tik dabar jis yra su „prirašytu“ nuliu. Galėtume ir dar sykį prirašyti nulį, bet keturženklių skaičių mums dabar dar nereikia.

Antruoju iš tų nagrinėjamųjų atvejų

$$100A = 80B + 40$$

ir todėl

$$5A = 4B + 2.$$

Tai veda prie tokių galimybių:

$$B = 2 \text{ ir } A = 2$$

bei

$$B = 7 \text{ ir } A = 6,$$

duodančių

$$2$$

naujus tinkamus skaičius:

$$225$$

ir

$$675.$$

Todėl, užbraukinėdami pirmąjį skaitmenį, turėtume 3 triženklius atvejus:

$$225, 450 \text{ ir } 675.$$

Atvejis (♠), arba kai užbraukinėjame antrąjį skaitmenį B:

tada

$$100A + 10B + C = 9(10A + C),$$

arba

$$10A + 10B = 8C,$$

o tai jau reiškia, kad

$$5(A + B) = 4C,$$

todėl, kadangi

$$C$$

nelygus

$$0,$$

nes tada ir

$$A + B$$

būtų

$$0,$$

o su „tikrais triženkliais skaičiais“ taip nebūna, todėl belieka galimybė, kad

$$C$$

tai tik

$$5,$$

o tada

$$A + B$$

tai tik

$$4.$$

Pastaroji galimybė reiškia tokias

$$5$$

skaičių

$$A \text{ ir } B$$

poras:

$$(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1) \text{ ir } (4.0),$$

arba skaičius

(0)45, 135, 225, 315 ir 405.

Iš jų mes dar nesame matę tik

315 ir 405.

Atvejis (☻), arba kai užbraukinėjame jau trečiąjį skaitmenį C: tada

$$100A + 10B + \mathrm{C} = 9(10A + B),$$

arba

$$10A + B + C = 0$$

ir todėl mums tinkamų A, B ir C nėra.

Atsakymas: Visi mažesni už 1000 skaičiai, kurie sumažėja 9 kartus užbraukus vieną kurį jo skaitmenį yra

45, 135, 225, 315, 405, 450 **ir** 675.

4. Dar vienas, jau trečias pavyzdys.

Padarysime kažką dar visai paprasto, ir iš to paprasto „eidami atgal“ kaip mat „sumesime uždavinį“.

Paimkime 3 x 3 matmenų lentelę ir į ją kaip nors surašykime visus skaičius

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir 9,

įrašinėdami po vieną skaičių į kiekvieną langelį, na, pavyzdžiui, kad ir taip:

1	3	5
2	9	8
4	6	7

Dabar imkime iš eilės po tris skaičius, esančius atitinkamai visose trijose eilutėse ir po tris skaičius, esančius atitinkamai visuose trijuose stulpeliuose, ir sudauginkime juos.

Mūsų atveju taip darant rastųsi

6

sandaugos:

$$1 \cdot 3 \cdot 5$$
$$2 \cdot 9 \cdot 8$$
$$4 \cdot 6 \cdot 7$$
$$1 \cdot 2 \cdot 4$$
$$3 \cdot 9 \cdot 6$$
$$5 \cdot 8 \cdot 7,$$

arba

6

skaičiai:

15, 144, 168, 8, 162 ir 280.

Galop – o ką ten geriau su jais daryti besugalvosi – sudėję visus tuos

6

skaičius gautume

$$15 + 144 + 168 + 8 + 162 + 280 = 777.$$

Koks yra pats bendriausias to, neslėpkime, įspūdingo skaičiaus

777

ypatumas?

O, žinoma, pirmiausiai krenta į akis tai, kad jis nelyginis, nors labai galėtume ir norėtume pagirti tą gražų skaičių ir už jo visus vienodus skaitmenis, bet tai nebūtų pats „demokratiškiausias“ jo privalumas.

Nes tas jo privalumas su vienodais skaitmenimis yra iš tų retesniųjų privalumų.

Oi, ne kiekvienas skaičius galėtų tuo pasigirti.

O kad jis nelyginis, tai visai kas kita, tuo jis net ir artimų kaimynų 775 ir 779 palankų dėmesį iškart prasimanytų, nes ir jie juk yra nelyginiai, o su kaimynais juk geriau esti sutariant, arba juos – kaip kad dabar, pasitaikius progai – pagarbiai paminėjus.

Jeigu dabar mes dar – dirbdami toliau – nes dar mūsų uždavinys iki galo nesudėtas, sudėliotume tos pradinės lentelės atitinkamų 3 eilučių ir atitinkamų 3 stulpelių skaičius, tai gautume tokius rezultatus:

Dėdami eilučių skaičius, turėtume:

$$1 + 3 + 5 = 9,$$
$$2 + 9 + 8 = 19,$$
$$4 + 6 + 7 = 17,$$

o, dėdami stulpelių skaičius, paeiliui gautume:

$$1 + 2 + 4 = 7,$$
$$3 + 9 + 6 = 18,$$
$$5 + 8 + 7 = 20.$$

Jeigu dabar vėl stengtumės kaip nors „pagirti už nelyginumą“, tai galėtume pasakyti, kad

ir tarp trijų lentelės skaičių sumų eilutėmis,

arba skaičių

9, 17 ir 19

tikrai yra

nelyginių

skaičių (net jie visi),

ir tarp trijų stulpelių sumų skaičių,

arba

7, 18 ir 20

nelyginių

skaičių irgi yra (jau nebe visi, dabar jau tik vienintelis skaičius

7,

bet

nelyginė

suma vis tiek yra).

Reziumuodami galėtume pasakyti štai ką:

Mums labai atrodo, kad jeigu sudauginę visų trijų eilučių ir visų trijų stulpelių skaičius ir po to visus tuos 6 *skaičius sudėję gauname*

nelyginį
skaičių (taip mes ką tik buvome gavę
777*),*
tai tada būtent dėl to nelyginumo ir atsiranda
tokia lentelės eilutė
(mūsų atveju tokios buvo „ištisai“ visos trys eilutės), o taip pat dar ir
toks lentelės stulpelis
(mūsų atveju toks buvo pirmasis stulpelis su skaičiais
1, 3, 5),
kurių
visų trijų skaičių suma
yra
nelyginis skaičius.

Ar galima būtų tai įrodyti?

Pamėginkime nueiti šį kelią atgalios.

Tarkime, kad visų trijų eilučių ir visų trijų stulpelių skaičių sandaugų suma yra nelyginė. Tai reiškia, kad mes, sudėję
6
skaičius, gavome nelyginį skaičių. Tada, kaip saulė danguje, aišku, tarp tų dedamųjų skaičių garantuotai turėjo pasitaikyti mažų mažiausiai nors vienas koks nelyginis skaičius.

Tas mažų mažiausiai bent vienas pasitaikęs toksai nelyginis skaičius „pagal savo darybą“ pats yra trijų sveikųjų skaičių sandauga, todėl, jeigu jau trijų sveikųjų skaičių sandauga yra nelyginė, tai tada jau juk tikrai ir visi tie trys dauginamieji skaičiai, yra, „visi trys kaip vienas“, visi nelyginiai skaičiai.

Nemažindami bendrumo (prireikus mes paslaugiai ir pačią lentelę persuktume, arba „transponuotume“, kad tik eilutės galėtų virsti stulpeliais, o stulpeliai – eilutėmis, ir dar prireikus-paprašius mes ir pačius stulpelius ar eilutes vietomis perstatytume) ir po tų visų pastangų mes galime tvirtai vaizduotis, kad visi tie trys kalbamieji nelyginiai skaičiai „gyvena“ pačiame pirmame tos lentelės stulpelyje:

Vienas nelyginis skaičius		
Kitas nelyginis skaičius		
Trečias nelyginis skaičius		

Vadinasi, jeigu jau

3

iš

5

nelyginių skaičių „gyvena“ pirmame stulpelyje, tai likę

5 – 3 = 2

nelyginiai skaičiai „gyvena“ kur nors kitur tose

3

eilutėse.

Tačiau jeigu jau kokie nors

2

skaičiai „gyvena“

3

kokiose nors eilutėse, tai tada tikrai lieka kuri nors tais dviem skaičiais visai „neapgyvendinta“ eilutė. Toje „neapgyvendintoje“ eilutėje (nemažindami bendrumo, galime sakyti, kad pačioje aukščiausioje) nelyginių skaičių daugiau nėra, yra tik tas iš pirmojo stulpelio), o kiti skaičiai antrajame ir trečiajame stulpelyje yra abu lyginiai ir todėl padėtis tokia:

Vienas nelyginis skaičius	Lyginis skaičius	Lyginis skaičius
Kitas nelyginis skaičius		
Trečias nelyginis skaičius		

Dabar mums beliko pasakyti, kad ir

pirmojo stulpelio

ir

pirmosios eilutės

skaičių sumos abi yra

nelyginiai skaičiai.

Tuo mūsų tvirtinimas yra įrodytas.

Du klausimai arba vienas toks galvolaužis skaitytojui.

Dabar mūsų skaitytojui, garbiam Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos klausytojui, kartu su visais skaitlingais jo draugais ir pagalbininkais, norėtume iškelti mažų mažiausiai

2

klausimus:

vieną lengvą,

o

kitą – dar lengvesnį.

Mes tuoj suformuluosime juos, o tada Jūs jau patys nesunkiai pamatysite ar kitaip nuspręsite, kuris čia už kurį yra lengvesnis.

1 klausimas: *Ar šiuose samprotavimuose yra taip jau labai svarbu, kad tie kalbamieji į lentelę talpinami skaičiai yra būtent tie pirmieji*

9

natūralieji skaičiai

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir 9?

Ar negalėtų jų vietoje eiti bet kurie kiti

9

iš eilės einantys

sveikieji skaičiai, pavyzdžiui:

2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019 ir 2020?

2 klausimas: *O ką, o gal į tą lentelę ir apskritai galėtų būti po vieną įrašomi iš viso bet kokie*

9

skirtingi

natūralieji skaičiai?

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. 7 drevėse voverytė Julė išslapstė žiemai paliktus riešutus. Ji tebėra tvarkinga ir todėl jokia drevė neliks tuščia. Ji yra nepakartojama, todėl jokioje drevėje niekada nebus tiek pat riešutų kaip kitoje. Ji yra labai sumani, užtat bet kuriose keturiose jos drevėse visada yra daugiau riešutų negu likusiose kitose trijose drevėse (didesnėje pusėje drevių – didesnė pusė atsargų). Kiek mažiausiai riešutų turi būti susirankiojusi voverytė Julė, kad galėtų įgyvendinti tokį žiemos atsargų sandėliavimo modelį.

2. Raskite visus keturženklius skaičius, kurie sumažėja 9 kartus iš-braukus patį pirmąjį to skaičiaus skaitmenį.

3. Suprastinkite trupmeną

$$\frac{1010111110101}{1100111110011}$$

tiek, kad daugiau jau nebeįmanoma.

4. Ona, Jonas ir Marijona skuta bulves Dzūkijos aritmetikų sueigai Druskininkuose. Ona per 10 minučių nuskuta 18 bulvių, Jonas per 6 minutes nuskuta 7, o Marijona per 15 minučių – net 23 bulves. Per kiek laiko jie, taip dirbdami, visi kartu nuskus 540 bulvių?

5. Aštuoniaženklis skaičius yra toks, kurio pirmieji keturi skaitmenys yra visi tokie patys ir paskutinieji keturi skaitmenys – irgi visi tokie patys (bet gal kartais ir kitokie, kaip tie pirmieji, nors ir nebūtinai); priedo dar būtinai reikia, kad tas aštuoniaženklis skaičius būtų ir skaičiaus 45 kartotinis. Koks tada galėtų būti pats pirmasis tokio aštuoniaženklio skaičiaus skaitmuo?

6. Apie tris teigiamus skaičius yra tvirtai ir patikimai žinoma, kad parinkus bet kurį iš jų ir prie jo pridėjus dviejų likusiųjų skaičių kvadratų sumą, visada gaunamas vienas ir toks pats skaičius, kad ir kokį iš tų skaičių beimtume. Ar būtinai tada visi tie trys pradiniai skaičiai turėtų sutapti?

7. Jeigu bet kurių

keturių

iš 10 turimų sveikųjų teigiamų skaičių suma yra visada

didesnė

už bet kurių kitų

trijų

iš likusiųjų skaičių sumą, tai ar būtinai tada ir bet kurių

trijų

skaičių suma yra

didesnė

už bet kurių

dviejų

skaičių sumą?

8. Levui Tolstojui priskiriamas garsusis uždavinys su pjovėjais. Pjovėjų brigada turėjo nupjauti dvi lankas: didesniąją ir kitą, perpus mažesnę. Rytą visa brigada ėmė pjauti didesniąją pievą. Tos dienos darbo laikui įpusėjus brigada pasidalijo į dvi dalis. Pirmoji pusė toliau pjovė didesniąją pievą ir iki vakaro ją nupjovė. Kita pusė brigados, neprarasdama nė akimirkos, ėmė pjauti mažesnę pievą, bet iki vakaro darbo nebaigė. Likusią nenupjautą mažesniosios pievos dalį per dieną nupjovė vienas pjovėjas. Kiek pjovėjų buvo brigadoje?

9. Tėvas savo sūnums paliko daug vienodų gintariukų. Pats vyriausias sūnus gavo 4 kartus mažiau gintariukų, negu visi likę jo broliai kartu. Trečiasis pagal gautą gintariukų kiekį brolis gavo jų 9 kartus mažiau negu visi likę jo broliai kartu. Galiausiai pats mažiausiai gintariukų gavęs sūnus gavo jų 10 kartų mažiau negu visi likę broliai kartu. Kiek sūnų buvo pas tėvą?

10. Ar tikrai (ir jeigu taip, tai tada kodėl) skaičius

$$x^2 + x + 1$$

niekaip negali dalytis be liekanos iš

$$9,$$

jeigu tik x yra natūralusis skaičius?

V. SIMETRINĖS TAPATYBĖS, LYGTYS IR NELYGYBĖS

Juozas Šinkūnas
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

Reiškinys $R(x, y)$ su kintamaisiais x ir y vadinamas *simetriniu reiškiniu*, jeigu jo išraiška nepasikeičia sukeitus vietomis x ir y. Pavyzdžiui, reiškinys $\dfrac{x^2+5xy+y^2}{xy}$ yra simetrinis, o reiškinys x^2+5y^2 – nesimetrinis.

Reiškinys su trimis kintamaisiais x, y ir z vadinamas simetriniu reiškiniu, jeigu jo išraiška nepasikeičia bet kaip sukeitus vietomis kintamuosius x, y ir z. Pavyzdžiui, reiškinys $\dfrac{xy}{z}+\dfrac{xz}{y}+\dfrac{yz}{x}$ yra simetrinis reiškinys. Analogiškai galima apibrėžti simetrinius reiškinius su didesniu kintamųjų skaičiumi. Mes apsiribosime tik dviejų ir trijų kintamųjų simetriniais reiškiniais.

Lygybė $R_1(x, y, z) = R_2(x, y, z)$, kuri galioja visoje reiškinių $R_1(x, y, z)$ ir $R_2(x, y, z)$ apibrėžimo bendroje srityje, vadinama *tapatybe*. Jeigu reiškiniai $R_1(x, y, z)$ ir $R_2(x, y, z)$ yra simetriniai, tai tapatybė vadinama *simetrine tapatybe*. Analogiškai apibrėžiamos ir simetrinės lygtys bei simetrinės nelygybės.

Simetrinės tapatybės ir simetrinės nelygybės įrodomos įvairiais būdais (žr. [2], [3]). Simetrinių lygčių sistemų sprendimas nagrinėtas [1] užduotyje. Šioje temoje simetrines tapatybes ir simetrines nelygybes įrodinėsime bei spręsime simetrines lygtis, remdamiesi simetrinių daugianarių savybėmis. Plačiau apie simetrinių daugianarių taikymus galima pasiskaityti [4] knygelėje (rusų k.).

Atidžiai perskaitę pateiktus nurodymus ir išnagrinėję pavyzdžių (ypač 1-ojo, 6-ojo ir pagalbinių nelygybių) sprendimus bei įrodymus, sėkmingai atliksime pateiktą užduotį.

Norintiems susidaryti geresnius simetrinių tapatybių ir simetrinių nelygybių įrodinėjimo įgūdžius skirtas uždavinių rinkinėlis „Pasitreniruokite“ su trumpais nurodymais. Šių uždavinių sprendimų pateikti nereikia!

1. Dviejų kintamųjų simetriniai daugianariai

Daugianariai $x+y$ ir xy yra patys paprasčiausi dviejų kintamųjų simetriniai daugianariai. Juos vadinsime *pagrindiniais simetriniais daugianariais* ir žymėsime atitinkamai p_1 ir p_2. Aukštosios algebros kurse įrodoma teorema apie bet kokio dviejų kintamųjų simetrinio daugianario išreiškimą pagrindiniais simetriniais daugianariais p_1 ir p_2. Šios teoremos neįrodinėsime ir apsiribosime konkrečiais pavyzdžiais, reikalingais užduoties atlikimui.

1 pavyzdys. Pagrindiniais simetriniais daugianariais $p_1 = x+y$ ir $p_2 = xy$ išreikšime laipsnių sumas $S_n = x^n + y^n$ (simetrinius daugianarius), $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Sprendimas. Akivaizdu, kad

$$S_1 = x+y = p_1, \quad S_2 = x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = p_1^2 - 2p_2.$$

Įrodysime, kad $S_n = p_1 S_{n-1} - p_2 S_{n-2}$, $n \geq 3$.

Lygybės $S_{n-1} = x^{n-1} + y^{n-1}$ abi puses padauginę iš $p_1 = x+y$, gauname:

$$p_1 S_{n-1} = (x+y)\,(x^{n-1}+y^{n-1}) = x^n + y^n + xy(x^{n-2}+y^{n-2}) = S_n + p_2 S_{n-2}.$$

Iš čia

$$S_n = p_1 S_{n-1} - p_2 S_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Kai $n = 3$, gauname:

$$S_3 = p_1 S_2 - p_2 S_1 = p_1(p_1^2 - 2p_2) - p_1 p_2 = p_1^3 - 3p_1 p_2.$$

Nesunku įsitikinti (įsitikinkite!), kad

$$S_4 = p_1^4 - 4p_1^2 p_2 + 2p_2^2,$$

$$S_5 = p_1^5 - 5p_1^3 p_2 + 5p_1 p_2^2,$$

$$S_6 = p_1^6 - 6p_1^4 p_2 + 9p_1^2 p_2^2 - 2p_2^3,$$

$$S_7 = p_1^7 - 7p_1^5 p_2 + 14p_1^3 p_2^2 - 7p_1 p_2^3.$$

....

Šiomis išraiškomis remsimės spręsdami uždavinius.

Išvesime dar vieną sąryšį tarp p_1 ir p_2. Aišku, kad

$$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = S_2 - 2p_2 = p_1^2 - 4p_2 \geq 0.$$

Pažymėję $t = p_1^2 - 4p_2$, gausime, kad

$$p_2 = \frac{1}{4}(p_1^2 - t), \ t \geq 0.$$

2 pavyzdys. Įrodysime tapatybę

$$(x+y)^7 - x^7 - y^7 = 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2.$$

Sprendimas. Remdamiesi pirmame pavyzdyje išvestomis S_n išraiškomis, gausime:

$$(x+y)^7 - x^7 - y^7 = p_1^7 - S_7 = p_1^7 - (p_1^7 - 7p_1^5 \cdot p_2 + 14p_1^3 \cdot p_2^2 - 7p_1 p_2^3) =$$
$$= 7p_1p_2(p_1^4 - 2p_1^2p_2 + p_2^2) = 7p_1p_2(p_1^2 - p_2)^2 = 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2.$$

Taigi tapatybė įrodyta.

3 pavyzdys. Rasime lygčių:

a) $3(x+y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$ ir *b*) $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

sveikuosius sprendinius.

Sprendimas. *a*) Abi lygties puses išreiškę pagrindiniais simetriniais daugianariais, gauname tokią lygtį:

$$3p_1 = 3S_2 - 2p_2 \Leftrightarrow 3p_1 = 3(p_1^2 - 2p_2) - 2p_2 \Leftrightarrow 3p_1^2 - 3p_1 = 8p_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3p_1^2 - 3p_1 \leq 8 \cdot \frac{1}{4}p_1^2 = 2p_1^2 \Leftrightarrow p_1^2 - 3p_1 \leq 0.$$

Šios nelygybės sprendinių aibė yra intervalas [1; 3].

Kadangi p_1 turi būti sveikasis skaičius, tai p_1 gali įgyti tik šias reikšmes: $p_1 = 0$, $p_1 = 1$, $p_1 = 2$, $p_1 = 3$.

Kai $p_1 = 0$, iš lygties $3p_1^2 - 3p_1 = 8p_2$ randame, kad $p_2 = 0$.

Kai $p_1 = 1$, tai $p_2 = 0$;

kai $p_1 = 2$, $p_2 = \frac{3}{4} \notin Z$;

kai $p_1 = 3$, $p_2 = \frac{9}{4} \notin Z$.

Vadinasi, lygties $3(x+y)=3x^2-2xy+3y^2$ sveikuosius sprendinius rasime, išsprendę šias lygčių sistemas:

$$\begin{cases} x+y=0, \\ xy=0 \end{cases} \text{ ir } \begin{cases} x+y=1, \\ xy=0. \end{cases}$$

Pirmoji turi tik vieną sprendinį (0; 0), o antroji turi du sprendinius: (0; 1) ir (1; 0).

Ats.: (0; 0), (0; 1), (1; 0).

b) Kadangi

$x^2+xy+y^2=x^2y^2 \Leftrightarrow S_2+p_2=p_2^2 \Leftrightarrow p_1^2-p_2=p_2^2 \Leftrightarrow$

$p_2^2+p_2-p_1^2=0,$ tai $p_2=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4p_1^2}}{2}$. Kad p_2 būtų sveikasis skaičius, pašaknio reiškinys turi būti nelyginio skaičiaus kvadratas.

Nagrinėkime du atvejus:

1) Kai $1+4p_1^2=1,$ tai $p_1=0$ ir todėl $p_2=0$ arba $p_2=-1.$ Išsprendę lygčių sistemas

$$\begin{cases} x+y=0, \\ xy=0 \end{cases} \text{ ir } \begin{cases} x+y=1, \\ xy=0, \end{cases}$$

gauname tris sveikuosius lygties sprendinius: (0; 0), (1; –1), (–1; 1).

2) Kai $1+4p_1^2=(2m+1)^2,$ $m\in Z,$ $m\neq 0,$ tai $p_1^2=m^2+m.$ Bet $m^2+m=m(m+1)$ nėra sveikojo skaičiaus kvadratas, kai $m\neq 0.$ Todėl p_1 negali būti sveikojo skaičiaus kvadratas.

Ats.: (0; 0), (1; –1), (–1; 1).

4 pavyzdys. Įrodysime, kad $8(a^4+b^4)\geq(a+b)^4$, jei $a, b\in\mathrm{R}$.

Sprendimas. Pasinaudoję pirmame pavyzdyje gautomis S_n išraiškomis ir lygybe $p_2=\dfrac{1}{4}(p_1^2-t),$ $t\geq 0,$ gausime:

$$8(a^4+b^4)-(a+b)^4=8(p_1^4-4p_1^2p_2+2p_2^2)-p_1^4=$$

$$=7p_1^4-32p_1^2\cdot\frac{1}{4}(p_1^2-t)+16\cdot\frac{1}{16}(p_1^2-t)^2=$$

$$=7p_1^4-8p_1^4+8p_1^2t+p_1^4-2p_1^2t+t^2=6p_1^2t+t^2\geq 0.$$

Lygybė galima tik tada, kai $t=0,$ t. y. kai $a=b.$

5 pavyzdys. Išspręsime šias lygtis:

a) $10x^6+19x^5-19x^4-20x^3-19x^2+19x+10=0;$

b) $12x^5-4x^4-27x^3-27x^2-4x+12=0.$

Sprendimas. Abiejose lygtyse vienodai nutolusių nuo pradžios ir nuo galo narių koeficientai yra lygūs. Tokios lygtys vadinamos *sangrąžinėmis lygtimis.* Jas spręsime, remdamiesi 1-ame pavyzdyje gautomis S_n išraiškomis.

a) Kadangi $x=0$ nėra lygties

$10x^6+19x^5-19x^4-20x^3-19x^2+19x+10=0$

sprendinys, šią lygtį padaliję iš $x^3,$ gauname:

$$10x^3+19x^2-19x-20-19\cdot\frac{1}{x}+19\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{10}{x^3}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+19\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-19\left(x+\frac{1}{x}\right)-20=0.$$

Tegu $x+\frac{1}{x}=p.$ Kadangi $x\cdot\frac{1}{x}=1,$ tai remdamiesi pirmame pavyzdyje išvestomis S_n išraiškomis, kai $p_1=p,$ o $p_2=1,$ gausime:

$$S_1=x+\frac{1}{x}=p,\ \ S_2=x^2+\frac{1}{x^2}=p^2-2,\ \ S_3=p^3-2p.$$

Šias išraiškas įrašę į lygtį, gauname:

$$10(p^3-3p)+19(p^2-2)-19p-20=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10p^3+19p^2-49p-58=0.$$

Pastebėję, kad $p=-1$ yra šios lygties sprendinys, kairiąją jos pusę išskaidome dauginamaisiais. Daugianarį $10p^3+19p^2-49p-58=0$ dalijame kampučiu iš $p+1$:

$$
\begin{array}{l|l}
\underline{}10p^3+19p^2-49p-58=0 & \underline{p+1} \\
\underline{10p^3+10p^2} & 10p^2+9p-58 \\
\quad\underline{}9p^2-49p & \\
\quad\underline{9p^2+\ 9p} & \\
\qquad\underline{}-58p-58 & \\
\qquad\underline{-58p-58} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Taigi

$$10p^3+19p^2-49p-58=(p+1)(10p^2+9p-58).$$

Lygtis

$$10p^3+19p^2-49p-58=0$$

suskyla į dvi lygtis:

$$p+1=0 \text{ ir } 10p^2+9p-58=0.$$

Jų sprendiniai atitinkamai yra:

$$p=-1 \text{ ir } p=2,\ \ p=-\frac{29}{10}.$$

Išsprendę lygtis

$$x+\frac{1}{x}=-1,\ \ x+\frac{1}{x}=2,\ \ x+\frac{1}{x}=-\frac{29}{10},$$

t. y. lygtis

$$x^2+x+1=0,\ \ x^2-2x+1=0 \text{ ir } 10x^2+29x+10=0,$$

gausime nagrinėjamos lygties sprendinius.

Pirmoji lygtis sprendinių neturi. Antroji lygtis turi vieną sprendinį: $x_1=x_2=1$, o trečiosios lygties sprendiniai yra $x_3=-\frac{5}{2}$ ir $x_4=-\frac{2}{5}$.

Ats.: 1, $-\frac{5}{2}$, $-\frac{2}{5}$.

b) Nesunku pastebėti, kad $x=-1$ yra lygties

$$12x^5-4x^4-27x^3-27x^2-4x+12=0$$

sprendinys. Kairiąją lygties pusę padalijame iš $x+1$:

$$
\begin{array}{l|l}
\_12x^5-4x^4-27x^3-27x^2-4x+12=0 & \underline{\;x+1\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\underline{12x^5+12x^4} & 12x^4-16x^3-11x^2-16x+12 \\
\qquad\_-16x^4-27x^3 & \\
\qquad\underline{-16x^4-16x^3} & \\
\qquad\qquad\_-11x^3-27x^2 & \\
\qquad\qquad\underline{-11x^3-11x^2} & \\
\qquad\qquad\qquad\_-16x^2-4x & \\
\qquad\qquad\qquad\underline{-16x^2-16x} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\_12x+12 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\underline{12x+12} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Kadangi
$12x^5-4x^4-27x^3-27x^2-4x+12=(x+1)(12x^4-16x^3-11x^2-16x+12)$,
nagrinėjamoji lygtis išskaidoma į dvi lygtis:

$$x+1=0 \ \text{ ir } \ 12x^4-16x^3-11x^2-16x+12=0.$$

Pirmos lygties sprendinys yra $x_1=-1$ (mes jį buvome atspėję!), o antra lygtis yra sangrąžinė. Ją padalijęs iš x^2, gausime:

$$12\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-16\left(x+\frac{1}{x}\right)-11=12(p^2-2)-16p-11=12p^2-16p-35=0.$$

Iš čia $p=-\frac{7}{6}$ arba $p=\frac{5}{2}$. Taigi, išsprendę lygtis $x+\frac{1}{x}=-\frac{7}{6}$ ir $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$, rasime lygties

$$12x^4-16x^3-11x^2-16x+12=0 \text{ sprendinius.}$$

Pirma lygtis sprendinių neturi, o antros lygties sprendiniai yra: 2 ir $\frac{1}{2}$. Vadinasi, nagrinėjamoji lygtis turi tris sprendinius. –1, 2 ir $\frac{1}{2}$.

Ats.: –1, $\frac{1}{2}$, 2.

2. Trijų kintamųjų simetriniai daugianariai

Daugianariai $x+y+z$, $xy+xz+yz$ ir xyz yra paprasčiausi trijų kintamųjų simetriniai daugianariai. Juos vadinsime *pagrindiniais trijų kintamųjų simetriniais daugianariais* ir atitinkamai žymėsime p_1, p_2 ir p_3.

Kaip ir dviejų kintamųjų simetriniai daugianariai, taip ir trijų kintamųjų simetriniai daugianariai išreiškiami pagrindiniais simetriniais daugianariais

$$x+y+z=p_1,\ \ xy+xz+yz=p_2 \ \text{ ir } \ xyz=p_3.$$

Šio teiginio irgi neįrodinėsime ir nagrinėsime tik atskirus simetrinių daugianarių atvejus.

6 pavyzdys. Simetrinius daugianarius

$$S_n=x^n+y^n+z^n,\ \ n=0,1,2,3,\ldots,$$

išreikšime pagrindiniais simetriniais daugianariais.

Sprendimas. Akivaizdu, kad

$$S_0=x^0+y^0+z^0=3,$$
$$S_1=x+y+z=p_1,$$
$$S_2=x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)=p_1^2-2p_2.$$

Įsitikinsime, kad

$$S_n=p_1S_{n-1}-p_2S_{n-2}+p_3S_{n-3},\ \ n\geq 3 \text{ (Niutono formulė):}$$

$$p_1S_{n-1}-p_2S_{n-2}+p_3S_{n-3}=$$
$$=(x+y+z)(x^{n-1}+y^{n-1}+z^{n-1})-(xy+xz+yz)(x^{n-2}+y^{n-2}+z^{n-2})+$$
$$+xyz(x^{n-3}+y^{n-3}+z^{n-3})=$$
$$=(x^n+y^n+z^n+xy^{n-1}+x^{n-1}y+xz^{n-1}+x^{n-1}z+yz^{n-1}+y^{n-1}z)-$$
$$-(x^{n-1}y+xy^{n-1}+x^{n-1}z+xz^{n-1}+y^{n-1}z+yz^{n-1}+xyz^{n-2}+xy^{n-2}z+$$
$$+x^{n-2}yz)+(x^{n-2}yz+xy^{n-2}z+xyz^{n-2})=x^n+y^n+z^n=S_n.$$

Taigi patikrinome Niutono formulę.

Remiantis šia formule nesunku įsitikinti (įsitikinkite!), kad

$$S_3=p_1^3-3p_1p_2+3p_3,$$
$$S_4=p_1^4-4p_1^2p_2+2p_2^2+4p_1p_3,$$

$$S_5 = p_1^5 - 5p_1^3 p_2 + 5p_1 p_2^2 + 5p_1^2 p_3 - 5p_2 p_3,$$
$$S_6 = p_1^6 - 6p_1^4 p_2 + 9p_1^2 p_2^2 - 2p_2^3 + 6p_1^3 p_3 - 12p_1 p_2 p_3 + 3p_3^2,$$
$$S_7 = p_1^7 - 7p_1^5 p_2 + 14p_1^3 p_2^2 - 7p_1 p_2^3 + 7p_1^4 p_3 - 21p_1^2 p_2 p_3 +$$
$$+ 7p_1 p_3^2 + 7p_2^2 p_3.$$

Šios formulės labai supaprastėja, kai $p_1 = 0.$ Tada, pavyzdžiui,

$$S_3 = 3p_3 \text{ ir } S_4 = 2p_2^2.$$

Kitaip sakant

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \text{ ir } x^4 + y^4 + z^4 = 2(xy + xz + yz)^2,$$

jeigu $x + y + z = 0.$

7 pavyzdys. Įrodysime, kad $xyz = 0,$ jeigu

$$x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3 = 1.$$

Sprendimas. Remdamiesi 6 pavyzdyje gautomis S_n išraiškomis ir šio pavyzdžio sąlyga, gausime lygčių sistemą

$$\begin{cases} S_1 = p_1 = 1, \\ S_2 = p_1^2 - 2p_2 = 1, \\ S_3 = p_1^3 - 3p_1 p_2 + 3p_3 = 1, \end{cases}$$

turinčią vieintelį sprendinį: $p_1 = 1,\ \ p_2 = 0,\ \ p_3 = 0.$

Taigi $xyz = 0.$

Pastaba. Kartu įrodėme, kad $xy + xz + yz = 0.$

8 pavyzdys. Įrodysime, kad

$$\frac{a^7 + b^7 + c^7}{7} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \cdot \frac{a^4 + b^4 + c^4}{2},$$

jeigu $a + b + c = 0.$

Sprendimas. Remdamiesi 6 pavyzdyje gautomis S_n išraiškomis, kai $p_1 = 0,$ apskaičiuosime įrodomosios tapatybės kairiosios ir dešiniosios pusės reikšmes. Gausime, kad

$$\frac{a_7 + b_7 + c_7}{7} = \frac{S_7}{7} = \frac{7p_2^2 p_3}{7} = p_2^2 p_3,$$

ir

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^4+b^4+c^4}{2}=\frac{S_3}{3}\cdot\frac{S_4}{2}=\frac{3p_3}{3}\cdot\frac{2p_2^2}{2}=p_2^2p_3.$$

Vadinasi, $\dfrac{a_7+b_7+c_7}{7}=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\dfrac{a^4+b^4+c^4}{2}$, kai $a+b+c=0.$

9 pavyzdys. Įrodysime, kad $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, jeigu $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ ir $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0.$

Sprendimas. Iš sąlygos išplaukia, kad $z\neq 0$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$. Tegul $\dfrac{x}{a}=u$, $\dfrac{y}{b}=v$, $\dfrac{z}{c}=w$. Tada $u+v+w=1$ ir $\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}+\dfrac{1}{w}=0$, t. y. $uv+uw+vw=0.$

Taigi $p_1=1$, $p_2=0$ ir todėl

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=u^2+v^2+w^2=p_1^2-2p_2=1.$$

Įrodysime keletą pagalbinių nelygybių, kuriomis galima remtis įrodinėjant sudėtingesnes nelygybes ir sprendžiant ekstremumų uždavinius.

1. Akivaizdu, kad

$$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\geq 0.$$

Iš čia

$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$, arba $\underline{S_2\geq p_2}$ su visais $x, y, z\in \mathrm{R}$.

Kadangi $S_2=p_1^2-2p_2$, tai $p_1^2-2p_2\geq p_2$; taigi $\underline{p_1^2\geq 3p_2}.$

Įrodėme, kad $(x+y+z)^2\geq 3(xy+xz+yz)$. Lygybė galima tik tada, kai $x=y=z$.

2. Tegu $x=ab$, $y=bc$, $z=ca$. Šias išraiškas įrašę į nelygybę $(x+y+z)^2\geq 3(xy+xz+yz)$, gausime:

$$p_2^2\geq 3(ab^2c+abc^2+a^2bc)=3abc(a+b+c)=3p_1p_3.$$

Vadinasi,

$$\underline{p_2^2 \geq 3p_1p_3.}$$

Lygybė galima tik tada, kai $a = b = c$.

3. Jei x, y, z yra teigiami skaičiai, tai $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ ir $p_3 > 0$.

Sudauginę nelygybes $p_1^2 \geq 3p_2$ ir $p_2^2 \geq 3p_1p_3$, gauname nelygybę $p_1^2 p_2^2 \geq 9p_1p_2p_3$, o iš jos – nelygybę:

$$\underline{p_1p_2 \geq 9p_3.}$$

Lygybė galima tik tada, kai $x = y = z$.

4. Jei x, y, z yra teigiami skaičiai, nelygybę $p_1^2 \geq 3p_2$ padauginę iš p_1^2, gausime:

$$p_1^4 \geq 3p_1^2 p_2 = 3p_1 \cdot (p_1p_2) \geq 3p_1 \cdot 9p_3 = 27p_1p_3,$$

o iš čia – nelygybę

$$\underline{p_1^3 \geq 27p_3.}$$

Lygybė galima tik tada, kai $x = y = z$.

5. Jei x, y, z yra teigiami skaičiai, tai

$$p_2^3 \geq p_2 \cdot p_2^2 = p_2 \cdot 3p_1p_3 = 3p_3 \cdot (p_1 \cdot p_2) \geq 3p_3 \cdot 9 = 27p_3^2.$$

Taigi

$$\underline{p_2^3 \geq 27p_3^2.}$$

Lygybė galima tik tada, kai $x = y = z$.

10 pavyzdys. Įrodysime, kad $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}(x + y + z)^2$ su visais $x, y, z \in \mathrm{R}$.

Sprendimas. Nelygybę $S_2 \geq p_2$ padauginę iš 2 ir sudėję su lygybe $S_2 = p_1^2 - 2p_2$, gauname, kad $3S_2 \geq p_1^2$. Iš čia $S_2 \geq \frac{1}{3}p_1^2$, arba $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}(x + y + z)^2$.

Lygybė galima tik tada, kai $x = y = z$.

11 pavyzdys. Rasime sandaugos xyz didžiausią reikšmę, kai $xy+xz+yz=1$ ir $x>0,\ \ y>0,\ \ z>0.$

Sprendimas. Iš nelygybių $p_1^2 \geq 3p_2$ ir $p_2^2 \geq 3p_1p_3$ išplaukia, kad

$$p_3 \leq \frac{p_2^2}{3p_1} \leq \frac{p_2^2}{3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{p_2}} = \frac{1}{3\sqrt{3}},\ \text{nes}\ \ p_2 = 1.$$

Taigi $xyz \leq \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$. Lygybė (didžiausia reikšmė!) galima tik tada, kai $x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

12 pavyzdys. Rasime reiškinio $S=\dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y}$ mažiausią reikšmę, kai $x^2+y^2+z^2=1$ ir $x>0,\ \ y>0,\ \ z>0.$

Sprendimas. Kadangi $S=\dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y}=\dfrac{x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2}{xyz}$

ir

$$x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2=\frac{1}{2}((x^2+y^2+z^2)^2-x^4-y^4-z^4)=\frac{1}{2}(S_2^2-S_4)=$$

$$=\frac{1}{2}((p_1^2-2p_2)^2-p_1^4+4p_1^2p_2-2p_2^2-4p_1p_3)=p_2^2-2p_1p_3$$

(rėmėmės 6 pavyzdyje gautomis S_2 ir S_4 išraiškomis), tai

$$S=\frac{p_2^2-2p_1p_3}{p_3} \geq \frac{3p_1p_3-2p_1p_3}{p_3}=p_1.$$

Lygybė galima tik tada, kai $x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Tada $p_1=x+y+z=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$. Vadinasi, mažiausia S reikšmė yra $\sqrt{3}$.

13 pavyzdys. Įrodysime, kad

$$ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ac(a+c-2b) \geq 0,$$

kai $a>0,\ \ b>0,\ \ c>0.$

Sprendimas. Aišku, kad

$$ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ac(a+c-2b)=$$
$$=ab(p_1-3c)+bc(p_1-3a)+ac(p_1-3b)=$$
$$=p_1(ab+bc+ac)-9abc=p_1p_2-9p_3\geq 0,$$

nes $p_1p_2\geq 9p_3$ (žr. 3 pagalbinę nelygybę).

Lygybė galima tik tada, kai $a=b=c$.

14 pavyzdys. Rasime lygties

$$\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=3$$

sveikuosius sprendinius.

Sprendimas. Atkreipkime dėmesį, kad $x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0.$ Tegu $\frac{xy}{z}=u,$ $\frac{xz}{y}=v,$ $\frac{yz}{x}=w.$ Tada

$$p_1=u+v+w=3,$$
$$p_2=uv+uw+vw=\frac{xy}{z}\cdot\frac{xz}{y}+\frac{xy}{z}\cdot\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}\cdot\frac{yz}{x}=x^2+y^2+z^2.$$

Kadangi $p_2\leq\frac{1}{3}p_1^2$ (žr. 1 pagalbinę nelygybę), tai

$$x^2+y^2+z^2\leq\frac{1}{3}p_1^2=3.$$

Iš čia $|x|=|y|=|z|=1$ (x, y, z – sveikieji skaičiai!). Vadinasi, $u=\pm 1,$ $v=\pm 1,$ $w=\pm 1.$ Tačiau $u+v+w=3.$ Todėl yra vienintelė galimybė – $u=v=w=1.$ Taigi sistemos $\frac{xy}{z}=1,$ $\frac{xz}{y}=1,$ $\frac{yz}{x}=1$ sveikieji sprendiniai yra: (1, 1, 1), (1, –1, –1), (–1, 1 –1) ir (–1, –1, 1). Nesunku įsitikinti, kad visi jie yra ir pradinės lygties sprendiniai.

Ats.: (1, 1, 1), (1, –1, –1), (–1, 1 –1), (–1, –1, 1).

PASITRENIRUOKITE

I. Įrodykite tapatybes:

a) $(x+y)^4+x^4+y^4=2(x^2+xy+y^2)^2;$

b) $\dfrac{(x+y)^7-x^7-y^7}{(x+y)^3-x^3-y^3}=\dfrac{7}{6}\left((x+y)^4+x^4+y^4\right).$

[*Nurodymas*. Pažymėkite $z=-x-y$ (tada $x+y+z=0$) ir remkitės 8 pavyzdžiu.]

II. Įrodykite, kad jeigu $a+b+c=0,$ tai

1) $2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2;$

2) $a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2);$

[*Nurodymas*. Daugianarį $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ išreikškite pagrindiniais simetriniais daugianariais (žr. 12 pavyzdį).]

3) $2(x^5+y^5+z^5)=5xyz(x^2+y^2+z^2);$

4) $\dfrac{x^7+y^7+z^7}{7}\cdot\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}=\left(\dfrac{x^5+y^5+z^5}{5}\right)^2;$

5) $\left(\dfrac{x^7+y^7+z^7}{7}\right)^2=\left(\dfrac{x^5+y^5+z^5}{5}\right)^2\cdot\dfrac{x^4+y^4+z^4}{4}.$

III. Įrodykite šias nelygybes:

1) $\sqrt{\dfrac{a^2}{b}}+\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b};$

[*Nurodymas*. Pažymėkime $\sqrt{a}=u,\ \sqrt{b}=v$.]

2) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^8\ge 64ab(a+b)^2;$

[*Nurodymas*. Pažymėkite $u=\sqrt{a},\quad v=\sqrt{b}$ (tada nelygybė virsta tokia nelygybe $(u+v)^8\ge 64u^2v^2(u^2+v^2)^2$, arba $(u+v)^4\ge 8uv(u^2+v^2)$) ir remkitės 4 pavyzdžiu.]

3) $a^6+b^6\ge a^5b+ab^5;$

4) $a^4+2a^3b+2ab^3+b^4\ge 6a^2b^2,$ jei $a\ge 0,\ b\ge 0.$

5) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge abc(a+b+c).$

[*Nurodymas*. Žr. II. 2) uždavinio nurodymą.]

6) $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$;

7) $a+b+c>3$, jei $ab+bc+ca>a+b+c$ ir $a>0$, $b>0$, $c>0$;

8) $x^2+y^2+z^2 \ge 1$, jei $xy+yz+xz=1$;

9) $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y} \ge x+y+z$, jei $x>0$, $y>0$, $z>0$;

[*Nurodymas.* Įrodykite, kad

$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}-x-y-z=\frac{x^2y^2+y^2z^2-x^2z^2-(x+y+z)xyz}{xyz} \ge 0.$]

IV. 1) Apskaičiuokite reiškinio $\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{xz}+\frac{z^2}{xy}$ reikšmę, kai $x+y+z=0$;

[*Ats.:* 3.]

2) Apskaičiuokite reiškinio

$$a^4+b^4+c^4$$

reikšmę, kai $a+b+c=0$ ir $a^2+b^2+c^2=1$.

[*Ats.:* $\frac{1}{2}$.]

V. Išspręskite šias lygtis:

1) $12x^4-16x^3-11x^2-16x+12=0$;

[*Ats.:* $\frac{1}{2}$; 2.]

2) $9x^6-18x^5-73x^4-164x^3-73x^2-18x+9=0$;

[*Ats.:* 1, 1, $\frac{1}{3}$, 3, $-3\frac{1}{3}$. *Nurodymas.* Vienas lygties $9p^3-18p^2-100p+200=0$ sprendinys yra $p=2$.]

3) $10x^5+x^4-47x^3-47x^2+x+10=0$.

[*Ats.:* –1, –1, –1, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{2}$.]

VI. Raskite lygties $x^3+y^3+1=3xy$ sveikuosius sprendinius.

[*Ats.:* (1; 1). *Nurodymas.* Lygtį $p_1^3-3p_1p_2+1-p_2=0$ galima užrašyti taip: $(p_1+1)\left(p_1^2-p_1+1-3p_2\right)=0.$]

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Įrodykite tapatybę $(x+y)^5-x^5-y^5=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2).$

2. Įrodykite, kad $\dfrac{a^7+b^7+c^7}{7}=\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}\cdot\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2},$ jeigu $a+b+c=0.$

3. Įrodykite nelygybę $a^4+b^4\geq a^3b+ab^3.$

4. Įrodykite, kad $-\dfrac{1}{2}\leq ab+bc+ca\leq 1,$ jeigu $a^2+b^2+c^2=1.$

5. Įrodykite, kad $ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)\geq 6abc,$ jeigu $a>0,$ $b>0,$ $c>0.$

6. Raskite reiškinio $S(x,y)=xy(x-y)^2,$ kai $x+y=a,$ didžiausią reikšmę.

7. Raskite reiškinio $S(x,y,z)=\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{xz}+\dfrac{1}{yz}$ mažiausią reikšmę, kai $xy+yz+xz=1$ ir $x>0,$ $y>0,$ $z>0.$

8. Raskite reiškinio $S(x,y,z)=(1+x)(1+y)(1+z)$ didžiausią reikšmę, kai $x+y+z=1$ ir $x>0,$ $y>0,$ $z>0.$

9. Raskite lygties $x+y=x^2-xy+y^2$ sveikuosius sprendinius.

10. Išspręskite lygtį $4x^5-21x^4+17x^3+17x^2-21x+4=0.$

Literatūra

1. A. Apynis. Simetrinių lygčių sistemos. LJMM, 2009–2011 m. m. 3-ji užduotis.
2. J. Šinkūnas. Vidurkiai ir jų taikymai. Jaunajam matematikui, LJMM 8 kn., 6–19, 94–99 psl.
3. J. Šinkūnas. Sąlyginės tapatybės ir nelygybės. LJMM, 2009–2011 m. m. 6-oji užduotis.
4. В. Г. Болтянский, Н. Я. Виленкин. Симметрия в алгебре. Из-во „Наука“, Москва, 1967, 283 psl.

VI. NELYGYBĖS SU PARAMETRAIS

Vidmantas Pekarskas
(Kauno technologijos universitetas)

Tarkime, kas M ir N – dvi skaičių aibės. Šių aibių sąjunga vadiname aibę, sudarytą iš elementų, priklausančių bent vienai iš aibių M, N. Ją žymime $M \bigcup N$. Pavyzdžiui, kai $M = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $N = \{-1; 0; 1; 2\}$, tai $M \bigcup N = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Aibių sankirta vadiname aibę, sudarytą iš elementų, priklausančių abiems aibėms. Sankirtą žymime $M \bigcap N$. Taigi ankstesniame pavyzdyje $M \bigcap N = \{1; 2\}$.

Sakykime, duotos dvi nelygybės

$$f(x) \geq 0, \tag{1}$$

$$g(x) \geq 0. \tag{2}$$

Pirmosios nelygybės sprendinių aibę pažymėkime M, o antrosios – N.

Kai reikia rasti aibę, kurios skaičiai tiktų (1) ir (2) nelygybėms, t. y. aibių M ir N sankirtą $M \bigcap N$, sprendžiame (1) ir (2) nelygybių sistemą. Sistemą žymime taip:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Kai ketiname rasti aibę, kurios skaičiai tiktų (1) arba (2) nelygybei, arba abiems, t. y. ieškome aibių M ir N sąjungos $M \bigcup N$, sprendžiame (1) ir (2) nelygybių visumą. Ją žymime taip:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{array} \right.$$

Pabrėžiame dar kartą: spręsdami sistemą, ieškome sprendinių sankirtos, o spręsdami visumą – sprendinių sąjungos. Tikriausiai pastebėjote, kad, kalbėdami apie sistemą, vartojame jungtį „ir“, o kalbėdami apie visumą – jungtį „arba“. Toliau pateikiamoje lentelėje surašytos trys viena kitą atitinkančių sąvokų poros.

sistema	visuma
sankirta	sąjunga
ir	arba

Dvi nelygybės vadinamos ekvivalenčiomis tam tikroje aibėje, kai jų sprendiniai šioje aibėje sutampa. Ekvivalentumui žymėti naudojame simbolį $\Leftrightarrow$.

Nelygybių sistemos ir visumos sąvokas patogu taikyti sprendžiant įvairias nelygybes. Pavyzdžiui, nelygybę

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \tag{3}$$

kuri teisinga, kai skaitiklis ir vardiklis yra vienodų ženklų, galima užrašyti taip:

$$f(x) > 0 \quad \text{ir} \quad g(x) > 0$$

arba

$$f(x) < 0 \quad \text{ir} \quad g(x) < 0.$$

Naudojantis visumos ir sistemos simboliais, (3) nelygybę galima pakeisti jai ekvivalenčia nelygybių sistemų visuma. Taigi

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Analogiškai,

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{4}$$

Pavyzdžiui, spręsdami iracionaliąsias nelygybes

$$\sqrt{f(x)} \le g(x) \qquad \text{ir} \qquad \sqrt{f(x)} \ge g(x),$$

turime remtis šiais teiginiais (pagalvokite patys, kaip jie gauti):

$$\sqrt{f(x)} \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0, \\ f(x) \le g^2(x). \end{cases} \tag{5}$$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x). \end{cases} \end{array} \right. \qquad (6)$$

Atkreipiame dėmesį, jog antroje šios visumos sistemoje nereikia prirašyti nelygybės $f(x) \geq 0$. Kad ji teisinga, tiesiog išplaukia iš nelygybės $f(x) \geq g^2(x)$.

Dar paminėsime dvi nelygybes, kurių reikės toliau:

$$x^2 < a^2 \Leftrightarrow -a < x < a, \; a > 0, \qquad (7)$$

$$x^2 > a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -a, \\ x > a; \; a \geq 0. \end{array} \right. \qquad (8)$$

Pateiktas sąvokas ir simbolius panaudosime spręsdami nelygybes su parametrais.

Nelygybių su parametrais sprendimo ypatumus aptarsime nagrinėdami įvairius pavyzdžius.

1 pavyzdys. Išspręskime (atžvilgiu *x*) tiesinę nelygybę

$$ax + 2 > x + a,$$

kurioje yra parametras *a*, galintis įgyti įvairias realias reikšmes.

Sprendimas. Kaip įprasta, narius su kintamuoju *x* sukeliame į kairę nelygybės pusę, likusius – į dešinę. Gausime:

$$ax - x > a - 2,$$

$$x(a-1) > a - 2. \qquad (9)$$

Norint išspręsti šią nelygybę, belieka abi jos puses padalyti iš koeficiento, esančio prie *x*, taigi iš $a-1$. Štai čia ir tyko pavojai. Neišanalizavus, koks yra reiškinio $a-1$ ženklas, to daryti negalima, nes vienokią nelygybę gautume dalydami abi jos puses iš teigiamo skaičiaus, ir kitokią – dalydami iš neigiamo skaičiaus. Čia mes remiamės žinoma nelygybių savybe: nelygybės ženklas nesikeičia, kai abi jos pusės dalijamos iš teigiamo skaičiaus ir keičiasi į priešingą, kai abi nelygybės pusės dalijamos iš neigiamo skaičiaus.

Taigi, kai $a-1>0$, t. y. $a>1$, tai padaliję abi (9) nelygybės puses iš $a-1$, gausime $x > \dfrac{a-2}{a-1}$. Kai $a < 1$, tai $x < \dfrac{a-2}{a-1}$. Dar reikia išnagrinėti tą atvejį, kai $a-1=0$, t. y. $a=1$. Tuomet $a-2=1-2=-1$ ir (9) nelygybė tampa tokia:

$$x \cdot 0 > -1,$$
$$0 > -1,$$

kuri teisinga su bet kuriuo *x*. Vadinasi, kai $a=1$, tai nagrinėjamos nelygybės sprendiniai yra visi realieji skaičiai.

Ats.: $x > \dfrac{a-2}{a-1}$, kai $a > 1$; $x < \dfrac{a-2}{a-1}$, kai $a < 1$; $x \in R$, kai $a = 1$.

2 pavyzdys. Išspręskime tiesinę *x* atžvilgiu nelygybę

$$(a^2+3a-1)x+4a < ax+7-2x.$$

Sprendimas. Nelygybę pertvarkome, sukeldami narius su kintamuoju *x* į kairę pusę, o be kintamojo *x* – į dešinę:

$$a^2x+3ax-x-ax+2x < 7-4a,$$
$$x\left(a^2+2a+1\right) < 7-4a,$$
$$x(a+1)^2 < 7-4a.$$

Kai $a \neq -1$, tai $(a+1)^2 > 0$, todėl padaliję abi nelygybės puses iš $(a+1)^2$, gauname

$$x < \frac{7-4a}{(a+1)^2}.$$

Kai $a=-1$, tai duotoji nelygybė tampa tokia:

$$x \cdot 0 < 7-4\cdot(-1),$$
$$0 < 11.$$

Ši nelygybė teisinga su bet kuria *x* reikšme.

Ats.: $x < \dfrac{7-4a}{(a+1)^2}$, kai $a \neq -1$; $x \in R$, kai $a=-1$.

3 pavyzdys. Išspręskime tiesinę *x* atžvilgiu nelygybę

$$\frac{2ax+3}{2a+4} < \frac{x}{a+2} + \frac{2a-3}{2a-4}.$$

Sprendimas. Kadangi nelygybėje yra trupmenų, tai turime parei kalauti, kad šių trupmenų vardikliai būtų nelygūs nuliui. Taigi turi būti

$$2a+4\neq 0 \text{ ir } 2a-4\neq 0;$$

iš čia $a\neq \pm 2$.

Narius, kuriuose yra x, sukelkime į kairę nelygybės pusę, likusius – į dešinę:

$$\frac{2ax}{2a+4}-\frac{x}{a+2}<\frac{2a-3}{2a-4}-\frac{3}{2a+4},$$

$$\frac{2ax}{2(a+2)}-\frac{x}{a+2}<\frac{2a-3}{2(a-2)}-\frac{3}{2(a+2)},$$

$$\frac{ax-x}{a+2}<\frac{(2a-3)(a+2)-3(a-2)}{2(a-2)(a+2)},$$

$$\frac{x(a-1)}{a+2}<\frac{a^2-a}{(a-2)(a+2)},$$

$$\frac{x(a-1)}{a+2}<\frac{a(a-1)}{(a-2)(a+2)}. \tag{10}$$

Norint baigti spręsti šią nelygybę, reikia abi jos puses padalyti iš koeficiento, esančio prie x, taigi iš $\frac{a-1}{a+2}$. Tačiau, prieš dalijant reikia ištirti tokius atvejus:

1) $\frac{a-1}{a+2}>0$; 2) $\frac{a-1}{a+2}<0$; 3) $\frac{a-1}{a+2}=0$.

Nelygybė $\frac{a-1}{a+2}>0$ yra teisinga, kai $a<-2$ arba $a>1$. Nepamirškime, kad $a\neq 2$. Todėl $\frac{a-1}{a+2}>0$, kai $a<-2$, $1<a<2$, $a>2$. Tuomet, padaliję abi (10) nelygybės puses iš teigiamo reiškinio $\frac{a-1}{a+2}$, gauname $x<\frac{a}{a-2}$. Kai $\frac{a-1}{a+2}<0$, taigi $-2<a<1$, tai, padalįję abi (10) nelygybės puses iš neigiamo reiškinio $\frac{a-1}{a+2}$, gauname $x>\frac{a}{a-2}$.

Reiškinys $\dfrac{a-1}{a+2}=0$, kai $a=1$. Tuomet (10) nelygybė tampa tokia:

$$x\cdot 0<0,$$

kuriai netinka jokia x reikšmė. Vadinasi, kai $a=1$, nelygybė sprendinių neturi.

Ats.: $x<\dfrac{a}{a-2}$, kai $a<-2,\quad 1<a<2,\quad a>2$; $x>\dfrac{a}{a-2}$, kai $-2<a<1$; nelygybė sprendinių neturi, kai $a=1$.

4 pavyzdys. Išspręskime nelygybę

$$(a+3)x^2-4x+4\geq 0$$

kintamojo x atžvilgiu.

Sprendimas. Kai $a=-3$, tai duotoji nelygybė yra tiesinė nelygybė $-4x+4\geq 0$, todėl $x\leq 1$.

Tarkime, kad $a\neq -3$. Apskaičiuokime kvadratinio trinario diskriminantą $D=16-4\cdot 4(a+3)=16-16a-48=-16(a+2)$ ir išnagrinėkime tris atvejus: $D<0,\quad D=0,\quad D>0$.

Atvejį $D<0$ turėsime, kai $a>-2$. Tuomet $a+3>0$ ir duotoji nelygybė teisinga su visomis x reikšmėmis. Vadinasi, kai $a>-2$, tai $x\in R$.

Kai $D=0$, tai $a=-2$. Tuomet duotoji nelygybė yra tokia: $x^2-4x+4\geq 0\Rightarrow (x-2)^2\geq 0$. Vadinasi, $x\in R$, kai $a=-2$.

Kai $a<-2$, tai $D>0$. Tuomet kvadratinis trinaris

$$(a+3)x^2-4x+4$$

turi dvi šaknis:

$$x_1=\frac{4-\sqrt{-16(a+2)}}{2(a+3)}=\frac{2-2\sqrt{-(a+2)}}{a+3},$$

$$x_2=\frac{4+\sqrt{-16(a+2)}}{2(a+3)}=\frac{2+2\sqrt{-(a+2)}}{a+3}.$$

Jeigu $a+3>0$ (nepamirškime, kad $a<-2$), tai tuomet $x_1<x_2$ ir duotosios nelygybės sprendiniai yra $x\leq x_1$ arba $x\geq x_2$. Vadinasi, kai $-3<a<-2$, tai

$$x \le \frac{2\left(1-\sqrt{-(a+2)}\right)}{a+3} \qquad \text{arba} \qquad x \ge \frac{2\left(1+\sqrt{-(a+2)}\right)}{a+3}.$$

Jeigu $a+3<0$, taigi $a<-3$, tai tuomet $x_2 < x_1$ ir duotosios nelygybės sprendiniai yra $x_2 \le x < x_1$. Vadinasi, kai $a<-3$, tai

$$\frac{2\left(1+\sqrt{-(a+2)}\right)}{a+3} \le x \le \frac{2\left(1-\sqrt{-(a+2)}\right)}{a+3}.$$

Ats.: $x \le 1$, kai $a=-3$; $x \in R$, kai $a \ge -2$;

$x \le \dfrac{2\left(1-\sqrt{-(a+2)}\right)}{a+3}$ arba $x \ge \dfrac{2\left(1+\sqrt{-(a+2)}\right)}{a+3}$, kai $-3<a<-2$;

$\dfrac{2\left(1+\sqrt{-(a+2)}\right)}{a+3} \le x \le \dfrac{2\left(1-\sqrt{-(a+2)}\right)}{a+3}$, kai $a<-3$.

Kai kurias nelygybes su parametru galima išspręsti grafiškai. Toks sprendimo būdas yra ganėtinai universalus, nes jis tinka spręsti skirtingos rūšies nelygybėms, pavyzdžiui iracionaliosioms ir logaritminėms. Kaip šis būdas taikomas, pademonstruosime spręsdami toliau pateikiamus keturis pavyzdžius.

5 pavyzdys. Išspręskime kintamojo *x* atžvilgiu nelygybę

$$\frac{ax}{x+1} + x > a+1.$$

Sprendimas. Aišku, kad turi būti $x \ne -1$. Atkėlę $a+1$ į kairiąją nelygybės pusę ir subendravardiklinę, gauname nelygybę

$$\frac{x^2-a-1}{x+1} > 0,$$

kuri ekvivalenti nelygybių sistemų

$$\begin{cases} x^2-a-1>0, \\ x+1>0, \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} x^2-a-1<0, \\ x+1<0 \end{cases} \tag{12}$$

visumai

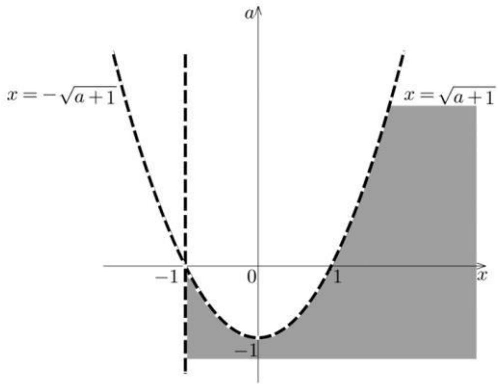
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-a-1>0,\\ x+1>0,\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-a-1<0,\\ x+1<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Išspręskime (11) sistemą. Pirmiausia ją užrašome taip:

$$\begin{cases}a<x^2-1,\\ x>-1.\end{cases} \tag{13}$$

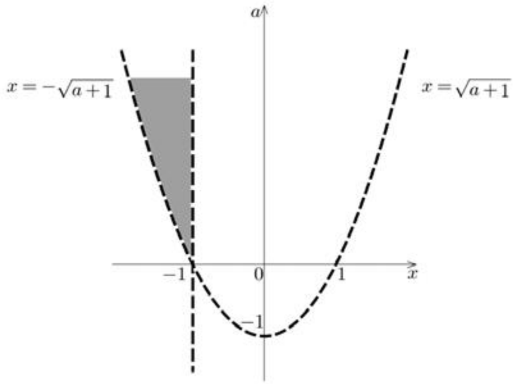
Koordinačių plokštumoje *xOa* nubrėžkime dvi kreives: $a=x^2-1$ (parabolę) ir $x=-1$ (tiesę). Jos plokštumą dalija į sritis (žr. 1 pav.). Nustatykime, kurių sričių taškų koordinatės tenkina (13) sistemą.

Nelygybės $a<x^2-1$ sprendiniai yra taškai (x; a), esantys po parabole, o nelygybės $x>-1$ – taškai, esantys į dešinę nuo tiesės $x=-1$. Todėl (13) sistemos sprendiniai yra taškai, esantys pilkai nuspalvintoje dalyje. Atkreipkime dėmesį į taį kad parabolės $a=x^2-1$ ir tiesės $x=-1$ taškai nėra (13) sistemos sprendiniai. Todėl šios kreivės nubrėžtos punktyrine linija.



1 pav.

Kadangi kairiosios parabolės šakos lygtis yra $x=-\sqrt{a+1}$, o dešiniosios – $x=\sqrt{a+1}$ (jos gautos iš lygties $a=x^2-1$), tai (11)



2 pav.

sistemos sprendinius galima užrašyti taip: $x > \sqrt{a+1}$, kai $a \geq 0$; $-1 < x < -\sqrt{a+1}$ arba $x > \sqrt{a+1}$, kai $-1 < a < 0$; $x > -1$, kai $a < -1$; $x > -1,\ x \neq 0$, kai $a = -1$.

(12) sistemos sprendiniai grafiškai gaunami iš 2 paveikslo:

$$-\sqrt{a+1} < x < -1, \text{ kai } a > 0.$$

Ats.: $-1 < x < -\sqrt{a+1}$ arba $x > \sqrt{a+1}$, kai $-1 < a < 0$;

$x > -1,\quad x \neq 0$, kai $a = -1$; $x > -1$, kai $a < -1$;

$x > \sqrt{a+1}$ arba $-\sqrt{a+1} < x < -1$, kai $a \geq 0$.

6 pavyzdys. Išspręskime iracionaliąją nelygybę

$$\sqrt{8x-a} \leq x+2.$$

Sprendimas. Remdamiesi (5) formule, duotąją nelygybę pakeičiame jai ekvivalenčia sistema

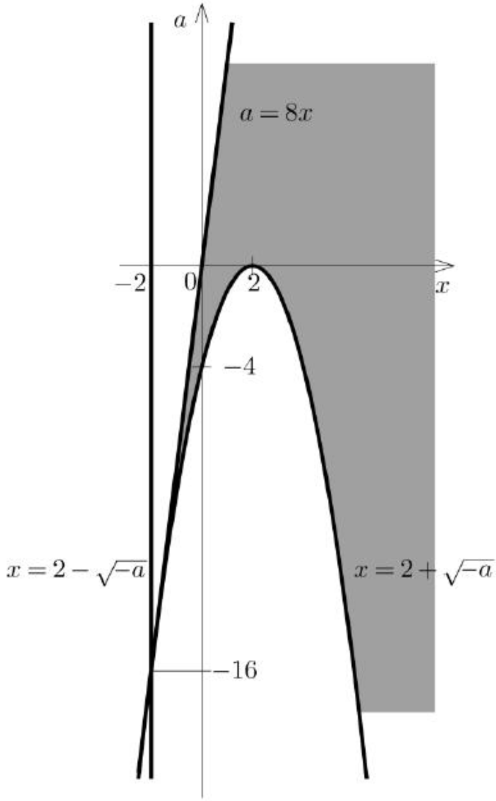
$$\begin{cases} 8x-a \geq 0, \\ x+2 \geq 0, \\ 8x-a \leq x^2+4x+4. \end{cases}$$

Ją pertvarkę, gauname

$$\begin{cases} a \le 8x, \\ x \ge -2, \\ 8x - a \le x^2 + 4x + 4. \end{cases} \quad (14)$$

Iš trečiosios nelygybės gauname, kad

$$a \ge -(x-2)^2 .$$



3 pav.

Koordinačių sistemoje xOa nubrėžkime parabolę, kurios lygtis $a = -(x-2)^2$. Jos viršūnė taške (2; 0), o šakos nukreiptos žemyn (žr. 3 pav.). Dar nubrėžkime tieses $x = -2$ ir $a = 8x$. Surandame ir pažymime parabolės susikirtimo su ašimi Oa bei tiesėmis $x = -2$ ir

$a = 8x$ taškus (gauname, kad tiesė $x = -2$, parabolė $a = -(x-2)^2$ ir tiesė $a = 8x$ susikerta viename taške (–2; –16)).

Nelygybės $a \le 8x$ sprendiniai yra tiesės $a = 8x$ taškai ir taškai, esantys po šia tiese, o nelygybės $x \ge -2$ sprendiniai yra tiesės $x = -2$ taškai ir taškai, esantys į dešinę nuo šios tiesės. Nelygybės $a \ge -(x-2)^2$ sprendiniai yra parabolės $a = -(x-2)^2$ taškai ir taškai, esantys virš šios parabolės. Visos sistemos sprendinių aibė 3 paveiksle pavaizduota nuspalvinta sritimi.

Kadangi parabolės $a = -(x-2)^2$ kairiosios šakos lygtis yra $x = 2 - \sqrt{-a}$, o dešiniosios šakos – $x = 2 + \sqrt{-a}$, tai (14) sistemos sprendinius galima užrašyti taip: $x \ge \frac{a}{8}$, kai $a \ge 0$; $\frac{a}{8} \le x \le 2 - \sqrt{-a}$ arba $x \ge 2 + \sqrt{-a}$, kai $-16 < a < 0$; $x \ge 2 + \sqrt{-a}$, kai $a < -16$.

Ats.: $x \ge \frac{a}{8}$, kai $a \ge 0$; $\frac{a}{8} \le x \le 2 - \sqrt{-a}$ arba $x \ge 2 + \sqrt{-a}$, kai $-16 \le a \le 0$; $x \ge 2 + \sqrt{-a}$, kai $a < -16$.

7 pavyzdys. Išspręskime iracionaliąją nelygybę $\sqrt{2x+a} \ge x-3$.

Sprendimas. Remiantis (6) sąryšiu, ši nelygybė ekvivalenti sistemų visumai

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3<0, \\ 2x+a \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x-3 \ge 0, \\ 2x+a \ge x^2-6x+9, \end{cases} \end{array}\right.$$

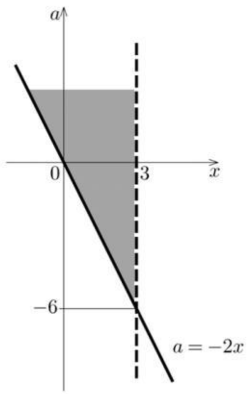
kuri ekvivalenti sistemų visumai

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<3, \\ a \ge -2x, \end{cases} \qquad (15) \\ \begin{cases} x \ge 3, \\ a \ge (x-4)^2-7. \end{cases} \qquad (16) \end{array}\right.$$

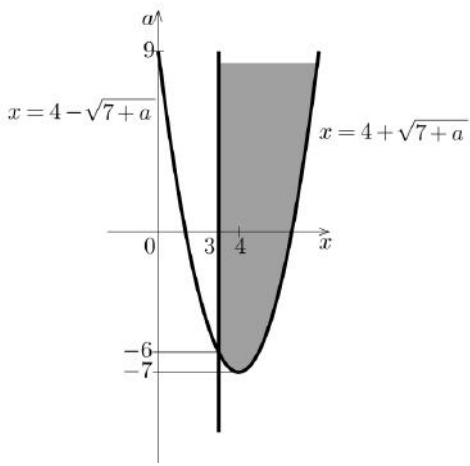
(15) sistemos sprendiniai yra taškai, esantys pilkai nuspalvintoje plokštumos dalyje (*žr.* 4 pav.).

Vadinasi, (15) sistemos sprendiniai yra tokie: $-\frac{a}{2} \le x \le 3$, kai $a > -6$; sprendinių nėra, kai $a \le -6$.

Žinome, kad $a = (x-4)^2 - 7$ yra parabolės lygtis. Šios parabolės viršūnė yra taškas (4; –7), jos šakos nukreiptos aukštyn. Surandame ir pažymime parabolės susikirtimo taškus su ašimis O*x*, O*a* bei tiese $x = 3$ (*žr.* 5 pav.).



4 pav.



5 pav.

(16) sistemos sprendiniai yra taškai, esantys pilkai nuspalvintoje srityje. Išsprendžiame *x* atžvilgiu lygtį

$$2x + a = x^2 - 6x + 9$$

ir randame kairiosios parabolės šakos lygtį $x = 4 - \sqrt{7+a}$ ir dešiniosios parabolės šakos lygtį $x = 4 + \sqrt{7+a}$.

Taigi (16) sistemos sprendiniai yra tokie: $3 \le x \le 4 + \sqrt{7+a}$, kai $a \ge -6$; $4 - \sqrt{7+a} \le x \le 4 + \sqrt{7+a}$, kai $-7 \le a \le -6$; sprendinių nėra, kai $a < -7$.

Duotosios nelygybės sprendinių aibė yra (15) ir (16) sistemos sprendinių aibių sąjunga.

Ats.: $-\frac{a}{2} \le x \le 4+\sqrt{7+a}$, kai $a \ge -6$;
$4-\sqrt{7+a} \le x \le 4+\sqrt{7+a}$, kai $-7 \le a \le -6$; sprendinių nėra, kai $a < -7$.

8 pavyzdys. Išspręskime logaritminę nelygybę

$$\log_{\sqrt{2a}}\left(a+2x-x^2\right) < 2\,.$$

Sprendimas. Nelygybę parašykime taip:

$$\log_{\sqrt{2a}}\left(a+2x-x^2\right) < \log_{\sqrt{2a}} 2a.$$

Ši nelygybė ekvivalenti nelygybių sistemų visumai

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{r} 0 < a < \frac{1}{2}, \\ a+2x-x^2 > 0, \\ a+2x-x^2 > 2a, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{r} a > \frac{1}{2}, \\ a+2x-x^2 > 0, \\ a+2x-x^2 < 2a; \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{r} 0 < a < \frac{1}{2}, \\ a+2x-x^2 > 2a, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{r} a > \frac{1}{2}, \\ 0 < a+2x-x^2 < 2a. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

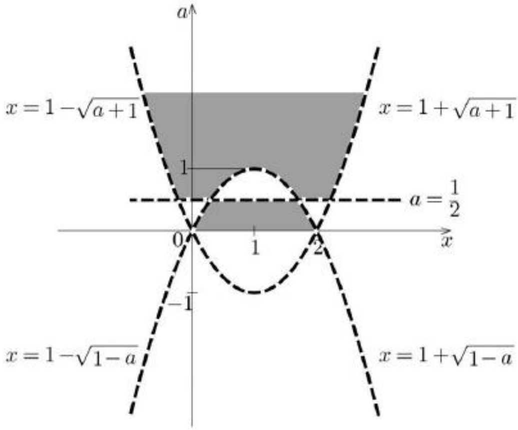
Pertvarkome kiekvienos sistemos antrąją nelygybę ir gauname nelygybių sistemų visumą

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 0 < a < \frac{1}{2}, \\ a < 1-(x-1)^2, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a > \frac{1}{2}, \\ a > (x-1)^2-1, \\ a > 1-(x-1)^2. \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad (17)$$

Nubrėžiame paraboles, kurių lygtys

$$a=(x-1)^2-1 \text{ ir } a=1-(x-1)^2$$

(žr. 6 pav.).



6 pav.

Tuomet (17) sistemos sprendinių aibę sudaro nuspalvintų sričių taškai. Randame parabolių atskirų šakų lygtis (jos surašytos 6 pav.).

Ats.: $1-\sqrt{1-a}<x<1+\sqrt{1-a}$, kai $0<a<\dfrac{1}{2}$; $1-\sqrt{1+a}<x<$ $<1-\sqrt{1-a}$ arba $1+\sqrt{1-a}<x<1+\sqrt{1+a}$, kai $\dfrac{1}{2}<a<1$; $1-\sqrt{1+a}<$ $<x<1+\sqrt{1+a}$, kai $a>1$; $1-\sqrt{1+a}<x<1+\sqrt{1+a}$, $x\neq 1$, kai $a=1$; sprendinių nėra, kai $a\leq 0$ ir $a=\dfrac{1}{2}$.

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

Išspręskite šias nelygybes kintamojo *x* atžvilgiu (*a* – parametras):

1. $3ax-4a<x+2$;

2. $ax^2 - 2(a+1)x + a + 3 < 0$;

3. $\dfrac{3x+4}{a^2-1} - \dfrac{2x+1}{a-1} \le \dfrac{x}{a+1}$;

4. $\dfrac{2ax+5}{2a+6} > \dfrac{x}{a+3} + \dfrac{2a-1}{2a-6}$;

5. $\dfrac{x^2}{a} + 17a \ge 8x$;

6. $\dfrac{1}{x} + ax > 1$;

7. $\sqrt{16x-a} < x+3$;

8. $\log_{a+1}(x-2) < 1$;

9. $\sqrt{4x+a} > x-1$.

10. Su kuriomis parametro *a* reikšmėmis nelygybė

$$(a+1)x^2 - 2(a-1)x + 3a - 3 \ge 0$$

teisinga su visomis realiosiomis *x* reikšmėmis?

VII. ATSITIKTINIAI DYDŽIAI

Eugenijus Stankus
(Vilniaus universitetas)

Atsitiktinis įvykis ir atsitiktinis dydis yra pagrindinės tikimybių teorijos sąvokos. Tikimybių teorija yra matematikos šaka, kuri nagrinėja atsitiktinių įvykių ir atsitiktinių dydžių dėsningumus, pasireiškiančius per ilgalaikį jų stebėjimą. Čia galėtume įžvelgti ir prieštarą: reiškiniai – atsitiktiniai, tačiau kalbame apie kažkokius dėsningumus. Iš tikrųjų jokios prieštaros nėra – jau seniai nustatyta, kad metus monetą daug kartų, apie pusę metimų ji atsiverčia herbu, nors kiekvieno metimo rezultatas iš anksto yra nežinomas. Jeigu daug kartų mėtysime taisyklingą lošimo kauliuką, tai nustatysime, kad kiekviena kauliuko sienelė atsiverčia apytiksliai šeštadalyje bandymų. Tokie dėsningumai aptinkami ir stebint daugelį kitų atsitiktinių reiškinių.

Pateiksime kelių, literatūroje užfiksuotų, monetos mėtymo bandymų rezultatus. Ž. Biufonas (Georges-Louis Leclerc de Buffon**,** 1707–1788, prancūzų gamtininkas ir filosofas) metė monetą 4040 kartų, herbas atsivertė 2048 kartus, santykis, vadinamas herbo pasirodymo *santykiniu dažniu,* lygus $\frac{2048}{4040} \approx 0{,}50693$. K. Pirsonas (Carl Pearson, vėliau žinomas kaip Karl Pearson, 1857–1936, anglų matematikas) šitokį eksperimentą atliko du kartus: metęs monetą 12000 kartų, suskaičiavo, kad herbas atsivertė 6019 kartų (santykinis dažnis $\frac{6019}{12000} \approx 0{,}50158$); metęs monetą 24000 kartų, herbo atsivertimą stebėjo 12012 kartų (santykinis dažnis $\frac{12012}{24000} = 0{,}5005$). Šių bandymų rezultatai labai aiškiai iliustruoja dėsningumą, kad daugelį kartų atliekant tą patį bandymą, stebimojo įvykio santykinis dažnis elgiasi gana stabiliai – jo reikšmė vis artimesnė skaičiui 0,5. Kodėl šis skaičius yra 0,5, o ne koks nors kitas? Gal būt todėl, kad metant monetą vieną kartą, herbo ir skaičiaus atsivertimo galimybės yra vienodos? Ši mintis ir atves mus prie klasikinio tikimybės apibrėžimo.

Tačiau pirmiau turime „matematizuoti“ įvykį, t. y. įprastinį įvykį užrašyti matematine kalba, arba kitaip – sukurti įvykio matematinį modelį.

Bandymas, baigčių aibė ir įvykiai. *Bandymu* arba *eksperimentu* vadiname sąlygų, priemonių, aplinkybių, kurios sudaro galimybę įvykti stebimajam įvykiui, visumą. Pavyzdžiui, monetos metimas yra bandymas, apimantis visas sąlygas ir priemones, leidžiančias stebėti, ar atsivertė herbas (ar skaičius), taip pat bandymas yra autoavarijų skaičiaus stebėjimas tam tikroje automagistralės atkarpoje, kuris vyksta tam tikru laikotarpiu, tam tikromis meteorologinėmis sąlygomis ir pan.

Atliekant bandymą nežinoma, ar įvyks stebimasis įvykis (nors bandymo sąlygos atrodo ir yra tos pačios), tačiau visuomet galima išvardyti visas galimas šio bandymo baigtis ir sudaryti *bandymo baigčių aibę*. Klasikinis pavyzdys – simetriško lošimo kauliuko vieno metimo bandymo baigtys yra šešios – gali atsiversti bet kuri iš šešių lošimo kauliuko sienelių. Taigi su šiuo bandymu susiejame baigčių aibę $E=\{e_1;e_2;e_3;e_4;e_5;e_6\}$. Jeigu atliktume dviejų, 5 ir 2 centų simetriškų monetų, metimą, tai bandymo baigčių aibė $E=\{(H,H);(H,S);(S,S);(S,H)\}$ yra sudaryta iš 4 baigčių; čia baigtis (H,H) žymi, kad abi monetos atsivers herbu, baigtis (H,S) reiškia, kad 5 centų moneta atsivers herbu, o 2 centų – skaičiumi ir t. t. Atkreipkime dėmesį, kad išvardintąsias šešias simetriško lošimo kauliuko metimo baigtis galime laikyti *vienodai galimomis* – nė viena iš jų neturi daugiau šansų pasirodyti, negu bet kuri kita. Taip pat vienodai galimos yra keturios dviejų monetų metimo baigtys.

Tačiau ne visuomet bandymas turi vienodai galimas baigtis. Daugeliui bandymų vienodai galimų baigčių aibę sudaryti sudėtinga arba iš viso neįmanoma. Pavyzdžiui, kai stebima įmonės akcijų kaina, negalima teigti, kad baigtys, jog kaina sumažės, nepakis ir padidės, yra vienodai galimos, baigtys, kad tam tikroje kelio atkarpoje per tam tikrą laikotarpį neįvyks nė viena autoavarija ir įvyks bent viena – tikriausiai taip pat nėra vienodai galimos.

Sudarius bandymo baigčių aibę $E=\{e_1;e_2;...;e_n\}$, kiekvienas su šiuo bandymu susijęs įvykis yra nulemiamas jam palankiomis baigtimis. Pavyzdžiui, vieno lošimo kauliuko metimo įvykis A – atsivers lyginis akučių skaičius – yra nulemiamas šiam įvykiui palankiomis baigtimis e_2, e_4, e_6. Todėl patį įvykį A galima sutapatinti su šių baigčių aibe

$A=\{e_2; e_4; e_6\}$. Taigi bet kuris su nagrinėjamu bandymu susijęs įvykis yra tam tikra bandymo baigčių, palankių šiam įvykiui, aibė. Ir atvirkščiai, bet kuri baigčių aibė reiškia tam tikrą šio bandymo įvykį. Tarp šių įvykių rasime įvykį, kurį sudaro visos baigtys, t. y. $E=\{e_1; e_2; ...; e_n\}$ (tai *būtinasis įvykis*) ir įvykius $E_i=\{e_i\}$, $i=1, 2, ..., n$, sudarytus iš vienos baigties (tai *elementarieji įvykiai).*

Kadangi dabar įvykiai tapo baigčių aibėmis, tai, taikydami aibių veiksmus – sąjungą, sankirtą, skirtumą, galime apibrėžti atitinkamus įvykių veiksmus. Čia prisiminkime tik įvykių sąjungos ir sankirtos sąvokas.

Dviejų įvykių *A* ir *B* *sąjunga* (žymima $A \cup B$) yra įvykis, kurį sudaro baigtys, palankios bent vienam iš įvykių *A* ir *B,* arba kitaip – įvykis, reiškiantis, kad įvyks bent vienas iš įvykių *A* ir *B* .

Dviejų įvykių *A* ir *B* *sankirta* (žymima $A \cap B$) yra įvykis, kurį sudaro baigtys, palankios abiems įvykiams – ir *A*, ir *B,* arba kitaip – įvykis, reiškiantis, kad įvyks abu įvykiai – ir *A*, ir *B*.

Gali taip atsitikti, kad įvykiai *A* ir *B* bendrų baigčių neturi. Tuomet įvykiai *A* ir *B* vadinami *nesutaikomaisiais*. Kalbant aibių teorijos terminais, tokiu atveju $A \cap B=\varnothing$ (tuščia aibė). Vadinasi, ir įvykių aibę turime papildyti atitinkamu įvykiu $\varnothing$, kuris vadinamas *negalimuoju įvy*kiu (jam palankių baigčių aibė – tuščia).

Visos baigtys, kurios nėra palankios pasirinktajam įvykiui *A*, sudaro baigčių aibę, reiškiančią įvykiui *A* *priešingąjį įvykį* $\overline{A}$. Aišku, kad $A \cup \overline{A}=E$.

Įvykio tikimybė. Kai bandymo baigtys vienodai galimos, įvykio tikimybę galima apskaičiuoti pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą [1, 112 psl.]. Jeigu baigtys nėra vienodai galimos, tai taikomas bendrasis tikimybės apibrėžimas [1, 124 psl.].

Tarkime, bandymo baigčių aibė yra sudaryta iš n vienodai galimų baigčių. Įvykio A, kuriam palankių baigčių yra m, ***tikimybe*** *vadinamas skaičius* $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

Skaičiuojant tikimybę pagal klasikinį apibrėžimą, svarbu įsitikinti baigčių vienodu galimumu. Vienodą baigčių galimumą galima paaiškinti taip: jeigu nė viena baigtis neturi daugiau šansų, negu bet kuri kita, tai tokios baigtys laikomos vienodai galimomis.

1 pavyzdys. Apskaičiuokime tikimybę, kad metus du taisyklingus lošimo kauliukus, atsivertusių akučių suma bus lygi 7.

Sprendimas. Kiekvienas iš metamų lošimo kauliukų gali atsiversti bet kuria puse iš šešių galimų. Todėl šio bandymo vienodai galimų baigčių aibę sudaro 36 elementai. Abiejų kauliukų atsivertusių akučių suma bus lygi 7 tik šiais atvejais:

$$7=1+6=6+1=2+5=5+2=3+4=4+3;$$

čia pirmasis dėmuo – galimas pirmo kauliuko atsivertusių akučių skaičius, antrasis dėmuo – galimas antro kauliuko atsivertusių akučių skaičius. Pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

2 pavyzdys. Dėžėje 5 rudi ir 10 geltonų kamuolių. Iš jos atsitiktinai išimami du kamuoliai. Apskaičiuokime tikimybę, kad jie bus skirtingų spalvų (įvykis *A*).

Sprendimas. Šio bandymo vienodai galimų baigčių yra $C_{15}^{2}=\frac{15\cdot 14}{1\cdot 2}=105$ (derinių iš 15 elementų po 2 elementus skaičius). Baigčių, palankių įvykiui *A*, yra $5\cdot 10=50$, nes rudasis kamuolys gali būti pasirinktas vienas iš penkių, o geltonasis – vienas iš dešimties. Taigi $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{50}{105}=\frac{10}{21}$.

Įvykio tikimybę galima įvertinti ir remiantis statistiniais duomenimis. Jeigu atlikus vienodomis sąlygomis *N* bandymų, stebimasis įvykis *A* įvyko *M* kartų, tai santykis $\frac{M}{N}$ (įvykio *A santykinis dažnis*), kai *N* yra pakankamai didelis, gali būti apytikriai laikomas lygiu įvykio *A* tikimybei, nes santykinis dažnis didinant bandymų skaičių yra stabilus ir apytikriai lygus tikimybei. Ši santykinio dažnio savybė yra bendresnio tikimybių teorijos teiginio, vadinamo *didžiųjų skaičių dėsniu*, atskiras atvejis. Kaip matėme aukščiau, šio dėsnio veikimas puikiai iliustruojamas daugkartinio monetos metimo bandymais.

Skaičiuojant įvykių tikimybes, naudingos įvairios tikimybių teorijos formulės. Pavyzdžiui, jeigu įvykiai *A* ir *B* yra nesutaikomieji, tai

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (1)$$

Iš čia išplaukia, kad

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Įvykių nepriklausomumas ir priklausomumas. Jei vieno įvykio įvykimas nedaro įtakos kito įvykimui, o tiksliau – vieno iš jų tikimybė nepriklauso nuo to, ar įvyko, ar ne, kitas įvykis, tai jie yra nepriklausomi. Jeigu taip nėra, tai jie – priklausomi. Atkreipkime dėmesį, kad įvykių nepriklausomumas ir priklausomumas visiškai atitinka gyvenimišką šių terminų sampratą.

Norint įvykių nepriklausomumą ar priklausomumą išreikšti matematiškai, reikalinga sąlyginės tikimybės sąvoka.

*Įvykio A **sąlygine tikimybe** su sąlyga, kad įvykis B įvykęs (ji žymima* $P(A|B)$*), vadinama tikimybė*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ kai } P(B) > 0. \quad (2)$$

Pastarąją formulę gausime apskaičiavę įvykio A tikimybę, laikydami, kad įvykis B įvykęs, t. y. bandymo baigčių aibę sudaro tik įvykiui B palankios baigtys, o įvykiui A palankios tik tos, kurios priklauso įvykių A ir B sankirtai.

Jeigu $P(A|B) = P(A)$, tai įvykiai A ir B vadinami *nepriklausomais*. Taip bus tik tuomet, kaip išplaukia iš (2) formulės, kai

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \quad (3)$$

Jei $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, tai A ir B – priklausomi įvykiai.

Nesunkiai įrodomas teiginys: kai viena iš nepriklausomų įvykių porų A ir B, A ir $\overline{B}$, $\overline{A}$ ir B, $\overline{A}$ ir $\overline{B}$ yra nepriklausomi įvykiai, tai ir kitos poros yra nepriklausomi įvykiai.

3 pavyzdys. Du krepšininkai meta po vieną baudos metimą. Pirmojo pataikymo (įvykis A) tikimybė lygi 0,8, antrasis pataiko (įvykis B) su tikimybe 0,9. Apskaičiuokime tikimybę, kad pataikys abu krepšininkai (įvykis $A \cap B$).

Sprendimas. Kadangi įvykiai A ir B yra nepriklausomi, tai $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72$.

Atsitiktiniai dydžiai. Su kiekvienu bandymu susiejome jo baigčių aibę, įvykius – baigčių aibės poaibius – ir įvykių tikimybes.

Dabar bandymo baigčių aibėje apibrėšime funkciją, kiekvienai baigčiai priskiriančią realųjį skaičių (ar realiųjų skaičių porą).

Funkcija $x = f(e), e \in E, x \in \mathrm{R}$, *priskirianti kiekvienai bandymo baigčiai skaitinę reikšmę* (*realųjį skaičių*), *apibrėžia* ***vienmatį*** *su tuo bandymu susijusį* ***atsitiktinį dydį*** *X, kurio galimų reikšmių aibė yra funkcijos* $x = f(e)$ *reikšmių aibė, o šių reikšmių tikimybės – atitinkamų įvykių tikimybės.*

4 pavyzdys. Taisyklingo lošimo kauliuko vieno metimo baigčių aibėje funkcija

$$x = f(e) = \begin{cases} -1, \text{kai } e \in \{e_1, e_3\}; \\ 2, \text{kai } e \in \{e_2, e_4, e_5\}; \\ 3, \text{kai } e \in \{e_6\} \end{cases}$$

apibrėžia atsitiktinį dydį *X*, kurio galimos reikšmės yra -1, 2 ir 3.

Prieš mesdami kauliuką nežinome, kokią reikšmę įgis atsitiktinis dydis X, nes nežinome, kuris įvykis įvyks – ar $\{e_1, e_3\}$, ar $\{e_2, e_4, e_5\}$, ar $\{e_6\}$. Tačiau galime apskaičiuoti šių įvykių tikimybes:

$$P\{e_1, e_3\} = P(X = -1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$P\{e_2, e_4, e_5\} = P(X = 2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$P\{e_6\} = P(X = 6) = \frac{1}{6}.$$

Šio atsitiktinio dydžio galimas reikšmes ir jų tikimybes surašykime į lentelę

m	-1	2	3
$P(X = m)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

(4)

Gavome atsitiktinio dydžio *X* tikimybių skirstinio lentelę arba tiesiog *skirstinį*. Skirstinio tikimybių suma lygi 1 (įvykis, kad atsitiktinis dydis įgis kurią nors savo reikšmę – būtinasis).

Jeigu atsitiktinis dydis *X* gali įgyti *k* skirtingų reikšmių $x_1, x_2, ..., x_k$ su tikimybėmis $p_1, p_2, ..., p_k$ atitinkamai, tai jis apibūdinamas skirstiniu

m	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
$P(X=m)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k

(5)

Jame $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$.

Taigi atsitiktinis dydis gali būti nusakomas ir savo skirstiniu.

Dažniausiai vartojamos atsitiktinio dydžio skaitinės charakteristikos yra *vidurkis* (arba matematinė viltis), *dispersija* ir *standartinis nuokrypis*. Vidurkis nusako atsitiktinio dydžio vidutinę reikšmę, o dispersija ir standartinis nuokrypis apibūdina atsitiktinio dydžio reikšmių išsibarstymo apie vidurkį laipsnį (kuo plačiau apie vidurkį pasklidusios dydžio reikšmės, tuo dispersija ir standartinis nuokrypis didesni).

Atsitiktinio dydžio X, apibrėžto (5) *skirstiniu, vidurkiu, dispersija ir standartiniu nuokrypiu vadinami skaičiai*

$$EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_k p_k, \tag{6}$$

$$DX = E(X - EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2, \tag{7}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{DX} \tag{8}$$

atitinkamai.

5 pavyzdys. Apskaičiuokime atsitiktinio dydžio *X*, nusakyto (4) skirstiniu, vidurkį, dispersiją ir standartinį nuokrypį.

Sprendimas. Pagal (6) formulę atsitiktinio dydžio *X* vidurkis yra $EX = -1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$. Skaičiuojant dispersiją, patogiau pasinaudoti formule

$$DX = E(X^2) - (EX)^2.$$

Kadangi

$$E(X^2) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{2} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{23}{6},$$

tai

$$DX = \frac{23}{6} - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{89}{36} \approx 2{,}47.$$

Tuomet standartinis nuokrypis yra

$$\sigma(X) = \sqrt{2{,}47} \approx 1{,}57.$$

Funkcija $u = f(e), e \in E, u \in \mathrm{R}^2$, *priskirianti kiekvienai bandymo baigčiai realiųjų skaičių porą, apibrėžia* ***dvimatį*** *su tuo bandymu susijusį* ***atsitiktinį dydį*** (X, Y). Čia R^2 reiškia realiųjų skaičių porų $u = (x, y), x \in \mathrm{R}, y \in \mathrm{R},$ aibę.

6 pavyzdys. Taisyklingo lošimo kauliuko vieno metimo baigčių aibėje funkcija

$$u = f(e) = \begin{cases} (-1, 1), \text{kai } e \in \{e_1, e_2, e_3\}; \\ (-1, 2), \text{kai } e \in \{e_4, e_5\}; \\ (1, 2), \text{kai } e \in \{e_6\} \end{cases}$$

apibrėžia dvimatį atsitiktinį dydį (X, Y), kurio galimos reikšmės yra $(-1, 1)$, $(-1, 2)$ ir $(1, 2)$.

Kaip ir 4 pavyzdyje, galime apskaičiuoti atsitiktinio dydžio reikšmių tikimybes

$$P((X, Y) = (-1, 1)) = P(X = -1, Y = 1) = P(\{e_1, e_2, e_3\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$P((X, Y) = (-1, 2)) = P(X = -1, Y = 2) = P(\{e_4, e_5\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$P((X, Y) = (1, 2)) = P(X = 1, Y = 2) = P(\{e_6\}) = \frac{1}{6}.$$

Dvimačius atsitiktinius dydžius, kaip ir vienmačius, patogiau nusakyti *skirstinio lentele*, kuri dabar yra stačiakampė. Joje taip pat išvardinamos visos galimos dydžio (*X*,*Y*) reikšmės bei jų įgijimo tikimybės. Nagrinėjamo atsitiktinio dydžio skirstinio lentelė tokia:

$X \backslash Y$	1	2
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{6}$

Čia pirmoje eilutėje surašytos dydžio Y reikšmės, pirmame stulpelyje – dydžio *X* reikšmės, o lentelė užpildyta atitinkamomis reikšmių porų tikimybėmis

$$p_{11} = P(X = -1, Y = 1) = \frac{1}{2},\ p_{12} = P(X = -1, Y = 2) = \frac{1}{3},$$

$$p_{21} = P(X = 1, Y = 1) = 0,\ p_{22} = P(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{6}.$$

Papildykime skirstinio lentelę vienu stulpeliu, į jį surašydami eilučių tikimybių sumas, ir viena eilute, ten įrašydami stulpelių tikimybių sumas:

X \ Y	1	2	X reikšmių tikimybės:
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$
1	0	$\frac{1}{6}$	$p_2 = 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$
Y reikšmių tikimybės:	$q_1 = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$	$q_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$	Tikimybių suma lygi 1

Nesunku suvokti, kad tokiu būdu (sudėjome nesutaikomų įvykių tikimybes) gavome atsitiktinio dydžio X reikšmių -1 ir 1 tikimybes (paskutinysis stulpelis) ir atsitiktinio dydžio Y reikšmių 1 ir 2 tikimybes (paskutinioji eilutė). Taigi galime užrašyti atsitiktinio dydžio X ir atsitiktinio dydžio Y skirstinius:

m	-1	1
$P(X = m)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

m	1	2
$P(Y = m)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(9)

Vadinasi, iš dvimačio dydžio (X, Y) skirstinio galima gauti jo komponenčių X ir Y skirstinius. Ką dar „slepia“ dvimatis skirstinys?

Dviejų įvykių nepriklausomumas apibrėžiamas (3) formule. Kadangi ir nagrinėjant atsitiktinius dydžius iš tikrųjų kalbama apie įvykius, tai atsitiktinių dydžių nepriklausomumo (ar priklausomumo) sąvoka betarpiškai susieta su įvykių nepriklausomumo (ar priklausomumo) sąvoka.

Atsitiktiniai dydžiai X ir Y vadinami ***nepriklausomais****, jeigu su visomis jų reikšmėmis* x_i *ir* y_j *galioja lygybės*

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) \tag{10}$$

arba (naudojant įvestuosius žymenis)

$$p_{i\,j} = p_i \cdot q_j\,. \tag{11}$$

Jeigu su bent viena x_i *ir* y_j *reikšmių pora* šios *lygybės negalioja, tai atsitiktiniai dydžiai vadinami* ***priklausomais****.*

6 pavyzdyje nagrinėti atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra priklausomi, nes, pavyzdžiui, $V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$.. Aišku, kad tikrinti, ar galioja kitos lygybės, nebereikia.

7 pavyzdys. Dvimatis atsitiktinis dydis (X, Y) nusakomas skirstiniu

$X \backslash Y$	1	2
-1	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Įsitikinkime, kad šio dydžio komponentės – atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi.

Sprendimas. Kaip ir 6 pavyzdyje, papildykime skirstinį vienu stulpeliu, kuriame surašykime dydžio X reikšmių tikimybes, ir viena eilute, kurioje – dydžio Y reikšmių tikimybės:

$X \backslash Y$	1	2	p_i
-1	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{6}$
6	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
q_j	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Kadangi galioja (11) lygybės, tai X ir Y yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.

Šioje temoje bandyta trumpai pateikti tikimybių teorijos pradmenis, apimančius įvykio ir jo tikimybės, vienmačio ir dvimačio atsitiktinių dydžių sąvokas. Susipažinome su svarbiu taikymuose atsitiktinių įvykių ir atsitiktinių dydžių nepriklausomumu ir priklausomumu. Panaši tema buvo nagrinėta ir ankstesnių metų LJMM užduotyje [2].

Literatūra

1. Matematika 11, II dalis – išplėstinis kursas. Vilnius, TEV, 2002.
2. E. Stankus. LJMM 2008-2010 m.m. 8 tema. Priklausomi ir nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1. Apskaičiuokite tikimybę, kad, metus tris taisyklingus lošimo kauliukus, atsivertusių akučių suma bus lygi 16.

2. Dėžėje yra 4 balti ir 5 juodi rutuliai. Iš jos atsitiktinai traukiami 3 rutuliai. Apskaičiuokite tikimybę, kad bus ištrauktas 1 baltas ir 2 juodi rutuliai.

3. Du krepšininkai meta po vieną baudos metimą. Pirmojo pataikymo tikimybė lygi 0,8, antrasis pataiko su tikimybe 0,7. Apskaičiuokite tikimybę, kad vienas krepšininkas pataikys, o kitas – nepataikys.

4. Tegu *X* – lošimo kauliukų, atsivertusių 6 akutėmis, skaičius, vieną kartą metus tris simetriškus lošimo kauliukus. Užrašykite atsitiktinio dydžio *X* skirstinį ir apskaičiuokite atsitiktinio dydžio *X* vidurkį ir dispersiją.

5. Atsitiktinio dydžio *X* vidurkis lygus nuliui, o jo skirstinys toks:

m	-2	1	2
$P(X=m)$	p_1	p_2	0,1

Apskaičiuokite tikimybes p_1, p_2 ir atsitiktinio dydžio *X* dispersiją.

6. Dvimačio atsitiktinio dydžio (X, Y) skirstinio lentelė tokia:

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0,1	0,1	0,1
2	0,1	0,1	0,1
3	0,1	0,1	0,2

a) Nustatykite, ar atsitiktiniai dydžiai *X* ir *Y* priklausomi.
b) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio *X* ir atsitiktinio dydžio *Y* vidurkį ir dispersiją.

7. Dvimačio atsitiktinio dydžio (X, Y) skirstinio lentelė tokia:

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	0,2	0,1	p_1
2	p_2	0,1	0,1

Apskaičiuokite tikimybes p_1, p_2 ir atsitiktinio dydžio *Y* vidurkį, kai atsitiktinio dydžio *X* vidurkis lygus 1,6.

8. Taisyklingo lošimo kauliuko vieno metimo baigčių aibėje funkcija

$$u = f(e) = \begin{cases} (1, 2), \text{ kai } e \in \{e_1\}; \\ (1, 1), \text{ kai } e \in \{e_2, e_3, e_4\}; \\ (3, 2), \text{ kai } e \in \{e_5, e_6\}, \end{cases}$$

apibrėžia dvimatį atsitiktinį dydį (X, Y).

Sudarykite šio dydžio skirstinį ir nustatykite, ar atsitiktiniai dydžiai *X* ir *Y* priklausomi.

9. Dviejose dėžėse – vienodi rutuliai, ant kurių užrašyti skaičiai. Pirmoje dėžėje yra 3 rutuliai: ant dviejų iš jų užrašytas skaičius 2, o ant vieno – skaičius 3. Antroje dėžėje taip pat yra 3 rutuliai: ant dviejų iš jų užrašytas skaičius 3, o ant vieno – skaičius 2. Iš pirmos dėžės atsitiktinai ištraukiamas rutulys – ant jo užrašytas skaičius yra atsitiktinis dydis *X*. Po to šis rutulys įdedamas į antrąją dėžę ir iš jos atsitiktinai ištraukiamas rutulys. Šio rutulio skaičius – atsitiktinis dydis *Y*.

a) Sudarykite atsitiktinio dydžio (X, Y) skirstinį;

b) Sudarykite atsitiktinio dydžio *X* ir atsitiktinio dydžio *Y* skirstinius;

c) Nustatykite, ar atsitiktiniai dydžiai *X* ir *Y* yra priklausomi.

10. Atsitiktiniai dydžiai *X* ir *Y* yra nepriklausomi, o jų skirstiniai tokie:

m	-1	0	1
$P(X=m)$	0,3	0,4	0,3

m	-2	2
$P(Y=m)$	0,2	0,8

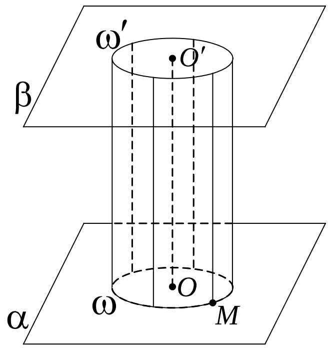
Sudarykite dvimačio atsitiktinio dydžio (X, Y) skirstinį.

VIII. SUKINIAI

Edmundas Mazėtis
(Lietuvos edukologijos universitetas)

Atlikdami šią užduotį, Jūs detaliau susipažinsite su erdviniais kūnais – ritiniais, kūgiais, rutuliais, kuriuos nagrinėjote matematikos pamokose.

1. Cilindrai arba ritiniai. Sakykime, kad α ir β – dvi skirtingos lygiagrečios plokštumos, plokštumoje α nubrėžtas apskritimas ω, kurio centras – taškas O, o spindulio ilgis lygus R (1 pav.). Per kiekvieną to apskritimo tašką M nubrėžkime tiesę, statmeną plokštumai α. Visų šių tiesių atkarpos, esančios tarp plokštumų α ir β, sudaro *cilindrinį paviršių*, jos vadinamos cilindrinio paviršiaus *sudaromosiomis*. Sudaromųjų galai, esantys plokštumoje α, yra apskritimas ω, o jų galai, esantys plokštumoje β, irgi yra apskritimas ω', lygus apskritimui ω, apskritimo ω' centras – taškas O', tiesė OO' yra lygiagreti su cilindrinio paviršiaus sudaromosiomis, ji vadinama cilindrinio paviršiaus *ašimi*. Kūnas, apribotas cilindriniu paviršiumi ir dviem skrituliais, kurių kontūrai yra apskritimai ω ir ω', yra vadinamas *ritiniu*. Cilindrinis paviršius yra vadinamas *ritinio šoniniu paviršiumi*, skrituliai – *ritinio pagrindais*, o cilindrinio paviršiaus sudaromosios – *ritinio sudaromosiomis*. Ritinio ašies atkarpa OO' yra vadinama *ritinio aukštine*. Ritinio visos sudaromosios yra lygios, jų ilgis lygus atstumui tarp plokštumų α ir β ir vadinamas *ritinio aukštinės* ilgiu. Ritinio pagrindų spindulys yra vadinamas *ritinio spinduliu*. Plokštuma, einanti per ritinio aukštinę, kerta ritinį stačiakampiu, kuris vadinamas ritinio *ašiniu pjūviu*. Cilindrinio paviršiaus plotas yra vadinamas ritinio šoninio paviršiaus plotu. Jei ritinio spindulio ilgis R, o aukštinės ilgis H, tai ritinio šoninio paviršiaus plotas apskaičiuojamas pagal formulę



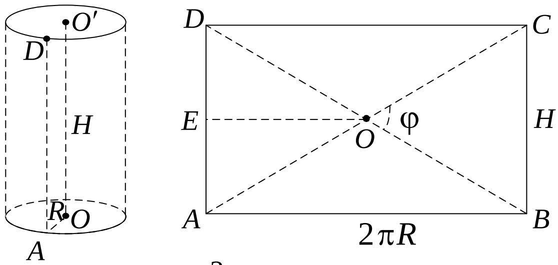
1 pav.

$$S = 2\pi RH. \qquad (1)$$

Ritinio pilnuoju paviršiumi vadinamas jo šoninio paviršiaus ploto ir pagrindų plotų suma, ritinio pilnasis paviršius randamas pagal formulę $S_{\text{p.p.}} = 2\pi R(R + H)$. Ritinio, kurio spindulys R, o aukštinė H, tūriui V teisinga lygybė

$$V = \pi R^2 H. \qquad (2)$$

1 pavyzdys. Sakykime, kad ritinys yra perpjautas per kurią nors jo sudaromąją AD ir ištiestas taip, kad visos jo sudaromosios būtų vienoje plokštumoje. Toje plokštumoje gaunamas stačiakampis $ABCD$ (2 pav.) vadinamas *ritinio šoninio paviršiaus išklotine.* Sakykime, kad to stačiakampio smailusis kampas tarp įstrižainių lygus φ, o įstrižainių ilgiai lygūs d. Rasime ritinio šoninio paviršiaus plotą ir ritinio tūrį.



2 pav.

Iš stačiakampio $ABCD$ įstrižainių sankirtos taško O išvedame statmenį OE į kraštinę AD. Tarkime, kad kampas AOD – smailusis, taigi $\angle AOD = \varphi$. Iš stačiojo trikampio AOE turime $AE = AO \sin \angle AOE.$ Kadangi $AO = \frac{d}{2}$, $AE = \frac{H}{2}$, $\angle AOE = \frac{\varphi}{2}$, tai $H = d \sin \frac{\varphi}{2}$. Kita vertus, stačiakampio kraštinė AB lygi ritinio pagrindo apskritimo ilgiui, t. y. $AB = 2\pi R$. Kadangi $\frac{AB}{2} = OE = AO \cos \frac{\varphi}{2}$, tai iš čia $\pi R = \frac{d}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$, ir $R = \frac{d}{2\pi} \cos \frac{\varphi}{2}$. Pagal (1) formulę ritinio šoninio paviršiaus plotas

$$S = 2\pi \cdot \frac{d}{2\pi} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot d \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{d^2}{2} \sin \varphi.$$

Pagal (2) formulę ritinio tūris

$$V=\pi\cdot\left(\frac{d}{2\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2\cdot d\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{d^3}{4\pi}\cos^2\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

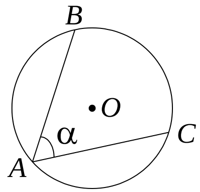
Pastaba. Jei stačiakampyje $ABCD$ smailusis kampas yra AOB, tai šoninio paviršiaus plotas gaunamas toks pat, o tūris

$$V=\frac{d^3}{4\pi}\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Įsitikinkite tuo savarankiškai.

2 pavyzdys. Per vieną ritinio sudaromąją nubrėžtos dvi plokštumos, kertančios cilindrinį paviršių, o gautųjų pjūvių plotai vienodi ir lygūs Q. Dvisienis kampas tarp plokštumų lygus α, o ritinio spindulio ilgis lygus R. Rasime ritinio tūrį.

Sakykime, kad ritinio pagrindo skritulį duotosios plokštumos kerta stygomis AB ir AC (3 pav.). Kadangi kertančiosios plokštumos yra statmenos ritinio pagrindų plokštumoms, tai kampas BAC yra kampo tarp tų plokštumų tiesinis kampas, t. y. $\angle BAC=\alpha$. Kadangi pjūvių plotai vienodi ir lygūs Q, tai $AB=AC=\frac{Q}{h}$, čia h – ritinio aukštinė. Trikampiui ABC pritaikę kosinusų teoremą, gauname



3 pav.

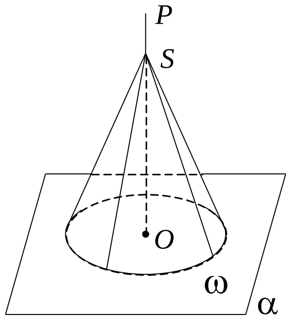
$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\alpha=\frac{2Q^2}{h^2}-\frac{2Q^2}{h^2}\cos\alpha.$$

Iš sinusų teoremos šiam trikampiui gauname $BC=2R\sin\alpha$. Taigi $4R^2\sin^2\alpha=\frac{2Q^2}{h^2}-\frac{2Q^2}{h^2}\cos\alpha$, t. y.

$$h^2=\frac{2Q^2(1-\cos\alpha)}{4R^2\sin^2\alpha}=\frac{4Q^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{16R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{Q^2}{4R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

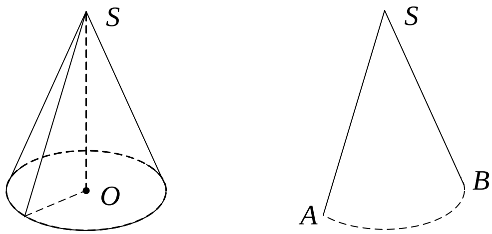
Iš čia $h=\dfrac{Q}{2R\cos\frac{\alpha}{2}}$ ir $V=\pi R^2\cdot\dfrac{Q}{2R\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\pi RQ}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

2. Kūgiai. Sakykime, kad plokštumoje α yra apskritimas ω, kurio centras – taškas O, o spindulio ilgis lygus R. Nubrėžkime tiesę OP, statmeną plokštumai α, ir joje paimame tašką S, kurį sujungiame tiesės atkarpomis su kiekvienu apskritimo ω tašku (4 pav.). Paviršius, kurį sudaro minėtos atkarpos, vadinamas *kūginiu paviršiumi*, tos atkarpos *kūginio paviršiaus sudaromosiomis*, o taškas S – *kūginio paviršiaus viršūne*. *Kūgiu* vadinamas kūnas, kurį riboja kūginis paviršius ir skritulys, kurio kontūras – apskritimas ω. Šis skritulys yra vadinamas *kūgio pagrindu*. Atkarpa OS yra vadinama *kūgio aukštine*, o tiesė OP – *kūgio ašimi*.



4 pav.

Sakykime, kad kūgis kertamas plokštuma, einančia per kūgio ašį. Pjūvyje gaunamas lygiašonis trikampis, kuris vadinamas *kūgio ašiniu pjūviu*. Jei kūgį perpjautume per kurią nors jo sudaromąją ir visas sudaromąsias ištiesiame taip, kad jos būtų vienoje plokštumoje, gauname kūgio šoninio paviršiaus išklotinę (5 pav.), kuri yra skritulio išpjova.



5. pav

Kūginis paviršius yra vadinamas *kūgio šoniniu paviršiumi*. Jei kūgio pagrindo spindulio ilgis R, o sudaromosios ilgis l, tai kūgio šoninio paviršiaus plotas S lygus

$$S = \pi R l. \tag{3}$$

Kūgio, kurio pagrindo spindulys lygus R, o aukštinės ilgis H, tūris V lygus pagrindo ploto ir aukštinės sandaugos trečdaliui, t. y.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H. \tag{4}$$

3 pavyzdys. Kūgio šoninio paviršiaus išklotinė yra skritulio išpjova, kurios spindulys 9, o išpjovą ribojantis apskritimo lankas lygus 120°. Rasime kūgio tūrį.

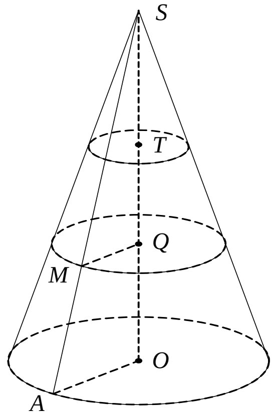
5 pav. nubrėžta išpjova *SAB* yra kūgio šoninio paviršiaus išklotinė. Jos spindulys *SA* lygus kūgio sudaromajai, o lanko *AB* ilgis lygus kūgio pagrindo apskritimo ilgiui. Kadangi lankas *AB* lygus 120°, tai jo ilgis yra $\frac{3}{2}\pi \cdot 9 = 6\pi.$ Jei R – kūgio pagrindo spindulys, tai $2\pi R = 6\pi,$ t. y. $R = 3.$ Iš stačiojo trikampio *SOA* randame kūgio aukštinę

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2},$$

ir pagal (4) formulę kūgio tūris

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}\pi.$$

4 pavyzdys. Kūgio pagrindo spindulys lygus R, o aukštinė H. Jis kertamas dviem plokštumomis, lygiagrečiomis su pagrindo plokštuma. Pjūvių plotai lygūs Q ir q $(Q > q)$. Rasime atstumą tarp kertančiųjų plokštumų.



6 pav.

Visų pirma pastebėkime, kad plokštuma, lygiagreti su kūgio pagrindo plokštuma, kūgį kerta skrituliu. Tikrai, jei taškas S – kūgio viršūnė, taškas O – pagrindo centras, SA – bet kuri kūgio sudaromoji, kertančioji plokštuma kūgio aukštinę OS kerta taške Q, o sudaromąją SA – taške M (6 pav.), tai iš trikampių SAO ir SMQ panašumo turime

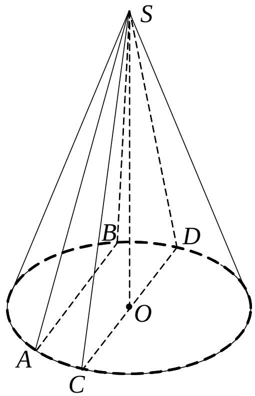
$$\frac{QM}{OA} = \frac{QS}{OS}, \text{ t. y. } OM = \frac{QS \cdot OA}{OS} = \frac{QS \cdot R}{H}.$$

Taigi pjūvio linija yra apskritimas, kurio centras – taškas Q, o spindulio ilgis $r_1 = \frac{QS \cdot R}{H}.$

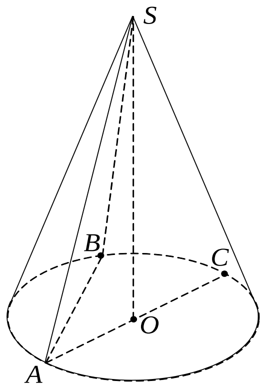
Sakykime, kad kita plokštuma, lygiagreti su kūgio pagrindo plokštuma, kerta kūgio aukštinę SO taške T, tuomet pjūvyje gauto apskritimo spindulys $r_2 = \frac{TS \cdot R}{H}.$ Kadangi pjūvyje gautų skritulių plotai lygūs atitinkamai Q ir q, tai $r_1 = \sqrt{\dfrac{Q}{\pi}}$, $r_2 = \sqrt{\dfrac{q}{\pi}}$. Taigi $\sqrt{\dfrac{Q}{\pi}} = \dfrac{QS \cdot R}{H}$ ir $\sqrt{\dfrac{q}{\pi}} = \dfrac{TS \cdot R}{H}$. Iš čia gauname, kad $QS = \dfrac{H\sqrt{Q}}{R\sqrt{\pi}}$, $TS = \dfrac{H\sqrt{q}}{R\sqrt{\pi}}$ ir atstumas tarp kertančiųjų plokštumų

$$d = QS - ST = \frac{H}{R\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{Q} - \sqrt{q}\right).$$

Nagrinėjame per kūgio viršūnę S einančią plokštumą, kuri kerta kūginį paviršių sudaromosiomis SA ir SB (7 pav.). Nubrėžkime pagrindo skersmenį CD, lygiagretų su tiese AB. Trikampių ASB ir CSD plotams turime $S_{ASB} = \dfrac{1}{2} AS^2 \sin \angle ASB$, $S_{CSD} = \dfrac{1}{2} CS^2 \sin \angle CSD$. Kadangi $AS = BS = CS = DS$, o $AB < CD$, tai iš lygiašonių trikampių ASB ir CSD turime, kad $\angle ASB < \angle CSD$. Tuomet, jei kampas CSD – smailusis, tai $\sin \angle ASB < \sin \angle CSD$ ir $S_{ASB} < S_{CSD}$. Taigi šiuo atveju ašinio pjūvio plotas yra didžiausias iš visų plotų, kuriuos kūginiame paviršiuje iškerta plokštumos, einančios per kūgio viršūnę. Jei kampas CSD – bukasis, tuomet iš nelygybės $\angle ASB < \angle CSD$ nebūtinai seka nelygybė $\sin \angle ASB < \sin \angle CSD$, taigi šiuo atveju galima gauti pjūvius, kurie yra mažesni už ašinio pjūvio plotą, lygūs jam, ar yra didesni už ašinio pjūvio plotą.



7 pav.



8 pav.

5 pavyzdys. Iš visų kūgio pjūvių plokštumomis, einančiomis per kūgio viršūnę, didžiausio ploto pjūvis yra $\sqrt{2}$ karto didesnis už ašinio pjūvio plotą. Rasime kūgio tūrį, jei jo aukštinė lygi *H*.

Iš uždavinio sąlygos seka, kad ašinio pjūvio plotas nėra didžiausias iš visų pjūvių, kuriais kūgis kertamas plokštumomis, einančiomis per kūgio viršūnę, plotų. Taigi kūgio ašinio pjūvio kampas prie kūgio viršūnės yra bukasis. Sakykime, kad per kūgio viršūnę *S* einanti plokštuma kerta kūginį paviršių sudaromosiomis *SA* ir *SB* (8 pav.).

Gautojo pjūvio plotas lygus $\frac{1}{2}SA^2\sin\angle ASB$, jis įgyja didžiausią reikšmę, kai $\sin\angle ASB=1$, t. y. kai sudaromosios *SA* ir *SB* yra statmenos. Jei trikampis *SAC* – ašinis pjūvis, $\angle ASC=\alpha$, tai jo plotas lygus $\frac{1}{2}SA^2\sin\alpha$. Pagal uždavinio sąlygą

$$\frac{1}{2}SA^2=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}SA^2\sin\alpha,\ \text{t. y.}\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Kadangi α – bukasis kampas, tai $\alpha=135^\circ$. Iš trikampio *SOA* randame pagrindo spindulį *R*.

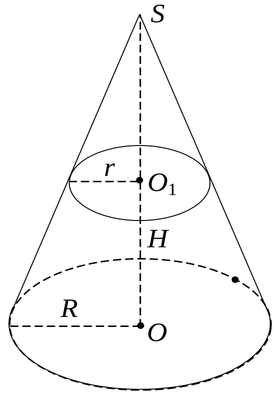
$$R=SO\,\mathrm{tg}\frac{135^\circ}{2}=H\,\mathrm{tg}67{,}5^\circ.$$

Pagal (4) formulę kūgio tūris

$$V=\frac{1}{3}\pi(H\,\mathrm{tg}67{,}5^\circ)^2\cdot H=\frac{\pi H^3}{3}\mathrm{tg}^2\,67{,}5^\circ=$$

$$\frac{\pi H^3}{3}\frac{1-\cos135^\circ}{1+\cos135^\circ}=\frac{\pi H^3}{3}\left(3+2\sqrt{2}\right).$$

3. Nupjautinis kūgis. Kūgį kirskime plokštuma lygiagrečia su jo pagrindo plokštuma. Tos plokštumos ir kūgio sankirta yra skritulys, dalijantis kūgį į du paviršius: vienas paviršius yra kūgis, o kitas vadinamas *nupjautiniu kūgiu* (9 pav.). Duotojo kūgio pagrindas ir pjūvyje gautas skritulys vadinami *nupjautinio kūgio pagrindais*. Atkarpa OO_1, jungianti nupjautinio kūgio pagrindų centrus,



9 pav.

yra vadinama *nupjautinio kūgio aukštine*. Kūginio paviršiaus dalis, ribojanti nupjautinį kūgį, vadinama *nupjautinio kūgio šoniniu paviršium*, kūginio paviršiaus sudaromųjų atkarpos, einančios tarp nupjautinio kūgio pagrindų, yra vadinamas *nupjautinio kūgio sudaromosiomis*. Plokštuma, einanti per nupjautinio kūgio aukštinę, kerta šį kūgį lygiašone trapecija, kuri vadinama nupjautinio kūgio ašiniu pjūviu.

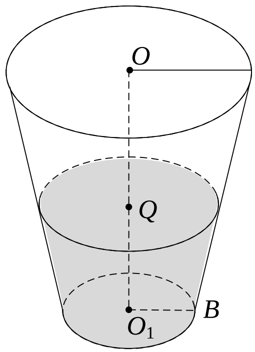
Jei R ir r – nupjautinio kūgio pagrindų spindulių ilgiai, H – aukštinės ilgiu, l – sudaromosios ilgis, tai nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus plotas skaičiuojamas pagal formulę

$$S = \pi l(R + l), \qquad (5)$$

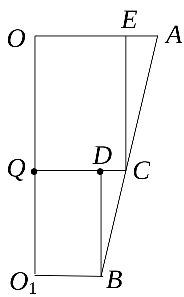
o jo tūris – pagal formulę

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 + Rr). \qquad (6)$$

6 pavyzdys. Kibiras yra nupjautinio kūgio formos, jo pagrindų spinduliai lygūs R ir r $(R > r)$, aukštinė lygi H (10 pav.). Nustatysime, iki kokio aukščio reikia įpilti į kibirą vandens, kad jis užimtų pusę kibiro tūrio.



a)



b)

10 pav.

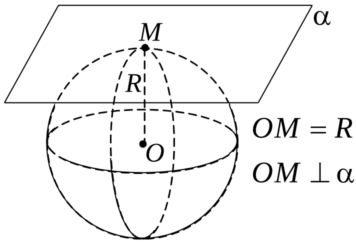
10a pav. nubrėžtas nupjautinio kūgio formos kibiras, taškai O ir O_1 – pagrindų centrai, atkarpa AB – jo sudaromoji, $OA = R,$ $O_1B = r$ – pagrindų spinduliai, $OO_1 = H$ – kūgio aukštinė. Sakykime, kad į šį kibirą pripilta vandens iki aukštinės OO_1 taško Q. 10b pav. nubrėžta ašinio pjūvio pusė – stačioji trapecija $OO_1BA,$ tiesė QC lygiagreti su

tiesėmis OA ir O_1B, tiesės BD ir CE lygiagrečios su aukštine OO_1. Sakykime, kad $O_1Q = h$, $QC = \rho$, tai iš stačiųjų trikampių AEC ir CDB panašumo gauname, kad $\dfrac{h}{\rho - r} = \dfrac{H-h}{R-\rho}$. Iš čia seka, kad $h = \dfrac{H(\rho - r)}{R-r}$.
Tada apatinės nupjautinės piramidės tūris V_1 pagal (6) formulę lygus

$$V_1 = \frac{\pi H(\rho - r)}{3(R-r)}(\rho^2 + r^2 + r\rho) = \frac{\pi H(\rho^3 - r^3)}{3(R-r)}.$$

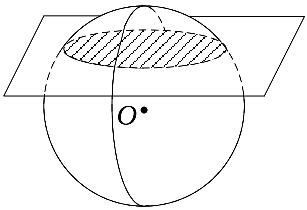
Kadangi šis tūris yra lygus pusei duotosios piramidės tūrio, tai $\dfrac{\pi H(\rho^3 - r^3)}{3(R-r)} = \dfrac{1}{2\cdot 3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr)$, arba $\rho^3 - r^3 = \dfrac{1}{2}(R^3 - r^3)$. Iš čia $\rho^3 = \dfrac{1}{2}(R^3 + r^3)$, $\rho = \sqrt[3]{\dfrac{R^3 + r^3}{2}}$ ir $h = \dfrac{H}{R-r}\left(\sqrt[3]{\dfrac{R^3 + r^3}{2}} - r\right)$ – ieškomasis aukštis.

5. Sfera ir rutulys. *Sfera* vadinamas paviršius, kurį sudaro visi erdvės taškai, duotuoju atstumu R nutolę nuo duotojo taško O. Taškas O yra vadinamas *sferos centru*. Jei M – kuris nors sferos taškas, tai atkarpa OM yra vadinama *sferos spinduliu*; visų sferos spindulių ilgis lygus R. Atkarpa, jungianti du sferos taškus, vadinama *sferos styga*, styga, einanti per centrą, yra vadinama *sferos skersmeniu*. Sferos ribojamas kūnas yra vadinamas *rutuliu*. Rutulį, kurio centras O, o spindulys R, sudaro visi erdvės taškai, kurių atstumai iki taško O neviršija R.

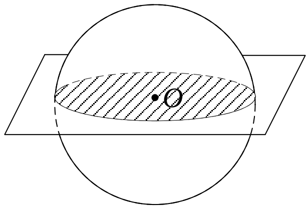


11 pav.

Jei plokštuma yra nutolusi nuo sferos centro atstumu, neviršijančiu sferos spindulio R, ji turi bendrų taškų su sfera; jei plokštuma nutolusi nuo sferos centro atstumu, didesniu už sferos spindulį R, ji neturi bendrų taškų su sfera. Jei plokštuma nutolusi nuo sferos centro atstumu, lygiu sferos spinduliui, ji turi su sfera vienintelį bendrą tašką; ši plokštuma vadinama sferos *liečiamąja plokštuma* (11 pav.). Ši plokštuma yra statmena sferos spinduliui, jungiančiam centrą O su bendru plokštumos ir sferos tašku. Jei plokštuma nutolusi nuo sferos centro atstumu, mažesniu už sferos spindulį *R*, tai ji kerta sferą apskritimu. Jei plokštuma neina per sferos centrą, tai sankirtos apskritimas vadinamas *mažuoju sferos apskritimu* (12a pav.), o jei plokštuma eina per sferos centrą – *didžiuoju sferos apskritimu* (12b pav.); didžiojo apskritimo centras sutampa su sferos centru *O*, o spindulys lygus sferos spinduliui *R*.



a)



b)

12 pav.

Sferos, kurios spindulio ilgis lygus *R*, paviršiaus plotas skaičiuojamas pagal formulę

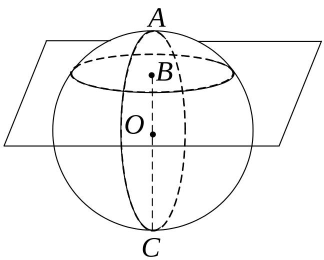
$$S = 4\pi R^2 . \tag{7}$$

Rutulio, kurio spindulys *R*, tūris *V* yra lygus

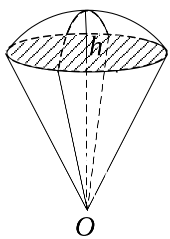
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{8}$$

Rutulio nuopjova vadinama rutulio dalis, kurią nuo jo nukerta kuri nors jį kertanti plokštuma. 13 pav. rutulį kertančioji plokštuma α dalija jį į dvi nuopjovas. Pjūvyje gautas skritulys yra vadinamas tų *nuopjovų pagrindu*. Jei *AC* – rutulio skersmuo, taške *B* statmenai kertantis, plokštumą α, tai atkarpos *AB* ir *CB* yra vadinamos *nuopjovų aukštinėmis.* Jei rutulio spindulys *R*, o nuopjovos aukštinė *h* $(h < R)$, tai nuopjovos sferinio paviršiaus plotas *S* yra lygus

$$S = 2\pi Rh, \tag{9}$$



13 pav.



14 pav.

o nuopjovos tūris V

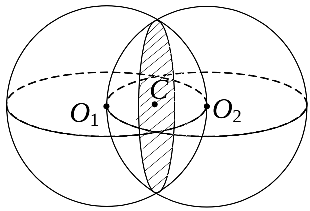
$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right). \tag{10}$$

Rutulio išpjova – tai kūnas, kurį sudaro rutulio nuopjova, kurios aukštinė mažesnė už rutulio spindulį, ir kūgis, kurio viršūnė – rutulio centras, o pagrindas sutampa su rutulio nuopjovos pagrindu (14 pav.). Jei rutulio spindulys R, o rutulio nuopjovos aukštinė h, tai rutulio išpjovos tūris V lygus

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h. \tag{11}$$

Rutulio sluoksniu vadinama rutulio dalis, esanti tarp dviejų lygiagrečių rutulį kertančių plokštumų. Skrituliai, gaunami šioms plokštumoms kertant rutulį, yra vadinami *rutulio sluoksnio pagrindais*, o atstumas tarp tų plokštumų – *rutulio sluoksnio aukštine*.

7 pavyzdys. Duoti du lygūs rutuliai, vieno jų centras yra kito rutulio paviršiuje. Rasime jų bendrosios dalies tūrį, jei jų spinduliai lygūs R.



15 pav.

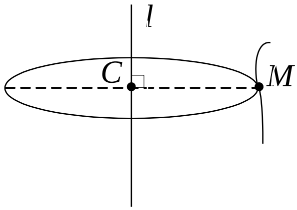
Kadangi abu rutuliai lygūs, o vieno jų centras O_1 yra kito rutulio paviršiuje, tai ir antrojo rutulio centras O_2 yra pirmojo rutulio paviršiuje (15 pav.). Bendroji rutulių dalis susideda iš dviejų lygių rutulių nuopjovų, kurių pagrindas yra 15 pav. užbrūkšniuotas skritulys. Tiesė O_1O_2 to skritulio plokštumą kerta taške C, todėl šių nuopjovų aukštinė $h = O_1C = O_2C = \frac{R}{2}$. Pagal (10) formulę vienos nuopjovos tūris yra

$$V_1 = \pi \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2\left(R - \frac{1}{3}\cdot\frac{R}{2}\right) = \frac{5\pi}{24}R^3,$$

todėl visos bendrosios dalies tūris

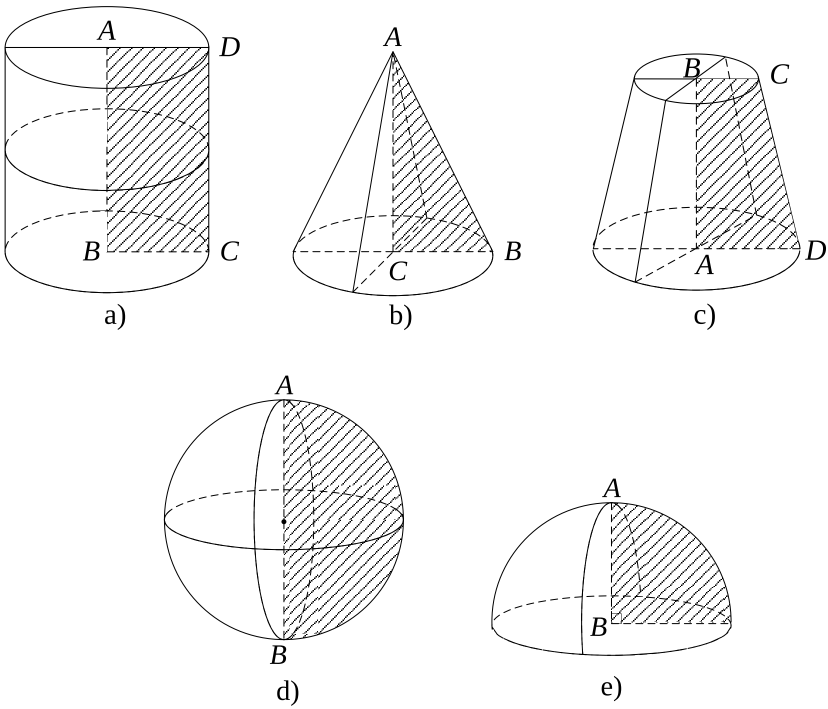
$$V = 2V_1 = \frac{5\pi}{12}R^3.$$

6. Sukimosi paviršiai. Išnagrinėti paviršiai turi vieną bendrą savybę – jie yra gaunami sukant tam tikrą plokštumos figūrą apie tiesę l, vadinamą *sukimosi ašimi*. Kai figūra sukama apie sukimosi ašį, kiekvienas jos taškas *M* brėžia apskritimą, kuris yra plokštumoje statmenoje sukimosi ašiai, jo centras *C* yra sukimosi ašyje (16 pav.), o tiesės *CM* ir *l* yra statmenos.



16 pav.

Stačiakampį *ABCD* sukant apie kraštinę (pvz., *AB*), gaunamas ritinys (17a pav.), kurio sudaromoji lygi kraštinei *AB*, o pagrindo spindulys – kraštinei *CD*. Statusis trikampis *ABC* $(\angle C = 90^\circ)$ sukamas apie vieną jo statinį (pvz., *AC*) apibrėžia kūgį (17b pav.), kurio aukštinė lygi statiniui *AC*, pagrindo spindulys – statiniui *BC*, o sudaromoji – įžambinei *AB*. Stačioji trapecija *ABCD* ($AD \parallel BC,\ \ AB \perp AD$) sukama apie šoninę kraštinę *AB*, statmeną pagrindams, apibrėžia nupjautinį kūgį (17c pav.), kurio

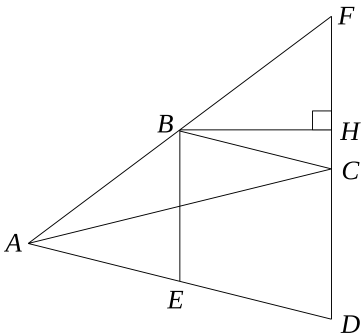


17 pav.

pagrindų spinduliai lygūs trapecijos pagrindams AD ir BC, aukštinė – šoninei kraštinei AB, sudaromoji – kitai šoninei kraštinei BC. Pusskritulis, kurio skersmuo – atkarpa AB, sukamas apie tiesę AB apibrėžia rutulį, kurio spindulys lygus pusskritulio spinduliui (17d pav.). Sukant 17e pav. nubrėžtą skritulio nuopjovos pusę apie tiesę AB, kurioje yra nuopjovos aukštinė, gaunama rutulio nuopjova. Analogiškai sukant skritulio išpjovos pusę gaunama rutulio išpjova. Taigi ritiniai, kūgiai, nupjautiniai kūgiai, rutuliai, jų nuopjovos ir išpjovos, rutulio sluoksniai yra vadinami bendru pavadinimu – *sukiniai*, juos ribojantys paviršiai yra vadinami *sukimosi paviršiais*.

8 pavyzdys. Lygiašonė trapecija, kurios pagrindų ilgiai lygūs 1 ir 2, o šoninės kraštinės ilgis lygus 1, sukama apie šoninę kraštinę. Rasime gautojo sukinio tūrį.

Sakykime, kad trapecijos $ABCD$ pagrindai $AD = 2$, $BC = 1$, šoninės kraštinės $AB = CD = 1$. Sakome trapeciją apie tiesę CD (18 pav.). Nubrėžę $BE \parallel CD$, turime, kad $ED = BC = 1$, $AE = 1$, taigi trikampis ABE – lygiakraštis ir $\angle ABE = \angle A = \angle D = 60^\circ$. Jei tiesės AB ir CD kertasi taške F, tai $\angle AFC = 60^\circ$, trikampis AFD – lygiakraštis, todėl $FD = AD = 2$. Trapecijos įstrižainė AC yra šio trikampio pusiaukraštinė, todėl ji yra statmena tiesei FD. Nubrėžkime $BH \perp FD$ ir gauname, kad norint rasti ieškomojo sukinio tūrį reikia sudėti kūgio, gauto sukant trikampį ACD, tūrį su nupjautinio kūgio, gauto sukant trapeciją $ACHB$, tūriu ir iš gautosios sumos atimti kūgio, gauto sukant trikampį BHC, tūrį.



18 pav.

Kadangi $AD = 2$, $CD = 1$, tai $AC = \sqrt{3}$, todėl kūgio, gauto sukant trikampį ACD, tūris $V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot AC^2 \cdot CD = \pi$. Kadangi $AC = \sqrt{3}$, $HC = \frac{1}{2}FC = \frac{1}{2}$, tai $BH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ir nupjautinio kūgio, gauto sukant trapeciją *ABHC* tūris $V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot HC \cdot (AC^2 + BH^2 + AC \cdot BH) = \frac{7\pi}{8}$. Kūgio, gauto sukant trikampį *BHC* tūris $V_3 = \frac{\pi}{3} \cdot BH^2 \cdot HC = \frac{3}{8}\pi$. Taigi ieškomojo sukinio tūris $V = V_1 + V_2 - V_3 = \frac{3}{2}\pi$.

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Ritinys, kurio sudaromosios lygios $10\sqrt{3}$, kertamas plokštuma, lygiagrečia su ritinio ašimi ir nutolusia nuo šios ašies atstumu lygiu 2. Kertančioji plokštuma nuo ritinio pagrindo apskritimo nukerta 60° lanką. Raskite gautojo pjūvio plotą.

2. Per vieną ritinio sudaromąją nubrėžtos dvi ritinį kertančios plokštumos, sudarančios 60° kampą. Gautųjų pjūvių plotai lygūs 11 ir 13. Raskite ritinio šoninio paviršiaus plotą.

3. Kūgio pagrindo spindulys *R*, o jo šoninio paviršiaus išklotinės lankas lygus 90°. Raskite ritinio tūrį.

4. Kūgio pagrindo spindulys lygus 2, o jo sudaromoji lygi 6. Nubrėžta plokštuma, lygiagreti su kūgio pagrindo plokštuma ir dalijanti kūgį į dvi dalis, kurių šoninių paviršių plotai lygūs. Į kokio ilgio dalis plokštuma dalija kūgio aukštinę?

5. Iš visų kūgio pjūvių plokštumomis, einančiomis per kūgio viršūnę, didžiausias pjūvio plotas yra du kartus didesnis už ašinio pjūvio plotą. Kūgio sudaromoji lygi *l*. Raskite kūgio tūrį.

6. Nupjautinio kūgio sudaromosios ilgis 8, ji sudaro 60° kampą su pagrindo plokštuma. Kūgio ašinio pjūvio įstrižainė yra ašinio pjūvio kampų pusiaukampinė. Raskite nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus plotą.

7. Rutulio skersmuo padalytas į tris atkarpas, kurių ilgių santykis 1:3:2. Per dalijimo taškus nubrėžtos tam skersmeniui statmenos plokštumos. Raskite, kurią dalį a) sferos paviršiaus; b) rutulio tūrio sudaro rutulio sluoksnio, esančio tarp plokštumų, paviršius ir tūris.

8. Stačiakampio *ABCD* kraštinės $AB = 8,\quad AD = 3.$ Nuo jo nupjautas skritulio, kurio centras – taškas *A*, o spindulys lygus 3, ketvirtis. Gautoji stačiakampio dalis sukama apie tiesę *AB*. Apskaičiuokite sukinio tūrį.

9. Kvadrato kraštinė lygi 1, jis sukamas apie tiesę, einančią per jo viršūnę ir lygiagrečią su kvadrato įstrižaine. Apskaičiuokite gautojo sukinio tūrį.

10. Lygiašonės trapecijos šoninė kraštinė ir mažesnysis pagrindas lygūs 1, jos smailusis kampas lygus 45°. Ši trapecija sukama apie šoninę kraštinę. Apskaičiuokite gautojo kūno tūrį.

BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Edmundas Mazėtis, Juozas Šinkūnas (Lietuvos edukologijos universitetas)

1. Iš taško, esančio šalia apskritimo, nubrėžtos apskritimo liestinė ir kirstinė, kurių ilgių suma lygi 30 cm. Raskite liestinės ir kirstinės ilgius, jeigu kirstinės vidinės atkarpos ilgis 2 cm mažesnis už liestinės ilgį.

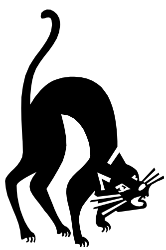
2. Išspręskite lygtį: $2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$.

3. Raskite reiškinio $\sqrt{x} + \sqrt{162 - x}$ didžiausią ir mažiausią reikšmes ir nurodykite, su kuriomis x reikšmėmis jos yra įgyjamos.

4. Dvimačio atsitiktinio dydžio $(X;Y)$ skirstinio lentelė tokia:

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	p	0,2	0,3
1	0,2	0,1	q

Apskaičiuokite tikimybes p ir q, kai atsitiktinio dydžio X vidurkis yra: $EX = -0{,}2$.



Užduočių sprendimai

STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tegu motociklininkas ir dviratininkas susitiko vietovėje C (žr. 1 pav.). Jeigu atstumas AC lygus S_1, o atstumas $BC - S_2$, tai motociklininko greitis yra $v_{\text{M}} = \dfrac{S_1}{0{,}75}$, o dviratininko

1 pav.

$v_{\text{D}} = \dfrac{S_2}{0{,}75}$. Jei motociklininkas iš C į B nuvyko per t valandų, tai dviratininkas iš C į A nuvyko per $t+2$ valandas. Sudarome ir sprendžiame lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \dfrac{S_1}{0.75}\cdot t = S_2, \\ \dfrac{S_2}{0.75}\cdot (t+2) = S_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{t}{0.75} = \frac{0.75}{t+2} \Rightarrow t^2 + 2t - 0{,}5625 = 0 \Rightarrow t = 0{,}25\,\text{h}.$$

Taigi motociklininkas kelionėje užtruko $0{,}75 + 0{,}25 = 1$ valandą.

Ats. 1 h.

2. Tegu parke augo x medžių. Tada $0{,}6x$ buvo klevų skaičius. Jeigu rudenį parke buvo pasodinta y liepų, o pavasarį z klevų, tai (pagal sąlygą) galima sudaryti lygčių

$$0{,}6x = 0{,}2(x+y) \text{ ir } 0{,}6x + z = 0{,}6(x+y+z)$$

sistemą. Spręsdami ją gauname:

$$\begin{cases} 0{,}6x = 0{,}2(x+y), \\ 0{,}6x + z = 0{,}6(x+y+z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = y, \\ 2z = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = y, \\ z = 3x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y + z = x + 2x + 3x = 6x.$$

Ats.: Medžių skaičius parke padidėjo 6 kartus.

3. Akivaizdu, kad šio žmogaus gimimo metų pirmas skaitmuo yra 1. Taip pat ir paskutinis skaitmuo aišku, yra 1. Tegu gimimo metai yra $1xy1$. Pagal sąlygą, sudarome lygtį

$1000+100x+10y+1-270=1000+100y+10x+1$ ir gauname, kad $x=y+3.$

Skaičius $1+x+y+1=2+2y+3=2y+5$ turi dalytis iš 5. Todėl y gali įgyti tik dvi reikšmes: 0 ir 5. Kai $y=0,$ tai $x=3,$ o kai $y=5,$ tai $x=8.$

Galimi gimimo metai yra 1301 ir 1851. Kadangi šis žmogus gimė po Žalgirio mūšio, tai jo gimimo metai yra 1851. Šiais metais yra gimęs Jonas Basanavičius, taip pat Petras Vileišis.

Ats.: 1851.

4. Kadangi $2940=2^2\cdot3\cdot5\cdot7^2,$ tai $2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7=3150$ yra ieškomas mažiausias natūralusis skaičius.

Ats.: 3150.

5. Tegu lentoje parašyti skaičiai yra a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ir tenkina sąlygą

$$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5.$$

Tada

$a_1+a_2=0,$ $a_1+a_3=2,$ $a_2+a_3=4,$ $a_1+a_4=4,$ $a_2+a_4=6,$ $a_3+a_4=8,$ $a_1+a_5=9,$ $a_2+a_5=11,$ $a_3+a_5=13,$ $a_4+a_5=15.$

Sudėję šias lygybes, gauname, kad $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=18.$ Iš čia (kadangi $a_1+a_2=0$ ir $a_4+a_5=15$) $a_3=18-0-15=3.$ Vadinasi,

$$a_1=2-3=-1,\ \ a_2=4-3=1,\ \ a_4=6-1=5,\ \ a_5=9-(-1)=10.$$

Ats.: –1; 1; 3; 5; 10.

6. Kadangi n^3-1 dalijasi iš 5, tai $n=5k+1.$ Tada

$$\frac{n^3-1}{5}=25k^3+15k^2+3k=k\cdot(25k^2+15k+3).$$

Akivaizdu, kad $k<25k^2+15k+3.$ Vadinasi, sandauga $k\cdot(25k^2+15k+3)$ yra pirminis skaičius tik kai $k=1$ (tada $25\cdot1+15\cdot1+3=43$). Taigi

$$n=5\cdot1+1=6.$$

Ats.: $n=6.$

7. *1 būdas.*

$$\begin{cases} x+y+z=4, \\ 2xy-z^2=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=4-x-y, \\ 2xy-(4-x-y)^2=16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=4-x-y, \\ 2xy-16-x^2-y^2+8x+8y-2xy=16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=4-x-y, \\ x^2+y^2-8x-8y+32=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=4-x-y, \\ (x-4)^2+(y-4)^2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=4-x-y, \\ x=4,\ y=4 \end{cases} \Rightarrow x=4,\ y=4,\ z=-4.$$

Ats.: $(4;\ 4;\ -4)$.

2 būdas.

$$\begin{cases} x+y+z=4, \\ 2xy-z^2=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=4-z, \\ xy=\dfrac{16+z^2}{2}. \end{cases}$$ Pagal Vijeto teoremą, x ir y yra kvadratinės lygties $t^2+(z-4)\cdot t+\dfrac{16+z^2}{2}=0$ sprendiniai. Šios lygties diskriminantas yra

$$D=(z-4)^2-4\frac{16+z^2}{2}=-(z+4)^2.$$

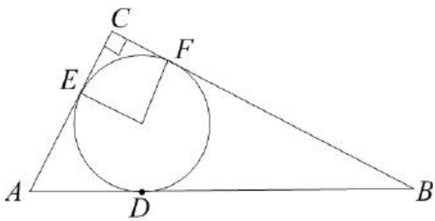
Kad ir x ir y būtų realieji skaičiai, turi galioti nelygybė $D \geq 0.$ Remdamiesi ja gauname:

$$(z+4)^2 \leq 0 \Rightarrow z=-4 \Rightarrow \begin{cases} x+y=8, \\ xy=16 \end{cases} \Rightarrow x=4, y=4.$$

Ats.: $(4;\ 4;\ -4)$.

8. Tegu į trikampį įbrėžto apskritimo spindulys yra r, o apskritimas liečia trikampio kraštines taškuose E, F ir D (žr. 2 pav.). Tarę, kad

$$AD=2t,\ \ DB=3t,$$



2 pav.

gauname, kad

$$AC = AE + EC = 2t + r, \quad BC = BF + FC = 3t + r.$$

Pagal sąlygą,

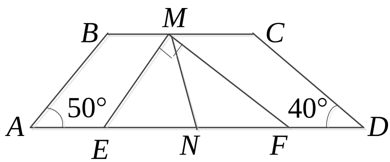
$$2t + r + 3t + r + 5t = 36 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r = 18 - 5t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AC = 18 - 3t,\ BC = 18 - 2t.$$

Pagal Pitagoro teoremą,

$$(18-3t)^2 + (18-2t)^2 = (5t)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t = 3 \Rightarrow AC = 9,\ BC = 12,\ AB = 15.$$

Ats.: 9 cm, 12 cm, 15 cm.

9. Iš trapecijos viršutinio pagrindo vidurio taško M nubrėžkime dvi atkarpas ME ir MF, atitinkamai lygiagrečias su trapecijos šoninėmis kraštinėmis AB ir CD (žr. 3 pav.). Trikampis EMF yra statusis, nes



3 pav.

$$\angle EMF = 180^\circ - \angle MEF - \angle MFE =$$
$$= 180^\circ - \angle A - \angle D = 180^\circ - 50^\circ - 40^\circ = 90^\circ.$$

Jei N yra pagrindo AD vidurio taškas, tai atkarpa MN – trikampio EMF pusiaukraštinė ir ji lygi pusei įžambinės EF. Tarę, kad $AD = a,\ \ BC = b,$ gauname:

$$\begin{cases} a + b = 8, \\ a - b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 5; b = 3.$$

Ats.: 3 ir 5.

10. Tegu tinklelyje yra n mazgų. Tada virvučių, jungiančių šiuos mazgus skaičius yra $\dfrac{3 \cdot n}{2}$. Šis skaičius turi būti sveikasis. Todėl n turi būti lyginis skaičius. Vadinasi, tinklelis negali turėti 2011 mazgų.

Ats.: Negali.

PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Šios funkcijos grafikas yra parabolė, kurios šakos kyla į viršų. Jos viršūnės taško abscisė yra $x = -\dfrac{a+4}{2}$. Jei $-\dfrac{a+4}{2}$ priklauso intervalui [0; 2], tai $f\left(-\dfrac{a+4}{2}\right)$ yra mažiausioji funkcijos reikšmė intervale [0; 2]. Jei $-\dfrac{a+4}{2} < 0$, tai mažiausia funkcijos reikšmė intervale [0; 2] yra $f(0)$. Reikšmė $f(2)$ yra mažiausia intervale [0; 2] tada, kai $-\dfrac{a+4}{2} > 2$. Taigi reikia išspręsti tris sistemas:

1) $\begin{cases} 0 \le -\dfrac{a+4}{2} \le 2, \\ f\left(-\dfrac{a+4}{2}\right) = -4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -\dfrac{a+4}{2} < 0, \\ f(0) = -4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -\dfrac{a+4}{2} > 2, \\ f(2) = -4. \end{cases}$

Gauname:

1) $\begin{cases} 0 \le -\dfrac{a+4}{2} \le 2, \\ f\left(-\dfrac{a+4}{2}\right) = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 \le a+4 \le 0, \\ \dfrac{(a+4)^2}{4} - \dfrac{(a+4)^2}{2} + 2a + 3 = -4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -8 \le a \le -4, \\ -\dfrac{a^2+4}{4} = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8 \le a \le -4, \\ a^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \varnothing;$

2) $\begin{cases} -\dfrac{a+4}{2} < 0, \\ f(0) = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+4 > 0, \\ 2a+3 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > -4, \\ a = -3{,}5 \end{cases} \Rightarrow a = -3{,}5;$

3) $\begin{cases} -\dfrac{a+4}{2} > 2, \\ f(2) = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+4 < -4, \\ 4 + 2(a+4) + 2a + 3 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < -8, \\ 4a + 15 = -4 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a < -8, \\ a = -4{,}75 \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$$

Ats.: –3,5.

2. Iš uždavinio sąlygos lengva suprasti, kad koeficientas a turi būti teigiamas skaičius $(a > 0)$.

Parabolės $y = ax^2 + bx - 2$ viršūnės abscisė yra $-\dfrac{b}{2a}$. Pagal uždavinio sąlygą, $-\dfrac{b}{2a} = -2$.

Sprendžiame sistemą $\begin{cases} 4a - 2b - 2 = -6, \\ -\dfrac{b}{2a} = -2 \end{cases}$

ir gauname, kad $a = 1,\ b = 4$.

Ats.: $a = 1,\ b = 4$.

3. Funkcijos $y = x^2 + (2p - 1)x + p^2$ grafikas yra parabolė, kurios šakos kyla į viršų. Kad abi trinario šaknys būtų didesnės už vienetą, šio trinario reikšmė taške $x = 1$ turi būti teigiamas skaičius ir parabolės viršūnės abscisė didesnė už 1.

Spręsdami nelygybių sistemą

$$\begin{cases} 1^2 + (2p - 1)\cdot 1 + p^2 > 0, \\ -\dfrac{2p - 1}{2} > 1, \end{cases}$$

gauname:

$$\begin{cases} p^2 + 2p > 0, \\ -2p + 1 > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(p + 2) > 0, \\ p < -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow p < -2.$$

Toliau nagrinėkime kvadratinio trinario diskriminantą

$$D = (2p - 1)^2 - 4p^2 = -4p + 1.$$

Kad kvadratinio trinario šaknys būtų skirtingi realieji skaičiai, parametras p turi tenkinti nelygybę $-4p + 1 > 0$. Iš jos gauname sąlygą (parametro p reikšmėms) $p < \frac{1}{4}$.

Vadinasi, parametro p reikšmės turi priklausyti intervalui $(-\infty; -2)$.

Ats.: $p \in (-\infty; -2)$.

4. Pagal Vijeto teoremą, $p = -(D + (1 - D)) = -1$, $q = D(1 - D)$, o kvadratinio trinario

$$x^2 - x + D(1 - D)$$

diskriminantas D yra $1 - 4D(1 - D)$. Išsprendę lygtį

$$D = 1 - 4D(1 - D),$$

gauname dvi galimas D reikšmes: $D_1 = 1$ ir $D_2 = \frac{1}{4}$.

Vadinasi, $q_1 = 1(1-1) = 0$, $q_2 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}$.

Ats.: $(-1; 0)$ ir $\left(-1; \frac{3}{16}\right)$.

5. Tegu $t = x + 5y$; tada $x = t - 5y$. Įrašę į nelygybę gausime:

$$(t - 5y)^2 - 6(t - 5y)y + y^2 + 21 \le 0 \Rightarrow 56y^2 - 16ty + t^2 + 21 \le 0.$$

Ši nelygybė galioja tik su tomis t reikšmėmis, kurioms esant kvadratinio trinario (y atžvilgiu) $56y^2 - 16ty + t^2 + 21$ diskriminantas $D = (-16t)^2 - 4 \cdot 56(t^2 + 21) = 32(t^2 - 147)$ yra teigiamas arba lygus nuliui. Iš nelygybės $t^2 - 147 \ge 0$, gauname, kad $t \le -7\sqrt{3}$ arba $t \ge 7\sqrt{3}$. Kadangi $t > 0$, tai mažiausia $t = x + 5y$ reikšmė yra $7\sqrt{3}$.

Ats.: $7\sqrt{3}$.

6. Kvadratinis trinaris $Q(x)$ didžiausią reikšmę įgyja tik tada, kai parabolės $y = 3ax^2 - 2ax - 8$ šakos eina žemyn. Taip bus tik tada, kai $a < 0$.

Didžiausią $Q(x)$ reikšmę nesunku rasti kvadratiniame trinaryje $Q(x)$ išskyrus pilnąjį kvadratą:

$$Q(x) = 3ax^2 - 2ax - 8 = a(3x^2 - 2x) - 8 = a\left(\left(\sqrt{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{1}{3}\right) - 8 =$$

$$= a\left(\sqrt{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{a}{3} + 8\right) \le -\frac{a}{3} - 8;\text{ čia turime mintyje, kad } a < 0.$$

Lygybė pasiekiama taške $x = \frac{1}{3}$. Taigi trinario $Q(x)$ didžiausia reikšmė yra $Q\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{a}{3} - 8,\ a < 0.$

Parabolės $y = 3x^2 - 2ax - 4$ šakos kyla į viršų, todėl trinaris $P(x)$ mažiausią reikšmę įgyja. Šią reikšmę galima rasti taip:

$$P(x) = 3x^2 - 2ax - 4 = \left(\sqrt{3}x - \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{3} + 4\right) \ge -\frac{a^2}{3} - 4;$$

lygybė pasiekiama tik kai $x = \frac{a}{3}$. Vadinasi, mažiausia kvadratinio trinario $P(x)$ reikšmė yra $P\left(\frac{a}{3}\right) = -\frac{a^2}{3} - 4.$

Belieka išspręsti lygtį $P\left(\frac{a}{3}\right) = Q\left(\frac{1}{3}\right)$. Gausime:

$$-\frac{a^2}{3} - 4 = -\frac{a}{3} - 8 \Rightarrow a^2 - a - 12 = 0 \Rightarrow a = -3 \text{ arba } a = 4.$$

Kadangi $a < 0$, tai –3 yra ieškoma parametro a reikšmė.

Ats.: –3.

7. Funkcija yra apibrėžta visoje realiųjų skaičių tiesėje. Pertvarkykime trupmeną:

$$\frac{x^4 + x^2 + 5}{x^4 + 2x^2 + 1} = \frac{(x^4 + 2x^2 + 1) + 4 - x^2}{x^4 + 2x^2 + 1} = 1 + \frac{4 - x^2}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$=1-\frac{(x^2+1)-5}{(x^2+1)^2}=1-\frac{1}{x^2+1}+\frac{5}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{5}}{x^2+1}-\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^2+1-\frac{1}{20}=\left(\frac{\sqrt{5}}{x^2+1}-\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^2+\frac{19}{20}.$$

Aišku, kad gautas reiškinys, taigi ir nagrinėjama funkcija, mažiausią reikšmę, lygią 0,95, įgyja tada, kai galioja sąlyga

$$\frac{\sqrt{5}}{x^2+1}-\frac{1}{2\sqrt{5}}=0.$$

Išsprendę lygtį, gauname $x=\pm 3$.

Ats.: 0,95 taškuose $x=-3$ ir $x=3$.

8. Šios funkcijos apibrėžimo sritis yra intervalas $[-7;11]$. Taip pat aišku, kad $f(x)>0$ visoje apibrėžimo srityje.

Vietoj $f(x)$ nagrinėkime $f^2(x)$. Gausime:

$$f^2(x)=(\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x})^2=x+7+2\sqrt{(x+7)(11-x)}+11-x=$$

$$=18+2\sqrt{77+4x-x^2}=18+2\sqrt{81-(x-2)^2}\le 18+2\sqrt{81}=36;$$

čia lygybė galioja tik kai $x=2$. Vadinasi, $f(2)=\sqrt{36}=6$ yra didžiausia funkcijos reikšmė.

Ieškodami reiškinio $f(x)$ mažiausios reikšmės nagrinėkime kvadratinį trinarį, esantį pašaknyje. Funkcijos $y=81-(x-2)^2$ grafikas yra parabolė, kurios viršūnė (2; 81). Šios parabolės šakos eina žemyn. Kadangi $x=2$ yra intervale $[-7;11]$, tai nagrinėjamas trinaris mažiausią reikšmę įgyja intervalo gale. Apskaičiavę matome, kad abi reikšmės sutampa (jos lygios nuliui). Vadinasi, funkcija

$$f(x)=\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}$$

mažiausią reikšmę, lygią $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, įgyja dviejuose taškuose: $x=-7$ ir $x=11$.

Ats.: $f(2)=6$ yra didžiausia reikšmė, o $f(-7)=f(11)=3\sqrt{2}$ yra mažiausia reikšmė.

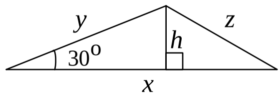
9. Tegu x yra vieno, o y – kito pilko kvadrato kraštinės ilgis. Tada, nagrinėdami pilkųjų kvadratų plotų x^2 ir y^2 sumą, gauname:

$$x^2+y^2=x^2+(1-x)^2=2x^2-2x+1=\left(\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2};$$

lygybė $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ galioja tik kai $\sqrt{2}\cdot x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0,$ t. y. kai $x=\frac{1}{2}.$
Taigi ieškoma taško M vieta yra įstrižainės BD vidurys.

Ats.: Įstrižainės viduryje.

10. Trikampio kraštinių ilgius pažymėkime x, y ir z (žr. 1 pav.). Pagal uždavinio sąlygą, $x+y=a,\ \ h=\frac{y}{2},$ todėl



1 pav.

$$S=\frac{hx}{2}=\frac{xy}{4}=\frac{x(a-x)}{4}=\frac{ax-x^2}{4}=\frac{\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{4}\leq\frac{a^2}{16}.$$

Lygybė $S=\frac{a^2}{16}$ galioja tik kai $x=\frac{a}{2}.$ Vadinasi, didžiausias trikampio plotas yra $\frac{a^2}{16}.$ Tokio trikampio dvi kraštinės yra lygios: $x=y=\frac{a}{2};$ trečiosios kraštinės ilgį galima rasti taip:

$$z=\frac{h}{\sin 75^\circ}=\frac{y}{2\sin(90^\circ-15^\circ)}=\frac{a}{4\cos 15^\circ}=\frac{a}{4\cdot\sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}}}=$$

$$=\frac{a}{4\cdot\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}}=\frac{a}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{a\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Ats.: $\frac{a}{2},\ \frac{a}{2},\ \frac{a\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$

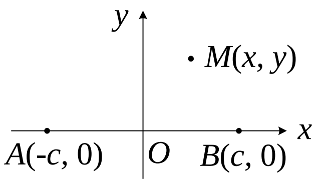
ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Pertvarkę duotąją lygtį, gauname

$$(x-9)^2+(y+11)^2-9^2-11^2-23=0,$$
$$(x-9)^2+(y+11)^2=225.$$

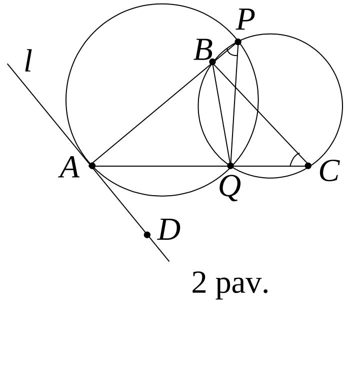
Tai apskritimo, kurio centras $C(9,-11)$, o spindulys $R=15$, lygtis. Kadangi $CM^2=(6-9)^2+(-3+11)^2=73<225$, tai $CM<R$, taigi taškas M yra apskritimo viduje.

2. Koordinačių sistemą Oxy parenkame taip, kad Ox ašis eitų per duotuosius taškus A ir B, o jos pradžios taškas O būtų atkarpos AB vidurio taškas (1 pav.). Pažymėkime atstumą $AB=2c$, kuomet $A(-c,0)$, $B(c,0)$. Plokštumos taškas $M(x,y)$ yra nagrinėjamos taškų aibės taškas tada ir tik tada, kai $AM^2+BM^2=a^2$. Kadangi $AM^2=(x+c)^2+y^2$, $BM^2=(x-c)^2+y^2$, tai iš čia $(x+c)^2+y^2+(x-c)^2+y^2=a^2$. Pertvarkę šią lygtį gauname $2x^2+2y^2=a^2-2c^2$, $x^2+y^2=\dfrac{a^2-2c^2}{2}$. Taigi, kai $a^2-2c^2>0$, t. y. $a>\sqrt{2}c$, ieškomoji taškų aibė yra apskritimas, kurio centras yra koordinačių pradžioje, o spindulys $\sqrt{\dfrac{a^2-2c^2}{2}}$; jei $a=\sqrt{2}c$ – tai vienas taškas $O(0,0)$, jei $a<\sqrt{2}c$ – tuščioji aibė.



1 pav.

3. Sakykime, kad tiesė l – per tašką A nubrėžta apskritimo liestinė (2 pav.), taškas D – bet kuris jos taškas. Pagal



2 pav.

3 teoremą $\angle CAD = \angle APQ = \angle BPQ$. Pagal 2 teoremą $\angle BPQ =$ $= \angle BCQ$, taigi $\angle CAD = \angle BCQ$. Kadangi šie kampai yra vidaus priešiniai kampai, kuriuos tiesės AD ir BC sudaro su tiese AC, tai iš čia ir seka, kad tiesės AD ir BC lygiagrečios.

4. Pagal 3 teoremą $\angle EAP = \angle ABC = \alpha$ (3 pav.). Kadangi tiesės CB ir BP yra statmenos, o $PA = PB$, tai

$\angle ABP = 90^\circ - \alpha$,

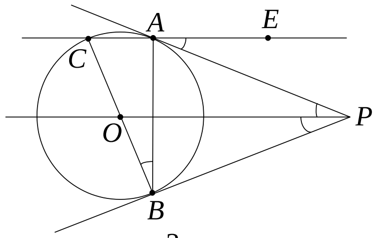
$\angle APB = 180^\circ - 2\angle ABP =$

$= 180^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha$.

Tada

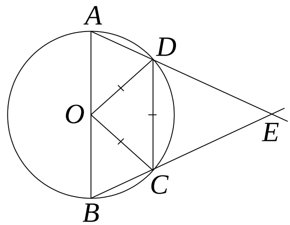
$\angle APO = \frac{1}{2}\angle APB = \alpha = \angle EAP$ ir

tiesės AC bei OP yra lygiagrečios.



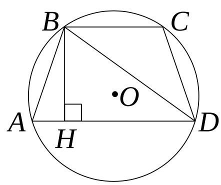
3 pav.

5. Sakykime, kad tiesės AD ir BC susikerta taške E, taškas O – apskritimo centras (4 pav.). Pagal 5 teoremą $\angle AEB = \frac{1}{2}(\angle AOB - \angle DOC)$. Kadangi $DC = OD = OC$, tai $\angle DOC =$ $= 60^\circ$. Kadangi $\angle AOB$ – ištiestinis, tai $\angle AEB = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$.



4 pav.

6. Sakykime, kad trapecijos $ABCD$ pagrindai AD ir BC (5 pav.). Pagal 6 pavyzdį, jei apie trapeciją galima apibrėžti apskritimą, tai ji lygiašonė, t. y. $AB = CD$. Kadangi $\angle AOB = 60^\circ$, tai $\angle ADB = 30^\circ$. Nubrėžiame aukštinę BH, tada $AH = \frac{1}{2}(AD - BC)$, o $DH = AD - AH = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

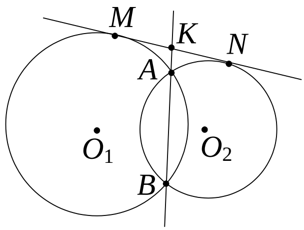


5 pav.

Iš stačiojo trikampio BHD randame $HD = BH\operatorname{ctg}30^\circ = h\sqrt{3}.$ Trapecijos plotas

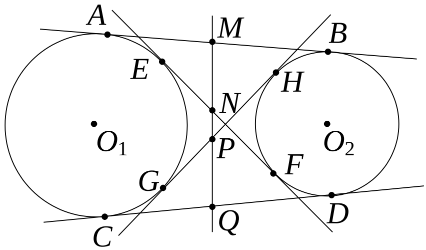
$$S = \frac{1}{2}(AD + BC)\cdot BH = DH\cdot BH = h^2\sqrt{3}.$$

7. Sakykime, kad tiesės AB ir MN kertasi taške K (6 pav.). Kadangi tiesė AB yra duotųjų apskritimų radikalioji ašis, tai taškas K yra radikaliosios ašies taškas, t. y. liestinių atkarpos KM ir KN yra lygios. Taigi taškas K dalija atkarpą MN pusiau.



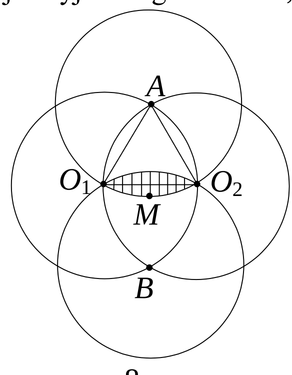
6 pav.

8. Sakykime, kad tiesės AB ir CD yra duotųjų apskritimų išorinės bendrosios liestinės, o tiesės EF ir GH – vidinės bendrosios liestinės (7 pav.). Jei taškas M – atkarpos AB vidurio taškas, tai $MA = MB.$ Tai reiškia, kad taškas M yra duotųjų apskritimų radikaliojoje ašyje. Analogiškai atkarpų EF, GH ir CD vidurio taškai N, P ir Q irgi yra duotųjų apskritimų radikaliojoje ašyje. Taigi taškai M, N, P, Q yra vienoje tiesėje – apskritimų radikaliojoje ašyje.



7 pav.

9. Jei taškai O_1 ir O_2 – duotųjų apskritimų centrai, o tie apskritimai kertasi taškuose A ir B (8 pav.), tai $O_1A = O_2A = {}$ $= O_1B = O_2B,$ t. y. apskritimai, kurių centrai yra taškai A ir B, eina per taškus O_1 ir O_2. Bendroji skritulių dalis 8 pav. yra užštrichuota. Kadangi $O_1A = O_2A = {}$ $= O_1O_2 = R,$ tai $\angle O_1AO_2 = 60^\circ.$

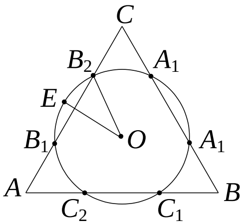


8 pav.

Išpjovos O_1AO_2 plotas lygus $\dfrac{\pi R^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \dfrac{\pi R^2}{6}$. Trikampio O_1AO_2 plotas lygus $\dfrac{1}{2} R^2 \sin 60^\circ = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$. Taigi nuopjovos O_1MO_2 plotas lygus $\dfrac{\pi R^2}{6} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$. Kadangi skritulių bendrąją dalį sudaro dvi tokios nuopjovos, tai ieškomasis plotas lygus

$$S = 2\left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{2}.$$

10. Sakykime, kad taškai B_1 ir B_2 trikampio kraštinę AC dalija į tris lygias dalis. Apskritimo, einančio per šiuos taškus, centras yra atkarpos B_1B_2 vidurio statmuo, sutampantis su kraštinės AC vidurio statmeniu. Analogiškai ir apskritimų, einančių per taškus A_1 ir A_2, o taip pat per taškus C_1 ir C_2, centrai yra trikampio kraštinių BC ir AB vidurio statmenyse. Taigi apskritimas, einantis per taškus A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 ir C_2 egzistuoja, o jo centras sutampa su taisyklingojo trikampio ABC centru O (9 pav.). Nubrėžkime statmenį OE tiesei AC.



9 pav.

Kadangi taškas E yra kraštinės AC vidurio taškas o $CB_2 = B_1B_2 = = B_1A = \dfrac{a}{3}$, tai iš stačiojo trikampio OCE randame

$$OE = CE\ \mathrm{tg}30^\circ = \frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Kadangi $EB_2 = \dfrac{a}{6}$, tai iš trikampio OB_2E turime $OB_2 = \dfrac{a}{3}$, t. y. trikampis B_1OB_2 lygiakraštis, todėl lanko B_1B_2 didumas lygus kampo B_1OB_2 didumui, t. y. 60°

TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Skaičius *n* yra pirminis, jei jis nesidalija iš pirminių skaičių, mažesnių už $\sqrt{n}$. Kadangi $\sqrt{2659} \approx 51{,}6$ ir 2659 nesidalija iš pirminių skaičių, mažesnių už 52, t.y. iš

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,

tai 2659 yra pirminis skaičius. Nesunku patikrinti, kad

$$2743 = 13 \cdot 211, \quad 2809 = 53^2, \quad 2197 = 13^3,$$

todėl skaičiai 2743, 2809 ir 2197 yra sudėtiniai. Kvadratinė šaknis $\sqrt{2741} \approx 52{,}4$, o pats skaičius 2741 nesidalija iš pirminių skaičių, mažesnių už 53. Taigi 2741 yra pirminis skaičius.

Ats.: skaičiai 2659 ir 2741 yra pirminiai, o skaičiai 2743, 2809 ir 2197 nėra pirminiai.

2. Visus skaičius nuo 3100 iki 3200 surašykime į lentelę:

~~3100~~	~~3101~~	~~3102~~	~~3103~~	~~3104~~	~~3105~~	~~3106~~	~~3107~~	~~3108~~	3109	~~3110~~
	~~3111~~	~~3112~~	~~3113~~	~~3114~~	~~3115~~	~~3116~~	~~3117~~	~~3118~~	3119	~~3120~~
	3121	~~3122~~	~~3123~~	~~3124~~	~~3125~~	~~3126~~	~~3127~~	~~3128~~	~~3129~~	~~3130~~
	~~3131~~	~~3132~~	~~3133~~	~~3134~~	~~3135~~	~~3136~~	3137	~~3138~~	~~3139~~	~~3140~~
	~~3141~~	~~3142~~	~~3143~~	~~3144~~	~~3145~~	~~3146~~	~~3147~~	~~3148~~	~~3149~~	~~3150~~
	~~3151~~	~~3152~~	~~3153~~	~~3154~~	~~3155~~	~~3156~~	~~3157~~	~~3158~~	~~3159~~	~~3160~~
	~~3161~~	~~3162~~	3163	~~3164~~	~~3165~~	~~3166~~	3167	~~3168~~	3169	~~3170~~
	~~3171~~	~~3172~~	~~3173~~	~~3174~~	~~3175~~	~~3176~~	~~3177~~	~~3178~~	~~3179~~	~~3180~~
	3181	~~3182~~	~~3183~~	~~3184~~	~~3185~~	~~3186~~	3187	~~3188~~	~~3189~~	~~3190~~
	3191	~~3192~~	~~3193~~	~~3194~~	~~3195~~	~~3196~~	~~3197~~	~~3198~~	~~3199~~	~~3200~~

Kadangi $\sqrt{3200} \approx 56{,}6$, tai išbraukime lentelėje visus pirminių skaičių, mažesnių už 57, kartotinius, t.y. skaičių

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53

kartotinius. Likę neišbraukti skaičiai ir bus pirminiai skaičiai iš intervalo [3100, 3200].

Ats.: 3109, 3119, 3121, 3137, 3163, 3167, 3169, 3181, 3187, 3191.

3. Skaičių didžiausius bendruosius daliklius galima rasti dviem būdais: išskaidant skaičius pirminių skaičių laipsniais arba naudojant Euklido algoritmą. Naudosime abu būdus.

a) $(714,\ 1638,\ 434) = (2\cdot 3\cdot 7\cdot 17,\ \ 2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 13,\ \ 2\cdot 7\cdot 31) = 14.$

b) Naudojame Euklido algoritmą:

$69601 = 1\cdot 53497 + 16104,$

$53497 = 3\cdot 16104 + 5185,$

$16104 = 3\cdot 5185 + 549,$

$5185 = 9\cdot 549 + 244,$

$549 = 2\cdot 244 + 61,$

$244 = 4\cdot 61.$

Todėl $(53497,\ 69601) = 61$ (paskutinė nenulinė liekana).

Kadangi $152317 = 2497\cdot 61$, tai

$(53497,\ 69601,\ 152317) =$

$((53497,\ 69601),\ \ 152317) = (61,\ 152317) = 61.$

c) Naudojame Euklido algoritmą:

$52246 = 1\cdot 34579 + 17667,$

$34579 = 1\cdot 17667 + 16912,$

$17667 = 1\cdot 16912 + 755,$

$16912 = 22\cdot 755 + 302,$

$755 = 2\cdot 302 + 151,$

$302 = 2\cdot 151.$

Todėl $(34579,\ 52246) = 151.$

d) Naudojame Euklido algoritmą:

$59411 = 2\cdot 29039 + 1333,$

$29039 = 21\cdot 1333 + 1046,$

$1333 = 1\cdot 1046 + 287,$

$1046 = 3\cdot 287 + 185,$

$287 = 1\cdot 185 + 102,$

$185 = 1\cdot 102 + 83,$

$102 = 1\cdot 83 + 19,$

$83 = 4\cdot 19 + 7,$

$$19 = 2 \cdot 7 + 5,$$
$$7 = 1 \cdot 5 + 2,$$
$$5 = 2 \cdot 2 + 1,$$
$$2 = 2 \cdot 1.$$

Todėl $(59411, 29039) = 1$ ir skaičiai 59411, 29039 yra tarpusavyje pirminiai.

e) $(4697, 1547, 143) = (7 \cdot 11 \cdot 61, 7 \cdot 13 \cdot 17, 11 \cdot 13) = 1.$
Skaičiai 4697, 1547, 143 yra tarpusavyje pirminiai.

4. Dviejų natūraliųjų skaičių $9n + 4$ ir $2n + 1$ didžiausias bendrasis daliklis yra lygus paskutinei nelygiai nuliui liekanai, gautai, taikant jiems Euklido algoritmą:

$$(9n + 4) = 4 \cdot (2n + 1) + n,$$
$$(2n + 1) = 2 \cdot n + 1,$$
$$n = n \cdot 1 + 0.$$

Paskutinė nenulinė liekana yra lygi 1. Taigi skaičių $9n + 4$ ir $2n + 1$ didžiausias bendrasis daliklis yra lygus 1 ir todėl jie yra tarpusavyje pirminiai.

5. Tegul r yra pirminio skaičiaus p dalybos iš 30 liekana, $r \in \{0, 1, 2, ..., 29\}$. Tuomet

$$p = 30k + r;$$

čia k yra sveikasis neneigiamas skaičius.
Pastebėkime, kad, kai $k = 0$, tai $p = r$, t.y. liekana r yra pirminis skaičius. Tegul $k > 0$. Tada $p > 30.$ Aišku, kad

$r \neq 0,$ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28,

nes p dalytųsi iš 2 ir pirminiu skaičiumi būti negalėtų. Taip pat

$$r \neq 3, \ 9, 15, 21, 27,$$

nes p dalytųsi iš 3 ir taip pat pirminiu skaičiumi būti negalėtų. Dėl tokios pat priežasties

$$r \neq 5, \ 25,$$

nes p dalytųsi iš 5. Taigi gauname, kad r (kai $k > 0$) yra vienas iš skaičių: 1, 7, 11,013, 17, 19, 23, 29.
Bendru atveju turime, kad r yra pirminis skaičius arba 1.

6. Bet kurį pirminį skaičių p, nemažesnį už 5, galime užrašyti

$$p = 4k - 1 \text{ arba } p = 4k + 1;$$

čia k natūralusis skaičius.

Pirma panagrinėkime pirminius p, kurie užrašomi pirmuoju būdu: $p = 4k - 1$. Kadangi p yra didesnis už 3 (3 gauname imdami $k = 1$), o, 7^2 (7 gauname imdami $k = 2$) dalydami iš 24, gauname liekaną, lygią 1, tai galime laikyti, kad $k > 3$. Jei $k > 3$, tai jį galime užrašyti:

$$k = 3l \text{ arba } k = 3l + 1, \text{ arba } k = 3l + 2;$$

čia l natūralusis skaičius. Panagrinėkime visus tris atvejus atskirai.

Tegul $k = 3l$. Tuomet

$$p^2 = (4k - 1)^2 = (12l - 1)^2 = 24 \cdot 6l^2 - 24l + 1,$$

ir aišku, kad, p^2 dalydami iš 24, gausime liekaną, lygią 1. Kai $p = Ak - 1,$ skaičius k negali būti lygus $3l + 1,$ nes skaičius

$$4k - 1 = 12l + 3$$

dalijasi iš 3 ir nėra pirminis.

Tegul $k = 3l + 2.$ Tuomet

$$p^2 = (4k - 1)^2 = (12l + 7)^2 = 24 \cdot 6l^2 - 24 \cdot 7l + 49.$$

Matyti, kad, p^2 dalydami iš 24, gausime liekaną, lygią 1.

Dabar panagrinėkime pirminius p, kurie užrašomi antruoju būdu: $p = 4k + 1.$ Kadangi 5^2 (5 gauname imdami $k = 1$) dalydami iš 24, gauname liekaną, lygią 1, o, kai $k = 2,$ skaičius $4k + 1$ nėra pirminis, tai galime laikyti, kad $k \geq 3.$ Vėl panagrinėsime visus tris atvejus, kai $k = 3l,$ $k = 3l + 1,$ 1 ir $k = 3l + 2.$

Tegul $k = 3l$. Tuomet

$$p^2 = (4k + 1)^2 = (12l + 1)^2 = 24 \cdot 6l^2 - 24l + 1,$$

ir aišku, kad, p^2 dalydami iš 24, gausime liekaną, lygią 1. Tegul $k = 3l + 1.$ Tuomet

$$p^2 = (4k + 1)^2 = (12l + 5)^2 = 24 \cdot 6l^2 - 24 \cdot 5l + 25.$$

Iš paskutinės lygybės gauname, kad, p^2 dalybos iš 24 liekana yra lygi 1. Kai $p = 4k + 1$, skaičius k negali būti lygus $3l + 2$, nes skaičius

$$4k + 1 = 12l + 9$$

dalijasi iš 3 ir nėra pirminis.

Taigi įsitikinome, kad, pirminio skaičiaus $p \geq 5$ kvadratą dalydami iš 24, gauname liekaną, lygią 1.

7. Skaičiai

$$M_n = 2^n - 1$$

(n natūralusis skaičius) vadinami Merseno skaičiais. Kai skaičius

$M_p = 2^p - 1$

(kuriam nors pirminiam p) yra pirminis, tai jis vadinamas Merseno pirminiu skaičiumi. Kadangi

$$2047 = 2^{11} - 1 = M_{11},$$

tai skaičius 2047 yra Merseno skaičius, bet jis nėra Merseno pirminis skaičius, nes $2047 = 23 \cdot 89.$ Tuo tarpu skaičius 127 yra pirminis (nesi- dalija iš 2, 3, 5, 7 ir 11, o $\sqrt{127} < 12$) ir

$$127 = 2^7 - 1 = M_7,$$

todėl jis yra Merseno pirminis skaičius.

8. Skaičiai

$$F_k = 2^{2^k} + 1$$

(k natūralusis skaičius) vadinami Ferma skaičiais. Jei skaičius F_k yra pirminis, jis vadinamas Ferma pirminiu skaičiumi. Skaičius 257 yra pirminis (nesidalina iš 2, 3, 5, 7, 11 ir 13, o $\sqrt{257} < 17$) ir

$$257 = 2^{2^3} + 1 = F_3.$$

Taigi 257 yra Ferma pirminis skaičius.

9. Užrašykime skaičių 496 ir 8128 kanoninius skaidinius pirminių skaičių laipsniais:

$$496 = 2^4 \cdot 31, \quad 8128 = 2^6 \cdot 127.$$

Susumavę visus jų daliklius, gauname

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 + 496 = 992 = 2 \cdot 496,$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 664 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 +$$
$$+ 4064 + 8128 = 16256 = 2 \cdot 8128.$$

Skaičius n, kurio daliklių suma lygi $2n$, vadinamas tobuluoju skaičiumi. Taigi skaičiai 496 ir 8128 yra tobulieji skaičiai.

10. Skaičius n, kurio daliklių suma didesnė už $2n$, t.y. $a(n) > 2n,$ vadinamas pertekliaus skaičiumi; jei daliklių suma mažesnė už $2n$, t.y. $\sigma(n) < 2n,$ jis vadinamas nepritekliaus skaičiumi. Tegul skaičiaus n kanoninis skaidinys pirminių skaičių laipsniais yra

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_l^{k_l}.$$

Tuomet jo daliklių sumai $\sigma(n)$ suskaičiuoti galime naudoti formules:

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{k_1})\, \sigma(p_2^{k_2}) \ldots \sigma(p_l^{k_l}),$$

$$\sigma(p^m) = 1 + p + \ldots + p^m = \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}.$$

Taigi

$$\sigma(100) = \sigma(2^2 5^2) = \sigma(2^2) \cdot \sigma(5^2) = \frac{2^3 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{5^3 - 1}{5 - 1} = 7 \cdot 31 = 217 > 200,$$

$$\sigma(101) = 102 < 202,$$

$$\sigma(102) = \sigma(2) \cdot \sigma(3) \cdot \sigma(17) = 3 \cdot 4 \cdot 18 = 216 > 204,$$

$$\sigma(103) = 104 < 206,$$

$$\sigma(105) = \sigma(3) \cdot \sigma(5) \cdot \sigma(7) = 4 \cdot 6 \cdot 8 = 192 < 210,$$

$$\sigma(106) = \sigma(2) \cdot \sigma(53) \cdot \sigma(7) = 3 \cdot 54 = 162 < 212,$$

$$\sigma(107) = 108 < 214,$$

$$\sigma(108) = \sigma(2^2) \cdot \sigma(3^3) = 7 \cdot 40 = 280 > 216,$$

$$\sigma(109) = 110 < 218,$$

$$\sigma(110) = \sigma(2) \cdot \sigma(5) \cdot \sigma(11) = 3 \cdot 6 \cdot 12 = 216 < 220,$$

$$\sigma(111) = \sigma(3) \cdot \sigma(37) = 4 \cdot 38 = 152 < 222,$$

$$\sigma(112) = \sigma(2^4) \cdot \sigma(7) = 31 \cdot 8 = 248 > 224,$$

$$\sigma(113) = 114 < 226,$$

$$\sigma(114) = \sigma(2) \cdot \sigma(3) \cdot \sigma(19) = 3 \cdot 4 \cdot 20 = 240 > 228,$$

$$\sigma(115) = \sigma(5) \cdot \sigma(23) = 6 \cdot 24 = 144 < 230,$$

$$\sigma(116) = \sigma(2^2) \cdot \sigma(29) = 7 \cdot 30 = 210 < 232,$$

$$\sigma(117) = \sigma(3^2) \cdot \sigma(13) = 13 \cdot 14 = 182 < 234,$$
$$\sigma(118) = \sigma(2) \cdot \sigma(59) = 3 \cdot 60 = 180 < 236,$$
$$\sigma(119) = \sigma(7) \cdot \sigma(17) = 8 \cdot 18 = 144 < 238,$$
$$\sigma(120) = \sigma(2^3) \cdot \sigma(3) \cdot \sigma(5) = 15 \cdot 4 \cdot 6 = 360 > 240.$$

Ats.: pertekliaus skaičiai yra 100, 102, 104, 108, 112, 114, 120, o nepritekliaus skaičiai yra 101, 103, 105, 106, 107, 109, 110, 111, 113, 115, 116, 117, 118, 119.

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Surikiuokime dreves pagal riešutų skaičių. Sakykime, pirmoje drevėje yra D1, antroje – D2, trečioje – D3 ir taip toliau, iki pat septintosios drevės, kurioje yra D7 riešutų.

Sakykime, kad

$$D1<D2<D3<D4<D5<D6<D7.$$

Tuomet, kadangi riešutų skaičiai drevėse dėl voverytės Julės principų yra visi skirtingi, tai, akivaizdu, kad

$$D2 + 3 \leq D5,$$
$$D3 +3 \leq D6$$
$$D4 +3 \leq D7,$$

todėl sudėjus

$$D2 + D3 + D4 + 9 \leq D5 + D6 + D7.$$

Tačiau, kadangi daugumoje drevių turi būti ir dauguma riešutų, tai būtinai

$$D1 + D2 + D3 + D4 > D5 + D6 + D7,$$

ir tada būtinai

$$D1 \geq 10.$$

Todėl

$$D2 \geq 11, D3 \geq 12, D4 \geq 13, D5 \geq 14, D6 \geq 15 \text{ ir } D7 \geq 16.$$

Vadinasi, rinkinyje mažų mažiausiai turi būti

$$10 +11 +12 +13 +14 + 15+ 16 = 91$$

riešutas.

Liko pastebėti, kad toks 7 drevių, kuriose yra atitinkamai

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16

riešutų rinkinys tikrai tenkina uždavinio sąlygas, nes keturiose pačiose mažiausiose drevėse yra bent

$$10 + 11 + 12 + 13$$

arba

$$46$$

riešutai, o tai daugiau negu pusė visų riešutų ir daugiau negu bendras riešutų kiekis trijose pačios didžiausiose drevėse, nes jose niekaip negali būti daugiau kaip

$$14 + 15 + 1\,6$$

arba

$$45$$

riešutai (o tai yra mažiau negu pusė visų riešutų).

Ats.: Voverytė Julė mažiausiai 7 drevėse gali turėti 91 riešutą.

2. Užduoties apraše buvo rasti trys triženkliai skaičiai, kurie sumažėja 9 kartus užbraukus patį pirmąjį tokio triženklio skaičiaus skaitmenį – tokiais pasirodo esą skaičiai

225, 450 ir 675.

Todėl mums dabar tikrai tiks tokie jau keturženkliai skaičiai, kurie už juos yra lygiai 10 kartų didesni. Jie bus gauti prirašius prie tų triženklių skaičių po 0 ir, aišku, išsaugos savybę būti 9 kartus didesniais už savąjį „užbrauktinį“ skaičių.

Taip iš karto gauname tris tinkamus skaičius

2250, 4500 ir 6750.

Įdomu, kiek dar yra skaičių be tų, ką tik nurodytųjų.

Užrašome sąlygą:

$$ABCD = 9BCD$$

arba

$$1000A + 100B + 10C + D = 900B + 90C + 9D,$$

iš kur suprastinę turėsime

$$1000A = 800B + 80C + 8D$$

ir padalinę iš 8

$$125A = 100B + 10C + D$$

ir

$$D = 5(25A – 20B – 2C).$$

Todėl D dalijasi iš

$$5,$$

o kadangi D dar ir skaitmuo, tai jis jau tik

$$0$$

arba

$$5.$$

Pirmuoju atveju

$$25A = 20B + 2C$$

ir A yra lyginis skaitmuo, taigi jis yra

$$0, 2, 4, 6 \text{ arba } 8.$$

Tačiau 0 turime iš karto atmesti, nes mums nevalia pamiršti, kad A yra pirmasis keturženklio skaičiaus skaitmuo, todėl ne 0.

Jei

$$A = 2,$$

tai

$$20B + 2C = 50,$$

o tai reiškia, kad

$$10B + C = 25$$

ir kadangi B ir C vėl “tik” skaitmenys, tai

$$B = 2 \text{ ir } C = 5.$$

Taip (vėl) gauname skaičių

$$2250.$$

Jei

$$A = 4,$$

tai

$$20B + 2C = 100$$

ir

$$10B + C = 50,$$

todėl

$$B = 5 \text{ ir } C = 0,$$

ir taip vėl “horizonte pasirodo” skaičius

$$4500.$$

Jei

$$A = 6,$$

tai

$$20B + 2C = 150$$

ir

$$B = 7 \text{ ir } C = 5,$$

parodant dar kitą atspėto atsakymo skaičių

$$6750.$$

Jei

$$A = 8,$$

tai

$$20B + 2C = 200$$

ir

$$10B + C = 100,$$

o ši lygtis sprendinių „skaitmenimis“ neturi.

Liko antrasis atvejis

$D = 5,$

o tada

$$125A = 100B + 10C + 5,$$

arba

$$25A = 20B + 2C + 1,$$
$$25A – 1 = 2(10A + C).$$

Todėl skaičius

$$25A – 1$$

yra lyginis ir todėl

$$A$$

yra nelyginis, vadinasi,

$$A$$

yra

$$1, 3, 5, 7 \text{ arba } 9.$$

Jei

$$A = 1,$$

tai

$$24 = 2(10B + C),$$

arba

$$12 = 10B + C,$$

o tai reiškia, kad

$$B = 1 \text{ ir } C = 2.$$

Taip atsiranda jau „naujas“ atsakymas

$$1125.$$

Jei

$$A = 3,$$

tai

$$74 = 2(10B + C),$$

arba

$$37 = 10B + C,$$

o tai reiškia, kad

$$B = 3 \text{ ir } C = 7.$$

Taip atsiranda dar vienas „naujas“ atsakymas

$$3375.$$

Jei

$$A = 5,$$

tai

$$124 = 2(10B + C),$$

arba

$$62 = 10B + C,$$

o tai reiškia, kad

$$B = 6 \text{ ir } C = 2.$$

Taip atsiranda jau trečias „naujas“ atsakymas

$$5625.$$

Jei

$$A = 7,$$

tai

$$174 = 2(10B + C),$$

arba

$$87 = 10B + C,$$

o tai reiškia, kad

$$B = 8 \text{ ir } C = 7.$$

Taip atsiranda jau ketvirtas „naujas“ atsakymas

$$7875.$$

Jei galiausiai

$$A = 9,$$

tai

$$224 = 2(10B + C),$$

arba

$$112 = 10B + C,$$

o šioji lygtis „sprendinių skaitmenimis“

$$B \text{ ir } C$$

jau nebeturi.

Ats.: Yra iš viso

$$7$$

keturženkliai skaičiai, kurie sumažėja 9 kartus užbraukus pirmąjį jų skaitmenį. Tai skaičiai

$$1125,\ 2250,\ 3375,\ 4500,\ 5675,\ 6750 \text{ ir } 7875$$

3. Galima būtų įsitikinti, pavyzdžiui, dalijant kampu, kad abi trupmenos dalijasi ir iš skaičiaus

$$111,$$

ir iš skaičiaus

$$1\,001\,001.$$

Tai labai lengva padaryti pritaikant daugybą stulpeliu.

Pirmiausiai pastebėkime, kad

$$111 \cdot 1\,001\,001 = 111\,111\,111.$$

Tikrai, dauginant stulpeliu būtų

$$\begin{array}{r}
1\,001\,001 \\
111 \\
\hline
1\,001\,001 \\
10\,010\,01 \\
100\,100\,1 \\
\hline
111\,111\,111.
\end{array}$$

Padaliję skaitiklį ir vardiklį iš minėtųjų skaičių gaustume trupmeną

$$\frac{9091}{9901}.$$

Tai vėl lengviausia patikrinti padauginant stulpeliu

$$9091$$

ir

$$9901$$

iš

$$111\,111\,111$$

ir įsitikinti, kad gausime atitinkamai skaičius

$$1010111110101$$

ir

$$1100111110011.$$

Tikrai

$$
\begin{array}{r}
111\,111\,111 \\
\times \quad \underline{\qquad 9\,091} \\
111\,111\,111 \\
+ \; 9\,999\,999\,99 \\
\underline{999\,999\,999} \\
1\,010\,111\,110\,101
\end{array}
$$

ir

$$
\begin{array}{r}
111\,111\,111 \\
\times \quad \underline{\qquad 9\,901} \\
111\,111\,111 \\
+ \; 99\,999\,999\,9 \\
\underline{999\,999\,999} \\
1\,100\,111\,110\,011
\end{array}
$$

Dabar dar reikėtų įsitikinti, kad jau daugiau iš nieko toji trupmena

$$\frac{9091}{9901}$$

nebesidalija.

Iš tikrųjų, jeigu toji trupmena dar galėtų būti “toliau prastinama”, tai tada atsirastų ir toks pirminis skaičius

$$p>1,$$

iš kurio dalytųsi ir tos trupmenos skaitiklis, ir jos vardiklis.

Jeigu taip, tai iš tokio pirminio ir, suprantama, už vienetą didesnio skaičiaus

$$P$$

privalėtų dalytis ir vardiklio

$$9901$$

ir skaitiklio
9091
skirtumas

$$9901 – 9091 = 810.$$

Tačiau tas skirtumas

$$810 = \quad 2 \cdot 3^4 \cdot 5$$

tesidalija tik iš labai “paprastų” pirminių skaičių

$$2, 3 \text{ ir } 5,$$

iš kurių nei tas skaitiklis

$$9091,$$

nei tas vardiklis

$$9901$$

nesidalija.

Todėl prielaida, kad skaitiklis ir vardiklis abu kartu dalijasi iš kokio nors natūraliojo už 1 didesnio skaičiaus, yra neteisinga ir todėl gautoji trupmena

$$\frac{9091}{9901}$$

yra nesuprastinama, o uždavinys baigtas spręsti.

Ats.: $\frac{9091}{9901}$.

4. Jeigu Ona per 10 minučių nuskuta 18 bulvių, tai per 30 minučių ji nuskus 3 kartus daugiau jų, arba iš viso

$$18 \cdot 3 = 54$$

bulves.

Jeigu Jonas per 6 minutes nuskuta 7 bulves, tai per 30 minučių jis nuskus jų 5 kartus daugiau arba

$$7 \cdot 5 = 35,$$

o Marijona, nuskusdama per 15 minučių 23 bulves, per 30 minučių nuskus jų dvigubai daugiau, arba iš viso 46 bulves.

Beje, dabar juos jau visai nebesunku surikiuoti pagal pajėgumą.

Dabar mes matome, kad jie visi 3 kartu per 30 minučių nuskus

$$54 + 35 + 46 = 135 \text{ bulves.}$$

Vadinasi, per valandą jie visi 3 kartu nuskus dvigubai daugiau, arba jau 270 bulvių, o 540 bulvių nuskusti jie visi trys kartu sugaiš 2 valandas.

Ats.: Jie visi trys, dirbdami kartu, 540 bulvių nuskus per 2 valandas.

5. Jeigu skaičius dalijasi iš

$$45,$$

tai jis dalijasi ir iš

$$9,$$

ir iš

$$5.$$

Todėl jeigu 8-ženklis skaičius

$$AAAABBBB\ (A \neq 0)$$

dalijasi iš 9, tai iš 9 dalijasi ir to skaičiaus skaitmenų suma

$$A + A + A + A + B + B + B + B = 4(A + B).$$

Tačiau tada iš 9 dalijasi ir skaičius

$$A + B\,.$$

Kadangi

$$AAAABBBB$$

dalijasi ir iš

$$5,$$

tai jo paskutinis skaitmuo B turi būti

$$0$$

arba

$$5.$$

Bet tada, kadangi

$$A + B$$

turi dalytis iš

$$9$$

(skaičius 99990000),

ir A yra skaitmuo, taigi jis nelygus nuliui (pirmasis skaitmuo), jis yra arba

$$9,$$

arba

$$4$$

(skaičius 44445555).

Ats.: Pirmasis to aštuonženklio skaičiaus AAAABBBB skaitmuo yra 4 arba 9.

6. Ne, visai nebūtinai visi trys skaičiai turi sutapti. Pavyzdžiu galėtų būti trejetas

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}$$

arba apskritai bet kuris teigiamų skaičių trejetas

$$1 - a,\ a,\ a\ ,$$

nes tikrai

$$1-a + a^2 + a^2 = 2a^2 - a + 1 = (1-a)^2 + a + a^2.$$

Pastebėsime, kad visi tokie trejetai, išskyrus atvejį, kai a yra lygus vienai antrajai, ir duoda tokius trejetus, kur ne visi trys skaitmenys sutampa.

Pastaba. Dvi minutes pagalvoti turinčiam skaitytojui turėtų iškilti klausimas, „ar iš balos tas gražumas mano prigimimo“, arba iš kur tai imasi?

Tai „gali imtis“ kad ir iš lygčių sistemos, į kurią ir „sudedame“ visus tiems nežinomiems skaičiams keliamas sąlygas.

Jeigu surašytume jas būtent tokiems trims, kol kas „dar nežinomiems“ skaičiams

x, y ir z

keliamas sąlygas, tai viskas atrodytų taip:

$$x + y^2 + z^2 = x^2 + y + z^2 = x^2 + y^2 + z.$$

Truputėlį su jomis „padirbėsime“.

Iš

$$x + y^2 + z^2 = x^2 + y + z^2$$

išplaukia

$$x - y - x^2 + y^2 = 0,$$

arba

$$(x-y) - (x-y)(x+y) = 0$$

ir

$$(x-y)(x+y-1) = 0.$$

Vadinasi, arba

$$x = y,$$

arba

$$x + y = 1.$$

Taigi, arba du ieškomieji dydžiai (mūsų išnagrinėtu atveju x ir y) sutampa, arba jų suma yra lygi 1.

Užrašome ir tas kitas visiškai taip pat gaunamas lygybes:

$$(y-z)(y+z-1) = 0$$

ir

$$(z-x)(z+x-1)=0\,.$$

Todėl, jeigu jokie du dydžiai nesutaptų, tai būtinai galiotų šios trys lygybės:

$$x+y=1,$$
$$y+z=1,$$
$$z+x=1.$$

Jas visas sudėję jau gautume, kad

$$2x+2y+2z=3,$$
$$x+y+z=1{,}5$$

ir

$$x=y=z=\frac{1}{2},$$

o tai mūsų situacijoje yra pati didžiausia įmanoma prieštara, nes tada jau sutampa net nebe du kurie nors, o jau visi trys tie skaičiai.

Ats. Nebūtinai visi trys tokio trejeto skaičiai sutampa. Tačiau mes nurodėme ir įrodėme, kad du iš trijų tokio trejeto skaičių būtinai turi sutapti.

7. Jeigu mes turime teigiamų skaičių rinkinį

D1≤D2≤D3…….≤Ds,

ir

$$1 \le n,\ m \le s,$$

tada akivaizdžiai yra teisingi 2 tokie teiginiai:

1 teiginys.

Jei

n

pačių

mažiausių

rinkinio skaičių suma yra didesnė už

m

pačių

didžiausių

to rinkinio skaičių sumą, tai ir

bet kurių

n

to rinkinio skaičių suma yra didesnė už
bet kurių
m
to rinkinio skaičių sumą.

2 teiginys
Tarkime, kad $k \leq \min \{n, m\}$.
Jei
n
bet kurių
rinkinio skaičių suma yra didesnė už
bet kurių
m
to rinkinio skaičių sumą, tai ir
bet kurių
$n - k$
to rinkinio skaičių suma yra didesnė už
bet kurių
$m - k$
to rinkinio skaičių sumą.

Mūsų uždavinio atveju
$$n = 4,$$
$$m = 3$$
ir
$$k = 1.$$

Ats.: Taip, išplaukia.

8. Kadangi didžiąją pievą pusę dienos pjovė visa brigada ir dar pusę dienos pusė visos brigados, todėl per pusę
dienos visa brigada privalėjo nupjauti
$$\frac{2}{3}$$
didžiosios pievos.

Vadinasi, pusė visos brigados per pusę dienos nupjovė
$$\frac{1}{3}$$
didžiosios pievos.

Lygiai tiek pat, arba plotą lygų trečdaliui didžiosios pievos, bet jau antrojoje, perpus mažesnėje pievoje, per kitą dienos pusę nupjovė kita pusė brigados.

Vadinasi, tas vienišas pjovėjas, kuris antrą dieną per visą dieną baigė pjauti antrąją, kaip sakyta, perpus mažesnę pievą, nupjovė viską, kas dar buvo likę antrojoje pievoje, arba, skaičiuojant pirmosios pievos dalimis

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3},$$

arba

$$\frac{1}{6},$$

t.y. šeštadalį didžiosios pievos.

Taigi vienas pjovėjas per vieną dieną nupjauna plotą, lygų

$$\frac{1}{6}$$

didžiosios pievos.

Toliau, mes matome, kad visa brigada per dieną nupjovė visą didžiąją pievą ir dar plotą, lygų

$$\frac{1}{3}$$

didžiosios pievos arba iš viso plotą, lygų

$$1+\frac{1}{3}=\frac{8}{6}$$

didžiosios pievos.

Vadinasi, iš viso buvo

$$\frac{\frac{8}{6}}{\frac{1}{6}}=8$$

pjovėjai.

Ats.: Iš viso buvo 8 pjovėjai.

9. Jeigu vyriausias brolis gavo 4 kartus mažiau gintariukų negu jo broliai, tai jis gavo lygiai

$$\frac{1}{5}$$

visų gintariukų.

Panašiai trečias pagal gautą gintariukų kiekį, kuris jų buvo gavęs 9 kartus mažiau už likusius brolius kartu, jų
buvo gavęs

$$\frac{1}{10}$$

dalį, o pats kukliausias brolis jų buvo gavęs

$$\frac{1}{11}$$

dalį.

Visi kiti broliai, išskyrus antrąjį, buvo gavę dalis, kurios buvo tarp

$$\frac{1}{11} \quad \text{ir} \quad \frac{1}{10},$$

t.y. buvo tarp

$$9\ \% \text{ ir } 10\ \%.$$

Kadangi pats „turtingiausias“ iš brolių jų turėjo 20 %, antras pagal paveldėtą skaičių jų turėjo, išreiškus procentais, tarp 10 % ir 20 %, ir dar 10 % paveldėjo trečiasis brolis, tai visi trys daugiausiai paveldėję broliai jų buvo paveldėję daugiau negu

$$40\%,$$

bet mažiau negu

$$50\%.$$

Vadinasi, likusiųjų brolių, kurių kiekvienas, įskaitant paskutinį brolį, buvo paveldėję tarp

$$9\%$$

ir

$$10\%,$$

todėl tam, kad jie surinktų daugiau negu

$$50\%,$$

bet mažiau negu

$$60\%,$$

jų turi būti lygiai

$$6,$$

arba su tais trimis daugiausiai paveldėjusiais jų turėtų būti

$$6 + 3,$$

arba iš viso

$$9.$$

Pateiksime galimą konkretų tokio paveldėjimo pavyzdį, nurodydami „konkrečiai“ paveldėtus gintariukus:

Pavyzdys.

Paveldėjimui gali būti skirta

$$440$$

gintariukų, tada pirmasis daugiausiai paveldėjęs jų būtų paveldėjęs penktadalį arba

$$88,$$

antrasis galėtų būti paveldėjęs

$$58,$$

trečiasis tada gautų dešimtadalį, arba

$$44,$$

toliau ketvirtasis, penktasis, šeštasis, septintasis ir aštuntasis galėtų būti paveldėję po

$$42$$

gintariukus kiekvienas, galiausiai kukliausiai paveldėjęs devintasis brolis jų būtų paveldėjęs

$$40$$

gintariukų, arba vieną vienuoliktadalį.

Iš tikrųjų, dabar „bendras balansas sueina“, nes

$$88 + 58 + 44 + (42 +42 + 42 +42 +42) + 40 =$$
$$= 132 + 58 + 210 + 40 = 190 +210 + 40 = 440.$$

Ats.: Buvo 9 broliai.

10. Jei natūraliajam

$$x$$

skaičius

$$x^2 + x + 1$$

dalijasi iš

$$9,$$

tai užrašę

$$x = 9n + r\,,\ \ 0 \le r \le 8,$$

mes turėtume, kad

$$(9n + r)^2 + (9n + r) + 1 = 81n^2 + 18nr + r^2 + 9n + r + 1 =$$

$$= 9(9n^2 + 2nr + n) + r^2 + r + 1$$

dalijasi iš

$$9.$$

Taigi tada ir

$$r^2 + r + 1$$

būtinai privalėtų dalytis iš

$$9,$$

kai

$r = 0,1,2,3,4,5,6,7,8.$

Tačiau mūsų konkrečiu atveju nė vienas iš skaičių

$$0^2 + 0 + 1,$$

$$1^2 + 1 + 1,$$

$$2^2 + 2 + 1,$$

$$3^2 + 3 + 1,$$

$$4^2 + 4 + 1,$$

$$5^2 + 5 + 1,$$

$$6^2 + 6 + 1,$$

$$7^2 + 7 + 1,$$

$$8^2 + 8 + 1,$$

arba nė vienas iš

1, 3, 7, 13, 21, 31, 43, 57 ir 73

iš

9

nesidalija.

Ats.: Tikrai, ir mes tai ką tik įrodėme, kad skaičius

$$x^2 + x + 1$$

niekaip negali dalytis be liekanos iš 9, jeigu tik x yra natūralusis skaičius.

PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Remsimės pirmame pavyzdyje gautomis S_n išraiškomis. Gausime:

$$(x+y)^5-x^5-y^5=p_1^5-(p_1^5-5p_1^3p_2+5p_1p_2^2)=$$
$$=5p_1^3p_2-5p_1p_2^2=5p_1p_2(p_1^2-p_2)=$$
$$=5xy(x+y)((x+y)^2-xy)=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2).$$

Taigi tapatybė įrodyta.

2. Remdamiesi šeštame pavyzdyje gautomis S_n išraiškomis, kai $p_1=0$, abi įrodomos tapatybės puses išreikškime pagrindiniais simetriniais daugianariais. Gausime:

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{S_7}{7}=\frac{7p_2^2p_3}{7}=p_2^2p_3,$$

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=\frac{S_5}{5}\cdot\frac{S_2}{2}=\frac{-5p_2p_3}{5}\cdot\frac{-2p_2}{2}=p_2^2p_3.$$

Vadinasi,

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$

kai $a+b+c=0.$

3. Pasinaudoję pirmame pavyzdyje gautomis S_n išraiškomis ir formule $p_2=\frac{1}{4}(p_1^2-t)$, $t\geq 0$, gauname:

$$a^4+b^4-a^3b-ab^3=S_4-p_2\cdot S_2=$$
$$=p_1^4-4p_1^2\cdot p_2+2p_2^2-p_2(p_1^2-2p_2)=p_1^4-5p_1^2p_2+4p_2^2=$$

$$= p_1^4 - 5p_1^2 \cdot \frac{1}{4}(p_1^2 - t) + 4 \cdot \frac{1}{16}(p_1^2 - t)^2 =$$

$$= p_1^4 - \frac{5}{4}p_1^4 + \frac{5}{4}p_1^2 t + \frac{1}{4}p_1^4 - \frac{1}{2}p_1^2 t + \frac{1}{4}t^2 = \frac{3}{4}p_1^2 t + \frac{1}{4}t^2 \geq 0.$$

Taigi $a^4 + b^4 \geq a^3 b + ab^3$. Lygybė galima tik tada, kai $a = b$.

4. Kadangi $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, tai įrodomąją nelygybę galima užrašyti taip:

$$-\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \leq ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2,$$

t. y.

$$-\frac{1}{2}S_2 \leq p_2 \leq S_2.$$

Remdamiesi formule $S_2 = p_1^2 - 2p_2$ (žr. 6 pvz.), gauname:

$$S_2 \geq -2p_2 \Rightarrow p_2 \geq -\frac{1}{2}S_2.$$

Kad $S_2 \geq p_2$, įrodėme 9-to pavyzdžio 1-me punkte.

5. Nagrinėdami skirtumą, gauname:

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) - 6abc =$$
$$= ab(a+b+c-c) + bc(a+b+c-a) + ac(a+b+c-b) - 6abc =$$
$$= ab(p_1 - c) + bc(p_1 - a) + ac(p_1 - b) - 6abc =$$
$$= p_1(ab + bc + ac) - 9abc = p_1 \cdot p_2 - 9p_3 \geq 0,$$

nes $p_1 \cdot p_2 \geq 9p_3$ (žr. 9 pvz.).

Taigi $ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) \geq 6abc$. Lygybė galima tik tada, kai $a = b = c$.

6. Reiškinį $S(x, y)$ išreiškę pagrindiniais simetriniais daugianariais ir pasinaudoję lygybe $x + y = a$, gauname:

$$S(x, y) = xy(x-y)^2 = xy((x+y)^2 - 4xy) = p_2(p_1^2 - 4p_2) =$$

$$= a^2 p_2 - 4p_2^2 = -4\left(p_2^2 - \frac{a^2 p_2}{4}\right) =$$

$$= -4\left(\left(p_2 - \frac{a^2}{8}\right)^2 - \frac{a^4}{64}\right) = -4\left(p_2 - \frac{a^2}{8}\right)^2 + \frac{a^4}{16} \leq \frac{a^4}{16}.$$

Taigi didžiausia reiškinio $S(x, y)$ reikšmė, kai $x + y = a$, lygi $\frac{a^4}{16}$.

Ji įgyjama tik tada, kai $xy = \frac{a^2}{8}$, t. y. kai x ir y yra kvadratinės lygties $z^2 - az + \frac{a^2}{8} = 0$ sprendiniai.

Ats.: $\frac{a^4}{16}$.

7. Kadangi $p_2 = 1$, tai

$$S(x, y, z) = \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} = \frac{x+y+z}{xyz} = \frac{p_1}{p_3} = \frac{p_1 \cdot p_2}{p_3} \geq \frac{9p_3}{p_3} = 9$$

(pasinaudojome nelygybe $p_1 p_2 \geq 9p_3$).

Matome, kad reiškinys $S(x, y, z)$ mažiausią reikšmę, lygią 9, įgyja tik tada, kai $x = y = z$, t. y. kai $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ats.: 9.

8. Remdamiesi 9-me pavyzdyje įrodytomis nelygybėmis $p_3 \leq \frac{1}{9} p_1 p_2$ ir $p_2 \leq \frac{1}{3} p_1^2$, gauname:

$$S(x, y, z) = (1+x)(1+y)(1+z) = 1 + (x+y+z) + (xy + xz + yz) +$$

$$+ xyz = 1 + p_1 + p_2 + p_3 = 2 + p_2 + p_3 \leq 2 + p_2 + \frac{1}{9} p_1 p_2 =$$

$$= 2 + p_2 + \frac{1}{9} p_2 = 2 + \frac{10}{9} p_2 \leq 2 + \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{3} p_1^2 = 2 + \frac{10}{27} = \frac{64}{27}.$$

Taigi didžiausią reikšmę, kai $x + y + z = 1$ ir $x > 0, y > 0, z > 0,$

lygią $\frac{64}{27}$, reiškinys $(1+x)(1+y)(1+z)$ įgyja tik tada, kai $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Ats.: $\frac{64}{27}$.

9. Lygtį užrašę pagrindiniais simetriniais daugianariais gauname:

$$p_1 = S_2 - p_2 = p_1^2 - 3p_2 \Rightarrow p_1^2 - p_1 = 3p_2.$$

Pasinaudoję nelygybe $p_2 \le \frac{1}{4}p_1^2$, gauname:

$$p_1^2 - p_1 = 3p_2 \le 3\cdot\frac{1}{4}p_1^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}p_1^2 - p_1 \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p_1(p_1-4) \le 0.$$

Pastarosios nelygybės sprendiniai sudaro intervalą [0; 4].

Kadangi p_1 yra sveikasis skaičius, tai p_1 gali įgyti tik šias reikšmes: 0, 1, 2, 3, 4.

Jei $p_1 = 0$, tai $p_2 = 0$;

jei $p_1 = 1$, tai $p_2 = 0$;

jei $p_1 = 2$, tai $p_2 = \frac{2}{3} \notin Z$;

jei $p_1 = 3$, tai $p_2 = 2$;

jei $p_1 = 4$, tai $p_2 = 4$.

Taigi lygties

$$x + y = x^2 - xy + y^2$$

sveikuosius sprendinius rasime išsprendę (sveikaisiais skaičiais) šias lygčių sistemas:

$$\begin{cases} x+y=0, \\ xy=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=1, \\ xy=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2; \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} x+y=4, \\ xy=4. \end{cases}$$

Gausime tokias sveikųjų skaičių *x* ir *y* poras (*x*; *y*):

(0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 2), (2; 1), (2; 2).

Ats.: (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 2), (2; 1), (2; 2).

10. Pastebėję, kad $x=-1$ yra lygties sprendinys, daugianarį

$$4x^5-21x^4+17x^3+17x^2-21x+4$$

dalykime kampučiu iš $x+1$:

$$
\begin{array}{l|l}
-\,4x^5-21x^4+17x^3+17x^2-21x+4 & x+1 \\ \cline{2-2}
\quad 4x^5+4x^4 & 4x^4-25x^3+42x^2-25x+4 \\ \cline{1-1}
\qquad -\,-25x^4+17x^3 & \\
\qquad\quad -25x^4-25x^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad -\,42x^3+17x^2 & \\
\qquad\qquad\quad 42x^3+42x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad -\,-25x^2-21x & \\
\qquad\qquad\qquad\quad -25x^2-25x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\qquad -\,4x+4 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 4x+4 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Taigi $4x^5-21x^4+17x^3+17x^2-21x+4=$
$=(x+1)(4x^4-25x^3+42x^2-25x+4)$.

Vadinasi, nagrinėjamoji lygtis išskaidoma į dvi lygtis: $x+1=0$ ir $4x^4-25x^3+42x^2-25x+4=0.$

Pirmosios lygties sprendinys yra –1 (jį buvome atspėję!), o lygtį $4x^4-25x^3+42x^2-25x+4=0$ (padaliję iš x^2), pertvarkykime taip:

$$4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-25\left(x+\frac{1}{x}\right)+42=0, \text{ t. y.}$$

$$4(p^2-2)-25p+42=4p^2-25p+34=0;$$

čia $p = x + \dfrac{1}{x}$.

Iš pastarosios lygties gauname, kad $p = 2$ arba $p = \dfrac{17}{4}$.

Toliau sprendžiame lygtis $x + \dfrac{1}{x} = 2$ ir $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{17}{4}$, t. y. lygtis $x^2 - 2x + 1 = 0$ ir $4x^2 - 17x + 4 = 0$.

Pirmoji lygtis turi vieną sprendinį – skaičių 1, o antrosios lygties sprendiniai yra $\dfrac{1}{4}$ ir 4. Vadinasi, nagrinėjamoji lygtis turi 4 sprendinius: –1; $\dfrac{1}{4}$; 1 ir 4.

Ats.: –1; $\dfrac{1}{4}$, 1, 4.

ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. $x(3a-1) < 2(1+2a)$.

Kai $3a - 1 > 0$, t. y. $a > \dfrac{1}{3}$, tai $x < \dfrac{2(1+2a)}{3a-1}$;

kai $a < \dfrac{1}{3}$, tai $x > \dfrac{2(1+2a)}{3a-1}$;

kai $a = \dfrac{1}{3}$, gauname nelygybę $x \cdot 0 < 2\left(1 + \dfrac{2}{3}\right)$, $0 < \dfrac{10}{3}$, kuri teisinga su bet kuria x reikšme.

Ats.: $x > \dfrac{2(1+2a)}{3a-1}$, kai $a < \dfrac{1}{3}$;

$x \in R$, kai $a = \dfrac{1}{3}$;

$x < \dfrac{2(1+2a)}{3a-1}$, kai $a > \dfrac{1}{3}$.

2. Kai $a=0$, gauname tiesinę nelygybę $-2x+3<0$, iš kurios gauname, kad $x>1{,}5$. Tarę, kad $a\neq 0$, raskime kvadratinio trinario diskriminantą

$\frac{1}{4}D=(a+1)^2-a(a+3)=a^2+2a+1-a^2-3a=1-a$ ir jo šaknis:

$$x_1=\frac{a+1-\sqrt{1-a}}{a},\qquad x_2=\frac{a+1+\sqrt{1-a}}{a}.$$

Toliau nagrinėkime tris atvejus: $D>0$, $D=0$ ir $D<0$.

1. Tarkime, kad $D>0$, taigi $1-a>0$; iš čia $a<1$.
Kai $0<a<1$, tai $x_1<x_2$. Tuomet

$$\frac{1+a-\sqrt{1-a}}{a}<x<\frac{1+a+\sqrt{1-a}}{a}.$$

Kai $a<0$, tai $x_2<x_1$. Tuomet

$$x<\frac{1+a+\sqrt{1-a}}{a}\ \text{arba}\ x>\frac{1+a-\sqrt{1-a}}{a}.$$

2. Tarkime, kad $D=0$, taigi $a=1$. Tuomet gauname nelygybę $x^2-4x+4<0$, kuri neturi sprendinių.

3. Tarkime, kad $D<0$, taigi $a>1$. Tuomet nelygybė sprendinių neturi.

Ats.: $x<\frac{1+a+\sqrt{1-a}}{a}$ arba $x>\frac{1+a-\sqrt{1-a}}{a}$, kai $a<0$;
$x>1{,}5$, kai $a=0$;

$$\frac{1+a-\sqrt{1-a}}{a}<x<\frac{1+a+\sqrt{1-a}}{a},\ \text{kai}\ 0<a<1;$$

sprendinių nėra, kai $a\geq 1$.

3. Aišku, kad $a\neq -1$ ir $a\neq 1$.

$$\frac{3x+4}{a^2-1}-\frac{2x+1}{a-1}\leq\frac{x}{a+1}\Leftrightarrow\frac{3x+4-(2x+1)(a+1)-x(a-1)}{(a-1)(a+1)}\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2x-3ax+3-a}{(a-1)(a+1)}\leq 0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(2-3a)+3-a}{(a-1)(a+1)} \le 0.$$

Išnagrinėkime du atvejus:

$$(a-1)(a+1) > 0 \text{ ir } (a-1)(a+1) < 0.$$

Pirmuoju atveju $a < -1$ arba $a > 1$; antruoju atveju $-1 < a < 1$.

Kai $a \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$, tai

$$x(2-3a)+3-a \le 0.$$

Iš čia

$$x(2-3a) \le a-3.$$

Kai $2-3a > 0$, tai $a < \frac{2}{3}$. Įvertinę tai, kad $a \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$, gauname $a < -1$. Tuomet

$$x \le \frac{a-3}{2-3a}.$$

Kai $2-3a < 0$, tai $a > \frac{2}{3}$. Įvertinę tai, kad

$a \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$, gauname $a > 1$. Tuomet $x \ge \dfrac{a-3}{2-3a}$.

Kai $-1 < a < 1$, tai $x(2-3a) \ge a-3$.

Kai $-1 < a < \frac{2}{3}$, tai $x \ge \dfrac{a-3}{2-3a}$; kai $\frac{2}{3} < a < 1$, tai $x \le \dfrac{a-3}{2-3a}$.

Kai $a = \frac{2}{3}$, tai iš $x(2-3a) \ge a-3$ gauname nelygybę $x \cdot 0 \ge \frac{2}{3} - 3$, kuri yra teisinga su bet kuriuo realiuoju skaičiumi *x*.

Ats.: $x \in R$, kai $a = \frac{2}{3}$;

$$x \ge \frac{a-3}{2-3a}, \text{ kai } a \in \left(-1; \frac{2}{3}\right) \cup (1;+\infty);$$

$$x \le \frac{a-3}{2-3a}, \text{ kai } a \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right).$$

4. $\dfrac{2ax+5}{2a+6} > \dfrac{x}{a+3} + \dfrac{2a-1}{2a-6} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2ax}{2(a+3)} - \frac{x}{a+3} > \frac{2a-1}{2(a-3)} - \frac{5}{2(a+3)} \Leftrightarrow \frac{x(a-1)}{a+3} > \frac{a^2+6}{(a-3)(a+3)}.$$

Kai $\dfrac{a-1}{a+3} > 0$, taigi $a \in (-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$, tai $x > \dfrac{a^2+6}{(a-3)(a-1)}$.

Kai $\dfrac{a-1}{a+3} < 0$, taigi $a \in (-3;1)$, tai $x < \dfrac{a^2+6}{(a-3)(a-1)}$.

Kai $a=1$, gauname nelygybę $x \cdot 0 > \dfrac{7}{(1-3)(1+3)} = -\dfrac{7}{8}$, kuri teisinga su bet kuriais realiaisiais *x*.

Ats.: $x \in R$, kai $a=1$;

$x > \dfrac{a^2+6}{(a-3)(a-1)}$, kai $a \in (-\infty; -3)\cup(1; 3)\cup(3; +\infty)$;

$x < \dfrac{a^2+6}{(a-3)(a-1)}$, kai $a \in (-3; 1)$.

5. Aišku, kad negali būti $a = 0$.

$$\frac{x^2}{a} + 17a \ge 8x \Leftrightarrow \frac{x^2 - 8ax + 17a^2}{a} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 8ax + 17a^2 \ge 0, \\ a > 0, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x^2 - 8ax + 17a^2 \le 0, \\ a < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Kadangi kvadratinio trinario $x^2 - 8ax + 17a^2$ diskriminantas $D = 16a^2 - 17a^2 = -a^2$ yra neigiamas, tai pirmajai šios visumos sistemai tinka bet kurie *x*, o antroji – sprendinių neturi.

Ats: Sprendinių nėra, kai $a < 0$; $x \in R$, kai $a > 0$.

6. $$\frac{1}{x}+ax>1 \Leftrightarrow \frac{ax^2-x+1}{x}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} ax^2-x+1>0, \\ x>0, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} ax^2-x+1<0, \\ x<0. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Kai $a=0,$ turime tokias sistemas:

$$\begin{cases} -x+1>0, \\ x>0 \end{cases} \text{ ir } \begin{cases} -x+1<0, \\ x<0. \end{cases}$$

Iš pirmosios gauname $0<x<1,$ o antroji sprendinių neturi.

Kvadratinio trinario $ax^2-x+1,$ $a\neq 0,$ diskriminantas $D=1-4a$ yra neigiamas, kai $a>\frac{1}{4}.$ Šiuo atveju nelygybė $ax^2-x+1>0$ galioja su visais realiaisiais skaičiais x, o nelygybė $ax^2-x+1<0$ sprendinių neturi. Taigi atveju $a>\frac{1}{4}$ (1) sistemos sprendinių aibė yra intervalas $(0;+\infty),$ o (2) sistema sprendinių neturi

Kai $a\leq\frac{1}{4},$ tai $D\geq 0$ ir kvadratinio trinario $ax^2-x+1,$ $a\neq 0,$ šaknys yra

$$x_1=\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a} \text{ ir } x_2=\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a}.$$

Nelygybę $\frac{ax^2-x+1}{x}>0,$ $a\leq\frac{1}{4},$ $a\neq 0,$ spręsime, išskirdami tokius atvejus:

1) $D>0,$ $0<a<\frac{1}{4};$

2) $D>0,$ $a<0;$

3) $D=0.$

Pirmuoju atveju $x_1<x_2;$ be to, $x_1>0$ ir $x_2>0.$ Todėl (1) sistemos sprendinių aibė yra

$$\left(0;\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a};+\infty\right),$$

o (2) sistema sprendinių neturi.

Antruoju atveju $x_2 < x_1$; be to, $x_2 < 0$ ir $x_1 > 0$. Todėl (1) sistemos sprendinių aibė yra intervalas

$$\left(0;\ \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}\right),$$

o (2) sistemos sprendinių aibė yra intervalas

$$\left(-\infty;\ \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a}\right).$$

Kai $D=0$, tai $a=\frac{1}{4}$. Šiuo atveju $x_1 = x_2 = 2$. Todėl (2) sistema sprendinių neturi, o (1) sistemos sprendinių aibė yra

$$(0;2)\cup(2;+\infty).$$

Ats: $\left(-\infty;\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a}\right)\cup\left(0;\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}\right)$, kai $a<0$;

(0; 1), kai $a=0$;

$\left(0;\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a};+\infty\right)$, kai $0<a<\frac{1}{4}$;

$(0;2)\cup(2;+\infty)$, kai $a=\frac{1}{4}$;

$(0;+\infty)$, kai $a>\frac{1}{4}$.

7. $\sqrt{16x-a} < x+3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}16x-a\ge 0,\\ x+3>0,\\ 16x-a<(x+3)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\le 16x,\\ x>-3,\\ a>-x^2+10x-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\le 16x,\\ x>-3,\\ a>16-(x-5)^2.\end{cases}$$

Toliau sistemą sprendžiame geometriškai (1 pav.). Pirmiausia išsprendžiame lygtį

$$a = -x^2 + 10x - 9 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 9 + a = 0$$

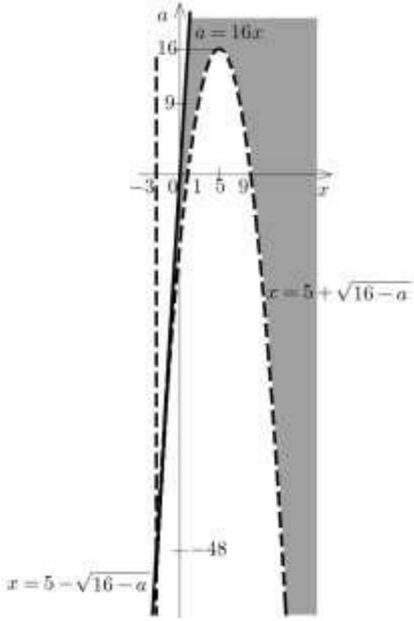
ir randame trinario šaknis:

$$x_1 = 5 - \sqrt{16 - a}, \quad x_2 = 5 + \sqrt{16 - a}.$$

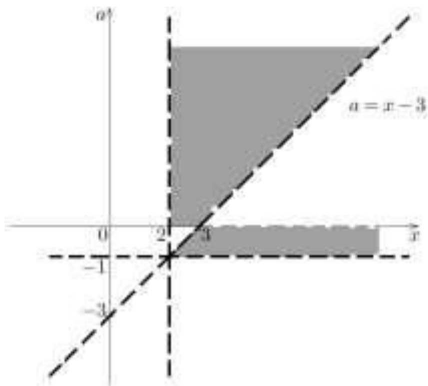
Plokštumų dalys, kurių taškų koordinatės tinka sistemai, nuspalvintos pilkai.

Ats.: $x > 5 + \sqrt{16 - a}$, kai $a < -48$; $x \geq \dfrac{a}{16}$, kai $a > 16$; $x \geq 1, \quad x \neq 5$, kai $a = 16$;

$\dfrac{a}{16} \leq x < 5 - \sqrt{16 - a}$ arba $x > 5 + \sqrt{16 - a}$, kai $-48 \leq a < 16$.



1 pav.



2 pav.

8. Kadangi $a + 1 > 0$ ir $a + 1 \neq 0$, tai $a > -1, \ a \neq 0$.

$$\log_{a+1}(x-2)<1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2>0,\\ a+1>1,\\ x-2<a+1,\end{cases}\\ \begin{cases}x-2>0,\\ 0<a+1<1,\\ x-2>a+1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>2,\\ a>0,\\ a>x-3;\end{cases}\\ \begin{cases}x>2,\\ -1<a<0,\\ a<x-3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Toliau sistemas sprendžiame geometriškai (2 pav.). Plokštumų dalys, kurių taškų koordinatės tinka sistemoms, nuspalvintos pilkai.

Ats.: $2<x<a+3$, kai $a>0$;
$x>a+3$, kai $-1<a<0$.

9. $$\sqrt{4x+a} > x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1\le 0,\\ 4x+a\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x-1>0,\\ 4x+a>(x-1)^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 1,\\ a\ge -4x;\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}x>1,\\ a>(x-3)^2-8.\end{cases} & (2)\end{array}\right.$$

Toliau sprendžiame geometriškai. Sistemos

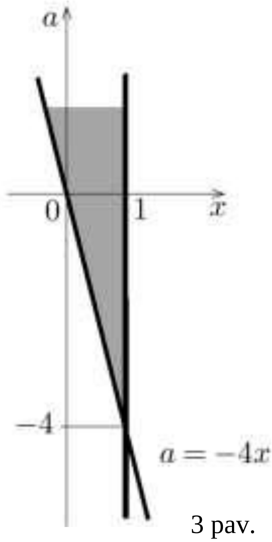
$$\begin{cases}x\le 1,\\ a\ge -4x\end{cases}$$

sprendiniai yra taškai, esantys pilkai nuspalvintoje plokštumos dalyje (3 pav.). Todėl (1) sistemos sprendiniai yra tokie: $-\dfrac{a}{4}\le x\le 1$, kai $a\ge -4$; sprendinių nėra, kai $a<-4$. Nagrinėdami antrą sistemą, pirmiausia išsprendžiame lygtį

$$4x+a=(x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-6x+1-a=0$$

ir randame trinario šaknis:

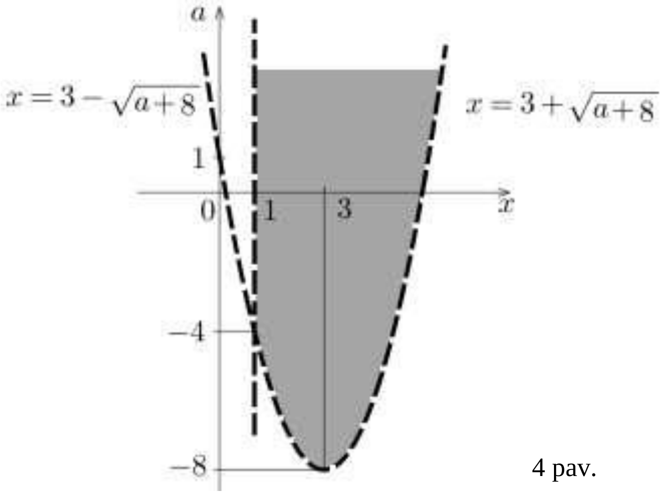
$$x_1=3-\sqrt{8+a},\quad x_2=3+\sqrt{8+a}.$$



3 pav.

Sistemos $\begin{cases}x>1,\\ a>(x-3)^2-8\end{cases}$

sprendiniai yra taškai, esantys pilkai nuspalvintoje dalyje (4 pav.).



4 pav.

Taigi (2) sistemos sprendiniai yra tokie: $3-\sqrt{8+a}<x<3+\sqrt{8+a}$, kai $-8<a<-4$; $1<x<3+\sqrt{8+a}$, kai $a\geq -4$. Atsakymą gauname, sujungę (1) ir (2) sistemos sprendinius.

Ats.: $3-\sqrt{8+a}<x<3+\sqrt{8+a}$, kai $-8<a<-4$; $-\frac{a}{4}\leq x<3+\sqrt{8+a}$, kai $a\geq -4$; nėra sprendinių, kai $a\leq -8$.

10. Nelygybė bus teisinga su visomis realiosiomis x reikšmėmis, kai $a+1>0$ ir diskriminantas $4(a-1)^2-4(a+1)(3a-3)\leq 0$. Taigi turime išspręsti nelygybių sistemą

$$\begin{cases} a+1>0, \\ a^2+a-2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-1, \\ a\leq -2 \quad \text{arba} \quad a\geq 1. \end{cases}$$

Iš čia gauname $a\geq 1$.

Ats.: $a\geq 1$.

SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Pažymėkime A – įvykį, kad, metus tris taisyklingus lošimo kauliukus, atsivertusių akučių suma bus lygi 16.

Kiekvienas iš trijų metamų lošimo kauliukų gali atsiversti bet kuria puse iš šešių galimų. Todėl šio bandymo vienodai galimų baigčių aibę sudaro $6^3 = 216$ elementų. Trijų kauliukų atsivertusių akučių suma bus lygi 16 tik šiais 6 atvejais:

$$16 = 6+6+4 = 6+4+6 = 4+6+6 =$$
$$= 6+5+5 = 5+6+5 = 5+5+6;$$

čia pirmasis dėmuo – galimas pirmo kauliuko, antrasis dėmuo – antrojo kauliuko, trečiasis dėmuo – trečiojo kauliuko atsivertusių akučių skaičius. Pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}.$$

Ats.: $\frac{1}{36}$.

2. Tegu A yra įvykis, kad, iš dėžės atsitiktinai traukiant 3 rutulius, bus ištrauktas 1 baltas ir 2 juodi rutuliai. Šitokio bandymo vienodai galimų baigčių yra

$$C_9^3 = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 84$$

(derinių iš 9 elementų po 3 elementus skaičius). Baigčių, palankių įvykiui A, yra $4\cdot C_5^2 = \ = 4\cdot 10 = 40$, nes vienas baltas rutulys gali būti pasirinktas iš keturių, o 2 juodi – iš penkių. Todėl

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}.$$

Ats.: $\frac{10}{21}$.

3. Tegu A yra įvykis, kad pirmojo krepšininko baudos metimas taiklus, o B – įvykis, kad antrojo krepšininko baudos metimas taiklus. Šių įvykių tikimybės žinomos: $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}7$.

Pažymėkime C – įvykį, kad vienas krepšininkas pataikys, o kitas – nepataikys. Kad įvyktų C, pirmasis krepšininkas turi pataikyti, o antrasis – nepataikyti, arba pirmasis – nepataikyti, o antrasis – pataikyti. Naudodamiesi įvykių veiksmais, galime užrašyti:

$$C = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B).$$

Tuomet

$$P(C) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) =$$
$$= 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}38.$$

Ats.: $0{,}38$.

4. Metus tris lošimo kauliukus, 6 akutėmis gali neatsiversti nė vienas kauliukas, vienas, du arba visi trys. Taigi galimos atsitiktinio dydžio X reikšmės yra 0, 1, 2, 3. Apskaičiavę šių reikšmių įgijimo tikimybes, gausime tokią atsitiktinio dydžio X skirstinio lentelę:

m	0	1	2	3
$P(X = m)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Apskaičiuokime atsitiktinio dydžio X vidurkį ir dispersiją:

$$EX = 0 \cdot \frac{125}{216} + 1 \cdot \frac{75}{216} + 2 \cdot \frac{15}{216} + 3 \cdot \frac{1}{216} = \frac{108}{216} = \frac{1}{2}.$$

$$DX = E(X^2) - (EX)^2;$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{125}{216} + 1^2 \cdot \frac{75}{216} + 2^2 \cdot \frac{15}{216} + 3^2 \cdot \frac{1}{216} = \frac{144}{216} = \frac{2}{3},$$

$$DX = \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{12}.$$

Ats.:

m	0	1	2	3
$P(X = m)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

$$EX = \frac{1}{2}, \quad DX = \frac{5}{12}.$$

5. Tikimybes p_1 ir p_2 rasime išsprendę lygčių sistemą

$$\begin{cases} -2p_1 + p_2 + 0,2 = 0, \\ p_1 + p_2 + 0,1 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2p_1 + p_2 = -0,2, \\ p_1 + p_2 = 0,9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_1 = \frac{11}{30},\ p_2 = \frac{8}{15}.$$

Tuomet

$$DX = E(X^2) = (-2)^2 \cdot \frac{11}{30} + 1^2 \cdot \frac{8}{15} + 2^2 \cdot 0,1 = \frac{12}{5} = 2,4.$$

Ats.: $p_1 = \frac{11}{30}$, $p_2 = \frac{8}{15}$, $DX = 2,4.$

6. Papildykime skirstinio lentelę vienu stulpeliu – dydžio *X* reikšmių tikimybėmis ir viena eilute – dydžio *Y* reikšmių tikimybėmis:

X \ Y	1	2	3	p_i
1	0,1	0,1	0,1	0,3
2	0,1	0,1	0,1	0,3
3	0,1	0,1	0,2	0,4
q_j	0,3	0,3	0,4	**1**

a) Kadangi, pavyzdžiui, $p_1 \cdot q_1 = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09 \neq 0,1 = p_{11}$, tai atsitiktiniai dydžiai *X* ir *Y* yra priklausomi.

b) Atkreipkime dėmesį, kad abiejų atsitiktinių dydžių skirstiniai vienodi:

m	1	2	3
$P(X = m)$	0,3	0,3	0,4

m	1	2	3
$P(Y = m)$	0,3	0,3	0,4

Todėl $EX = EY = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,4 = 2,1$,

$$E(X^2) = E(Y^2) = 1^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}3 + 3^2 \cdot 0{,}4 = 5{,}1,$$

$$DX = DY = 5{,}1 - 2{,}1^2 = 0{,}69.$$

Ats.: a) priklausomi; b) $EX = EY = 2{,}1$, $DX = DY = 0{,}69$.

7. Papildykime skirstinio lentelę vienu stulpeliu – dydžio X reikšmių tikimybėmis ir viena eilute – dydžio Y reikšmių tikimybėmis:

$X \backslash Y$	-1	0	1	p_i
1	$0{,}2$	$0{,}1$	p_1	$0{,}3 + p_1$
2	p_2	$0{,}1$	$0{,}1$	$0{,}2 + p_2$
q_j	$0{,}2 + p_2$	$0{,}2$	$0{,}1 + p_1$	**1**

Iš dvimačio atsitiktinio dydžio (X,Y) skirstinio savybių ir iš lygybės $EX = 1{,}6$ išplaukia, kad nežinomos tikimybės turi tenkinti lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 0{,}5 + p_1 + p_2 = 1, \\ 0{,}3 + p_1 + 2(0{,}2 + p_2) = 1{,}6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 + p_2 = 0{,}5, \\ p_1 + 2p_2 = 0{,}9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_1 = 0{,}1, \quad p_2 = 0{,}4.$$

Tuomet

$$EY = (-1)\cdot(0{,}2 + p_2) + 0\cdot 0{,}2 + 1\cdot(0{,}1 + p_1) =$$
$$= -0{,}6 + 0{,}2 = -0{,}4.$$

Ats.: $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}4$, $EY = -0{,}4$.

8. Apskaičiuokime įvykių $\{e_1\}$, $\{e_2, e_3, e_4\}$ ir $\{e_5, e_6\}$ tikimybes (jos ir yra atsitiktinio dydžio (X, Y) atitinkamų reikšmių $(1, 2)$, $(1, 1)$ ir $(3, 2)$ tikimybės):

$$P((X,Y) = (1, 2)) = P(X = 1, Y = 2) = P(\{e_1\}) = \frac{1}{6},$$

$$P((X,Y) = (1, 1)) = P(X = 1, Y = 1) = P(\{e_2, e_3, e_4\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$P((X,Y)=(3,\,2))=P(X=3,Y=2)=P(\{e_5,e_6\})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Sudarykime atsitiktinio dydžio (X,Y) skirstinio lentelę:

$X \backslash Y$	1	2
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
3	0	$\frac{1}{3}$

Atsitiktinių dydžių priklausomumą nustatysime papildę lentelę dydžio *X* ir dydžio *Y* skirstiniais (paskutinysis stulpelis ir paskutinioji eilutė):

$X \backslash Y$	1	2	p_i
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
3	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
q_j	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	**1**

Kadangi, pavyzdžiui, $p_1\cdot q_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\neq\frac{1}{2}=p_{11}$, tai atsitiktiniai dydžiai *X* ir *Y* yra priklausomi.

Ats.:

$X \backslash Y$	1	2
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
3	0	$\frac{1}{3}$

Priklausomi

9. Pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą apskaičiuojame atsitiktinio dydžio X reikšmių 2 ir 3 tikimybes $P(X=2)=\frac{2}{3}$, $P(X=3)=\frac{1}{3}$, bei dydžio Y reikšmių 2 ir 3 sąlygines tikimybes (priklausomai nuo dydžio X įgytų reikšmių):

$$P(Y=2\,|\,X=2)=\frac{1}{2},$$

$$P(Y=3\,|\,X=2)=\frac{1}{2},$$

$$P(Y=2\,|\,X=3)=\frac{1}{4},$$

$$P(Y=3\,|\,X=3)=\frac{3}{4}.$$

Tuomet (pagal (2) formulę):

$$p_{11}=P(X=2,Y=2)=P(X=2)\cdot P(Y=2\,|\,X=2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3},$$

$$p_{12}=P(X=2,Y=3)=P(X=2)\cdot P(Y=3\,|\,X=2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3},$$

$$p_{21}=P(X=3,Y=2)=P(X=3)\cdot P(Y=2\,|\,X=3)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12},$$

$$p_{22}=P(X=3,Y=3)=P(X=3)\cdot P(Y=3\,|\,X=3)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$$

a) Sudarome atsitiktinio dydžio (X,Y) skirstinio lentelę:

X \ Y	2	3
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

b) Iš skirstinio lentelės, sudėję eilučių tikimybes, gausime atsitiktinio dydžio X reikšmių tikimybes, o sudėję stulpelių tikimybes – dydžio Y reikšmių tikimybes:

$X \backslash Y$	2	3	p_i
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
q_j	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$	1

Taigi atsitiktinių dydžių X ir Y skirstiniai tokie:

m	2	3
$P(X=m)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

ir

m	2	3
$P(Y=m)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$

c) Atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra priklausomi, nes, pavyzdžiui, $p_1 \cdot q_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{18} \neq \frac{1}{3} = p_{11}$.

Ats.: a)

$X \backslash Y$	2	3
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

b)

m	2	3
$P(X=m)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

ir

m	2	3
$P(Y=m)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$

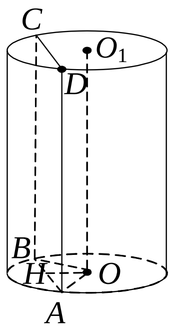
c) Priklausomi.

10. Naudodamiesi dviejų atsitiktinių dydžių nepriklausomumo sąlyga $p_{i\,j} = p_i \cdot q_j$, apskaičiuojame tikimybes $p_{i\,j}$ ir jomis užpildome dvimačio atsitiktinio dydžio (X, Y) skirstinio lentelę:

$X \backslash Y$	-2	2	p_i
–1	0,06	0,24	0,3
0	0,08	0,32	0,4
1	0,06	0,24	0,3
q_j	0,2	0,8	1

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Ritinį kertančioji plokštuma kerta jį sudaromosiomis *AD* ir *BC* (1 pav.). Gautasis pjūvis yra stačiakampis *ABCD*, jo kraštinė *AD* lygi ritinio sudaromajai $10\sqrt{3}$. Iš pagrindinio apskritimo centro *O* nubrėžiame statmenį *OH* į tiesę *AB*. Kadangi pagrindo apskritimo lankas *AB* lygus 60°, tai $\angle AOB = 60^\circ$, $\angle AOH = 30^\circ$. Atkarpa *OH* lygi atstumui nuo ritinio ašies iki kertančiosios plokštumos, t. y. $OH = 2$. Tada



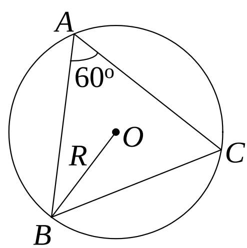
1 pav.

$$AH = OH\ \mathrm{tg}30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$AB = 2AH = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

ir pjūvio plotas $S = AB \cdot AD = 40$.

Ats.: 40.



2 pav.

2. Ritinio pagrindą sąlygoje duotos plokštumos kerta stygomis *AB* ir *AC*, be to, $\angle BAC = 60^\circ$ (2 pav.). Jei ritinio aukštinės ilgis h, tai iš uždavinio sąlygos seka, kad $AB = \dfrac{11}{h}$, $AC = \dfrac{13}{h}$.

Pagal kosinusų teoremą trikampiui ABC

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC =$$

$$= \left(\frac{11}{h}\right)^2 + \left(\frac{13}{h}\right)^2 - 2 \cdot \frac{11}{h} \cdot \frac{13}{h} \cdot \frac{1}{2} = \frac{147}{h^2}.$$

Taikydami sinusų teoremą trikampiui ABC gauname $\dfrac{BC}{\sin 60^\circ} = 2R$, čia R – ritinio pagrindo apskritimo spindulys. Taigi

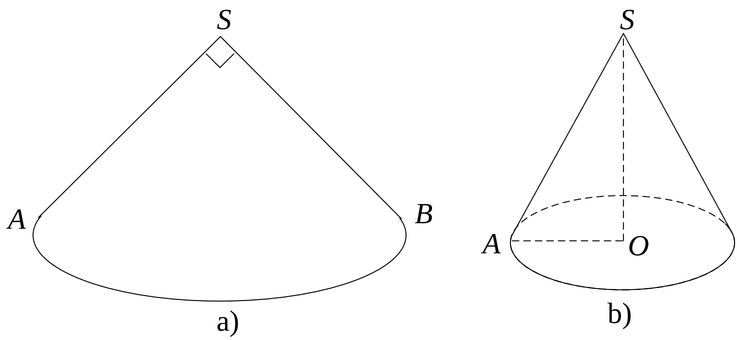
$$R = \frac{BC}{2\sin 60^\circ} = \frac{7}{h}.$$

Tuomet pagal (1) formulę

$$S = 2\pi \cdot \frac{7}{h} \cdot h = 14\pi.$$

Ats.: 14π.

3.



3 pav.

Sakykime, kad 3a pav. nubrėžta skritulio išpjova ASB yra duotojo kūgio išklotinė, $\angle ASB = 90^\circ$. Lanko AB ilgis lygus kūgio pagrindo apskritimo ilgiui, t. y. $2\pi R$, čia R – kūgio pagrindo spindulys. Kita vertus pagal apskritimo lanko ilgio formulę lanko

AB ilgis lygus $\frac{1}{4}\cdot 2\pi \cdot SA$. Iš lygybės $2\pi R = \frac{\pi}{2}\cdot SA$ gauname, kad $SA = 4R$. Iš stačiojo trikampio AOS (3b pav.) randame

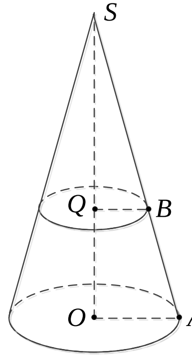
$$OS = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{15}R.$$

Taigi kūgio tūris

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \sqrt{15}R = \frac{\sqrt{15}}{3}\pi R^3.$$

Ats.: $\frac{\sqrt{15}}{3}\pi R^3.$

4. Sakykime, kad duotoji plokštuma kerta kūgio aukštinę SO taške Q, o kūgio sudaromąją SA – taške B (4 pav.). Pažymėkime $SB = x$, $BQ = y$, tuomet viršutinio kūgio šoninio paviršiaus plotas $S = \pi xy$. Viso kūgio šoninio paviršiaus plotas pagal (3) formulę lygus $\pi \cdot 2 \cdot 6 = 12\pi$, taigi pagal uždavinio sąlygą $\pi xy = \frac{1}{2}\cdot 12\pi$, arba $xy = 6$. Iš trikampių AOS ir BQS panašumo turime $\frac{6}{x} = \frac{2}{y}$, t. y. $x = 3y$. Iš



4 pav.

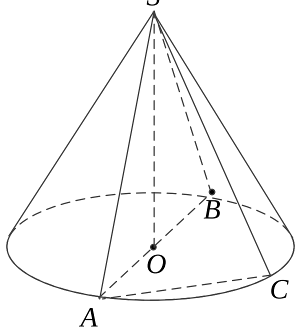
sistemos $xy = 6$, $x = 3y$ gauname, kad $y = \sqrt{2}$, $x = 3\sqrt{2}$. Iš trikampių AOS ir BQS randame $OS = \sqrt{AS^2 - AO^2} = 4\sqrt{2}$, $QS = \sqrt{BS^2 - BQ^2} = 4$, Taigi plokštuma dalija aukštinę į dalis $QS = 4$ ir $OQ = 4(\sqrt{2} - 1)$.

Ats.: 4 ir $4(\sqrt{2} - 1)$.

5. Kaip įrodyta, jei kūgio ašinio pjūvio plotas nėra didžiausias iš visų kūgio pjūvių plokštumomis, einančiomis per kūgio aukštinę, tai ašinio pjūvio ASB (5 pav.) kampas prie viršūnės yra bukasis. Pjūvio ASC plotas lygus $\frac{1}{2}AS^2 \sin\angle ASC$, jis įgyja didžiausią reikšmę, kai tiesės AS ir SC yra statmenosios ir $S_{ASC} = \frac{1}{2}l^2$. Kadangi ašinio pjūvio plotas $S_{ASB} = \frac{1}{2} AS \cdot SB \cdot \sin\angle ASB = = \frac{1}{2}l^2 \sin\angle ASB$, tai pagal uždavinio sąlygą

$$\frac{1}{2}l^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}l^2 \sin\angle ASB, \text{ t. y.}$$

$$\sin\angle ASB = \frac{1}{2}.$$



5 pav.

Kadangi ASB – bukasis kampas, kai $\angle ASB = 150^\circ$, tuomet

$$\angle SAO = 15^\circ, \quad AO = l\cos 15^\circ,$$

$$OS = l\sin 15^\circ$$

ir kūgio tūris

$$V = \frac{1}{3}\pi l^2 \cos^2 15^\circ \sin 15^\circ = \frac{\pi l^3}{6}\sin 30^\circ \cos 15^\circ = \frac{\pi l^3}{12}\cos 15^\circ.$$

Kadangi

$\cos 15^\circ =$

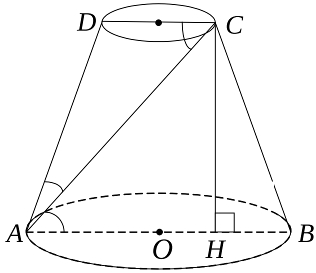
$$= \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{8}} = \frac{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

tai

$$V = \frac{\pi l^3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{48}.$$

Ats.: $\frac{\pi l^3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{48}$.

6. Nupjautinio kūgio ašinis pjūvis yra lygiašonė trapecija $ABCD$ (6 pav.), jos šoninės kraštinės lygios kūgio sudaromajai, t y. $AD = BC = 8$, $\angle DAB = 60^\circ$, o įstrižainė AC yra šio kampo pusiau-



6 pav.

kampinė. Nuleidę statmenį $\angle BCH = 30^\circ$, todėl $HB = 4$. Kadangi $\angle DCA = \angle CAB = \quad = \angle DAC$, tai trikampis ADC – lygiašonis ir $DC = AD = 8$, t. y. $r = 4$. Kadangi $HB = R - r$, tai $R = 8$. Taigi nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus plotas

$$S = \pi(8+4)\cdot 8 = 76\pi.$$

Ats.: 76π.

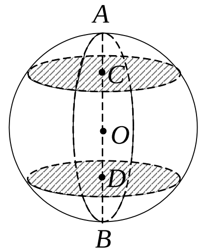
7. Sakykime, kad rutulio skersmuo AB taškais C ir D dalijamas santykiu $AC:CD:DB = 1:3:2$ (7 pav.). Jei $AB = 2R$, tai

$$AC = \frac{1}{6}AB = \frac{1}{3}R,\quad BD = \frac{1}{3}AB = \quad = \frac{2}{3}R.$$

Viršutinės ir apatinės rutulio nuopjovų šoniniai paviršiai S_1 ir S_2 pagal (9) formulę atitinkamai lygūs

$$S_1 = 2\pi R\cdot\frac{1}{3}R = \frac{2\pi R^2}{3},$$

$$S_2 = 2\pi R\cdot\frac{2}{3}R = \frac{4}{3}\pi R^2.$$



7 pav.

Tada rutulio sluoksnio šoninio paviršiaus plotas S lygus sferos paviršiaus ploto ir šių plotų skirtumui:

$$S = 4\pi R^2 - S_1 - S_2 = 2\pi R^2.$$

Taigi rutulio sluoksnio paviršiaus plotas yra lygus pusei sferos paviršiaus ploto.

Taikydami (10) formulę randame viršutinės ir apatinės rutulio nuopjovų tūrius V_1 ir V_2:

$$V_1 = \pi\left(\frac{R}{3}\right)^2\left(R - \frac{1}{3}\cdot\frac{R}{3}\right) = \frac{8\pi R^3}{81},$$

$$V_2 = \pi\left(\frac{2}{3}R\right)^2\left(R - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}R\right) = \frac{28\pi R^3}{81}.$$

Rutulio sluoksnio tūrį gauname iš rutulio tūrio atėmę šių nuopjovų tūrius:

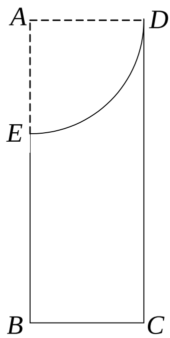
$$V = \frac{4}{3}\pi R^2 - V_1 - V_2 = \frac{8}{9}\pi R^3.$$

Kadangi $\frac{8}{9}\pi R^3 : \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}$, tai rutulio sluoksnio tūris sudaro $\frac{2}{3}$ rutulio tūrio.

Ats.: a) Rutulio sluoksnio paviršiaus plotas lygus pusei sferos ploto.

b) Rutulio sluoksnio tūris sudaro $\frac{2}{3}$ rutulio tūrio.

8. Nubrėžiame sąlygoje nurodytą skritulio ketvirtį, kurio centras – taškas *A*, ir jis stačiakampio *ABCD* kraštinę *AB* kerta taške *E* (8 pav.). Sukant apie tiesę *AB* stačiakampį *ABCD*, gauname ritinį, kurio aukštinė lygi 8, o pagrindo spindulys lygus 3. Sukant skritulio ketvirtį, gauname pusrutulį, kurio spindulys lygus 3. Taigi ieškomasis tūris *V* lygus ritinio tūrio V_1 ir pusrutulio tūrio V_2 skirtumui. Kadangi



8 pav.

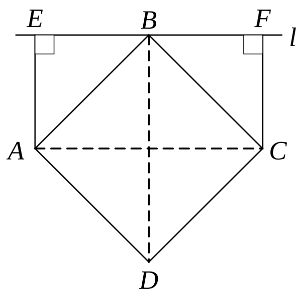
$$V_1 = \pi \cdot AD^2 \cdot AB = \pi \cdot 3^2 \cdot 8 = 72\pi,$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot AD^3 = 18\pi,$$

tai $V = V_1 - V_2 = 54\pi$.

Ats.: 54π.

9. Sakykime, kad tiesė *l* eina per kvadrato *ABCD* viršūnę *B* ir yra lygiagreti su jo įstrižaine *AC* (9 pav.). Nubrėžiame $AE \perp l$, $CF \perp l$. Kadangi tiesė *BD* irgi statmena tiesei *l*, tai keturkampiai *BDCF* ir *ADBE* yra stačiosios trapecijos. Ieškomasis sukinio tūris gaunamas iš dviejų nupjautinių kūgių, gautų sukant abi šias trapecijas, tūrių sumos atėmus dviejų kūgių, gautų sukant stačiuosius trikampius *ABE* ir *BCF*, tūrius. Nupjautinio kūgio, gauto sukant trapeciją *ADBE*, pagrindų spinduliai



9 pav.

$$DB = \sqrt{2}\,,\;\; AE = \frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

o aukštinė $EB = \frac{\sqrt{2}}{2}$, todėl jo tūris

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{12}\pi.$$

Nupjautinio kūgio, gauto sukant trapeciją *BDCF*, tūris yra toks pat.

Kūgio, gauto sukant trikampį *ABE*, pagrindo spindulys $AE = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

aukštinė $BE = \frac{\sqrt{2}}{2}$, taigi jo tūris $V_2 = \frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{12}$.

Toks pat yra ir kūgio, gauto sukant trikampį *BCF*, tūris. Taigi ieškomasis sukinio tūris $V = 2V_1 - 2V_2 = \sqrt{2}\pi$.

Ats.: $\sqrt{2}\pi$.

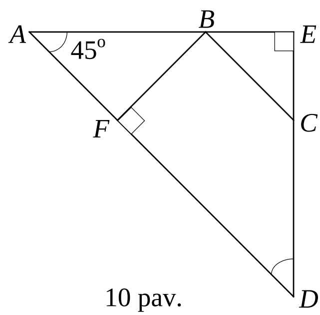
10. Duotosios trapecijos *ABCD* $AB = BC = CD = 1$, $\angle A = \angle D = 45^\circ$, o tiesės, kuriose yra trapecijos šoninės kraštinės, susikerta taške *E* (10 pav.). Kadangi $\angle A = \angle D = 45^\circ$, tai kampas *E* yra statusis, todėl kūno, gauto sukant trapeciją apie tiesę *CD* tūris yra lygus kūgių, gautų sukant stačiuosius trikampius *AED* ir *BEC* tūrių skirtumui. Nubrėžę $BF \perp AD$, turime

$$AF = AB\cos\angle A = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Taigi

$$AD = BC + 2AF = 1 + \sqrt{2}.$$

Iš lygiašonio stačiojo trikampio *ADE* turime $2AE^2 = AD^2$, t. y.



10 pav.

$$AE = ED = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Taigi sukant trikampį *ADE* gautojo kūgio pagrindo spindulys lygus $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, aukštinė taip pat lygi $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, todėl gautojo kūgio tūris

$$V_1=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3.$$

Sukant trikampį *BEC* gautojo kūgio aukštinė ir pagrindo spindulys lygūs $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, todėl jo tūris $V_2=\dfrac{1}{3}\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$. Taigi ieškomasis tūris

$$V=V_1-V_2=\frac{\pi}{3}\left(\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right)=\frac{5+3\sqrt{2}}{6}\pi.$$

Ats.: $\dfrac{5+3\sqrt{2}}{6}\pi.$

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

1	2	3	4
Liestinė – 12 cm Kirstinė – 18 cm	$\left[1,1,-2,-\dfrac{1}{2}\right]$	$S_{\text{didž.}}=18$, kai $x=81$, $S_{\text{maž.}}=\sqrt{162}$, kai $x=0$, $x=162$	p = 0,1, q = 0,1

Išleistose LJMM knygelėse buvo nagrinėtos tokios temos:

I KNYGA

I. J. Šinkūnas. *Kvadratinis trinaris.*
II. G. Stepanauskas. *Rekurenčiosios sekos.*
III. R. Kašuba. *Elementarinės matematikos uždavinių sprendimo metodai.*
IV. A.Skūpas. *Funkcija.*
V. V. Pekarskas. *Sveikoji ir trupmeninė skaičiaus dalis. Jų savybės.*
VI. P. Survila. *Kombinatorikos ir tikimybių skaičiavimo pradmenys.*
VII. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. *Grafai.*

II KNYGA

I. J. Šinkūnas, A. Urbonas. *Funkcija.*
II. E. Mazėtis. *Apskritimų geometrija. Įbrėžtiniai ir apibrėžtiniai daugiakampiai. Taisyklingieji daugiakampiai.*
III. B. Vasylienė. *Skaičiaus modulis algebros uždaviniuose.*
IV. J. Šinkūnas. *Figūrų panašumas. Talio teorema ir jos taikymai.*
V. D. Jurgaitis. *Matematinės indukcijos metodas.*
VI. A. Urbonas. *Lygčių, nelygybių bei jų sistemų ekvivalentumas.*
VII. B. Grigelionis. *Urnų schemos ir baigtinės Markovo grandinės.*
VIII. A. Juozapavičius, J. Šinkūnas. *Koordinačių sistemos. Žemėlapiai.*

III KNYGA

I. E. Stankus. *Skaičių dalumas.*
II. R. Skrabutėnas. *Grandininės trupmenos.*
III. V. Vitkus. *Vidurkiai.*
IV. E. Mazėtis. *Vektoriai.*
V. J. Šinkūnas. *Plokščių figūrų plotai.*
VI. S. Staknienė. *Iracionaliosios lygtys ir nelygybės.*
VII. A. Apynis, E. Stankus. *Trigonometrinės lygtys ir nelygybės.*
VIII. G. Stepanauskas. *Sekos.*

IV KNYGA

I. G. Stepanauskas. *Skaičiavimo sistemos.*
II. P. Vaškas. *Antrosios eilės kreivės.*
III. L. Maliaukienė. *Įdomioji logika.*
IV. A. Urbonas. *Atvirkštinės funkcijos.*
V. A. Apynis. *Optimizavimo uždaviniai.*
VI. P. Survila. *Kombinatorikos pradmenys.*
VII. P. Survila. *Tikimybių teorijos pradmenys.*
VIII. A. Nagelė. *Kompleksiniai skaičiai.*

V KNYGA

I. O. Jablonskienė. *Planimetrijos uždaviniai.*
II. V. Pekarskas. *Antrosios eilės kreivės.*
III. G. Stepanauskas. *Skaičių dalikliai.*
IV. V. Stakėnas. *Šifrai ir skaičiai.*
V. A. Apynis. *Tiesinių lygčių sistemos.*
VI. R. Skrabutėnas. *Algebrinės lygtys.*
VII. V. Vitkus. *Brėžimo uždaviniai.*
VIII. R. Kašuba. *Sudėtis, atimtis ir daugyba stulpeliu bei dalyba kampu.*

VI KNYGA

I. A. Bakštys. *Finansų matematika.*
II. E. Mazėtis. *Geometrinės transformacijos.*
III. B. Galbogienė. *Funkcijos reikšmių sritis.*
IV. V. Stakėnas. *Paskalio trikampis.*
V. A. Apynis. *Tiesinių lygčių sistemų taikymo uždaviniai.*
VI. L. Narkevičius. *Invariantų metodas.*
VII. J. Šinkūnas. *Tiesinės rekurenčiosios sekos.*
VIII. A. Apynis. *Uždaviniai su parametru.*

VII KNYGA

I. E. Stankus. *Skaičių dalumas, dalumo požymiai.*
II. E. Mazėtis. *Nelygybės geometrijoje.*
III. J. Šinkūnas. *Kraštinio elemento principas.*
IV. A. Apynis, E. Stankus. *Indukcijos principas.*
V. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. *Grafai. Oilerio formulė.*
VI. J. Vainavičienė. *Geometrinės vietos.*
VII. A. Apynis. *Aibės, taikymo uždaviniai.*
VIII. A. Skūpas. *Išvestinės ir integralai.*

VIII KNYGA

I. J. Šinkūnas. *Vidurkiai ir jų taikymai.*
II. I. Bagdonienė. *Dirichlė principas.*
III. E. Stankus. *Diofantinės lygtys.*
IV. L.Papreckienė. *Daugianarių dalumas.*
V. A. Apynis, J. Šinkūnas. *Niutono binomas.*
VI. E. Tumėnaitė. *Logaritminės ir rodiklinės lygtys, nelygybės ir tapatybės.*
VII. E. Mazėtis. *Stereometrijos uždaviniai.*
VIII. A. Apynis. *Trigonometriniai uždaviniai.*

IX KNYGA

I. A. Urbonas. *Dirichlė principas.*
II. A. Apynis. *Neapibrėžtųjų koeficientų metodas.*
III. A. Apynis. *Sumavimas.*
IV. E. Tumėnaitė. *Logaritminės lygtys ir nelygybės.*
V. E. Mazėtis. *Geometrijos uždavinių sprendimo analiziniai metodai.*
VI. E. Stankus, J. Šinkūnas. *Pilnosios tikimybės formulė.*
VII. E. Mazėtis. *Vektoriai erdvėje.*
VIII. E. Stankus, J. Šinkūnas. *Progresijos.*

X KNYGA

I. A. Apynis, E. Stankus. *Racionaliosios lygtys.*
II. A. Urbonas. *Nestandartiniai uždaviniai.*
III. V. Pekarskas. *Trigonometrinių keitinių taikymas sprendžiant uždavinius.*
IV. A. Apynis. *Nelygybės tekstiniuose uždaviniuose.*
V. J. Šinkūnas. *Kompleksiniai skaičiai ir jų taikymas.*
VI. E. Mazėtis. *Kai kurios planimetrijos teoremos ir jų taikymai.*
VII. E. Stankus. *Bernulio formulės ir jų taikymas.*
VIII. E. Mazėtis. *Briaunainiai.*

XI KNYGA

I. E. Tumėnaitė. *Kvadratinės lygtys tekstiniuose uždaviniuose.*
II. A. Apynis. *Bezu teorema.*
III. J. Šinkūnas. *Masių centras ir jo taikymas.*
IV. E. Stankus. *Lyginiai ir jų taikymas.*
V. A. Apynis. *Funkcinės lygtys.*
VI. E. Mazėtis. *Trigonometrijos taikymas geometrijoje.*
VII. J. Šinkūnas. *Iškilosios funkcijos ir nelygybės.*
VIII. E. Stankus. *Priklausomi ir nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.*

XII KNYGA

I. R. Skrabutėnas. *Euklido algoritmas ir jo taikymas.*
II. J. Šinkūnas. *Lygčių ir nelygybių sprendimas taikant funkcijų savybes.*
III. A. Apynis. *Simetrinių lygčių sistemos.*
IV. R. Kašuba. *Svėrimo ir pilstymo uždaviniai.*
V. E. Stankus. *Pitagoro ir Herono skaičių trejetai.*
VI. J. Šinkūnas. *Sąlyginės tapatybės ir nelygybės.*
VII. E. Mazėtis. *Keturkampiai.*
VIII. A. Apynis. *Geriausio varianto pasirinkimo uždaviniai.*