LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Jaunajam matematikui

14

2011–2013 mokslo metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Vilnius, 2016

Leidinio sudarytojai:
Antanas APYNIS
Edmundas MAZĖTIS
Eugenijus STANKUS
Juozas ŠINKŪNAS

Leidinį maketavo Kristina LYNDIENĖ

TURINYS

PRATARMĖ

Šioje keturioliktojoje Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos knygelėje „Jaunajam matematikui“ yra pateikta 2011–2013 mokslo metais nagrinėtų temų metodinė medžiaga, užduotys LJMM klausytojams ir jų sprendimai.

Knygelės turinį sudaro šios temos: procentų uždaviniai (A. Apynis, J. Šinkūnas), kaip spręsti lygtis sveikaisiais skaičiais (J. Jankauskas), ekstremumai geometrijoje (E. Mazėtis), homotetija (A. Novikas), turnyrai ir lentelės (R. Kašuba), sekos ir jų ribos (E. Stankus), trigonometrijos taikymas stereometrijoje (E. Mazėtis), Monte Karlo metodas (G. Stepanauskas). Skaitytojas taip pat ras 2011 metų stojamąją užduotį ir jos sprendimą bei 2013 metų baigiamosios užduoties pavyzdį.

Kad būtų lengviau naudotis knygelėmis „Jaunajam matematikui“, šio leidinio paskutiniuose puslapiuose yra įdėtas ankstesnių trylikos LJMM mokslo metų temų sąrašas.

Antanas Apynis
Edmundas Mazėtis
Eugenijus Stankus
Juozas Šinkūnas

Metodinė medžiaga ir užduotys

STOJAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Du dviratininkai vienu metu išvyko iš vietovių A ir B vienas prieš kitą. Pirmasis į B atvyko po 12 min nuo jų susitikimo, o antrasis – į A po 27 min nuo jų susitikimo. Kiek laiko užtruko kiekvieno dviratininko kelionė?

2. Jei $a^2 + b^2 \le 4,$ tai $a + b \le 4.$ Įrodykite.

3. Triženklio skaičiaus ir skaičiaus, kurio skaitmenų tvarka atvirkščia, sandauga lygi 692443. Raskite tokius triženklius skaičius.

4. Tūkstančio skirtingų natūraliųjų skaičių suma lygi 1000998. Įrodykite, kad tarp tų skaičių yra bent du nelyginiai skaičiai.

5. Raskite visus dviženklius skaičius, kurie dukart didesni už jų skaitmenų sandaugą.

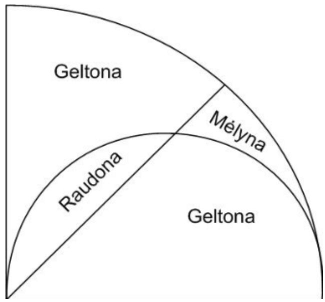
6. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 + xy + y = 1, \\ y^2 + xy + x = 5. \end{cases}$$

7. Smailiajame trikampyje *ABC* aukštinės susikerta taške *M*. Žinoma, kad *MC* = *AB*. Apskaičiuokite kampo *C* didumą.

8. Stačiakampio formos popieriaus lapas sukarpytas į tris trikampius. Vieno iš jų plotas lygus kitų dviejų trikampių plotų sumos pusei. Koks šių trijų trikampių plotų santykis?

9. Karalius Artūras dailininkui užsakė nupiešti skritulio ketvirčio formos skydą ir jį nuspalvinti trimis spalvomis: geltona – gerumo spalva, raudona – drąsos spalva ir mėlyna – išminties spalva. Dailininkas nubrėžė pusapskritimį, kampo pusiaukampinę ir nuspalvino susidariusias figūras, kaip parodyta paveiksle. Pamatęs skydą, karaliaus ginklanešys pasakė, kad drąsos yra daugiau negu išminties. Įrodykite, kad jis nebuvo teisus.



10. Rūsyje buvo sudėti vienodo didumo sūriai. Naktį pelės sugraužė 10 sūrių – visos po lygiai. Kitą naktį sugrįžo tik septynios pelės ir sugraužė likusius sūrius – taip pat po lygiai. Antrą naktį kiekviena pelė sugraužė per pusę mažiau sūrio negu pirmą naktį. Kiek sūrių buvo rūsyje?

I. PROCENTŲ UŽDAVINIAI

Antanas Apynis (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Lietuvos edukologijos universitetas)

Procento sąvoka įvedama penktoje klasėje. Penktoje ir šeštoje klasėse sprendžiami patys paprasčiausi procentų uždaviniai. Sudėtingesni procentų uždaviniai sutinkami tik vyresnėse klasėse; taip pat įvairiuose matematikos uždavinių sprendimo konkursuose ir olimpiadose.

Procentai skaičiuojami nei tik buityje, versle, ekonomikoje. Jie svarbūs beveik visose mokslo šakose. Šioje LJMM mokiniams skirtoje temoje apsiribosime gana paprastais procentų taikymo uždaviniais. Nors procentų uždavinių teorija yra paprasta, tačiau, sprendžiant uždavinius, atsiranda įvairių sunkumų. Kad būtų paprasčiau spręsti uždavinius, pateiksime porą tokių uždavinių sprendimo schemų ir jų taikymo pavyzdžių. Tikimės, kad, perskaitę čia pateiktus metodinius nurodymus ir išnagrinėję pavyzdžių sprendimus, visi LJMM mokiniai sėkmingai išspręs pirmąją užduotį. Žinoma, uždavinius galima spręsti ir nesinaudojant pateikiamomis schemomis.

Pirmiausia prisiminkime, kad *procentu* vadinama viena šimtoji skaičiaus ar kokio nors dydžio dalis; žymima 1 %. Pavyzdžiui, 1 % skaičiaus 1 yra 0,01; 1 % skaičiaus n yra $0{,}01n$. Vienas procentas metro yra vienas centimetras, vienas procentas k tonų yra $0{,}01k$ tonų, o b procentų skaičiaus n yra $0{,}01bn$.

Lyginant du skaičius, tarkime a ir b, palyginimo rezultatas dažnai išreiškiamas procentais. Pavyzdžiui, skaičius a sudaro $\frac{a}{b}\cdot 100$ procentų skaičiaus b $\left(\frac{a}{b}\cdot 100\,\%\right)$; Skaičius a yra $\frac{a-b}{b}\cdot 100$ procentų $\left(\frac{a-b}{b}\cdot 100\,\%\right)$ didesnis už skaičių b (žinoma, kai $a > b$), o skaičius b yra $\frac{a-b}{a}\cdot 100$ procentų $\left(\frac{a-b}{a}\cdot 100\,\%\right)$ mažesnis už skaičių a.

Skaičių palyginimą pailiustruokime konkrečiu pavyzdžiu. Sakykime, kad kurioje nors pradinėje mokykloje mokosi 30 berniukų ir 120 mergaičių. Sugretinus šiuos skaičius, galima pasakyti, kad:

1) berniukų skaičius sudaro $\frac{30}{150} \cdot 100 = 20$ procentų visų mokinių skaičiaus;

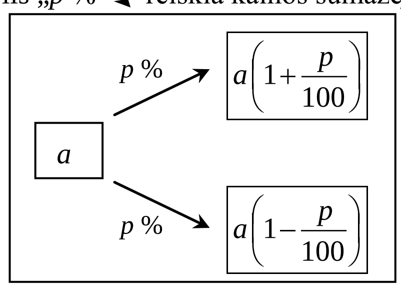
2) mergaičių skaičius yra 300 procentų $\left(\frac{120 - 30}{30} \cdot 100\,\% \right)$ didesnis už berniukų skaičių;

3) berniukų skaičius 75 procentais $\left(\frac{120 - 30}{120} \cdot 100\,\% \right)$ mažesnis už mergaičių skaičių;

4) mergaičių skaičius sudaro 400 procentų berniukų skaičiaus, o berniukų skaičius sudaro 25 procentus mergaičių skaičiaus.

Atkreipkime dėmesį į tai, kad kalbant apie bet kurių dydžių pokyčius, vartojama ne tik procento, bet ir procentinio punkto sąvoka. Pavyzdžiui, galima išgirsti sakant, kad prekės kaina iš pradžių sumažėjo 10 %, o paskui – dar vienu procentiniu punktu. Tai reiškia, kad iš viso prekės kaina sumažėjo 11 procentų.

1. Kainų kitimo ir bankinių operacijų uždaviniai. Tarkime, kad pradinė prekės kaina buvo *a* litų, o paskui pasikeitė *p* % – padidėjo arba sumažėjo. Kainos pokytis, aišku, sudaro $\frac{ap}{100}$ litų. Taigi pabrangusios prekės kaina yra $a + \frac{ap}{100} = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ litų, o atpigusios prekės kaina yra $a - \frac{ap}{100} = a\left(1 - \frac{p}{100}\right)$ litų. Sudarykime kainos kitimo schemą (žr. 1 pav.), kurioje kainos padidėjimas vaizduojamas rodykle ↗, o sumažėjimas – rodykle ↘ . Simbolis „*p* % ↗“ reiškia kainos padidėjimą *p* procentais, o simbolis „*p* % ↘“ reiškia kainos sumažėjimą *p* procentais.



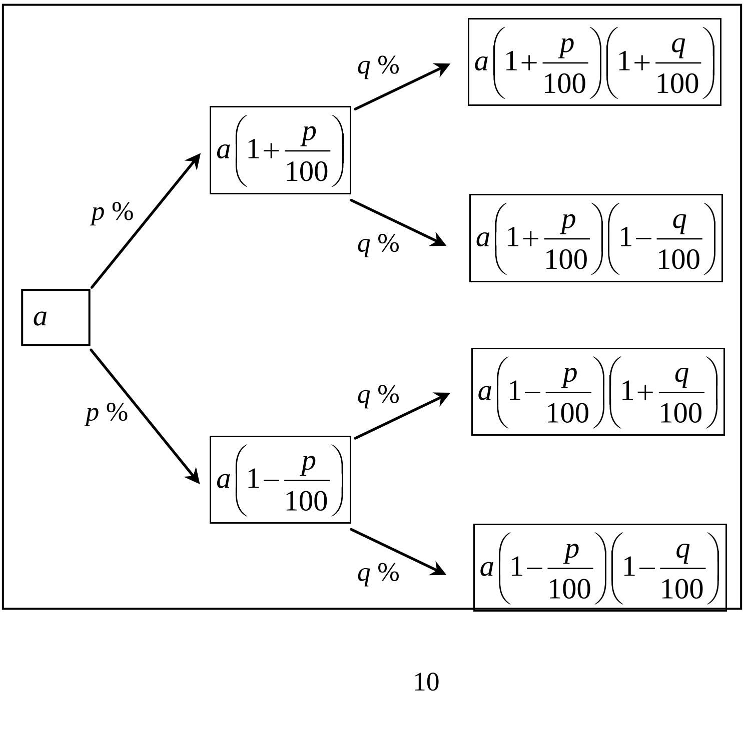
1 pav.

Taikant tą patį principą, kainos kitimo schemą galima pratęsti, papildant ją tolesnio kainos kitimo galimybėmis (žr. 2 pav.). Jei pabrangusios prekės kaina $a\left(1+\frac{p}{100}\right)$ pasikeistų (padidėtų ar sumažėtų) q %, tai pokytis sudarytų $a\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{q}{100}$ litų, o prekės naujoji kaina būtų

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)+a\left(1+\frac{p}{100}\right)\frac{q}{100}=a\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{q}{100}\right) \text{ litų arba}$$

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)-a\left(1+\frac{p}{100}\right)\frac{q}{100}=a\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{q}{100}\right) \text{ litų.}$$

Analogiškai gaunami ir atpigusios prekės kainos $a\left(1-\frac{p}{100}\right)$ pasikeitimo q % skaičiavimo rezultatai: $a\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{q}{100}\right)$ – prekei pabrangus q % ir $a\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{q}{100}\right)$ – prekei atpigus q %.



2 pav.

Glaustai aptarkime sudėtinių palūkanų skaičiavimą. Nagrinėkime atvejį, kai bankas moka p % metines palūkanas už jame laikomus indėlius, kurios, pasibaigus palūkanų periodui, priskaičiuojamos prie indėlio. Jei pradinio indėlio didumas yra B_0 litų, tai per metus sukaupiamos $B_0 \cdot \frac{p}{100}$ litų palūkanos, o indėlis išauga iki $B_1 = B_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)$ litų. Po dvejų metų indėlis B_0 išaugtų iki $B_2 = B_1 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) = B_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$; po trejų – iki $B_3 = B_2 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) = B_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$ ir t. t. Po n metų indėlis B_0 išaugtų iki

$$B_n = B_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n. \tag{1}$$

litų. Gautoji indėlio perskaičiavimo formulė (1) vadinama *sudėtinių palūkanų formule*.

Suskaidžius metus į m lygių dalinių periodų, kiekvieno periodo palūkanų norma būtų $i = \frac{p}{m}$ procentų. Tarus, kad po kiekvieno dalinio periodo palūkanos priskaičiuojamos prie indėlio, pradinis indėlis B_0 per pirmuosius metus išaugtų iki $B_0 \cdot \left(1+\frac{i}{100}\right)^m = B_0\left(1+\frac{p}{m \cdot 100}\right)^m$; jį pažymėkime $B_1(m)$. Per antruosius metus indėlis B_0 išaugtų iki $B_2(m) = B_1(m)\left(1+\frac{i}{100}\right)^m = B_1(m)\left(1+\frac{p}{m \cdot 100}\right)^m = B_0\left(1+\frac{p}{m \cdot 100}\right)^{2m}$ ir t. t. Po n metų indėlio didumas būtų

$$B_n(m) = B_0\left(1+\frac{p}{m \cdot 100}\right)^{nm}. \tag{2}$$

Dabar pereikime prie pavyzdžių analizės.

1 pavyzdys. Išnagrinėkime tris kainų kitimo schemas ir atsakykime į formuluojamus klausimus.

a) Prekės kaina buvo didinama du kartus – pirmą kartą 20 %, o antrą kartą 30 %. Keliais procentais pabrango prekė ir kokia buvo jos pradinė kaina, jeigu po antrojo pabrangimo ji pakilo iki 390 Lt?

b) Prekės kaina buvo mažinama du kartus. Abu kartus po p %. Raskime p, jeigu per abu kartus prekės kaina sumažėjo 36 %.

c) Iš pradžių prekės kaina buvo sumažinta p %, o paskui padidinta 25 %. Koks procentų skaičius p, jeigu per abu keitimus prekės kaina sumažėjo 20 %.

Sprendimas. a) Pradinę prekės kainą pažymėkime x. Pagal uždavinio sąlygą gauname lygtį

$$x\left(1+\frac{20}{100}\right)\left(1+\frac{30}{100}\right)=390.$$

Jos sprendinys yra $x=250.$ Taigi pradinė prekės kaina buvo 250 Lt.

Kadangi $\frac{390}{250}\cdot 100=156,$ tai darome išvadą, kad prekė pabrango 56 %. Aišku, kad prekės pabrangimas matosi ir iš sandaugos

$$\left(1+\frac{20}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{30}{100}\right)=1{,}2\cdot 1{,}3=1{,}56.$$

Ats.: pradinė kaina 250 Lt; prekė pabrango 56 %.

b) Pradinę kainą pažymėję x, pagal uždavinio sąlygą gauname lygtį

$$x\left(1-\frac{p}{100}\right)^2=x\left(1-\frac{36}{100}\right),$$

o iš jos – lygtį

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)^2=0{,}64.$$

Kadangi $p<100,$ tai

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)^2=0{,}64\Rightarrow 1-\frac{p}{100}=0{,}8\Rightarrow p=20.$$

Ats.: $p=20.$

c) Tarkime, kad iš pradžių prekė kainavo x Lt. Tada (pagal uždavinio sąlygą) turi galioti tokia lygybė:

$$x\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{25}{100}\right)=x\left(1-\frac{20}{100}\right)$$

Iš jos gauname:

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot 1{,}25=0{,}8\Rightarrow 1-\frac{p}{100}=0{,}64\Rightarrow p=36.$$

Ats.: $p=36.$

2 pavyzdys. Tarkime, kad banko metinė palūkanų norma yra 8 %, o pradinis indėlininko įnašas 1000 Lt. Apskaičiuokime indėlio didumą po 10 metų šiais atvejais:

a) palūkanos priskaičiuojamos kiekvienų metų gale;
b) palūkanos priskaičiuojamos kas ketvirtį;
c) palūkanos priskaičiuojamos kas mėnesį;
d) palūkanos priskaičiuojamos kasdien.

Sprendimas. a) Pagal (1) formulę $B_{10}=1000(1+0{,}08)^{10}=2158{,}92$ (Lt).

b) Šiuo atveju metai suskaidomi į 4 dalinius palūkanų periodus, todėl kiekvieno dalinio periodo palūkanų norma yra $i=\dfrac{8}{4\cdot 100}=0{,}02.$ Taikydami (2) formulę, gauname:

$$B_{10}(4)=1000(1+0{,}02)^{4\cdot 10}=1000\cdot 1{,}02^{40}=2208{,}04\ \text{(Lt)}.$$

c) Šiuo atveju metus sudaro 12 dalinių palūkanų periodų, o kiekvieno dalinio periodo palūkanų norma yra $i=\dfrac{8}{12\cdot 100}=\dfrac{1}{150}.$ Taikydami (2) formulę, gauname

$$B_{10}(12)=1000\left(1+\frac{1}{150}\right)^{12\cdot 10}=1000\cdot\left(\frac{151}{150}\right)^{120}=2219{,}64\ \text{(Lt)}.$$

d) Pagal (2) formulę $B_{10}(365)=1000\left(1+\dfrac{0{,}08}{365}\right)^{365\cdot 10}=2225{,}35$ (Lt).

Ats.: $B_{10}=2158{,}92$ Lt; $B_{10}(4)=2208{,}04$ Lt; $B_{10}(12)=2219{,}64$ Lt; $B_{10}(365)=2225{,}35$ Lt.

3 pavyzdys. Pilietis į banką įnešė 5000 Lt. Po metų, priskaičiavus palūkanas, jis atsiėmė iš banko 1000 Lt. Laikant banke likusius pinigus, per antruosius metus susidarė 168 Lt palūkanos. Kokia banko metinė palūkanų norma? Skaičiuokite, turėdami mintyje, kad palūkanų periodas – metai.

Sprendimas. Banko metinę palūkanų normą pažymėkime p %. Pagal uždavinio sąlygą reikia išspręsti lygtį

$$\left(5000\left(1+\frac{p}{100}\right)-1000\right)\cdot\frac{p}{100}=168.$$

Gausime:

$$(4000+50p)\cdot\frac{p}{100}=168\Rightarrow 40p+\frac{p^2}{2}=168\Rightarrow p^2+80p-336=0\Rightarrow p=4.$$

Ats.: 4 %.

2. Lydinių, tirpalų ir mišinių uždaviniai. Tarkime, kad lydinys (mišinys, tirpalas) sudarytas iš dviejų medžiagų, sakykime, A ir B. Medžiagos A masę lydinyje pažymėkime m_A, o medžiagos B masę pažymėkime m_B. Skaičius $k_A=\frac{m_A}{m_A+m_B}$ vadinamas medžiagos A *koncentracija*, o skaičius $k_B=\frac{m_B}{m_A+m_B}$ vadinamas medžiagos B *koncentracija* lydinyje. Skaičius $p_A=100k_A$ yra medžiagos A, o skaičius $p_B=100k_B$ yra medžiagos B *procentinė koncentracija* lydinyje. Aišku, kad $k_A+k_B=1$ ir $p_A+p_B=100$.

Analogiškai apibrėžiama medžiagos koncentracija bei procentinė koncentracija ir tada, kai lydinį sudaro trys ar daugiau medžiagų.

Jei nagrinėjant lydinius, tirpalus ir mišinius kalbama apie jų užimamus tūrius, tai, apibrėžiant kiekvienos juos sudarančios medžiagos koncentraciją, medžiagos masė pakeičiama jos užimamu tūriu.

Kad būtų paprasčiau, masės m lydinį, sudarytą iš medžiagų A ir B, kurių koncentracija yra atitinkamai k_A ir k_B, žymėsime $L(k_A, k_B, m)$. Simboliu $L(p_A, p_B, m)$ žymėsime lydinį, kurio masė lygi m, o jį sudarančių medžiagų A ir B procentinė koncentracija yra atitinkamai p_A ir p_B.

Tirpalus žymėsime simboliais $T(k_A, k_B, m)$ ir $T(p_A, p_B, m)$, o mišinius – simboliais $M(k_A, k_B, m)$ ir $M(p_A, p_B, m)$.

Analogiškais simboliais paranku žymėti ir lydinius, tirpalus bei mišinius, sudarytus iš, trijų ar daugiau medžiagų.

Jei du lydiniai, tarkime, $L_1(k_{1A}, k_{1B}, m_1)$ ir $L_2(k_{2A}, k_{2B}, m_2)$ sulydomi į vieną lydinį, tai naujojo lydinio $L(k_A, k_B, m)$ mase laikysime sulydomų lydinių masių sumą $(m = m_1 + m_2)$.

Siekdami suglaudinti paaiškinimus, vartosime tokią dviejų lydinių (taip pat tirpalų ir mišinių) jungimo į vieną lydinį schemą:

$$\boxed{\begin{array}{l} \quad L_1(k_{1A}, k_{1B}, m_1) \\ + \\ \quad L_2(k_{2A}, k_{2B}, m_2) \end{array}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L(k_A, k_B, m)}.$$

Šioje schemoje galioja tokios lygybės:

$$m = m_1 + m_2, \tag{3}$$

$$k_{1A}m_1 + k_{1A}m_2 = k_A m, \tag{4}$$

$$k_{2B}m_1 + k_{2B}m_2 = k_B m. \tag{5}$$

Lydinių $L_1(p_{1A}, p_{1B}, m_1)$ ir $L_2(p_{2A}, p_{2B}, m_2)$ jungimo į vieną lydinį $L(p_A, p_B, m)$ schemoje

$$\boxed{\begin{array}{l} \quad L_1(p_{1A}, p_{1B}, m_1) \\ + \\ \quad L_2(p_{2A}, p_{2B}, m_2) \end{array}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L(p_A, p_B, m)}.$$

Medžiagų koncentracijas sieja tokios lygybės:

$$p_{1A}m_1 + p_{2A}m_2 = p_A m, \tag{6}$$

$$p_{1B}m_1 + p_{2B}m_2 = p_B m. \tag{7}$$

Sprendžiant įvairius tirpalų ir mišinių uždavinius, taip pat galima taikyti analogiškas jų jungimo schemas ir (3)–(7) formules.

Išspręskime kelis uždavinius.

4 pavyzdys. Viename lydinyje yra 20 % vario, o kitame – 30 % vario. Juos sulydžius, gaunamas 10 kg masės lydinys, kuriame yra 27 % vario. Raskime abiejų lydinių mases.

Sprendimas. Pirmojo lydinio masę pažymėkime x. Tada (pagal (3) formulę) antrojo lydinio masė yra $10 - x$. Turime tokią lydinių jungimo schemą:

$$\boxed{\begin{array}{l} L_1(20, 80, x) \\ + \\ L_2(30, 70, 10 - x) \end{array}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L(27, 73, 10)}.$$

Joje turi galioti ir (6), ir (7) lygybės. Iš lygčių

$$20x + 30(10 - x) = 27 \cdot 10$$

ir

$$80x + 70(10 - x) = 73 \cdot 10$$

Gauname tą patį rezultatą: $x = 3$. Todėl uždaviniui išspręsti pakanka imti vieną iš (6) ir (7) sąlygų. Taigi pirmojo lydinio masė yra 3 kg, o antrojo – 7 kg.

Ats.: 3 kg ir 7 kg.

5 pavyzdys. Sidabro ir vario lydinį sulydžius su 3 kg gryno sidabro, būtų gaunamas lydinys, kuriame yra 90 % sidabro, o sulydžius pradinį lydinį su 2 kg lydinio, kuriame yra 90 % sidabro, būtų gaunamas 84 % sidabro turintis lydinys. Kokia yra pradinio lydinio masė ir kiek procentų sidabro yra jame?

Sprendimas. Tegu sidabro koncentracija pradiniame lydinyje yra x %, o lydinio masė y kg. Pagal uždavinio sąlygą galima sudaryti dvi lydinių jungimo schemas:

$$\boxed{\begin{array}{l} L_1(x, 100 - x, y) \\ + \\ L_2(100, 0, 3) \end{array}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L(90, 10, y + 3)}$$

ir

$$\boxed{\begin{array}{l} L_1(x, 100 - x, y) \\ + \\ \overline{L}_2(90, 10, 2) \end{array}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{L}(84, 16, y + 2)}.$$

Pagal pirmąją schemą turi galioti lygybė

$$xy + 300 = 90(y + 3),$$

o pagal antrąją schemą turi galioti lygybė

$$xy + 180 = 84(y + 2).$$

Išsprendę dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} xy + 300 = 90(y + 3), \\ xy + 180 = 84(y + 2), \end{cases}$$

gauname vienintelės nežinomųjų reikšmes: $x = 80,\ \ y = 3.$

Ats.: 3 kg, 80 %.

6 pavyzdys. 500 kg celiuliozės masėje yra 85 % vandens. Kiek kilogramų vandens reikia išgarinti, kad liktų 75 % vandens turinti celiuliozės masė?

Sprendimas. Pradinę celiuliozės masę pažymėkime simboliu $T_1(85, 15, 500)$, išgarinamą vandenį pažymėkime simboliu $T_2(100, 0, x)$, o siekiamą gauti celiuliozės masę, turinčią 75 % vandens, – simboliu $T\,(75, 25, 500 - x)$. Tada vandens išgarinimo procesą galėsime užrašyti tokia schema:

$$\boxed{\begin{array}{l} T_1(85, 15, 500) \\ - \\ T_2(100, 0, x) \end{array}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T(75, 25, 500 - x)}.$$

Pagal šią schemą sudarykime lygtį

$$15 \cdot 500 - 0 \cdot x = 25\,(500 - x)$$

Ir gausime, kad $x = 200$ (kilogramų).

Ats.: 200kg.

7 pavyzdys. Indas, kurio talpa V litrų, pripiltas a % koncentracijos druskos rūgšties tirpalo. Iš šio indo nupylus b litrų tirpalo, į jį įpilama tiek pat vandens. Kokia bus tirpalo koncentracija tokią pilstymo procedūrą atlikus n kartų? Po kelių pilstymų druskos rūgšties inde bus mažiau negu vandens, jeigu $V = 100\,l,\ \ b = 10\,l,\ \ a = 80\,l$?

Sprendimas. Druskos rūgšties koncentraciją po pirmojo pilstymo pažymėkime a_1, po antrojo pilstymo a_2 ir t. t.

Pirmąjį pilstymą galima užrašyti tokia schema:

$$\boxed{\begin{array}{l} \quad T_1(a, 100-a, V-b) \\ + \\ \quad T_2(0, 100, b) \end{array}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T(a_1, 100-a_1, V)}.$$

Pagal ją sudarykime lygtį

$$a \cdot (V-b) + 0 \cdot b = a_1 V$$

ir gausime, kad

$$a_1 = a \cdot \frac{V-b}{V}.$$

Analogiškai galima apskaičiuoti druskos koncentraciją tirpale po antrojo ir kitų pilstymų:

$$a_2 = a_1 \cdot \frac{V-b}{V},$$

$$a_3 = a_2 \cdot \frac{V-b}{V},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot \frac{V-b}{V}.$$

Iš čia

$$a_n = a \cdot \left(\frac{V-b}{V}\right)^n.$$

Kai $V = 100$, $a = 80$, $b = 10$, gausime formulę

$$a_n = 80 \cdot (0{,}9)^n.$$

Ieškomajam pilstymų skaičiui n rasti reikia išspręsti nelygybę $80 \cdot (0{,}9)^n < 50$. Mažiausias sprendinys yra $n = 5$.

Ats.: $a \cdot \left(\frac{V-b}{V}\right)^n$; 5.

3. Procentai ir procentiniai punktai.

8 pavyzdys. Iš pradžių gamybos brokas sudarė 5 % gaminamos produkcijos, o paskui, patobulinus technologinį procesą, sumažėjo keturiais procentiniais punktais. Turėdami mintyje, kad gaminamos produkcijos apimtis yra pastovi, apskaičiuokime, keliais procentais sumažėjo gamybos brokas.

Sprendimas. Gamybos produkcijos apimtį pažymėkime a. Vadinasi, brokas iš pradžių sudarė $a\cdot\frac{5}{100}=0{,}05a$ kiekio vienetų, o paskui (sumažėjus jam keturiais procentiniais punktais) $a\cdot\frac{1}{100}=0{,}01a$ vienetų. Todėl gamybos brokas sumažėjo $\frac{0{,}05a-0{,}01a}{0{,}05a}\cdot 100=80$ procentų.

Ats.: 80 %.

9 pavyzdys. Į tirpalą, kuriame yra 40 g druskos, įpylė 200 g vandens. Kiek vandens tirpale buvo iš pradžių ir koks buvo procentinis druskos kiekis, jeigu: 1) dabar procentinis druskos kiekis yra mažesnis 10 procentinių punktų; 2) dabar procentinis druskos kiekis yra mažesnis 10 %?

Sprendimas. Ieškomąjį vandens kiekį (gramais) pažymėkime x, pradinę druskos koncentraciją pažymėkime d_1, o dabartinę druskos koncentraciją d_2. Pagal uždavinio sąlygą pradinė tirpalo masė buvo $x+40$, procentinis druskos kiekis $d_1=\frac{40}{x+40}\cdot 100=\frac{4000}{x+40}$, o vandens procentinis kiekis $\frac{x}{x+40}\cdot 100=\frac{100x}{x+40}$. Taigi pradinį tirpalą galima užrašyti simboliu $T_1\left(\frac{4000}{x+40},\cdot\frac{100x}{x+40},\, x+40\right)$.

Įpiltą vandenį galima užrašyti simboliu $T_2(0, 100, 200)$, o gautąjį tirpalą – simboliu $T_2(d_2, 100-d_2,\, x+240)$.

Pagal schemą

$$\boxed{\begin{array}{l} T_1\left(\frac{4000}{x+40}, \frac{100x}{x+40},\, x+40\right) \\ + \\ T_2(0, 100, 200) \end{array}} \Rightarrow \boxed{T(d_2, 100-d_2,\, x+240)}\,.$$

Sudarykime lygtį

$$\frac{4000}{x+40}\cdot(x+40)+0\cdot 200=d_2(x+240)$$

ir apskaičiuokime pradinį vandens kiekį x. Gausime

$$x=\frac{4000}{d_2}-240.$$

Pirmuoju atveju

$$d_2=\frac{4000}{x+40}-10=\frac{3600-10x}{x+40},$$

$$\frac{4000}{d_2}=\frac{4000}{\dfrac{3600-10x}{x+40}}=\frac{400(x+40)}{360-x},$$

todėl

$$x=\frac{400(x+40)}{360-x}-240.$$

Spręsdami šią lygtį, gauname:

$$x(360-x)=400(x+40)-240(360-x),$$

$$360x-x^2=640x-70400,$$

$$x^2+280x-70400=0.$$

Jos sprendiniai yra 160 ir –440.

Taigi šiuo atveju pradinis vandens kiekis tirpale buvo 160 gramų, o druskos procentinė koncentracija $d_1=\frac{4000}{160+40}=20$ procentų.

Antruoju atveju

$$d_2=d_1-0{,}1d_1=0{,}9d_1=\frac{0{,}9\cdot 4000}{x+40}=\frac{3600}{x+40},$$

todėl (pagal (8)) gauname, kad

$$x=\frac{4000(x+40)}{3600}-240=\frac{10(x+40)}{9}-240=\frac{10x-1760}{9}.$$

Iš čia $9x=10x-1760$ ir $x=1760$.

Tada

$$d_1=\frac{4000}{1760+40}=\frac{20}{9}-240=2\frac{2}{9}.$$

Vadinasi, antruoju atveju pradinis vandens kiekis tirpale buvo 1760 g, o druskos kiekis tirpale sudarė $2\frac{2}{9}$ %.

Ats.: 1) 160 g, 20 %; 2) 1760 g, $2\frac{2}{9}$ %.

4. Įvairūs procentų uždaviniai.

10 pavyzdys. Per mero rinkimus už Antanaitį, Jonaitį ir Petraitį rengiasi balsuoti atitinkamai 15 %, 20 % ir 25 % rinkėjų. Kiti rinkėjai dar neapsisprendę. Apskaičiuokite, kiek procentų neapsisprendusių rinkėjų turėtų suagituoti Antanaitis, kad jis laimėtų rinkimus.

Sprendimas. Pagal sąlygą neapsisprendusių rinkėjų yra 40 %. Tegu a yra rinkėjų skaičius, o x yra ieškomasis neapsisprendusių rinkėjų procentų skaičius. Tada apsisprendusių balsuoti už Antanaitį rinkėjų skaičius būtų $0{,}15\,a + 0{,}4a \cdot \frac{x}{100}$. Jeigu visi likusieji (iš neapsisprendusių) apsispręstų balsuoti už Petraitį, tai šis kandidatas gautų $0{,}25\,a + \left(0{,}4a - 0{,}4a \cdot \frac{x}{100}\right)$ balsų. Išsprendę nelygybę

$$0{,}15\,a + 0{,}4a \cdot \frac{x}{100} > 0{,}25a + \left(0{,}4a - 0{,}4a \cdot \frac{x}{100}\right),$$

Gausime $x > 62{,}5$.

Taigi Antanaitis, siekdamas laimėti mero rinkimus, turėtų suagituoti daugiau kaip 62,5 % neapsisprendusių (už ką balsuoti) rinkėjų.

Ats.: daugiau kaip 62,5 %.

11 pavyzdys. Rudens kroso varžybose dalyvavo pagrindinės mokyklos moksleivių būrys. Kroso distancijos nebaigė daugiau kaip 2,8 %, bet mažiau kaip 3,2 % dalyvių. Raskite galimai mažiausią kroso dalyvių skaičių.

Sprendimas. Kroso dalyvių skaičių pažymėkime n, o distancijos nebaigusių skaičių pažymėkime m. Pagal uždavinio sąlygą

$$2{,}8 < \frac{m}{n} \cdot 100 < 3{,}2.$$

Iš čia

$$2{,}8n < 100m < 3{,}2n.$$

Kai $m=1$, tai $\frac{100}{3{,}2}<n<\frac{100}{2{,}8}$, t. y. $31{,}25<n<35\frac{5}{7}$.

Taigi galimai mažiausias kroso dalyvių skaičius yra 32.

Ats.: 32.

12 pavyzdys. Iš stačiakampio formos kartono lapo, kurio kraštinių ilgių santykis 2:3, iškirptas didžiausio ploto stačiakampis, kurio kraštinių ilgių santykis 1:2. Apskaičiuokite kartono likučio procentą.

Sprendimas. Tarkime, kad kartono lapo kraštinių ilgiai $2a$ ir $3a$. Didžiausio ploto stačiakampio, kurio kraštinių ilgių santykis 1:2, kraštinių ilgiai yra $1{,}5a$ ir $3a$; jo plotas lygus $4{,}5a^2$. Kartono likučio plotas yra $6a^2-4{,}5a^2=1{,}5a^2$. Jis sudaro $\frac{1{,}5a^2}{6a^2}\cdot 100=25$ procentus viso kartono ploto.

Ats.: 25 %.

5. Pasitreniruokite. (Šių uždavinių sprendimų siųsti nereikia.)

1. Knyga 25 % brangesnė už albumą. Keliais procentais albumas pigesnis už knygą?

Ats.: 20 %.

2. Dramos būrelyje berniukų skaičius sudaro 80 % mergaičių skaičiaus. Kiek procentų mergaičių skaičius sudaro berniukų skaičiaus?

Ats.: 125 %.

3. Pardavėjas iš gamintojo televizorių pirko už 1200 Lt. Jis paskelbė naują kainą, o televizorių pardavė su 10 % nuolaida, gavęs 20 % pelną. Kokią televizoriaus kainą buvo paskelbęs pardavėjas?

Ats.: 1600 Lt.

4. Pardavėjas pirko batus iš batsiuvio už tam tikrą pinigų sumą ir paskelbė 230 Lt kainą. Pardavęs batus su 18 % nuolaida, jis gavo 15 % pelną. Už kiek litų pardavėjas nupirko batus iš balsiuvio?

Ats.: 164 Lt.

5. Kai statinė 30 % tuščia, joje yra 30 litrų daugiau negu tada, kai ji 30 % pripildyta. Kokia statinės talpa?

Ats.: 25 *l*.

6. Broliai Linas ir Romas kartu eina į mokyklą. Romo žingsnis 10 % trumpesnis už Lino žingsnį, bet jis padaro 10 % daugiau žingsnių negu Linas. Kuris brolis anksčiau ateis į mokyklą?

Ats.: Linas.

7. Dėžutėje sudėti auksiniai ir sidabriniai daiktai: monetos ir žiedai. Žiedai sudaro 20 % visų daiktų, o 40 % monetų yra sidabrinių. Kokį visų daiktų procentą sudaro auksinės monetos?

Ats.: 48 %.

8. Bankas išdavė kreditus įmonėms ir gyventojams. Kreditai, išduoti gyventojams, sudarė 25 % sumos, išduotos įmonėms. Kiek procentų bendros kreditų sumos sudaro įmonėms išduoti kreditai?

Ats.: 80 %

9. Bilieto į kino teatrą kaina 18 Lt. Sumažinus bilieto kainą, žiūrovų skaičius padidėjo 50 %, o pajamos (įplaukos) padidėjo tik 25 %. Keliais litais buvo sumažinta bilieto kaina?

Ats.: 3 Lt.

10. Kai bilieto kaina į teatrą padidėjo 40 %, pajamos už bilietus padidėjo tik 20 %. Kiek procentų sumažėjo žiūrovų skaičius?

Ats.: 10 %.

11. Netgi tada, kai kupranugaris Noris yra ištroškęs, 84 % jo masės sudaro vanduo. Po to, kai jis atsigavo, jo masė padidėjo iki 800 kg, o vanduo sudaro 85 % jo masės. Kokia kupranugario Norio masė, kai jis ištroškęs?

Ats.: 750 kg.

12. Rūdoje yra 20 % priemaišų (pagal masę), o metale – tik 5 % priemaišų. Kiek reikia rūdos, norint gauti 160 kg metalo?

Ats.: 190 kg.

13. Iš 20 t rūdos gauti 8 t metalo, kuriame pagal masę yra 5 % priemaišų. Kiek procentų priemaišų yra rūdoje?

Ats.: 62 %.

14. Iš 22 kg grybų gauta 2,5 kg džiovintų grybų, kurių 12 % masės sudaro vanduo. Kiek procentų vanduo sudaro šviežių grybų masės?

Ats.: 90 %.

15. Nedžiovintų grūdų drėgnumas 25 %, o padžiovintų – 12 %. Keliais procentais sumažėjo grūdų masė, padžiovinus juos?

Ats.: 12,5 %

16. Į sandėlį atvežta 6 tonos 10 % drėgnumo druskos. Po kurio laiko druskos drėgnumas padidėjo dar 18 procentinių punktų. Keliais procentais padidėjo druskos masė?

Ats.: 25 %.

17. Džiovinant grybus jų masė sumažėjo 10 kartų. Kiek procentų vandens turėjo švieži grybai, jei 15 % džiovintų grybų masės sudaro vanduo?

Ats.: 91,5 %.

18. Jeigu 100 g druskos tirpalo sumaišytume su 200 g kitos koncentracijos druskos tirpalu, gautume 50 % druskos tirpalą. Jeigu pirmojo tirpalo imtume 300 g, o antrojo – 200 g, tai gautume 42 % tirpalą. Raskite abiejų tirpalų procentines koncentracijas.

Ats.: 30 %, 60 %.

19. Iš stačiakampio formos kartono lapo, kurio kraštinių ilgių santykis 2:3, iškirpti du didžiausio ploto kvadratai. Apskaičiuokite kartono likučių procentą.

Ats.: 25 %.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Puodukas 50 % brangesnis už lėkštutę. Keliais procentais lėkštutė pigesnė už puoduką?

2. Pilietis į banką įnešė 2000 Lt, o po metų – dar 540 Lt. Pirmųjų metų palūkanos taip pat buvo priskaičiuotos prie pagrindinio indėlio. Kokia banko metinė palūkanų norma, jeigu antrųjų metų palūkanos lygios 78 Lt?

3. Ūkininkas iš banko paėmė kreditą dvejiems metams, sutaręs mokėti tam tikrą procentą palūkanų. Po metų ūkininkas bankui grąžino $\frac{3}{4}$ sumos (su procentais!), kurią jis tuo metu buvo skolingas. Dar po metų ūkininkas sumokėjo likusią skolą, kuri sudarė 36 % paimto kredito. Kokį procentą palūkanų ūkininkas mokėjo bankui?

4. Dviejų skaičių suma 50 % didesnė už jų skirtumą. Keliais procentais už jų sandaugą didesnė tų skaičių kvadratų suma?

5. Komiso parduotuvė už 2250 Lt nusipirko dvi vazas ir, jas pardavusi gavo 40 % pelno. Už kiek litų parduotuvė pirko vazas, jeigu už pirmąją vazą gavo 25 % pelno, o už antrąją – 50 % pelno?

6. Ką tik nuskintuose agurkuose 99 % jų masės sudaro vanduo. Pastovėjus agurkams sandėlyje, vanduo agurkuose sudarė tik 98 % jų masės. Kiek procentų sumažėjo agurkų masė? Kokia buvo ką tik nuskintų agurkų masė, jeigu dabar masė lygi 50 kg?

7. Bilietas į stadioną kainuoja 15 Lt. Kai bilieto kainą sumažino, žiūrovų skaičius stadione padidėjo 50 %, o pajamos padidėjo 25 %. Keliais litais buvo sumažinta bilieto kaina?

8. Iš indo, kuriame yra 96 % (pagal tūrį) druskos rūgšties tirpalo, nupylė 2,5 litro tirpalo ir pripylė 2,5 litro 80 % druskos rūgšties tirpalo. Po to, pamaišę tirpalą vėl nupylė 2,5 litro gauto tirpalo ir įpylė 2,5 litro 80 % tirpalo. Kokia indo talpa, jeigu dabar inde yra 89 % druskos rūgšties tirpalas?

9. Iš kvadrato formos kartono lapo iškirpti du didžiausio ploto stačiakampiai, kurių kraštinių ilgių santykis 2:3. Apskaičiuokite kartono likučio procentą.

10. Petriukas į namus parnešė pilną pintinę grybų (daugiau už 30, bet mažiau už 100): baravykų, raudonikių ir lepšių. Pasirodė, kad 48 % parneštų grybų yra raudonikiai. Patikrinusi mama rado 5 grybus sukirmijusius ir juos išmetė. Dabar jau 50 % likusių grybų buvo raudonikiai. Kiek grybų rado Petriukas? Kiek raudonikių išmetė mama?

II. KAIP SPRĘSTI LYGTIS SVEIKAISIAIS SKAIČIAIS?

Jonas Jankauskas
(Vilniaus universitetas)

Šioje LJMM užduotyje susipažinsime su diofantinėmis lygtimis ir išmoksime keletą paprastų būdų kuriuos taikant tos lygtys yra sprendžiamos.

Diofantinės lygtys yra tokios algebrinės lygtys, kurių sprendiniai yra sveikieji skaičiai. Jų pavadinimas susijęs su senovės graikų matematiku Diofantu Aleksandriečiu (apie 200–284 m. pr. Kr.).

Iš esmės bet kuri lygtis yra diofantinė, jeigu jos sprendinių ieškome tik sveikųjų skaičių aibėje.

1 pavyzdys. Raskime visus sveikuosius skaičius x, kurie yra lygties $x = \cos(2\pi x)$ sprendiniai.

Sprendimas. Atkreipkime dėmesį į tai, kad kosinuso reikšmės priklauso intervalui [–1; 1]. Vadinasi, $x \in [-1; 1]$. Šiame intervale tėra trys sveikieji skaičiai: –1; 0; 1. O lygtį tenkina tik $x = 1$.

Čia nagrinėsime diofantines lygtis $F(x, y, z, ...) = 0$, kuriose $F(x, y, z, ...)$ yra *sveikieji daugianariai* kiekvieno dydžio $x, y, z, ...$ atžvilgiu (tokių daugianarių koeficientai yra sveikieji skaičiai).

Vienas iš pagrindinių būdų, taikomų sprendžiant diofantines lygtis, yra daugianarių ir sveikųjų skaičių *skaidymas dauginamaisiais*.

2 pavyzdys. Raskime lygties $x^2 = 12 + y^2$ sveikuosius sprendinius.

Sprendimas. Pastebėkime, kad nežinomieji x ir y yra pakelti kvadratu. Vadinasi, jei $(x; y)$ yra šios lygties sprendinys, tai pakeitę jame x į $-x$ arba y į $-y$, gausime kitą lygties sprendinį. Todėl pirmiausia išnagrinėkime atvejį, kai $x > 0,\ y > 0$.

Perkelkime y^2 į kairę lygties pusę ir pritaikykime kvadratų skirtumo formulę; gausime

$$x^2 - y^2 = 12 \Rightarrow (x + y)(x - y) = 12.$$

Matome, kad sveikųjų skaičių $u = x + y$ ir $v = x - y$ sandauga turi būti lygi 12. Vadinasi, bent vienas iš jų yra lyginis skaičius. Bet tada ir kitas turi būti lyginis, nes skirtumas $u - v = 2x$ yra lyginis skaičius. Be to, $u \cdot v > 0$ (nes $uv = 12$). Todėl abu dauginamieji yra to paties ženklo nelygūs nuliui skaičiai. Kadangi $x > 0$ ir $y > 0$, tai $u = x + y > 0$ ir $v > 0$; be to, $u \geq v$, nes $x + y \geq x - y$. Pagal pagrindinę aritmetikos teoremą, tėra vienintelis būdas, kuriuo 12 galima išskaidyti teigiamais lyginiais dauginamaisiais. Toji vienintelė galimybė yra $12 = 6 \cdot 2$. Taigi gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 2, \end{cases}$$

turinčią vienintelį sprendinį (4; 2). Keisdami ženklus, gauname kitus sprendinius $(-4; 2)$, $(4; -2)$, $(-4; -2)$.

Ats.: (4; 2), (4; –2), (–4; 2), (–4; –2).

3 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$y^2 = x^2 - x + 11; \; x, y - \text{sveikieji skaičiai.}$$

Sprendimas. Iš pirmo žvilgsnio nesimato, kaip lygtį galėtume išskaidyti dauginamaisiais. Padauginkime abi jos puses iš 4 ir gautos lygties $4y^2 = 4x^2 - 4x + 44$ dešinėje pusėje išskirkime pilnąjį kvadratą. Gausime $4y^2 = (2x-1)^2 + 43$. Pažymėję $Y = 2y, X = 2x - 1$, turėsime lygtį $Y^2 - X^2 = 43$, panašią į tą, kurią sprendėme antrame pavyzdyje. Nekartosime viso sprendimo pažingsniui, tik užrašysime sprendinius $(X; Y)$:

$(X; Y) = (21; 22), (21; -22), (-21; 22), (-21; -22)$. Iš jų gauname keturis pradinės lygties sprendinius $(x; y)$: (11; 11), (11; –11), (–10; 11), (–10; –11).

4 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$x + y + 5 = xy, \; x, y - \text{sveikieji skaičiai.}$$

Sprendimas. Čia kol kas nesimato nei kaip, nei ką skaidyti dauginamaisiais. Lygtį užrašykime taip: $xy - x - y = 5$, ir pridėkime prie abiejų lygties pusių po 1: $xy - x - y + 1 = 6$. Neįtikėtina, bet dabar reiškinys kairėje pusėje išsiskaido:

$$xy - x - y + 1 = (xy - x) - (y - 1) = (x - 1)(y - 1).$$

Taigi turėsime lygtį $(x-1)(y-1)=6.$

Dabar išrašykime visus galimus skaičiaus 6 išskaidymo sveikaisiais skaičiais variantus:
$6=(-6)\cdot(-1)=(-3)\cdot(-2)=(-2)\cdot(-3)=(-1)\cdot(-6)=1\cdot 6=2\cdot 3=3\cdot 2=6\cdot 1.$
Pagal juos gauname visus įmanomus pradinės lygties sprendinius:

(–5; 0), (–2; –1), (–1; –2), (0; –5), (2; 7), (3; 4), (4; 3), (7; 2).

Dauginamųjų perranką buvo galima ir sutrumpinti: kadangi pradinė lygtis simetrinė (nesikeičia, sukeitus vietomis x ir y), užtektų pirma išnagrinėti sprendinius $(x;\, y)$, $x<y$, o tada likusieji bus pavidalo $(y;\, x)$.

Kitas diofantinių lygčių tipas, kurį galima išspręsti naudojantis visiškai elementariomis priemonėmis, yra tokios lygtys, kurių *viena pusė yra didesnė už kitą* (jei ne visoms poroms $(x;\, y)$, tai bent jau toms, kuriose viena komponentė yra pakankamai didelė).

5 pavyzdys. Raskime visas natūraliųjų skaičių x ir y poras $(x;\, y)$, kurioms esant $x^2+y^2=50$.

Sprendimas. Užtenka pastebėti, kad $x^2<x^2+y^2=50$, ir pakaks išnagrinėti tik tas poras $(x;\, y)$, kuriose $x\in\{1;\,2;\,3;\,4;\,5;\,6;\,7\}$. Taikydami perrankos metodą, tikriname, ar skaičius $y^2=50-x^2$ yra natūraliojo skaičiaus kvadratas. Gauname tokius sprendinius: (1; 7), (5; 5), (7; 1).

6 pavyzdys. Išspręskime diofantinę lygtį $x^4y^4+1=x^3+y^3$.

Sprendimas. Kairėje pusėje esančio algebrinio reiškinio laipsnis yra aštuoni; jis didesnis, nei dešinės pusės (trys). Reikia manyti, kad dideliems skaičiams x ir y lygybė tarp kairės pusės ir dešinės pusės neturėtų galioti. Kaip tą patikrinti?

1 būdas. Jei $x=0$, tai gauname lygtį $1=y^3$, turinčią tik vieną sveikąjį sprendinį $y=1$. Jei $y=0$, tai gauname lygtį $1=x^3$, turinčią tik vieną sveikąjį sprendinį $x=1$.

Taigi turime du sprendinius: (0; 1) ir (1; 0).

Nagrinėdami atvejį $x\neq 0$, $y\neq 0$, pasinaudokime savybe, kad dviejų natūraliųjų skaičių sandauga plius vienas visada didesnė arba lygi tų skaičių sumai: $ab+1\geq a+b$. Ši nelygybė gaunama iš nelygybės

$(a-1)(b-1)\geq 0$, galiojančios su visais natūraliaisiais skaičiais *a* ir *b*.

Pagal šią savybę (kai $a = x^4$, $b = y^4$) gauname:

$$x^3 + y^3 = x^4 y^4 + 1 \geq x^4 + y^4 .$$

Aišku, kad lygybė galioja, kai $x = y = 1$. Jei $x \neq 1$ arba $y \neq 1$, tai $x^3 + y^3 < x^4 + y^4$, nes

$$(x^4 - x^3) + (y^4 - y^3) > 0 .$$

Taigi atveju $x \neq 0$, $y \neq 0$ gauname tik vieną sprendinį (1; 1).

Matome, kad lygtis turi tris sveikuosius sprendinius: (0; 1), (1; 0), (1; 1).

2 būdas. Tarkime, $|x| \geq 2$ ir $|y| \geq 2$. Tuomet

$$x^4 y^4 \geq 16x^4 \geq 32|x^3|, \text{ ir } x^4 y^4 \geq 16y^4 \geq 32|y^3| .$$

Sudėję abi nelygybes ir padaliję iš dviejų, gauname, kad

$$x^4 y^4 \geq 16|x^3| + 16|y^3| .$$

Tada

$$x^3 + y^3 = x^4 y^4 + 1 \geq 1 + 16|x^3| + 16|y^3| .$$

Gavome prieštarą, nes kairė pusė $x^3 + y^3$ yra akivaizdžiai mažesnė, nei dešinė pusė $1 + 16|x^3| + 16|y^3|$. Vadinasi, turi būti $|x| \leq 1$ arba $|y| \leq 1$. Taip pat aišku, kad nors vienas iš skaičių *x* ir *y* turi būti teigiamas, nes priešingu atveju gautume $x^4 y^4 + 1 > 0$ ir $x^3 + y^3 \leq 0$.

Tarkime, kad $x > 0$. Jei $|x| \leq 1$, tai $x = 1$. Tada gauname $y^4 + 1 = 1 + y^3$, o iš čia $y = 0$ arba $y = 1$. Jei $|y| \leq 1$, tai $y \in \{-1; 0; 1\}$. Nagrinėjame tris lygtis nežinomojo *x* atžvilgiu:

1) $x^4 + 1 = x^3 - 1$ (kai $y = -1$);

2) $1 = x^3$ (kai $y = 0$);

3) $x^4 + 1 = x^3 + 1$ (kai $y = 1$).

Pirmoji lygtis neturi teigiamų sveikųjų sprendinių, o antrąją ir trečiąją lygtį tenkina tik $x = 1$.

Radome du sprendinius: (1; 0) ir (1; 1).

Atveju $y > 0$ analizė analogiška. Gausime sprendinius (0; 1) ir (1; 1). Beje, juos galima užrašyti remiantis lygties simetriškumu.

Vadinasi, lygtis turi tris sveikuosius sprendinius: (0; 1), (1; 0), (1; 1).

Jei lygtis yra *kvadratinė kurio nors nežinomojo atžvilgiu*, tai apsimoka kitą nežinomąjį laikyti parametru ir spręsti kvadratinę lygtį. Tam, kad kvadratinė lygtis turėtų sveikųjų sprendinių, jos diskriminantas turi būti sveikojo skaičiaus kvadratas.

7 pavyzdys. Išspręskime diofantinę lygtį $x^2 - 2xy + 3y^2 = 19$.

Sprendimas. Matome, kad lygtis yra kvadratinė ir *x*, ir *y* atžvilgiu. Kvadratinę lygtį $x^2 - 2yx + (3y^2 - 19) = 0$ spręskime x atžvilgiu. Jos diskriminantą pažymėkime $D(y)$. Gausime, kad

$$D(y) = (-2y)^2 - 4(3y^2 - 19) = 76 - 8y^2 = 4(19 - 2y^2)$$

yra sveikojo skaičiaus kvadratas tik tada, kai $y = \pm 3$. Jeigu $|y| \geq 4$, diskriminantas $D(y) < 0$.

Kai $y = 3$, tai, išsprendę kvadratinę lygtį $x^2 - 6x + 8 = 0$, gausime $x = 2$ arba $x = 4$. Jei $y = -3$, tai turėsime kvadratinę lygtį $x^2 + 6x + 8 = 0$; jos sprendiniai yra $x = -2$ ir $x = -4$.

Gavome keturis sprendinius: (2; 3), (4; 3), (–2; –3), (–4; –3).

Pitagoro skaičiai. Per geometrijos pamokas jūs tikriausiai sužinojote, kad stačiojo trikampio įžambinės ilgio kvadratas yra lygus statinių kvadratų sumai. Tokie natūraliųjų skaičių trejetai $(x; y; z)$, kurie yra stačiųjų trikampių kraštinių ilgiai, vadinami *Pitagoro skaičiais*.

Išmokime užrašyti visus galimus Pitagoro skaičius. Kitaip sakant, išmokime rasti visus natūraliuosius lygties $x^2 + y^2 = z^2$ sprendinius.

Kad būtų paprasčiau, iš pradžių ieškokime tik tų natūraliųjų skaičių *x*, *y* ir z trejetų, tenkinančių lygtį $x^2 + y^2 = z^2$, kuriuose skaičiai yra *poromis tarpusavyje pirminiai* (bet kurių dviejų skaičių *DBD* lygus 1).

Aišku, kad abu skaičiai *x* ir *y* negali būti lyginiai. Bet jie negali būti ir nelyginiai abu vienu metu, nes, tarę, kad $x = 2k - 1$ ir $y = 2l - 1$, gautume:

$$z^2 = x^2 + y^2 = (2k - 1)^2 + (2l - 1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 + 4l^2 - 4l + 1 =$$

$$= 4(k^2 + l^2 - k - l) + 2.$$

Šio skaičiaus dalybos iš 4 liekana lygi 2 ir tai reiškia, kad z nėra natūralusis skaičius. Darydami tokią išvada, remiamės savybe, kad natūraliojo skaičiaus z kvadrato dalybos iš 4 liekana gali būti tik 0 arba 1. Ši savybė lengvai įrodoma: jei $z = 2m$, tai $z^2 = 4m^2$; jei $z = 2m - 1$, tai

$$z^2 = (2m-1)^2 = 4m^2 - 4m + 1 = 4(m^2 - m) + 1.$$

Taigi įsitikinome, kad vienas iš skaičių x ir y turi būti lyginis, o kitas nelyginis. Tegu y yra lyginis. Bet tada ir z turi būti nelyginis skaičius.

Tarkime, kad $x = 2k - 1,\ y = 2l,\ z = 2n - 1.$ Iš lygybės $x^2 + y^2 = z^2$ gauname:

$$y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x).$$

Tada

$$4l^2 = (2n + 2k - 2)(2n - 2k) = 4(n + k - 1)(n - k),$$

$$l^2 = (n + k - 1)(n - k).$$

Pažymėkime $u = n + k - 1,\ v = n - k$ ir įsitikinkime, kad u ir v yra tarpusavyje pirminiai skaičiai. Jei $d,\ d \neq 1$, būtų jų bendras daliklis, tai jis būtų ir skaičių $u + v$ ir $u - v$ daliklis. Bet

$$u + v = (n + k - 1) + (n - k) = 2n - 1 = z,$$

$$u - v = (n + k - 1) - (n - k) = 2k - 1 = x,$$

todėl d negali būti skaičių $u + v$ ir $u - v$ bendras daliklis (nes x ir z yra tarpusavyje pirminiai skaičiai).

Kadangi $l^2 = (n + k - 1)(n - k) = uv,$ o u ir v yra tarpusavyje pirminiai skaičiai, tai u ir v turi būti kurių nors natūraliųjų skaičių kvadratai. Tegu $u = a^2,\ v = b^2.$ Tada $l = ab$ ir todėl $y = 2ab.$

Dabar raskime x ir z išraiškas skaičiais a ir b:

$$x = u - v = a^2 - b^2,$$

$$z = u + v = a^2 + b^2.$$

Vadinasi, natūraliųjų skaičių trejetas

$$(a^2 - b^2;\ 2ab;\ a^2 + b^2)$$

yra Pitagoro skaičių trejetas.

Dar aptarkime atvejį, kai x, y ir z nėra poromis tarpusavyje pirminiai skaičiai. Tarkime, pavyzdžiui, kad d, $d > 1$, yra y ir z bendras daliklis. Tada y ir z galima užrašyti taip: $y = dy_1$, $z = dz_1$; čia y_1 ir z_1 – tarpusavyje pirminiai natūralieji skaičiai. Todėl

$$x^2 = z^2 - y^2 = (dz_1)^2 - (dy_1)^2 = d^2(z_1^2 - y_1^2).$$

Pažymėję $x_1 = \sqrt{z_1^2 - y_1^2}$, gausime, kad $x = dx_1$. Vadinasi, jei $(x; y; z)$ yra Pitagoro skaičių trejetas, tai $(x_1; y_1; z_1)$ yra poromis tarpusavyje pirminių Pitagoro skaičių trejetas, ($x = dx_1$, $y = dy_1$, $z = dz_1$). Taigi mums užtenka mokėti rasti tarpusavy pirminių Pitagoro skaičių trejetus.

Pasirinkę bet kuriuos du natūraliuosius skaičius a ir b (esant sąlygai $a > b$) visada turėsime Pitagoro skaičių trejetą

$$(a^2 - b^2; 2ab; a^2 + b^2), \quad a \in N, \quad b \in N, \quad a > b,$$

Remiantis lygties $x^2 + y^2 = z^2$ simetriškumu x ir y atžvilgiu, galima padaryti išvadą, kad trejetas

$$(2ab; a^2 - b^2; a^2 + b^2), \quad a \in N, b \in N, a > b,$$

taip pat yra Pitagoro skaičių trejetas.

Pavyzdžiui, pasirinkę $a = 5$, $b = 2$, gausime du Pitagoro skaičių trejetus: (20; 21; 29) ir (21; 20; 29).

Čia apžvelgėme tik nedidelę diofantinių lygčių teorijos dalį. Yra ir daugiau būdų bei gudrybių, kurias taikant galima spręsti lygtis sveikaisiais skaičiais arba parodyti, kad jos neturi sveikųjų sprendinių. Norintys apie tai sužinoti daugiau, gali perskaityti šauniųjų Lietuvos olimpiadininkų *Matematikos knygoje* (ją galima parsisiųsti internetu iš www.olimpiados.lt) Daugiau informacijos apie Pitagoro skaičius galima rasti 2010 metų 5-ojoje LJMM užduotyje (http://www.mif.vu.lt/ljmm/ užduočių archyve). Sprendžiant užduotis, pravers išnagrinėti pavyzdžiai ir patarimai.

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Raskite visus sveikuosius skaičius, kurių kvadratų skirtumas lygus 15.

2. Išspręskite lygtį $x^2 = y^2 - 3y + 7$ sveikaisiais skaičiais.

3. Išspręskite lygtį $x - y + 35 = xy$ sveikaisiais skaičiais.

4. Išspręskite diofantinę lygtį $x^3 - y^3 = 56$.
Patarimas: pasinaudokite kubų skirtumo formule.

5. Skaičių 65 užrašykite dviejų natūraliųjų skaičių kvadratų suma visais įmanomais būdais.

6. Raskite visus sveikuosius lygties $2x^4y^4 = x^3 + y^3$ sprendinius.

7. Išspręskite diofantinę lygtį $x^2 - 3xy + 4y^2 = 29$.

8. Raskite visus sveikųjų skaičių trejetus $(x; y; z)$, kuriems esant teisinga lygybė

$$(x + y)(y + z)(z + x) = 140.$$

9. Raskite visus sveikuosius tarpusavyje pirminius skaičius x ir y, kurių kvadratų skirtumas yra lygus sveikojo skaičiaus kubui.

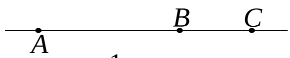
10. Išspręskite diofantinę lygtį $x^2 + 2y^2 = z^2$, kurioje x, y, z yra tarpusavyje pirminiai sveikieji skaičiai.

III. EKSTREMUMAI GEOMETRIJOJE

Edmundas Mazėtis
(Lietuvos edukologijos universitetas)

Matematikos pamokose Jūs ne kartą tyrinėjote įvairius ekstremumus (t. y. mažiausias ar didžiausias įvairių reiškinių reikšmes). Atlikdami šią užduotį, pagrindinį dėmesį skirsite geometriniams ekstremumams, t. y. nagrinėsite tokias geometrines figūras, kurios išsiskiria iš visos figūrų aibės tuo, kad tam tikrų jas apibūdinančių dydžių (pvz., atkarpų ilgių, figūrų plotų, kampų didumų ir pan.) reikšmės yra mažiausios arba didžiausios. Geometrinių ekstremumų uždavinius galima spręsti ne tik įprastai didžiausių ar mažiausių reikšmių radimo metodais, bet ir taikant žinomas geometrinių figūrų savybes.

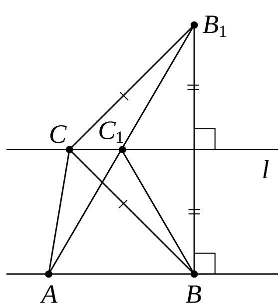
1. Trikampio nelygybė. Bet kuri trikampio kraštinė yra trumpesnė už kitų dviejų kraštinių sumą, t. y. trikampiui ABC yra teisingos nelygybės $AB < AC + BC$, $AC < AB + BC$, $BC < AC + AB$. Iš šių nelygybių seka, kad atkarpų AB ir BC suma įgyja mažiausią reikšmę, kai taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje, o taškas B yra tarp taškų A ir C (1 pav.). Kitaip tariant, atkarpos, jungiančios du plokštumos taškus, ilgis yra mažesnis už bet kurios tuos taškus jungiančios laužtės ilgį.



1 pav.

Dažnai uždavinių sprendime taikoma kita žinoma nelygybė: stačiojo trikampio įžambinė ilgesnė už jo statinį, šią savybę galima suformuluoti ir taip: jei statmuo ir pasviroji tiesei l nuleisti iš to paties taško, tai statmuo trumpesnis už pasvirtąją.

1 pavyzdys. Iš visų trikampių, turinčių vienodo ilgio kraštinę ir vienodą plotą, mažiausias perimetras yra lygiašonio trikampio. Įrodysime tai.



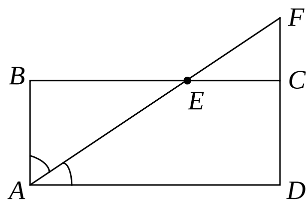
2 pav.

Sakykime, kad visų nagrinėjamų trikampių bendroji kraštinė yra atkarpa AB. Kadangi visų trikampių plotai lygūs, tai lygios aukštinės, nubrėžtos į kraštinę AB, todėl trečioji bet kurio iš trikampių viršūnė C yra tiesėje l, lygiagrečioje su tiese AB (2 pav.). Sakykime, kad taškas B_1 yra simetriškas taškui B tiesės l atžvilgiu, tuomet bet kuriam trikampiui ABC jo perimetras

$$P = AB + BC + AC = AB + AC + CB_1.$$

Kadangi P įgyja mažiausią reikšmę tada ir tik tada, kai mažiausia yra suma $AC + CB_1$, t. y. kai taškas C yra atkarpoje AB_1. Taigi mažiausias perimetras yra trikampio ABC_1, čia C_1 yra tiesių AB_1 ir l sankirtos taškas. Kadangi taškas C_1 yra atkarpos AB_1 vidurio taškas, tai $AC_1 = C_1B_1 = C_1B$, t. y. trikampis AC_1B – lygiašonis.

2. Aritmetinis ir geometrinis vidurkiai. Gerai žinoma teigiamųjų skaičių aritmetinių ir geometrinių vidurkių savybė: jei $a_1, a_2, ..., a_n$ – teigiamieji skaičiai, tai $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$, lygybė gaunama tik tada, kai $a_1 = a_2 = ... = a_n$. Kai $n = 2$, geometrinis šios nelygybės įrodymas pateiktas 3 pav. Stačiakampio $ABCD$ kraštinės $AB = x$, $CD = y$, kampo A pusiaukampinė tiesę BC kerta taške E, o tiesę CD – taške F. Tuomet $BE = AB = x$, $AD = DF = y$, trikampių ABE ir AFD plotai lygūs $\frac{1}{2}x^2$ ir $\frac{1}{2}y^2$. Bet



3 pav.

šių plotų suma yra ne mažesnė už stačiakampio plotą xy, t. y. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \geq xy$. Jei $x^2 = a$, $y^2 = b$, tai ši nelygybė tampa tokia $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Aritmetinių ir geometrinių vidurkių savybę galima suformuluoti ir kitaip: jei teigiamųjų skaičių $a_1, a_2, ..., a_n$ suma yra pastovi, tai jų sandauga įgyja didžiausią reikšmę, kai visi tie skaičiai lygūs; jei teigiamųjų skaičių $a_1, a_2, ..., a_n$ sandauga yra pastovi, tai jų suma mažiausia, kai tie skaičiai lygūs.

2 pavyzdys. Atkarpos ilgis lygus a. Perpjauname ją į dvi dalis ir sukonstruojame statųjį trikampį, kurio statiniai lygūs gautosioms atkarpos dalims. Surasime į kokio ilgio atkarpas reikia padalyti duotąją atkarpą, kad gautojo trikampio plotas būtų didžiausias.

Tarkime, kad atkarpą *a* padalijome į dvi dalis, kurių ilgiai lygūs *x* ir *y*, t. y. $x+y=a$. Gautojo stačiojo trikampio plotas $S=\frac{1}{2}xy$. Kadangi teigiamų skaičių *x* ir *y* suma pastovi, tai jų sandauga $xy.=2S$ įgyja didžiausią reikšmę, kai tie skaičiai lygūs, t. y. $x=y=\frac{a}{2}$. Taigi atkarpą reikia padalyti į dvi lygias dalis.

3 pavyzdys. Trikampio plotas lygus *S*. Rasime, kokią mažiausią reikšmę įgyja jo perimetras.

Pagal Herono formulę

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,,$$

čia $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ – trikampio pusperimetris. Akivaizdu, kad yra teisinga lygybė

$$a+b+c=2p=\frac{3}{2}\left(\frac{p}{3}+p-a+p-b+p-c\right).$$

Taigi teigiamųjų skaičių $\frac{p}{3}$, $p-a$, $p-b$ ir $p-c$ sandauga yra pastovi (ji lygi $\frac{1}{3}S^2$), todėl jų suma įgyja mažiausią reikšmę, kai jie lygūs, t. y. kai $\frac{p}{3}=p-a=p-b=p-c.$ Iš čia seka, kad $a=b=c$ ir

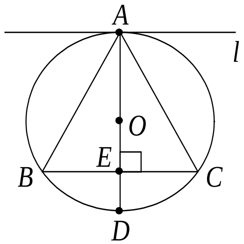
$$S^2=p\cdot\left(\frac{p}{3}\right)^3=\frac{p^4}{27},$$

todėl $2p=2\sqrt[4]{27S^2}$ – tai ir yra mažiausioji trikampio perimetro reikšmė.

4 pavyzdys. Per apskritimo, kurio spindulys 10, tašką nubrėžta apskritimo liestinė. Rasime, kokiu atstumu nuo taško *A* reikia nubrėžti apskritimo stygą *BC*, lygiagrečią su nubrėžta liestine, kad trikampio *ABC* plotas būtų didžiausias.

Kadangi tiesė BC lygiagreti su liestine l, tai skersmuo AD yra statmenas ir tiesei l, ir tiesei BC (4 pav.). Taigi atkarpa AE yra trikampio ABC aukštinė ir pusiaukraštinė, taigi trikampis ABC – lygiašonis. Sakykime, kad $AE = h$, tuomet $ED = 20 - h$. Pagal apskritimo stygų, einančių per vieną tašką E, savybę

$$AE \cdot ED = BE \cdot EC = \left(\frac{1}{2}BC\right)^2.$$



4 pav.

Iš čia

$$h(20-h) = \left(\frac{1}{2}BC\right)^2, \text{ t. y. } \frac{1}{2}BC = \sqrt{h(20-h)}.$$

Trikampio ABC plotas

$$S = \frac{1}{2}BC \cdot AE = \sqrt{h(20-h)} \cdot h = \sqrt{h^3(20-h)}.$$

Iš čia $S^2 = h^3(20-h) = 27\left(\frac{h}{3}\cdot\frac{h}{3}\cdot\frac{h}{3}\cdot(20-h)\right)$. Teigiamų skaičių $\frac{h}{3}$, $\frac{h}{3}$, $\frac{h}{3}$ ir $20-h$ suma pastovi (ji lygi 20), taigi jų sandauga didžiausia, kai tie skaičiai lygūs, t. y. $\frac{h}{3} = 20 - h$. Iš čia $h = 15$,

$$\frac{1}{2}BC = \sqrt{15\cdot(20-15)} = 5\sqrt{3} \text{ ir } S = \frac{1}{2}BC \cdot AE = 75\sqrt{3}.$$

3. Trigonometrijos taikymai. Sprendžiant geometrinius ekstremumų uždavinius, dažnai tenka taikyti gerai žinomas trigonometrinių funkcijų savybes:

1) kampui α didėjant nuo 0 iki $\frac{\pi}{2}$, jo sinusas $\sin\alpha$ didėja nuo 0 iki 1; kampui α didėjant nuo $\frac{\pi}{2}$ iki π, jo sinusas mažėja nuo 1 iki 0;

2) kampui α didėjant nuo 0 iki $\frac{\pi}{2}$, jo kosinusas $\cos\alpha$ mažėja nuo 1 iki 0; kampui α didėjant nuo $\frac{\pi}{2}$ iki π, jo kosinusas mažėja nuo 0 iki –1.

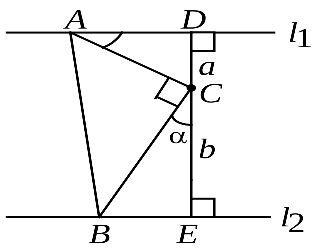
Įrodysime, kad reiškinio $\sin\alpha + \cos\alpha$ didžiausioji reikšmė $\sqrt{2}$ gaunama tada, kai $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$. Tikrai

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \le \sqrt{2};$$

lygybė galima tik tada, kai $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) = 1$, t. y. kai $\dfrac{\pi}{4} + \alpha = \dfrac{\pi}{2}$ ir $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

5 pavyzdys. Duotos dvi lygiagrečios tiesės l_1 ir l_2 bei taškas *C* tarp jų, nutolęs nuo šių tiesių atitinkamai *a* ir *b*. Iš visų stačiųjų trikampių, kurių stačiojo kampo viršūnė yra taškas *C*, o kitos dvi viršūnės yra tiesėse l_1 ir l_2, rasime mažiausio ploto trikampį. 5 pav. pavaizduotas trikampis *ABC*, kurio viršūnės *A* ir *B* yra atitinkamai tiesėse l_1 ir l_2. Nubrėžkime tiesę *ED*, einančią per tašką *C*, statmeną tiesėms l_1 ir l_2 ir pažymėkime



5 pav.

$\angle ECB = \alpha$, α – smailusis kampas. Tuomet $\angle ACD = 90^\circ - \alpha$ ir $\angle DAC = \alpha$. Iš stačiųjų trikampių *ADC* ir *BEC* randame

$$AC = \frac{a}{\sin\alpha},$$

$$BC = \frac{b}{\cos\alpha}.$$

Tuomet trikampio *ABC* plotas

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{ab}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{ab}{\sin 2\alpha}.$$

Kadangi $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, tai $0^\circ < 2\alpha < 180^\circ$, o intervale $(0^\circ, 180^\circ)$

sinusas įgyja didžiausią reikšmę lygią 1, kai $2\alpha = 90^\circ$, t. y. kai $\alpha = 45^\circ$. Taigi plotas S mažiausias, kai $\alpha = 45^\circ$, ir jo mažiausia reikšmė $S = ab$. Tuomet ieškomojo trikampio kraštinės

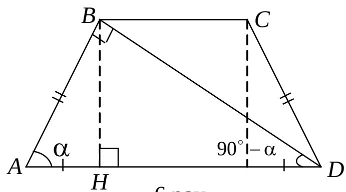
$$AC = \frac{a}{\sin 45^\circ} = a\sqrt{2}\,,\ BC = \frac{b}{\cos 45^\circ} = b\sqrt{2}\,.$$

6 pavyzdys. Lygiašonės trapecijos ilgesnysis pagrindas lygus l, smailusis kampas lygus α, trapecijos įstrižainė statmena jos šoninei kraštinei. Rasime, su kuria α reikšme trapecijos plotas yra didžiausias ir apskaičiuosime šį didžiausią plotą.

Sakykime, kad trapecijos $ABCD$ pagrindas $AD = l$, įstrižainė BD statmena šoninei kraštinei AB (6 pav.). Nubrėžkime statmenį BH į pagrindą AD. Kadangi

$$AH = \frac{AD - BC}{2},\text{ tai}$$

$$HD = AD - AH = \frac{AD + BC}{2}.$$



6 pav.

Taigi trapecijos plotas

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = HD \cdot BH.$$

Iš stačiųjų trikampių ABD ir BHD turime, kad

$$BD = l\sin\alpha\,,$$

$$HD = BD\cos(90^\circ - \alpha) = l\sin^2\alpha\,,$$

$$BH = BD\sin s(90^\circ - \alpha) = l\sin\alpha\cos\alpha.$$

Taigi

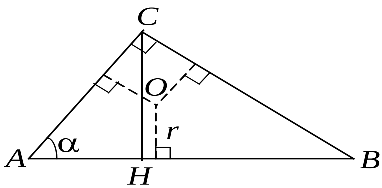
$$S = l^2\sin^3\alpha\cos\alpha = l^2\sqrt{\sin^6\alpha\cdot\cos^2\alpha} =$$

$$= l^2\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{3}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{3}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{3}\cdot\cos^2\alpha\cdot 27}.$$

Kadangi teigiamųjų skaičių $\frac{\sin^2\alpha}{3}$, $\frac{\sin^2\alpha}{3}$, $\frac{\sin^2\alpha}{3}$ ir $\cos^2\alpha$ suma pastovi (ji lygi 1), tai jų sandauga įgyja didžiausią reikšmę tik tada, kai jie lygūs, t. y. kai $\dfrac{\sin^2\alpha}{3}=\cos^2\alpha$. Iš čia $\operatorname{tg}^2\alpha=3$, $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$ ir $\alpha=60^\circ$. Taigi didžiausias plotas

$$S=l^2\sin^3 60^\circ\cdot\cos 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}\,l^2}{16}.$$

7 pavyzdys. Stačiojo trikampio aukštinės nubrėžtos į įžambinę, ilgis lygus h, o trikampio smailusis kampas lygus α. Rasime mažiausio spindulio apskritimą, įbrėžtą į šį trikampį ir su kuria α reikšme mažiausiojo spindulio reikšmė įgyjama.



7 pav.

Sakykime, kad stačiojo trikampio ABC $(\angle C=90^\circ)$ aukštinė $CH=h$, kampas $\angle A=\alpha$, taškas O – įbrėžto į trikampį apskritimo centras, r – jo spindulys (7 pav.). Turime

$$AC=b=\frac{h}{\sin\alpha},\quad BC=a=\frac{h}{\cos\alpha},$$

todėl

$$c^2=AB^2=a^2+b^2=\frac{h^2}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}.$$

Trikampio ABC plotui S turime

$$S=\frac{1}{2}ab=pr,$$

čia $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$ – trikampio pusperimetris. Taigi

$$r=\frac{ab}{a+b+c}=\frac{\dfrac{h^2}{\cos\alpha\sin\alpha}}{\dfrac{h}{\sin\alpha\cos\alpha}+\dfrac{h}{\sin\alpha}+\dfrac{h}{\cos\alpha}}=\frac{h}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}.$$

Taigi įbrėžto apskritimo spindulys r mažiausią reikšmę įgyja kai trupmenos vardiklis $1+\cos\alpha+\sin\alpha$ yra didžiausias. Kaip įrodyta, reiškinys $\cos\alpha + \sin\alpha$ didžiausią reikšmę lygią $\sqrt{2}$ įgyja, kai $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Taigi mažiausio spindulio $\frac{h}{1+\sqrt{2}}$ įbrėžtas apskritimas gaunamas tada, kai trikampis *ABC* – lygiašonis.

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Keturi kaimai *A*, *B*, *C* ir *D* yra iškiliojo keturkampio viršūnės. Reikia pastatyti mokyklą, kad atstumų nuo mokyklos iki kaimų suma būtų mažiausia. Kuriame taške bus mokykla?

2. Apskritimo viduje duotas taškas *M*. Kaip reikia per tašką *M* nubrėžti mažiausiojo ilgio apskritimo stygą?

3. Iš visų stačiųjų trikampių, kurių plotas *S*, raskite tą, apie kurį apibrėžto skritulio plotas yra mažiausias. Nurodykite, kokia to mažiausio skritulio ploto reikšmė.

4. Iš visų trikampių, kurių perimetras $2p$, raskite didžiausio ploto trikampį. Kam lygus šis didžiausias plotas?

5. Į stačiąją trapeciją, kurios pagrindų ilgiai 24 ir 8, o aukštinės ilgis 12, įbrėžtas didžiausio ploto stačiakampis taip, kad dvi jo viršūnės yra ilgesniajame pagrinde, o kitos dvi – šoninėse kraštinėse. Raskite stačiakampio kraštinių ilgius.

6. Stačiojo trikampio statinių suma lygi 8. Ar gali šio trikampio įžambinės ilgis būti lygus 5?

7. Stačiojo trikampio smailusis kampas lygus α. Su kuria α reikšme apie trikampį apibrėžto ir į jį įbrėžto apskritimų spindulių santykis įgyja mažiausią reikšmę?

8. Trapecijos dvi šoninės kraštinės ir mažesnysis pagrindas lygus *a*, o smailusis kampas prie pagrindo lygus α. Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti šios trapecijos plotas? Su kuria α reikšme ši reikšmė įgyjama.

9. Stačiakampį žemės sklypą, kurio plotas lygus *S*, reikia aptverti tvora ir po to tvora jį perskirti į du lygius sklypus. Kokie turi būti sklypo matmenys, kad visos tvoros ilgis būtų mažiausias?

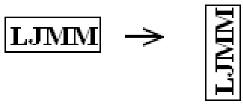
10. Lygiašonio trikampio šoninės kraštinės pusiaukraštinė lygi *m*, ji su pagrindu sudaro kampą β. Su kuria β reikšme trikampio plotas yra didžiausias?

IV. HOMOTETIJA

Aivaras Novikas
(Vilniaus universitetas)

Homotetija (graik. ὁμός – „vienodas“, θετος – „padėtas“) yra viena iš plokštumos transformacijų. Atlikdami plokštumos transformaciją, kiekvieną plokštumos tašką atvaizduojame į kitą jos tašką, tam tikru specialiu būdu pasirinktą. Gerai žinomas plokštumos transformacijos pavyzdys yra simetrinis atvaizdis tiesės atžvilgiu: pasirenkame bet kokią plokštumos tiesę ir kiekvieną plokštumos tašką pervedame į jam tos tiesės atžvilgiu simetrišką. Tada vietoje vieno plokštumos vaizdo matome kitą – lyg veidrodinį atspindį (žr. 1 pav.). Antrajame paveikslėlyje atlikome kitokią, posūkio, transformaciją: pasirinkome vieną plokštumos tašką ir pasukome aplink jį visus plokštumos taškus 90° kampu prieš laikrodžio rodyklę. Pastebėkime, kad abiem atvejais užrašo „LJMM“ forma ir dydis nepasikeitė – pakito tik jo padėtis plokštumoje. Galima sugalvoti ir transformacijų, kurios keistų plokštumos figūrų (žinoma, geometrijoje paprastai nagrinėjami trikampiai, apskritimai ir pan., o ne raidės) formą ir/ar dydį (kaip 3 pav.).

1 pav.



2 pav.

3 pav.

Kaipgi pakinta plokštumos vaizdas, atliekant homotetijos transformaciją? Pradžioje griežtai ją apibrėžkime.

Kiekviena homotetija yra susijusi su fiksuotu plokštumos tašku O, kuris yra vadinamas *homotetijos centru*, ir fiksuotu realiuoju skaičiumi $k \neq 0$, kuris yra vadinamas *homotetijos koeficientu*.

Apibrėžimas. *Homotetija vadinama plokštumos transformacija, kiekvieną plokštumos tašką* A *pervedanti į tokį tašką* A'*, kuris tenkina lygybę* $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$.

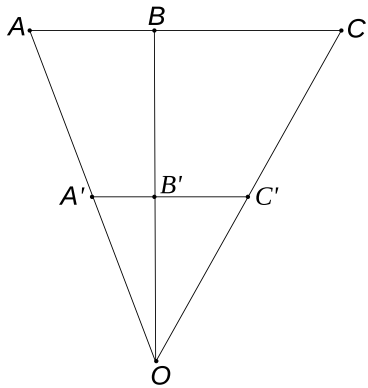
Dabar pamėginkime suvokti geometriškai, ką reiškia toks apibrėžimas. Kas atsitinka su tašku A? Į ką jis pervedamas? Apibrėžimas nurodo mums sujungti taškus O ir A kryptine atkarpa, vektoriumi, tada padauginti jį iš skaičiaus. Naujojo vektoriaus su pradžia taške O galas ir bus naujasis taškas A'. O kas atsitinka dauginant vektorių iš skaičiaus? Jei $k > 0$, vektoriaus kryptis nepakinta, o ilgis padidėja k kartų. Jei $k < 0$, vektoriaus kryptis pakinta į priešingą, o ilgis padidėja $|k| = -k$ kartų. Abiem atvejais trys taškai O, A, A' lieka vienoje tiesėje, tik A' arba pasilieka toje pačioje pusėje nuo taško O, kaip ir taškas A, arba atsiduria priešingoje pusėje – priklausomai nuo skaičiaus k ženklo. Be to, kai $|k| > 1$, taškas nutolsta nuo homotetijos centro, o kai $|k| < 1$, priartėja prie jo. Atidžiau panagrinėkime atvejį $|k| = 1$. Lengva matyti, kad jei $k = 1$, tai plokštumos taškai lieka savo vietoje: $A' = A$. Su plokštuma tiesiog nieko neatsitinka. Jei $k = -1$, tai A' yra taškas, simetriškas taškui A homotetijos centro atžvilgiu, t.y. homotetija yra ne kas kita, kaip simetrinis atvaizdis taško atžvilgiu.

Dabar įrodykime keletą homotetijos savybių. Homotetijos centrą ir koeficientą visur toliau žymėsime O ir k, jei kitaip nepasakyta.

1 teiginys. Tris taškus, esančius vienoje tiesėje, homotetija perveda į tris taškus, vėl esančius vienoje tiesėje. Be to, taškas, esantis tiesėje tarp kitų dviejų, taip ir lieka viduriniu.

Įrodymas. Tuos tris taškus pažymėkime A, B, C (žr. 4 pav. – čia turime atvejį, kai $k > 0$). Taškai, į kuriuos jie pervedami, A', B', C', pagal homotetijos apibrėžimą tenkina lygybes

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = k .$$



4 pav.

Kadangi $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$, tai trikampiai OAB ir $OA'B'$ yra panašūs (pagal dvi proporcingas kraštines ir bendrą kampą tarp jų). Lygiai taip pat panašūs yra ir trikampiai OBC ir $OB'C'$. Todėl

$$\angle OBA = \angle OB'A' \text{ ir } \angle OBC = \angle OB'C' .$$

Vadinasi,

$$180° = \angle OBA + \angle OBC = \angle OB'A' + \angle OB'C' = \angle A'B'C' .$$

Tai ir įrodo, kad taškai A', B', C' yra vienoje tiesėje. Taškas B' yra vidurinis, nes visa tiesė OB eina tarp tiesių OA ir OC.

Mes išnagrinėjome atvejį, kai $k > 0$. Antrasis atvejis nagrinėjamas visiškai analogiškai.

Iš teiginio iš karto gauname tokią išvadą.

Išvada. *Homotetija tiesę perveda į tiesę, o atkarpą į atkarpą.*

Naują geometrinę figūrą, gautą iš pradinės atlikus transformaciją, vadinsime pradinės figūros *vaizdu*. Taigi tiesės vaizdas visada bus tiesė.

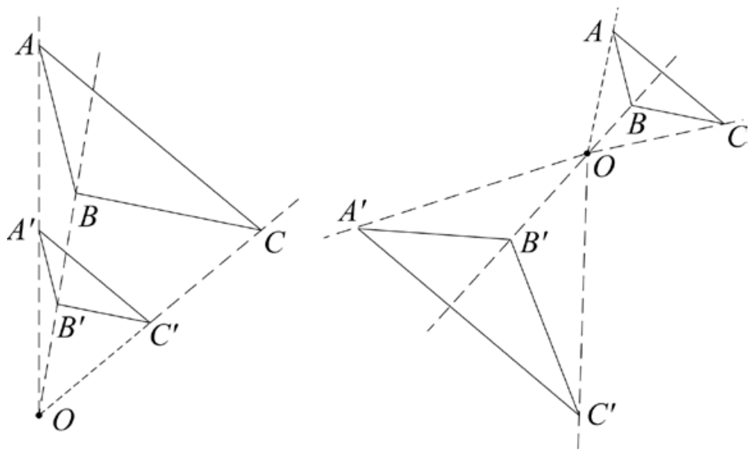
Tarp senos ir naujos atkarpų yra toks svarbus ryšys:

2 teiginys. Atkarpą homotetija perveda į $|k|$ kartų ilgesnę atkarpą, lygiagrečią su pradine.

Įrodymas. Nagrinėkime atkarpą AB, pervedamą į atkarpą $A'B'$ (žr. 5 pav.). Jau žinome, kad $\angle OBA = \angle OB'A'$. Tad iš karto gauname, kad $AB \parallel A'B'$ (pagal atitinkamuosius kampus). Be to, trikampiai OAB ir $OA'B'$ yra panašūs, o panašumo koeficientas lygus

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k\ .$$

Atvejis, kai $k < 0$, vėlgi nagrinėjamas analogiškai.



$k = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $k = -2$

5 pav.

Kadangi homotetija tieses ir atkarpas perveda į lygiagrečias tieses ir atkarpas, tai ji kampus tarp jų palieka nepakeistus. Vadinasi, trikampį ji perveda į trikampį su tais pačiais kampais (ir kraštinėmis, padidintomis $|k|$ kartų).

Išvada. *Trikampį homotetija perveda į panašų trikampį, o panašumo koeficientas lygus homotetijos koeficiento moduliui.*

Ši išvada galioja ne vien trikampiams. Iš tiesų, homotetija bet kokią figūrą perveda į *panašią*, t.y. tos pačios formos, tik galbūt didesnę arba mažesnę (o tiksliau – lygiai $|k|$ kartų didesnę). Taigi galioja ir toks teiginys.

3 teiginys. Apskritimą homotetija perveda į apskritimą su $|k|$ kartų didesniu spinduliu.

Kaip homotetija transformuoja plokštumos figūrą, kai $k=\frac{1}{2}$ ir $k=-2$, parodyta 5 paveikslėlyje.

Būtų galima užduoti atvirkščią klausimą: o ar visada turint dvi panašias figūras, atsiras homotetija, pervedanti vieną iš jų į kitą? Ne, ne visada – nepamirškime, kad homotetija išlaiko atitinkamus taškus jungiančių atkarpų lygiagretumą, todėl figūros turi užimti ne bet kokią padėtį viena kitos atžvilgiu. Pvz., panašūs trikampiai gali būti *homotetiški* vienas kito atžvilgiu, tik kai jų atitinkamos kraštinės lygiagrečios.

Bet gal to lygiagretumo pakanka? Nagrinėkime tokius du panašius trikampius ABC ir $A'B'C'$, kad $AB \parallel A'B', BC \parallel B'C', CA \parallel C'A'$, ir ieškokime homotetijos, kuri pervestų vieną trikampį į kitą. Jei tos homotetijos, taškus A, B, C pervedančios atitinkamai į taškus A', B', C', centras yra O, tai (ką jau esame pastebėję) taškai A, A', O turėtų būti vienoje tiesėje. Lygiai taip pat vienoje tiesėje turi būti $B, B', O.$ Vadinasi, vienintelė kandidatūra į homotetijos centrus O yra tiesių AA' ir BB' sankirta (laikykime, kad šios tiesės egzistuoja – jei, tarkime, $A = A'$, turime dar paprastesnę situaciją). Taigi šios tiesės turi kirstis. Taip nebus tik vienu atveju: kai trikampiai lygūs, o trikampis $A'B'C'$ gaunamas tiesiog lygiagrečiai pastūmus trikampį $A'B'C'$, dvi tiesės bus lygiagrečios, tad ir homotetija neegzistuos. Visais kitais atvejais (t.y. kai trikampiai panašūs, bet nelygūs, arba kai trikampiai lygūs, bet vieno iš kito nebus galima gauti lygiagrečiai pastūmus) tiesės kirsis. Fiksavę sankirtos tašką O, visada galėsime parinkti tokį skaičių k, kad $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$. Iš tiesų, tereikia absoliutinę k reikšmę imti lygią $\dfrac{OA'}{OA}$, o šio skaičiaus ženklą parinkti priklausomai nuo to, ar taškai A ir A' yra vienoje pusėje nuo taško O, ar skirtingose.

Homotetija su tokiais O bei k ir bus reikiama. Kodėl ji turėtų tašką B pervesti į tašką B'? Tarkime, ji tašką B perveda į tašką B''. Iš vienos pusės, jis turi priklausyti tiesei $OB = BB'$. Iš kitos pusės, turi būti išlaikytas atkarpų lygiagretumas: $A'B'' \parallel AB$. Taigi B'' turi priklausyti tiesei, einančiai per tašką A' ir lygiagrečiai su AB, o tokia tiesė yra tiesė $A'B'$. Vadinasi, taškas B'' yra tiesių BB' ir $A'B'$ sankirta. Bet šios tiesės kertasi taške B', tad $B'' = B'$. Analogiškai galima įrodyti, kad taškas C pervedamas į tašką C'. Vieno trikampio viršūnės pervedamos į kito trikampio viršūnes, todėl ir vieno trikampio kraštinės, jungiančios atitinkamas viršūnes, pervedamos į kito trikampio kraštines. Taigi galioja toks teiginys:

4 teiginys. Jei du trikampiai yra panašūs, o jų atitinkamos kraštinės lygiagrečios, tai arba egzistuoja homotetija, pervedanti vieną trikampį į kitą, arba tie trikampiai yra lygūs ir vienas iš jų gaunamas iš kito lygiagrečiai jį pastūmus.

Homotetijos centras tokiu atveju yra atitinkamas viršūnes jungiančių tiesių sankirta, o koeficiento modulis sutampa su tų trikampių panašumo koeficientu.

Analogiški teiginiai galioja ir kitoms geometrinėms figūroms. Pavyzdžiui:

5 teiginys. Bet kuriems dviems apskritimams c_1 ir c_2 egzistuoja homotetija, pervedanti vieną apskritimą į kitą.

Homotetijos koeficientas gali būti paimtas lygus apskritimų spindulių santykiui, o jos centrą galima rasti kaip tiesių, jungiančių atitinkamus lygiagrečių skersmenų galus, sankirtą. Tiesa, kaip ir trikampiams ta sankirta turi egzistuoti. Tai kodėl teiginys galioja ir vienodiems apskritimams, kuriems tiesės nesikirs? Kokia bus tinkama homotetija vienodiems apskritimams, siūlome skaitytojui sugalvoti savarankiškai.

(Beje, nevienodiems apskritimams homotetijų bus net dvi. Kodėl jų bus dvi ne apskritimams, o tiesiog atkarpoms, siūlo sugalvoti 3 uždavinys.)

Dabar panagrinėkime kelis uždavinius.

1 pavyzdys. Tegu duoti taškai $A(2;1)$ ir $B(-4;5)$. Homotetija su centru $O(3;2)$ ir koeficientu $k=-2$ perveda juos atitinkamai į taškus A' ir B'. Tiesiogiai patikrinkime, kad ji atkarpos AB vidurį M perveda į $A'B'$ vidurį M'.

Pradžiai raskime $A'(x_A;x_B)$. Iš homotetijos apibrėžimo žinome, kad $\overrightarrow{OA'}=(-2)\cdot\overrightarrow{OA}$. Užrašykime vektorių koordinates (lygias taškų koordinačių skirtumams):

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{(2-3;1-2)}=\overrightarrow{(-1;-1)} \text{ ir } \overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{(x_A-3;\,y_A-2)}.$$

Taigi $\overrightarrow{(x_A-3;\,y_A-2)}=-2\overrightarrow{(-1;-1)}=\overrightarrow{(2;2)}$. Gauname lygybes $x_A-3=2$, $y_A-2=2$, iš kurių randame $A'=(5;4)$. Raskime

$$M=\frac{A+B}{2}=\frac{(2-4;1+5)}{2}=(-1;3).$$

Toliau siūlome savarankiškai patikrinti, kad $B'=(17;-4)$, o atkarpos $A'B'$ vidurys $M'=(11;0)$. Tikriname, kad taškas M pervedamas į M': $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{(8;-2)}$ ir $(-2)\cdot\overrightarrow{OM}=(-2)\cdot\overrightarrow{(-4;\ 1)}=\overrightarrow{(8;\ -2)}=\overrightarrow{OM'}$.

Homotetija dažnai praverčia nustatant geometrinę taškų vietą.

2 pavyzdys. Tarkime, duoti apskritimas ir bet koks plokštumos taškas *A*. Jei tašką *A* jungsime su visais įmanomais apskritimo taškais atkarpomis, kur atsidurs tų atkarpų vidurio taškai?

Norint tai nustatyti, tereikia pastebėti, kad kiekvienam apskritimo taškui *B* nagrinėjamos atkarpos AB vidurys *C* yra gaunamas iš taško *B* atlikus vis tą pačią homotetiją su centru *A* ir koeficientu $k=\frac{1}{2}$ (nes $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$). Tai reiškia, kad taškų *C* geometrinė vieta yra duotojo apskritimo vaizdas atlikus tą homotetiją. Bet homotetija apskritimą perveda į apskritimą. Taigi atkarpų viduriai sudarys apskritimą (dvigubai mažesnio spindulio).

3 pavyzdys. Pasinaudokime homotetija ir įrodykime gerai žinomą teiginį, kad trikampio pusiaukraštinės kertasi viename taške ir dalija viena kitą santykiu $2:1$.

Tegu duotas trikampis ABC su pusiaukraštinėmis AA', BB', CC'. Kadangi $A'B'$ yra trikampio vidurio linija, tai $A'B' \parallel AB$ ir $A'B' = \frac{1}{2}AB$ (beje, tai savo ruožtu galima įrodyti pasinaudojant homotetija su centru C ir $k = \frac{1}{2}$, kuri perveda A į B' ir B į A', ir pritaikius atkarpoms AB bei $A'B'$ 2 teiginį). Analogiškas savybes tenkina vidurio linijos $B'C'$ ir $C'A'$. Iš šių savybių išplaukia, kad trikampiai ABC ir $A'B'C'$ yra panašūs (panašumo koeficientas $\frac{1}{2}$), o jų atitinkamos kraštinės lygiagrečios. Pagal 4 teiginį egzistuoja homotetija su koeficientu $k = \pm\frac{1}{2}$, trikampį ABC pervedanti į trikampį $A'B'C'$. Jos centrą pažymėkime *M*. Taškas *A*, jo vaizdas A' ir taškas M turi priklausyti vienai tiesei ir $MA' = \frac{1}{2}MA$. Analogiškai ir kitos dvi pusiaukraštinės BB' ir CC' eina per tašką M; be to,

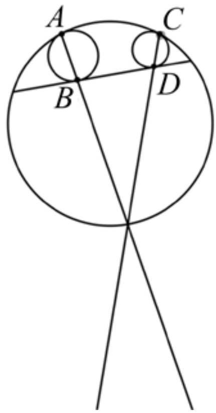
$$AM : MA' = BM : MB' = CM : MC' = 2:1.$$

Įrodymas baigtas, bet dar išsiaiškinkime skaičiaus k ženklą. Žinoma, pusiaukraštinių susikirtimo taškas M yra trikampio ABC viduje. Todėl taškas M yra atkarpos AA' viduje. Kadangi taškas A ir jo vaizdas A' yra skirtingose pusėse nuo homotetijos centro M, tai jos koeficientas yra neigiamas.

4 pavyzdys. Toliau nagrinėkime 3 pavyzdžio situaciją. Įrodysime, kad trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taškas M, aukštinių susikirtimo taškas H bei kraštinių vidurio statmenų susikirtimo taškas (o kartu ir apie trikampį apibrėžto apskritimo centras) O yra vienoje tiesėje.

Į ką 3 pavyzdyje aprašyta homotetija perveda trikampio aukštines? Tiesė pervedama į tiesę. Kas atsitinka su, pvz., tiese AH? Aukštinė eina per tašką A ir yra statmena tiesei BC. Todėl nauja tiesė eis per tašką A' ir, būdama lygiagreti pradinei tiesei AH, taip pat bus statmena tiesei

BC. Tačiau A' yra kraštinės *BC* vidurio taškas, tad AH vaizdas bus ne kas kita, kaip kraštinės *BC* vidurio statmuo. Taigi homotetija aukštines perveda į kraštinių vidurio statmenis, o todėl ir aukštinių sankirtos tašką H – į tų statmenų sankirtos tašką *O*. Taškas H, jo vaizdas *O* ir homotetijos centras *M* turi priklausyti vienai tiesei. Tai ir turėjome įrodyti (ši tiesė yra vienareikšmiškai apibrėžta, jei tik visi trys taškai nesutampa, ir vadinama trikampio *Oilerio tiese*). Kartu įrodėme ir papildomą faktą: kadangi homotetijos koeficientas yra $-\frac{1}{2}$, tai bet kuriame trikampyje taškas *M* yra atkarpoje HO ir dalija ją santykiu $2:1$.



6 pav.

5 pavyzdys. 6 paveikslėlyje du apskritimai liečia didesnįjį apskritimą ir jo stygą. Įrodysime, kad per pažymėtus lietimosi taškus einančios tiesės *AB* ir *CD* bei didysis apskritimas kertasi viename taške.

Tegu tiesė *AB* kerta didįjį apskritimą taške *E*, o tiesė *CD* – taške *F*. Reikia įrodyti, kad $E = F$. Čia nagrinėsime net dvi skirtingas homotetijas. Pagal 5 teiginį egzistuoja homotetijos, pervedančios įbrėžtus apskritimus į didįjį. Tiksliau jas apibrėžkime. Mums prireiks vieno paprasto pastebėjimo:

Apskritimo liestinę homotetija perveda į jo vaizdo liestinę.

Iš tiesų, jei tiesė ir apskritimas prieš taikant homotetijos transformaciją turėjo lygiai vieną bendrą tašką, tai turės ir po jos, nes bendri transformuojamų figūrų taškai lieka bendri.

Imkime vienos homotetijos centru tašką *A*, o jos koeficientą parinkime lygų apskritimų, besiliečiančių taške *A*, spindulių santykiui: $k = \dfrac{R}{r_1}$ (skaitiklyje imkime didesnįjį spindulį). Kodėl būtent tokia homotetija perves mažesnįjį apskritimą į didesnįjį? Taške *A* apskritimai turi bendrą liestinę. Žinoma, homotetija ją palieka nepakeistą (kaip ir bet kurią tiesę, einančią per homotetijos centrą). Iš kitos pusės, šią mažojo apskritimo liestinę homotetija perveda į jo vaizdo liestinę. Vadinasi, mažojo apskritimo vaizdas bus apskritimas, vėl liečiantis tą pačią tiesę taške *A* (ir svarbu pastebėti, kad liekantis toje pačioje liestinės pusėje, nes $k > 0$), o to vaizdo spindulys bus $k \cdot r_1 = \frac{R}{r_1} \cdot r_1 = R$. Nesunku pastebėti, kad apskritimas su tokiu fiksuotu spinduliu, liečiantis fiksuotą tiesę fiksuotame taške A ir esantis vienoje jos pusėje (brėžinyje – iš apačios), yra vienintelis, todėl sutampa su didžiuoju apskritimu.

Analogiškai apibrėžiame ir antrąją homotetiją su centru taške *C*, pervedančią kitą mažąjį apskritimą į didįjį. Pastebėkime, kad pirmoji homotetija tašką *A* perveda į tašką *E*, o antroji – tašką *D* į tašką *F*. Dabar išsiaiškinkime, į ką tos homotetijos perveda pavaizduotąją didžiojo apskritimo stygą (tiksliau – per tą stygą einančią tiesę). Styga yra vieno iš mažųjų apskritimų liestinė taške *B*, todėl atlikus pirmąją homotetiją jos vaizdas bus didžiojo apskritimo liestinė taške *E* (ir pagal 2 teiginį stygos vaizdas bus lygiagretus su ja). Panašiai ir antroji transformacija stygą perves į su ja lygiagrečią didžiojo apskritimo liestinę taške *F*. Kadangi abi tos liestinės yra lygiagrečios su ta pačia styga, tai jos arba yra tarpusavyje lygiagrečios, arba sutampa. Tačiau būdamos lygiagrečiomis to paties apskritimo liestinėmis, jos turėtų būti skirtingose pusėse stygos atžvilgiu, o taip nėra (taškai *E* ir *F* yra vienoje pusėje), tad liestinės taškuose *E* ir *F* sutampa, t.y. jos yra viena ir ta pati liestinė. Vadinasi, $E = F$. Tai ir turėjome įrodyti.

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Homotetijos centras yra $O(1; -3)$, o koeficientas $k = -3$. Raskite taško $A(2; 1)$ vaizdą A'. Kokio taško vaizdas yra pats taškas *A*?

2. Homotetija tašką $A(3; -4)$ perveda į tašką $A'(-5; 12)$. Raskite:
a) homotetijos koeficientą, jei jos centras $O = (0; 0)$;
b) homotetijos centrą, jei jos koeficientas $k = 2$.

3. Duoti keturi taškai $A(0; 1), B(2; -1), C(1; 3), D(0; 4)$. Raskite:
a) bent vieną homotetiją, pervedančią atkarpą AB į atkarpą *CD*;
b) dar vieną tokią homotetiją.
Ar egzistuos norima homotetija, jei imsime tašką $D(0; 5)$? Kodėl?

4. Galioja toks teiginys:

Atlikti iš eilės dvi homotetijas su tokiais koeficientais k_1 *ir* k_2, *kad* $k_1k_2 \neq 1$, *(ir nebūtinai tuo pačiu centru) yra tas pats, kaip atlikti vieną homotetiją su koeficientu* k_1k_2.Patikrinkite šį teiginį taškams $A(0;1)$ ir $B(2;-1)$, kuriems pradžioje pritaikyta homotetija su $O_1=(-1;3)$ ir $k_1=\frac{1}{2}$, o tada homotetija su $O_2=(1;1)$ ir $k_2=-4$.

Nurodymas. Raskite galutinius taškų vaizdus ir naujos homotetijos su koeficientu k_1k_2 *centrą* O *bei patikrinkite, kad ši nauja homotetija tikrai perveda abu taškus į jų vaizdus.*

5. Du apskritimai, esantys vienas kito išorėje, liečiasi taške *K*. Tiesė l vieną apskritimą kerta taškuose *K* ir *A*, o kitą – taškuose *K* ir *B*. Vieno apskritimo liestinę taške *A* pažymėkime *m*, o kito apskritimo liestinę taške *B* – *n*. Jei du apskritimai lygūs, tai tiesių *m* ir *n* lygiagretumas matyti iš brėžinio simetriškumo taško *K* atžvilgiu. Įrodykite, kad $m \parallel n$ ir apskritimams esant nelygiems.

6. Taškas *E* yra stačiakampio *ABCD*, kurio plotas lygus 1, viduje. Taškai A_0, B_0, C_0, D_0 yra atitinkamai stačiakampio kraštinių *AB*, *BC*, *CD*, *DA* vidurio taškai. Taškai A_1, B_1, C_1, D_1 yra simetriški taškui *D* atitinkamai taškų A_0, B_0, C_0, D_0 atžvilgiu. Pasinaudodami homotetija įrodykite, kad keturkampis $A_1B_1C_1D_1$ yra rombas, ir pagal homotetijos koeficientą raskite šio rombo plotą.

7. Taškai C_1, C_2, C_3, C_4 priklauso vienam spindulio $r=1$ apskritimui, kurio išorėje duoti dar du taškai *A* ir *B*. Trikampių ABC_1, ABC_2, ABC_3, ABC_4 pusiaukraštinių susikirtimo taškai pažymėti atitinkamai M_1, M_2, M_3, M_4. Įrodykite, kad pastarieji keturi taškai taip pat priklauso vienam apskritimui ir raskite jo spindulį.

Nurodymas. Raskite homotetiją, kuri taškus C_1, C_2, C_3, C_4 *perveda į taškus* M_1, M_2, M_3, M_4.

8. Tęsdami 4 pavyzdyje pradėtus samprotavimus, įrodykite, kad apskritimo, einančio per taškus A', B', C', centras O' taip pat priklauso Oilerio tiesei. Raskite santykį $k = \dfrac{HO'}{O'O}$.

9. Pasinaudodami 8 uždavinio rezultatais, nustatykite, kokiu santykiu apskritimas, einantis per taškus A', B', C', dalija atkarpas AH, BH, CH.

10. Du lygūs spindulio r apskritimai c_1 ir c_2 yra apskritimo c, kurio spindulys R, $R > r$, viduje ir liečia jį atitinkamai taškuose A ir C. Pažymėtas dar vienas apskritimo c taškas M. Tiesė AM kerta apskritimą c_1 taškuose A ir B, o tiesė CM kerta apskritimą c_2 taškuose C ir D. a) Raskite santykį $\dfrac{MB}{MA}$, jei $R = 10$ ir $r = 1$.

b) Įrodykite, kad atkarpos AC ir BD yra lygiagrečios bet kurioms apskritimų spindulių reikšmėms.

V. TURNYRAI IR LENTELĖS

Romualdas Kašuba
(Vilniaus universitetas)

Daugumas žmonių domisi visokiausiais palyginimais, tendencijomis, o dar kiti labai domisi ir sportu. Dažnai jiems (ir dar daugeliui kitų) prisieina rinkti ir kaupti duomenis bei pildyti visokiausias lenteles. Tokius dalykus labai mėgsta sporto statistikai, todėl su jais yra susidūręs ir dažnas mokinys. Net ir toks žmogus, kuris visai nesidomi sportu, gali būti paprašytas pagal turnyro lentelę pažiūrėti ir pakomentuoti ar kitaip paaiškinti, kaip turnyre sekėsi jo draugui.

Lentelės leidžia žmogui „iš karto“ pamatyti daug skaičių ir viską „kaip mat perprasti“ – ir, matyt, todėl yra taip dažnai naudojamos.

Panagrinėsime keletą turnyrinių uždavinių, kuriuose mūsų skaitytojui teks ne tik analizuoti pasiūlytas lenteles, bet taip pat ir pačiam jas sudarinėti ar net paaiškinti, kodėl kai kada būtent tokios lentelės, kokios mes tikėtumėmės, žodžiu, kokios mums labai „reikėtų“, sudaryti kažkodėl visiškai nepavyksta.

Uždaviniai nebus sunkūs, bet, kaip tikimės, pravartūs mūsų skaitytojams.

1 pavyzdys. Tinklinio turnyre dalyvauja 6 komandos, kurios po vieną kartą sužaidė su kiekviena kita turnyre dalyvavusia komanda. Suvedus rezultatus paaiškėjo, kad pirmąsias dvi vietas užėmusios komandos surinko tris kartus daugiau taškų negu trys paskutiniąsias vietas užėmusios komandos. Kaip baigėsi komandos, likusios trečiojoje vietoje, susitikimas su komanda, užėmusia 5 vietą?

1 pastaba. Tinklinyje komanda už kiekvienas laimėtas rungtynes gauna po tašką, už pralaimėtas rungtynes taškų visai negauna, o lygiųjų tinklinyje nebūna. Be to, laikome, jog kai dvi ar daugiau komandų surenka po lygiai taškų, tai visada yra absoliučiai objektyvių būdų surikiuoti jas vietomis. Tai galima patikėti asmeniui, turinčiam neginčijamą autoritetą, arba tai galima atlikti burtų keliu. Vienaip ar kitaip svarbiausia yra tai, kad komandos yra išrikiuojamos pagal surinktų taškų skaičių, o kai šis yra vienodas, tada pagal papildomus objektyvius kriterijus arba, kaip minėta, burtų keliu.

2 pastaba. Turnyrines lenteles galima „pildyti“ įvairiausiais būdais. Vienas iš galimų būdų, kai mums svarbu tik turnyro rungtynių rezultatai, yra parodomas apačioje. Toje lentelėje parodyta galimas bendrasis 6 komandų turnyro (su dalyvaujančiomis komandomis A, B, C, D, E ir F) lentelės vaizdas – prieš prasidedant pačiam turnyrui.

Toji turnyro lentelės sandara, kaip matome, yra labai paprasta. Kiekviena komanda turi savo rezultatų eilutę. Eilutės pabaigoje suskaičiuojama, kiek taškų toji komanda surinko ir dar dažnai įrašoma, kelintoje vietoje ji atsidūrė.

Komanda	A	B	C	D	E	F	Taškai	Vieta
A	X							
B		X						
C			X					
D				X				
E					X			
F						X		

Sprendimas. Pagal sąlygą dvi pirmąsias vietas užėmusios komandos surinko tris kartus daugiau taškų negu paskutiniąsias tris vietas užėmusios. Pirmąsias dvi vietas užėmusios komandos gali surinkti daugių daugiausiai taškų tada, kai jos laimi prieš visas kitas komandas, o tų kitų komandų, neskaitant tų dviejų pirmųjų, yra keturios. Taigi jos surenka daugiausiai taškų tada, kai jos abi laimi prieš visas likusias keturias komandas ir „kažkaip“ sužaidžia tarpusavyje. Todėl jos abi daugiausiai gali surinkti

$$2 \cdot 4 + 1,$$

arba 9 taškus.

O paskutinės trys komandos, kad ir kaip jos besužaistų su kitomis komandomis, tarpusavio susitikimuose vis tiek „išžais“ 3 taškus. Taigi net jeigu jos pralaimės visas likusias rungtynes kitoms komandoms, tai jos visos vien jau per visas tarpusavio rungtynes surinks bent 3 taškus.

Taigi tam, kad būtų įvykdyta uždavinio sąlyga, pirmosios dvi komandos turi „viską“ laimėti prieš kitas komandas, o paskutiniosios trys komandos – „viską“ pralaimėti prieš visas kitas komandas. Tada abi komandos, laimėjusios visas rungtynes prieš visas kitas komandas, kartu turės 9 taškus, o komandos, viską pralaimėjusios prieš kitas, turės lygiai tris taškus ir uždavinio sąlyga bus įvykdyta. Tačiau tada 3-oji komanda turės būtinai būti laimėjusi prieš 5-ąją vietą užėmusią komandą, nes 5-oji komanda jau yra iš tų trijų paskutiniųjų komandų, kurios turi būti „viską“ pralaimėjusios visoms kitoms aukščiau esančioms komandoms.

Ats.: 3-ąją vietą užėmusi komanda laimėjo rungtynes su 5-ąją vietą užėmusia komanda.

Konkretumo dėlei galima pateikti vieną iš galimų tokio turnyro lentelių. Galimos tinkamos atsakymų lentelės gali skirtis tik tiek, kiek skiriasi paskutiniąsias tris vietas užėmusių komandų tarpusavio rungtynių rezultatai. Mūsų pateikiamame pavyzdyje komanda, parašyta aukščiau, yra laimėjusi prieš komandą, parašytą žemiau.

Komanda	A	B	C	D	E	F	Taškai	Vieta
A	X	1	1	1	1	1	5	I
B	0	X	1	1	1	1	4	II
C	0	0	X	1	1	1	3	III
D	0	0	0	X	1	1	2	IV
E	0	0	0	0	X	1	1	V
F	0	0	0	0	0	X	0	VI

2 pavyzdys. Šachmatų turnyre dalyvauja 6 dalyviai, iš kurių kiekvienas po kartą sužaidė su kiekvienu kitu to turnyro dalyviu. Pasibaigus turnyrui paaiškėjo, kad kiekvienas dalyvis surinko po skirtingą taškų skaičių – arba, kitaip sakant, jokie du to turnyro dalyviai nesurinko po lygiai taškų. Kiek mažiausiai taškų tokiame turnyre galėjo surinkti turnyro nugalėtojas?

Pastaba. Mes laikysime, kaip tai anksčiau būdavo visuotinai priimta, kad per šachmatų varžybas kiekvienai partijai „skiriamas“ vienas taškas, kurį ir gauna tas, kuris tą partiją laimi. Na, o jeigu partija baigiasi lygiosiomis, tada tas taškas yra dalijamas jiems abiems po lygiai – ir taip kiekvienam tenka po 1/2 taško.

Sprendimas. Kadangi visi šachmatininkai turi surinkti po skirtingai taškų, tai, savaime suprantama, turnyro nugalėtojas turi būti surinkęs daugiausiai taškų. Jis, pavyzdžiui, gali būti laimėjęs visus susitikimus ir tada jis būtų surinkęs 5 taškus, o visi kiti dalyviai tokiame turnyre galėtų būti laimėję kiekvienas prieš žemesnį starto numerį turintį šachmatininką. Kitaip sakant, kad būtų visai aišku, mes galime įsivaizduoti, kad tie 6 šachmatininkai yra kaip nors gavę „starto“ numerius, sakysime, A, B, C, D, E ir F, o po to jie visas partijas sužaidžia „pagal starto numerius“: dalyvis su „pirmesne raide“ visada laimi prieš dalyvį su „paskesne raide“. Tada turnyrui pasibaigus pirmasis šachmatininkas A ir liks pirmas, nes bus surinkęs 5, 2-asis šachmatininkas B ir liks antras, nes bus surinkęs 4 taškus, 3-iasis šachmatininkas C ir liks trečias su savo surinktais 3 taškais, 4-asis šachmatininkas D ir liks ketvirtas su surinktais 2 taškais, 5-asis šachmatininkas D ir liks penktas su surinktu vieninteliu tašku, o paskutinysis, 6-sis šachmatininkas E bus surinkęs 0 taškų, nes jis visiems pralošė.

Mėginsime pasižiūrėti, ar galima būtų visiems surinkti ir toliau „po skirtingai“ taškų, o tam su pirmąja vieta surinkti mažiau taškų negu kad matėme dabar, kai pirmasis šachmatininkas A laimėjo „viską“ ir surinko „maksimalius“ 5 taškus.

Galime pateikti to turnyro lentelę.

Šachmatininkas	A	B	C	D	E	F	Taškai	Vieta
A	X	1	1	1	1	1	5	I
B	0	X	1	1	1	1	4	II
C	0	0	X	1	1	1	3	III
D	0	0	0	X	1	1	2	IV
E	0	0	0	0	X	1	1	V
F	0	0	0	0	0	X	0	VI

Kaip matome, rezultatų dalyje šioji lentelė niekuo nesiskiria nuo ką tik buvusios. Taip yra todėl, kad mūsų šachmatininkai sužaidė pernelyg „nuspėjamai“ ir tame turnyre nebuvo lygiųjų.

Pasižiūrėję į ką tik parodytą lentelę jau matome, kaip būtų paprasta padaryti, kad ir toliau visi turėtų po skirtingai taškų, bet pirmasis jau truputį mažiau – tik 4,5 taško.

Tuo tikslu mūsų „aiškiame“ turnyre mums dabar pakaktų pakeisti dviejų partijų rezultatus: leisti pirmajam sužaisti lygiomis su antruoju (taip jis ir „prarastų“ 1/2 taško), o toliau dar reikia iš antrojo „paimti“ 1/2 taško (nes dabar jis dar tebeturi 4,5 taško – kaip ir pirmasis). Kad atskirtume jį nuo pirmojo, antrajam galima leisti sužaisti lygiosiomis su paskutiniuoju šachmatininku. Matome, kad pakeitus tuos du ankstesnio turnyro rezultatus, tai būtų jau kitas turnyras, kur visi surenka skirtingai, kai ir anksčiau, bet čempionas dabar jau beturi 4,5 taško.

Šachmatininkas	A	B	C	D	E	F	Taškai	Vieta
A	X	1/2	1	1	1	1	4,5	I
B	1/2	X	1	1	1	1/2	4	II
C	0	0	X	1	1	1	3	III
D	0	0	0	X	1	1	2	IV
E	0	0	0	0	X	1	1	V
F	0	1/2	0	0	0	X	0,5	VI

Mėginsime čempionui A leisti surinkti dar „pastebimiau" mažiau.

Pirmiausiai pamėginsime įrodyti, kad visi dalyviai negali surinkti po skirtingai taškų tokiu atveju, kai čempionas tėra surinkęs 3,5 taško.

Tarkime, kad tai įmanoma. Tada čempionas, kaip tariame, yra surinkęs 3,5 taško, o šachmatininkas, užėmęs 2-ąją vietą, gali būti sukaupęs daugių daugiausiai 3 taškus. Panašiai šachmatininkas, užėmęs trečiąją vietą, gali būti surinkęs daugių daugiausiai 2,5 taško, 4-ąją vietą – 2, 5-ąją – 1,5 taško, o paskutinysis, tas 6-asis, gali būti surinkęs ne daugiau kaip 1 tašką.

Tuomet jie „per visus kartu" gali būti surinkę ne daugiau kaip

$$3{,}5 + 3 + 2{,}5 + 2 + 1{,}5 + 1 = 13{,}5$$

5 taško. Tačiau 6 šachmatininkai per visą turnyrą „išžaidžia"

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5,$$

arba 15 taškų, todėl per visus tuos 15 susitikimų jie niekaip negalėtų būti surinkę ne daugiau kaip 13,5 taškų.

Nagrinėdami atvejį su čempionu surinkusiu 4 taškus tokio prieštaravimo, kaip ką tik matytasis, mes jau nebeturėtume, nes dabar jau visi šachmatininkai, surinkdami po skirtingai taškų, jau galėtų būti surinkę ne daugiau kaip

$$4 + 3{,}5 + 3 + 2{,}5 + 2 + 1{,}5= 16{,}5$$

taško, o 16,5 taško yra, suprantama, daugiau negu tie per visą turnyrą „išžaistieji“ 15 taškų ir todėl to ką tik buvusio prieštaravimo nebėra.

Beliktų užpildyti galimą tokio turnyro lentelę. Tai padaryti yra absoliučiai būtina, nes kitaip mes niekaip negalėtume išsklaidyti visų abejonių, kad tai tikrai įmanoma.

Šachmatininkas	A	B	C	D	E	F	Taškai	Vieta
A	X	1/2	1/2	1	1	1	4	I
B	1/2	X	1/2	1/2	1	1	3,5	II
C	1/2	1/2	X	1/2	1/2	1	3	III
D	0	1/2	1/2	X	1/2	1/2	2	IV
E	0	0	1/2	1/2	X	1/2	1,5	V
F	0	0	0	1/2	1/2	X	1	VI

Ats.: Jeigu 6 komandų turnyre visi šachmatininkai yra surinkę po skirtingai taškų, tai čempionas gali būti surinkęs mažų mažiausiai 4 taškus.

3 pavyzdys. Viename futbolo turnyro pogrupyje dalyvauja 4 komandos, kurios po vieną kartą sužaidžia su kiekviena kita komanda. Futbole už pergalę skiriami 3, už lygiąsias – 1, o už pralaimėjimą – 0 taškų. Dvi pirmąsias vietas užėmusios komandos patenka į tolimesnį varžybų etapą. Kiek mažiausiai taškų gali būti surinkusi komanda, patekusi į tolimesnį varžybų etapą?

Sprendimas. Pirmiausiai yra akivaizdu, kad visas trejas rungtynes pralaimėjusi komanda į kitą varžybų etapą patekti niekaip negali, nes, pralaimėdama visas rungtynes, ji jau yra kiekvienai kitai komandai „davusi“ po 3 taškus ir jos, tos trys komandos, galutinėje komandų irkiuotėje turės jau bent tuos 3 taškus ir bus surinkusios ne tik kad daugiau, bet ne mažiau kaip trimis taškais daugiau už mūsų „kalbamąją“ komandą.

Panašiai bus ir tada, kai komanda po turnyro bus tesukaupusi 1 tašką. Surinkti 1 tašką mūsų atveju reiškia sužaisti 1 rungtynes lygiosiomis, o likusias 2 rungtynes pralaimėti, arba toms likusioms dviems komandoms „atiduoti“ po 3 taškus. Tada tos 2 komandos galutinėje pogrupio rikiuotėje su tais bent 3 taškais tikrai rasis aukščiau už tą 1 tašką surinkusią komandą. Todėl komanda su 1 tašku praleis į priekį bent dvi komandas ir išeiti į tolimesnį varžybų etapą niekaip negali.

O surinkusi 2 taškus komanda gali išeiti į tolimesnį varžybų etapą. Taip nutiktų, pavyzdžiui, tada, kai viena komanda laimėtų visas 3 savo žaistas rungtynes, o likusios komandos visas likusias tarpusavio rungtynes sužaistų lygiosiomis. Tada pirmoji komanda turėtų 9 taškus, o visos likusios 3 komandos būtų surinkusios po 2 taškus. Ir tuomet, kaip mes jas berikiuotume, vis tiek kuri nors viena iš tų trijų po 2 taškus sukaupusių komandų bus „surikiuota“ antrąja ir, vadinasi, pateks į tolimesnį varžybų etapą.

Ats.: Mažiausias taškų skaičius, su kuriuo galima išeiti į tolimesnį varžybų etapą užimant vietą pirmojoje turnyrų komandų rikiuotės pusėje, yra 2 taškai. Pateikiame tokio turnyro pavyzdį, kuriame trys komandos yra surinkusios po 2 taškus, todėl tokiame turnyre kuri nors komanda su 2 taškais „neišvengiamai“ užims antrąją vietą ir taip pat „neišvengiamai“ pateks į tolimesnįjį varžybų etapą.

Komanda	A	B	C	D	Taškai	Vieta
A	X	3	3	3	9	I
B	1	X	1	1	2	II
C	1	1	X	1	2	III
D	1	1	1	X	2	IV

4 pavyzdys. Penki berniukai, Andrius, Balys, Celestinas, Donatas ir Egidijus, sužaidė tokiame teniso turnyre, kur buvo žaidžiama poromis, dvejetas prieš dvejetą, visais galimais būdais po vieną kartą. Pasibaigus turnyrui paaiškėjo, kad žaisdami vienoje poroje kartu, Andrius su Baliu iškovojo 3 pergales, Balys su Celestinu – 2 pergales, o Donatas su Egidijumi – 1 pergalę. Andrius su Egidijumi, žaisdami vienoje poroje kartu, nė karto nelaimėjo, o Andrius su Celestinu – nė karto nepralaimėjo (priminsime, kad lygiųjų tenise nebūna).

Kaip baigėsi dvejeto „Balys + Celestinas“ susitikimas su dvejetu „Andrius + Donatas“?

Tai nesunkus uždavinys tvarkingesniam ir mėgstančiam viską aiškiau susirašyti žmogui. Kad būtų trumpiau Andrių pažymėsime A, Balį – B, Celestiną – C , Donatą – D, o Egidijų, suprantama, – raide E. Pirmiausiai pastebėsime, kad kiekviena pora kartu sužaidžia trejas rungtynes: sakysime Andriaus ir Balio dvejetas (A, B) sužaidžia:

su Celestino ir Donato dvejetu (C,D),

su Celestino ir Egidijaus dvejetu (C,E)
bei su Donato ir Egidijaus dvejetu (D, E).

Kadangi pasakyta, kad Andrius su Celestinu laimėjo „viską“, tai dvejetas

(A,C)

laimėjo prieš dvejetus

(B,D), (B, E) ir (D, E).

Kadangi pasakyta ir tai, kad Andrius su Egidijumi „viską pralaimėjo“, tai dvejetas

(A, E)

pralaimėjo dvejetams (B,C), (B,D) ir (C,D).

Kadangi pasakyta dar ir tai – ir pasakyta pačioje vardijimų pradžioje – kad Andrius su Baliu iškovojo 3 pergales, tai, vadinasi, ir jie kaip dvejetas „viską laimėjo“. Tai reiškia, kad dvejetas

(A,B)

laimėjo prieš visas likusias poras, kuriose „nė vieno iš jų nėra“, arba prieš poras

(C, D), (C, E) ir (D,E).

Taigi iš to, ką mes sužinojome, mes matome, kad pora (D,E) pralaimėjo ir porai (A, C), ir porai (A,B), o kadangi iš sąlygos žinome, kad pora (D,E) visgi yra iškovojusi vieną pergalę, tai tada mes suprantame, kad toji pergalė tuo atveju būtinai turi būti pergalė prieš dvejetą (B,C).

Kadangi dvejetas (B, C), kuris, kaip ką tik sužinojome, yra pralaimėjęs (dvejetui (D,E)), turi dvi pergales, todėl visas likusias rungtynes jis yra laimėjęs – ir prieš dvejetą (A, D), ir prieš dvejetą (A,E).

Taigi uždavinio klausiamas rungtynes dvejetas „Balys + Celestinas“ yra laimėjęs prieš dvejetą „Andrius +Donatas“.

Ats.: dvejetas „Balys + Celestinas“ yra laimėjęs prieš dvejetą „Andrius +Donatas“.

5 pavyzdys. Futbolo turnyre dalyvavo 6 komandos. Kiekviena komanda su kiekviena kita komanda sužaidė po vienerias rungtynes. Kaip ir anksčiau, už laimėtas rungtynes komandai įskaitomi 3 taškai, už rungtynes, sužaistas lygiosiomis, komandai skiriamas 1 taškas, o už pralaimėtas rungtynes komanda gauna 0 taškų. „Ateities žvaigždžių“ komanda užėmė šiame turnyre paskutinę vietą, surinkusi jame mažiau taškų negu bet kuri kita iš 5 likusių komandų.

Sporto ekspertai dar nustatė, kad „Ateities žvaigždžių“ komanda surinko tame 6 komandų turnyre tiek taškų, kad surinkti daugiau taškų užėmus turnyre paskutinę vietą ir surinkus mažiau taškų už bet kurią kitą tame turnyre dalyvaujančią komandą, jau nebeįmanoma. Kiek taškų tame įsimintiname turnyre surinko „Ateities žvaigždžių“ komanda?

Sprendimas. Skaitytojo patogumui ir didesniam aiškumui pirmiau išsprendę šį uždavinį su 6 komandomis, vėliau skaitytojui užduotyje pasiūlysime, rodos, dar paprastesnį uždavinį su 5 komandomis (juk, atrodytų, sutikite su tuo, kad tikrai visiems atrodo, kad kuo mažiau komandų, tuo paprastesni reikalai ir tuo lengviau „pildosi“ turnyro lentelė).

Vėliau tas, kas turėjo laiko bent kiek įdėmiau perskaityti sprenkdimą, be vargo išspręstų ir panašų uždavinį ir su kitokiu komandų skaičiumi – siūlytume pirmiau pamėginti su 8 (o vėliau jau ir su 7 komandomis).

Tačiau šį uždavinį jau įdomu pradėti žiūrėti ir su 4 (ar net tik su 3) komandomis.

Iš pradžių sprendžiame uždavinį su 6 dalyvaujančiomis komandomis, kurios sužaidžia po vienerias rungtynes su kiekviena kita komanda.

Esame klausiami, kiek daugiausiai taškų tokiame turnyre gali surinkti tokia komandą, kuri jų, tų taškų, surinko mažiau negu bet kuri kita tame turnyre žaidusioji komanda, jeigu už pergalę, kaip sakyta, skiriami 3, už lygiąsias –1, o už pralaimėjimą – 0 taškų.

Natūralus uždavinio sprendimo kelias regisi toks:

(A) Pirmiausiai išsiaiškinsime, kiek daugiausiai taškų tokiame turnyre gali surinkti visos dalyvaujančios komandos, jeigu jos visos surinktų po tiek pat taškų.

(B) Išsiaiškinę, kiek daugiausiai taškų galėtų surinkti visos komandos, jeigu jos visos „pačiu geriausiu būdu“ surinktų po tiek pat taškų, mėginsime „pabloginti“ vieną vienos kurios nors vienos komandos rungtynių rezultatą, taip tą komandą padarydami paskutiniąja komanda. Ji, atkreipkite į tai dėmesį, tikrai tada būtų paskutinioji, nes pakeitus jos vienų kurių nors rungtynių rezultatą į blogesnį, ji „iš karto imtų turėti“ mažiau taškų už bet kurią kitą komandą – juk jos visos „ką tik“ turėjo po tiek pat taškų.

(C) Po viso šito mes dar, suprantama, turėsime įrodyti teiginį, kad dabar jau toji komanda surinkti dar daugiau taškų ir likti paskutinėje vietoje surinkdama tų taškų griežtai mažiau už bet kurią kitą komandą, jau nebegali.

Pradedame realizuoti pirmąją uždavinio sprendimo plano dalį (A) – imame daryti, kad visos komandos „pačiu geriausiu būdu“ būtų surinkusios po tiek pat taškų. Pirmoji pasitaikiusioji mintis galėtų būti tokia, kad gal lai visos komandos sužaidžia lygiomis, tai tada jos tikrai turės po tiek pat taškų. O jau toliau, jeigu kas, mes imsime „gerinti“ šią absoliučiai lygią padėtį.

Taip mes tas 6 komandas *A*, *B*, *C*, *D*, *E* ir *F* ir surašome į tokio turnyro lentelę, kur yra žaidžiama tik lygiosiomis:

Komanda	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	Taškai	Vieta
A	x	1	1	1	1	1	5	1 – 6
B	1	x	1	1	1	1	5	1 – 6
C	1	1	x	1	1	1	5	1 – 6
D	1	1	1	x	1	1	5	1 – 6
E	1	1	1	1	x	1	5	1 – 6
F	1	1	1	1	1	x	5	1 – 6

Pastaba. Kai kurios lentelės yra pildomos dar šiek tiek išsamiau, arba taip, kad atitinkamuose lentelės langeliuose yra nurodoma ne tik tai, ar komanda laimėjo (tada atitinkamame langelyje atsiranda skaičius 3), ar sužaidė lygiosiomis (tada atitinkamame langelyje atsiranda 1), ar pralaimėjo (tada tam skirtame langelyje įrašomas 0), bet kartais dar kiekviename langelyje yra nurodoma ir kiek tose rungtynėse buvo įmušta įvarčių į priešininko ir kiek jų buvo praleista į savo vartus.

Tokia lentelė yra informatyvesnė, tačiau mūsų uždaviniuose mus, kaip matėme, kol kas domino tik surinktieji taškai, o ne įmuštieji įvarčiai ir todėl mūsų lentelių langeliuose būdavo įrašinėjama ne daugiau kaip po vieną skaičių. Taip ir mūsų turnyrinėse lentelėse mes kol kas randame arba tik skaičius 0, 1 arba 3, arba 0, 1 ir 2, arba ir 0, ½ ir 1 nes, kaip matėme, yra sporto šakų, kur už pergalę visada duodami 2 taškai (sakysime, tinklinyje) arba tik 1 taškas (taip iki šiol dažniausiai būdavo daroma žaidžiant šachmatais).

Jeigu už pergalę duodami 3 taškai, o už lygiąsias – tik 1 taškas (o taip daroma tikintis, kad gal tada komandos „labiau stengsis“ ir tada pergalė ir pralaimėjimas per dvejas rungtynes yra daug geriau arba „pusantro karto taškingiau“ negu dvejos lygiosiomis sužaistos rungtynės). Tuo atveju, kai šitaip „skatinamos“ pergalės, tai tada 1 uždavinių sprendimo etapas aukščiau pateiktos lentelės užpildymu su visomis lygiosiomis, matyt, dar gal nėra visai užbaigtas.

Tikrai, nors dabar visos komandos turi po vienodai taškų, bet gal tų taškų visoms komandoms po lygiai galima būtų turėti daugiau?

Mes sakėme, kad pagal mūsų turnyro tvarką pergalė plius pralaimėjimas yra geriau negu dvejos lygiosios, nes pergalė plius pralaimėjimas – tai net 3 taškai, o dvejos lygiosios – tai tik 2.

Taigi kiekvienai komandai pamėginsime kiekvienas dvi jos turimų lygiųjų poras, arba iš viso 4 lygiąsias „pakeisti“ į 2 pergales ir 2 pralaimėjimus.

Todėl mėginsime „simetriškai“ arba tvarkingai užpildyti lentelę, kurioje kiekviena komanda turėtų po 2 laimėjimus, ir 2 pralaimėjimus, o taip pat, suprantama, neišvengiamai dar ir 1 lygiąsias.

„Tvarkingai“ arba simetriškai pildant tokią lentelę tą tikrai gana nesunkiai pavyksta įgyvendinti:

Komanda	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	Taškai	Vieta
A	x	3	3	1	0	0	7	1 – 6
B	0	x	3	3	1	0	7	1 – 6
C	0	0	x	3	3	1	7	1 – 6
D	1	0	0	x	3	3	7	1 – 6
E	3	1	0	0	x	3	7	1 – 6
F	3	3	1	0	0	x	7	1 – 6

Ar dabar jau tikrai nebegalima padaryti taip, kad visos komandos surinktų po vienodai taškų ir tų taškų būtų daugiau negu 7, kaip kad yra dabar?

Ats.: Ne, negalima. Pamėginsime tai pagrįsti. Jeigu visos komandos galėtų surinkti daugiau kaip 7 taškus,visos surinkdamos jų, kaip sakyta, po lygiai, tai tada jos tų taškų privalėtų surinkti bent jau po 8 taškus kiekviena atskirai, arba tada bent $8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 48$ taškus visos 6 kartu. Tačiau surinkti 48 (arba dar daugiau) taškų jokiame 6 komandų vieno rato turnyre neįmanoma, nes tokiame vieno rato 6 komandų turnyre įvyksta $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ rungtynių, vadinasi, per tas 15 rungtynių gali būti „išžaidžiama“ daugių daugiausiai 15 · 3 = 45 taškai, o čia jų reikėtų mažų mažiausiai 48, o tiek tų taškų nėra.

Taigi mes išsiaiškinome (atkreipiame dėmesį, kad jau su įrodymu, kurį Jūs ką tik perskaitėte), kad 6 komandų vieno rato futbolo turnyre, kuriame visos komandos surenka po vienodai taškų, daugiausiai jų galima surinkti po 7.

Kitame (B) etape mėginsime pasirinkti vieną kurią komandą ir stengsimės „kuo mažiau pabloginti“ jos kurių nors vienerių rungtynių rezultatą. Imkime tą turnyro lentelę

Komanda	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	Taškai	Vieta
A	x	3	3	1	0	0	7	1 – 6
B	0	x	3	3	1	0	7	1 – 6
C	0	0	x	3	3	1	7	1 – 6
D	1	0	0	x	3	3	7	1 – 6
E	3	1	0	0	x	3	7	1 – 6
F	3	3	1	0	0	x	7	1 – 6

ir pamėginkime pabloginti vieną vienos kurios nors komandos, sakysime, komandos D rezultatą. Matome, kad komanda *D* yra sužaidusi lygiomis su komanda *A*, nes ji pirmajame rezultatų stulpelyje turi 1, o tai ir reiškia lygiąsias su komanda *A*. (Lygiai taip pat ir komanda *A* savo rezultatų eilutės ketvirtoje vietoje „simetriškai“ „x“ įstrižainės atžvilgiu turi 1, žymintį jos lygiąsias su komanda *E*).

Panašiai, jei komanda *D* 5-oje savo rezultatų eilutės vietoje turi 3, tai reiškia, kad jie laimėjo prieš penktąją komandą *E*, kuri, savo ruožtu, savo rezultatų eilutės 4-oje vietoje turi būti (ir yra) įsirašiusi 0 prieš tą minimą komandą *D*.

Visiškai taip pat, jei komanda *D* 2-oje savo rezultatų eilutės vietoje turi 0, tai tas reiškia, kad ji yra pralaimėjusi prieš antrąją komandą *B*, kuri, savo ruožtu, savo rezultatų eilutės 4-oje vietoje turi būti įsirašiusi 3 prieš komandą *D*.

Pats nežymiausias „padėties pabloginimas“ bet kuriai komandai neišvengiamai reiškia bent 1 taško praradimą ir tai pagal mūsų „optimalią“ lentelę yra įmanoma, nes mūsų „optimalioje“ lentelėje lygiųjų tikrai esama.

Maža to, kadangi visos komandos bent po kartą yra sužaidusios lygiosiomis, tai nežymiai „bloginti“ galima būtų bet kurios komandos rezultatą.

Pamėginkime „bloginti“, kaip jau esame nusprendę, būtent komandos *D* rezultatą. Jau sakėme, kad „mažiausias“ padėties pabloginimas būtų būtent kurių nors vienų lygiųjų pakeitimas pralaimėjimu (kuris mūsų atveju yra įmanomas su bet kuria komanda). Jeigu bloginame pačiu nepastebimiausiu būdu, arba taip, kad prarastume tik 1 tašką, tai tarsime, kad komanda *D* su *A* sužaidė jau ne lygiosiomis, o „tik šiek tiek“ blogiau, arba, kitaip tariant, komanda *D* pralaimėjo rungtynes komandai *A*.

Tada turnyrinė lentelė pasikeičia ir, aišku, komanda *D* tikrai atsiduria paskutinėje vietoje, o pati turnyrinė lentelė dabar pasidaro tokia:

Komanda	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	Taškai	Vieta
A	x	3	3	3	0	0	9	1
B	0	x	3	3	1	0	7	2 – 5
C	0	0	x	3	3	1	7	2 – 5
D	0	0	0	x	3	3	6	6
E	3	1	0	0	x	3	7	2 – 5
F	3	3	1	0	0	x	7	2 – 5

Visi, kam užteko laiko perskaityti mūsų aiškinimus, be jokios abejonės, jau yra tvirtai įsitikinę, kad surinkti dar daugiau taškų, negu kad jų dabar turi paskutinėje vietoje esanti ir mažiau taškų už visas kitas likusias komandas turinti komanda *D*, yra neįmanoma.

Tačiau, nors tvirtas įsitikinimas yra nepaprastai pravartus dalykas, tačiau, padėtas ant logikos svarstyklių, jis kartais sveria labai nedaug arba,o būna ir taip, kad ir visai nieko nesveria.

Todėl mums dabar (vėl) teks įrodinėti (nes jau truputį įrodinėjome pagrįsdami optimalų didžiausią vienodą visų komandų galutinį rezultatą).

(C) etapas. Įrodysime, kad jokia komanda surinkusi daugiau negu 6 taškus, negali būti jų surinkusi mažiau už visas likusias to turnyro komandas.

Įrodymas. Tarkime, kad komanda, surinkusi daugiau kaip 6 taškus, turi jų mažiau už bet kurią kitą komandą. Tada toji „mažiausioji“ komanda turi mažų mažiausiai 7 taškus, o tada visos likusios penkios komandos turi jų bent po 8. Tada visos tos šešios komandos visos kartu yra surinkusios mažų mažiausiai

$$7 + 8 \cdot 5 = 47$$

taškus.

Tačiau tai yra absoliučiai neįmanoma, nes tokiame 6 komandų turnyre, kaip jau buvo sakyta, yra sužaidžiama 15 rungtynių, arba „išžaidžiama“ daugių daugiausiai 45 taškai, o čia jų reikėtų daugiau.

Ats.: Šešių komandų turnyre, kur kiekviena komanda po kartą sužaidžia su kiekviena kita komanda ir kuriame už pergalę duodami 3, už lygiąsias 1, o už pralaimėjimą 0 taškų, paskutinę vietą užėmusi ir mažiau už bet kurią kitą komandą taškų surinkusi komanda gali surinkti daugiausiai 6 taškus.

6 pavyzdys su galimu kompaktišku komandų išsidėstymu.

Šešių komandų futbolo turnyre, kur kiekviena komanda su kiekviena likusia komanda sužaidžia po vienerias rungtynes ir kur už laimėtas rungtynes vėl skiriami (net) 3 taškai, paskutinioji komanda surinko T taškų, priešpaskutinioji komanda – T + 1 tašką, 4-tąją vietą užėmusioji – T + 2 taškus, 3-čioji – T + 3 taškus, 2-oji – T + 4, o pirmoji komanda – T + 5 taškus.

Nustatykime, su kokiomis T reikšmėmis taip iš tikrųjų gali nutikti.

Sprendimas. Po tokio išsamaus visų komandų surinktų taškų išvardijimo matome, kad visos 6 komndos kartu yra surinkusios

$$T + (T+1)+(T+2) + (T+3) + (T+4)+(T+5) = 6T + 15$$

taškų.

Jau ne kartą vardijome, kad 6 komandų vieno rato turnyre (kur kiekviena komanda su kiekviena kita komanda sužaidžia po vienerias rungtynes) įvyksta 15 rungtynių, o „išžaidžiamų“ taškų skaičius svyruoja tarp 30 (kai visos rungtynės baigiasi lygiosiomis) ir 45 (kai visos rungtynės baigiasi kurios nors komandos pergale) taškų. Ir apskritai yra visai aišku – kuo mažiau lygiosiomis sužaistų rungtynių, tuo daugiau taškų kartu surenka tokiame turnyre žaidusios komandos. Pavyzdžiui, jeigu tokiame turnyre 6 kartus buvo sužaista lygiosiomis, tai likusios 15 – 6 = 9 rungtynės baigėsi kurios nors vienos iš žaidusiųjų komandų triumfu ir iš viso tokiame turnyre buvo „išžaista“

$$6 \cdot 2 + 9 \cdot 3 = 39$$

taškai ir, nesunku matyti, kad ir atvirkščiai, jeigu per visą turnyrą buvo surinkti 39 taškai, tai 9 to turnyro rungtynės baigėsi vienos kurios nors žaidusios komandos pergale.

Kaip matėme, surinktų taškų skaičius 6T + 15 tenkina dvipusę nelygybę

$$30 \leq 6T + 15 \leq 45,$$

arba

$$15 \leq 6T \leq 30,$$

o tai reiškia, kad

$$2{,}5 \leq T \leq 5.$$

Kadangi T yra tos paskutiniosios komandos sukauptų taškų skaičius, tai T yra sveikasis skaičius ir todėl

$$T = 3,$$

arba

$$T = 4,$$

arba, daugiausiai,

$$T = 5.$$

Pirmuoju atveju, jei paskutinioji komanda būtų sukaupusi 3 taškus, tai priešpaskutioji – 4, trečioji „nuo galo“ – 5, trečioji – 6, antroji – 7, o čempionė – 8 taškus.

Beliko pateikti paaiškinimą, ar toks turnyras yra galimas, o tai geriausia būtų padaryti sudarius kokią nors „konkrečią“ tokio turnyro lentelę.

Jeigu jūs dabar mėgintumėte tai padaryti, tai jums nepasisektų.

Kodėl?

Tame turnyre yra „išžaisti“

$$3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$$

arba iš viso

$$33$$

taškai.

Nesunku matyti, kad tada tokiame turnyre buvo tik trejos vienos kurios nors komandos pergale pasibaigusios rungtynės, o visos likusios

$$15 – 3 = 12$$

rungtynių yra pasibaigusios lygiosiomis.

Išnagrinėsime, kiek kuri komanda daugiausiai kartų galėjo būti žaidusi tose vienos kurios nors komandos pergale pasibaigusiose 3 rungtynėse.

Yra tokie atvejai:

(P) daugiausiai 3 kartus;

(Q) daugiausiai 2 kartus;

(R) daugiausiai 1 kartą.

Įrodysime, kad visi tie atvejai yra negalimi.

(P) atvejis yra neįmanomas todėl, kad tada toji daugiausiai kartų vienos kurios nors komandos pergale

pasibaigusiose rungtynėse dalyvavusi komanda yra dalyvavusi visose trejose vienos kurios komandos pergale

pasibaigusiose rungtynėse Todėl tada tose 3 vienos kurios nors komandos pergale pasibaigusiose rungtynėse tedalyvavo tik 4 komandos. Vadinasi, yra 2 tokios komandos, kurios nedalyvavo nė vienose vienos kurios nors komandos pergale pasibaigusiose rungtynėse. Tada tos abi komandos visas savo žaistąsias rungtynes baigė lygiosiomis ir surinko po 5 taškus – o juk pas mus nėra dviejų tą patį taškų skaičių surinkusių komandų.

(Q) Jeigu bet kuri komanda tedalyvavo daugiausiai tik 2 iš 3 vienos kurios nors komandos pergale

pasibaigusių rungtynių, tai tada tokia komanda tikrai buvo ir toji paskutiniąją vietą užėmusioji ir 3 taškus tesurinkusioji komanda, sakykime, komanda I (nes surinkti 3 taškus per 5 rungtynes, tai arba:

vienerias rungtynes laimėti ir ketverias pralaimėti – o tiek pralaimėtų rungtynių būti negali, nes pagal prielaidą jų iš viso tik trijų tokių būta;

arba trejas rungtynes baigti lygiosiomis ir dvejas pralaimėti, sakykime, komandoms II ir III. Tarp kurių komandų tada įvyko tos trečiosios vienos kurios nors komandos pergale pasibaigusios rungtynės? Jeigu jose nedalyvavo nei komanda II, nei III, tai jos visas likusias savo 4 rungtynes turi būti sužaidusios lygiosiomis, o kadangi jos abi yra laimėjusios prieš komandą I, tai jos abi bus surinkusios po 7 taškus, o to negali būti, nes, kaip sakyta, nėra jokių po vienodai taškų surinkusių komandų. Vadinasi, viena kuri iš komandų II ar III, sakykime II, turėjo dalyvauti ir antrosiose vienos kurios nors komandos pergale pasibaigusiose rungtynėse. Sakykime, kad tai buvo rungtynės arba su III, arba su kuria nors kita, sakykime, IV komanda. Tada likusios dvi komandos, sakykime, V ir VI nedalyvauja jokiose vienos kurios komandos pergale besibaigiančiose rungtynėse. Tada jos visas savo rungtynes baigia lygiosiomis ir surenka po 5 taškus, o pas mus pagal prielaidą vienodai nesurenkama.

(R) atvejis atmetamas greičiausiai, nes jei kiekviena komanda dalyvauja tik po kartą vienos kurios komandos pergale pasibaigusiose rungtynėse, tai jos kitose 4 rungtynėse nepralaimi ir tada visos tada turi bent po 4 taškus (iš tikrųjų tada tokiame turnyre 3 komandos surinktų po 4, o likusios 3 – po 7 taškus).

O dabar mes patys sau padarykime tokią pastabą ir paklauskime Jūsų, ar Jums neatrodo, kad ką tik buvęs samprotavimas yra na tikrai ilgokas?

Negi negalima būtų „susamprotauti“ greičiau ir „efektyviau“?

Neaišku, ar visada atsakymas yra „taip“ (kaip tai pamatysime, kad tikrai yra šiuo atveju), bet labai dažnai jis yra būtent toks, koks jis yra ir dabar.

Ir mes Jums tuojau pat jį, tokį GREITESNĮ SAMPROTAVIMĄ ir pateiksime kartu su neišvengiamu pastebėjimu, kad iš pat pradžių, kai mes tik pradedame ko nors mokytis, mes labai retai kada samprotaujame „pačiu greičiausiu būdu“.

Na, žinoma, jau vėliau, kai mes jau įsibėgėjame, tada jau mes visi samprotaujame taip, kad kai kada tik laikykis bei stebėkis-gėrėkis, kaip greitai „mes judame“.

Tai štai tas greitesnis samprotavimas – mums, kaip ir anksčiau, reikia įrodyti, kad tokio turnyro, kuriame iš viso būtų „iššaisti“ 33 taškai, arba kuriame būtų buvę 3 vienos kurios komandos laimėtos rungtynės (ir tada dar 12 lygiosiomis pasibaigusių), o komandos paeiliui būtų surinkusios

3, 4, 5, 6, 7 ir 8

taškus, nėra.

Norėsime įrodyti, kad buvo bent 4 vienos kurios nors komandos pergale pasibaigusios rungtynės.

Pasižiūrėkime į abi komandas, kurios surinko atitinkamai 6 ir 7 taškus.

Abi tos komandos negalėjo „verstis“ vien lygiosiomis, kad surinktų tiek taškų, kiek jos surinko, nes lygiosiomis tokiame turnyre tiek nesurenkama. Lygiosiomis tokiame turnyre surenkama daugių daugiausiai 5 taškai – o pas jas abi tų taškų daugiau.

Vadinasi, abi jos turi po „savo“ pergalę – ir tada tos abi jų pergalės yra jau „skirtingos“ rungtynės.

Na, o ką tada nuveikė čempionė „aštuontaškė“? O čempionė aštuontaškė jau ir su viena pergale, kurią ji, kaip dar „padoriau“ taškų surinkusi, irgi būtinai turi turėti, jau 8 taškų nesurinktų, nes tik su viena pergale ir, tada, vadinasi, dar su ketveriomis lygiosiomis tesurenkami jau būtų tik

$$3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7$$

taškai.

Todėl čempionė turi turėti jau nebe tik tą vienintelę pergalę, bet „ištisas“ dvi savo „nuosavas“ pergales ir taip mes jau turime suradę per tas 3 geriausias komandas jau mažiausiai 4 vienos kurios nors komandos pergale pasibaigusias rungtynes.

Ši prieštara neatšaukiamai įtikina mus, kad tokio turnyro nėra, nes „jo, kaip matėme, negali būti“.

Pastebėsime, kad negali būti ir tokio turnyro, kur T = 5. Tikrai, tada komandų taškų rinkinys būtų

$$5, 6, 7, 8, 9, 10,$$

iš viso būtų surinkta

$$5+6+7+8+9+10= 45$$

taškai, o tai reiškia, kad visos rungtynės baigiasi vienos kurios nors komandos pergale. Tačiau to negali būti, nes tada visų komandų surinktų taškų skaičius būtų skaičiaus 3 kartotinis, o pas mus taip tikrai nėra.
Liko atvejis T = 4.

Jis yra įmanomas, nes mes žemiau galime pasižiūrėti kad ir į tokio turnyro lentelę:

Komanda	A	B	C	D	E	F	Taškai	Vieta
A	X	3	3	1	1	1	9	I
B	0	X	3	1	1	3	8	II
C	0	0	X	1	3	3	7	III
D	1	1	1	X	0	3	6	IV
E	1	1	0	3	X	0	5	V
F	1	0	0	0	3	X	4	VI

Ats.: T = 4.

Pabaigos vietoje. Išnagrinėjome tik keletą uždavinių. Susidomėjęs skaitytojas galėtų susirasti jų daug daugiau ir neretai gerokai painesnių.

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Tinklinio turnyre dalyvauja 8 komandos. Komandos užėmusios pirmąsias tris vietas, surinko tris kartus daugiau taškų už komandas, likusias 5-8 vietose. Kaip baigėsi 4-osios komandos rungtynės su 6-ą vietą užėmusia komanda?
(Primename, kad tinklinyje komanda už kiekvienas laimėtas rungtynes gauna po tašką, už pralaimėtas rungtynes taškų visai negauna, lygiųjų tinklinyje nebūna.)

2. Šachmatų turnyre dalyvavo 12 šachmatininkų, iš kurių kiekvienas sužaidė po vieną partiją su visais likusiais šachmatininkais. Pasibaigus turnyrui paaiškėjo, kad kiekvienas šachmatininkas sukaupė po skirtingai taškų. Kiek mažiausiai taškų galėjo būti surinkęs tokio turnyro nugalėtojas?)

3. Šachmatų turnyre dalyvavo 10 šachmatininkų, iš kurių kiekvienas sužaidė po vieną partiją su visais likusiais to turnyro dalyviais. Pasibaigus turnyrui ir vėl paaiškėjo, kad visi to turnyro dalyviai surinko po skirtingai taškų. Kiek daugiausiai taškų tokiame turnyre galėjo būti surinkęs paskutiniąją vietą tame turnyre užėmęs šachmatininkas?

4. Viename futbolo turnyro pogrupyje dalyvauja 6 komandos, kurios po vieną kartą sužaidžia su kiekviena kita komanda. Futbole, kaip įprasta, už pergalę skiriami 3, už lygiąsias – 1, už pralaimėjimą – 0 taškų. Pirmąsias tris vietas užėmusios komandos patenka į tolimesnį varžybų etapą (‘išeina iš pogrupio“). Kiek mažiausiai taškų gali būti surinkusi į tolimesnį varžybų etapą patekusi komanda („išėjusi iš pogrupio“ komanda)?

5. Viename futbolo turnyro pogrupyje vėl dalyvauja 4 komandos, kurios po vieną kartą susitinka su kiekviena kita komanda. Futbole ir toliau už laimėtas rungtynes komandai skiriami 3 taškai, už lygiąsias – 1 taškas, o už pralaimėjimą – 0 taškų. Pirmąsias dvi vietas užėmusios komandos patenka į tolimesnį varžybų etapą. Kiek daugiausiai taškų gali būti surinkusi į tolimesnį varžybų etapą nepatekusi („užgesusi pogrupyje“) komanda?

6. Penkios mergaitės Aušrelė, Birutė, Cecilija, Daiva ir Emilija sužaidė tokiame teniso turnyre, kuriame jos žaidė poromis, dvejetas prieš dvejetą visais galimais būdais po vieną kartą. Pasibaigus turnyrui paaiškėjo, kad Aušrelė laimėjo10 kartų, o Birutė – 8 kartus. Cecilija pralaimėjo 9 kartus, o Daiva – 7.

Kelias partijas laimėjo žaidusioji Emilija ir kelias partijas Emilija pralaimėjo?

7. Futbolo turnyre dalyvavo 5 komandos. Kiekviena komanda su kiekviena kita komanda sužaidė po vienerias rungtynes. Už laimėtas rungtynes komandai įskaitomi 3 taškai, už rungtynes, sužaistas lygiosiomis, komandai skiriamas 1 taškas, o už pralaimėtas rungtynes komanda gauna 0 taškų. „Ateities žvaigždžių“ komanda užėmė šiame turnyre paskutinę vietą, surinkusi jame mažiau taškų negu bet kuri kita iš 4 likusių komandų.

Sporto ekspertai dar nustatė, kad „Ateities žvaigždžių“ komanda surinko tame 5 komandų turnyre tiek taškų, kad surinkti daugiau taškų užėmus turnyre paskutinę vietą ir surinkus mažiau taškų už bet kurią kitą tame turnyre dalyvaujančią komandą, jau nebeįmanoma.

Kiek taškų tame įsimintiname turnyre surinko „Ateities žvaigždžių“ komanda?

8. Profesorius Kėkštas su Atamanu Šarka kartą vos ne 5 minutes abejodami svarstė, ar yra galimas toks ledo ritulio daugiau nei 5 komandų turnyras, kuriame kiekviena komanda sužaistų po vieną kartą su kiekviena kita komanda ir kuriame visos komandos turnyro pabaigoje surinktų skirtingą taškų skaičių. Be to, jiems norėjosi, kad paskutinę vietą tame turnyre užėmusi komanda laimėtų ne mažiau kaip 25% žaistų rungtynių, o antrą vietą užėmusi komanda – ne daugiau kaip 40%. Supratę, kad tai įmanoma, jie surado gudrų LJMM moksleivį Izidorių Strazdą, kuris per dvi savaites, nesikreipdamas net į savo mokytoją, “išvargo” visus šiuos reikalavimus atitinkančią turnyrinę lentelę. “Išvarkite” tokią lentelę ir jūs. (Ledo ritulio turnyruose už pergalę komandai skiriami 2 taškai, už lygiąsias – po vieną tašką, o už pralaimėtas rungtynes įskaitoma 0 taškų.)

9. Keturios komandos, A, B, C ir D sužaidė futbolo turnyre, susitikdamos po vieną kartą su visomis likusiomis komandomis. Žemiau pateikiamas to turnyro aprašas.

Komanda	Pergalės	Lygiosios	Pralaimėjimai	Įmuštieji įvarčiai	Praleistieji įvarčiai
A	3	0	0	5	1
B	1	1	1	2	2
C	0	2	1	5	6
D	0	1	2	3	6

I. Nurodykite (su paaiškinimu) kuri komanda laimėjo (ar sužaidė lygiosiomis) kiekvienas iš 6 to turnyro rungtynių.

II. Nurodykite (su paaiškinimu) kiekvienų 6 to turnyro rungtynių rezultatą.

10. Tinklinio turnyre dalyvavo 10 komandų, kurios visos po vieną kartą sužaidė su kiekviena kita iš likusių 9 komandų. Yra žinoma, kad turnyras buvo tokio aukšto lygio, kad jokia komanda neišvengė pralaimėjimo kartėlio.

Išgirdę apie tai profesorius Kėkštas su Atamanu Šarka pareiškė, kad Izidorius Strazdas turi pajėgti atsakyti į tokį klausimą: ar kiekvienu tokiu atveju, kai turnyre nepralaimėjusių komandų nėra, tai tada garantuotai ir visada tarp tų 10 komandų visada rasis tokios 3 komandos, sakykime, komandos I, II ir III, kad I komanda bus laimėjusi prieš II, II – prieš III, o III – prieš I komandą?

VI. SEKOS IR JŲ RIBOS

Eugenijus Stankus
(Vilniaus universitetas)

Seka yra nusakoma tam tikra funkcija. Todėl ir pradėkime nuo funkcijų. Prisiminkime, kad *funkcija* vadinama taisyklė, priskirianti nepriklausomojo kintamojo reikšmei vienintelę priklausomojo kintamojo reikšmę. Aibė tų reikšmių, kurias gali įgyti nepriklausomas kintamasis, vadinama *funkcijos apibrėžimo sritimi*, o aibė tų reikšmių, kurias įgyja priklausomas kintamasis (argumentas) – *funkcijos reikšmių sritimi*. Jeigu x yra funkcijos nepriklausomas kintamasis, o y – priklausomas kintamasis, tai rašoma $y = f(x)$. Čia raidė f (gali būti vartojamos ir kitos raidės) žymi tą priskyrimo taisyklę, taigi yra tarsi tos funkcijos vardas. Kai funkcija užrašyta formule (kaip žinome, galimi ir kitokie funkcijos reiškimo būdai), dažniausiai nenurodoma, kokias reikšmes gali įgyti nepriklausomas kintamasis, o laikoma, kad funkcijos apibrėžimo sritį sudaro visos šio kintamojo reikšmės, su kuriomis formulės reiškinys turi prasmę. Pavyzdžiui, funkcijos $y = f(x) = \sqrt{x-1}$ apibrėžimo sritį sudaro visi, ne mažesni už vienetą, realieji skaičiai.

Funkcijomis arba funkciniu sąryšiu aprašomi įvairūs tarpusavyje susiję dydžiai ne tik matematikoje, bet ir fizikoje, chemijoje, ekonomikoje ir kitose mokslo bei gyvenimo srityse.

Nagrinėkime funkcijas $y = f(x)$, kurių apibrėžimo sritis yra natūraliųjų skaičių aibė, t. y. $x \in \mathrm{N}$. Kadangi natūralieji skaičiai paprastai žymimi raide n, tai turime funkciją $y = f(n), n \in \mathrm{N}$. Tokios funkcijos reikšmes surašykime funkcijos argumento n reikšmių didėjimo tvarka $f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$ ir jas žymėkime

$$x_1 = f(1), x_2 = f(2), x_3 = f(3), \ldots, x_n = f(n), \ldots .$$

Šis begalinis realiųjų skaičių rinkinys vadinamas *skaičių seka*, o skaičiai $x_n, n \in \mathrm{N}$, – *sekos nariais*.

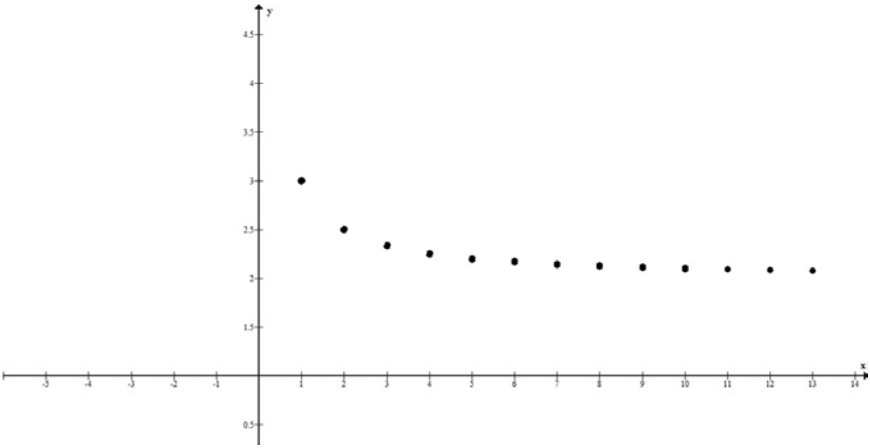
Vietoje išskleisto sekos užrašo $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ dažnai naudosime glaustą užrašą (x_n), x_n vadinamas *bendruoju sekos nariu*.

Funkcijos dažniausiai apibrėžiamos formulėmis, tačiau kartais jos nusakomos žodžiais ar kitokiais būdais. Vadinasi, taip pat galima nusakyti ir skaičių sekas.

Dažnai funkcijos elgesys aiškiau matomas iš jos grafiko. Galime nubrėžti ir sekos grafiką. Tuomet *Ox* ašyje atidedamos argumento *n* reikšmės: 1, 2, 3, ... *n*, ... , o *Oy* ašyje atitinkamų sekos narių reikšmės $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$.

Pateiksime kelis sekų pavyzdžius.

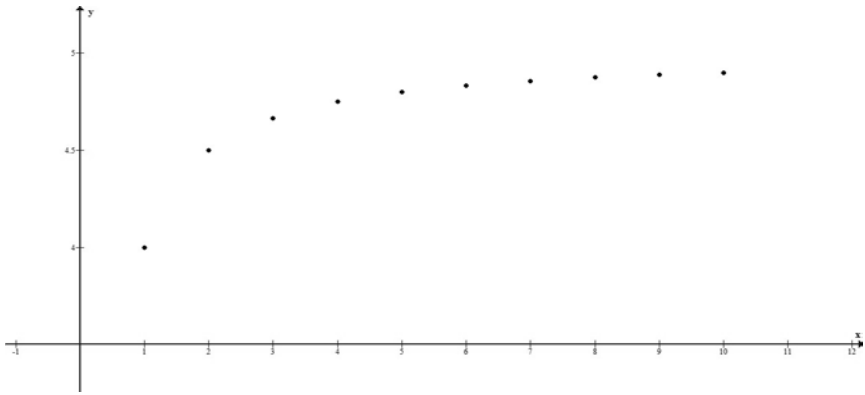
1 pavyzdys. Seka $3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \dots, \frac{2n+1}{n}, \dots$, jos glaustas užrašas $\left(\frac{2n+1}{n}\right)$, o grafiką matome 1 pav.



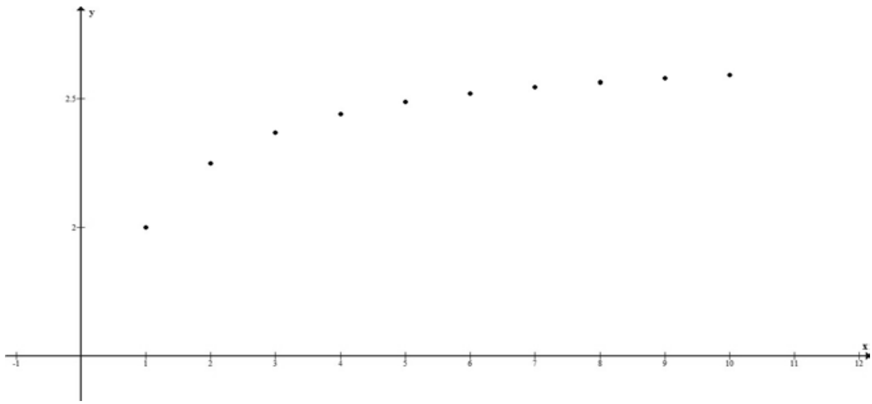
1 pav.

2 pavyzdys. Seka $4, \frac{9}{2}, \frac{14}{3} \dots, \frac{5n-1}{n}, \dots$, glaustas užrašas $\left(\frac{5n-1}{n}\right)$. Jos grafikas pavaizduotas 2 pav.

3 pavyzdys. Seka $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)$. Užrašius ją išskleistu pavidalu, turėsime: $2, (1+\frac{1}{2})^2, (1+\frac{1}{3})^3, (1+\frac{1}{4})^4, \dots$ Sekos grafiką matome 3 pav.



2 pav.



3 pav.

4 pavyzdys. Seka $1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n-1}, \ldots$, glaustas užrašas $((-1)^{n-1})$.

5 pavyzdys. Aritmetinė progresija

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \ldots, a_1 + (n-1)d, \ldots ,$$

čia a_1 ir d – bet kurie realieji skaičiai. Šios sekos bendrasis narys yra $a_n = a_1 + (n-1)d$, skaičius d vadinamas aritmetinės progresijos *skirtumu*.

6 pavyzdys. Geometrinė progresija

$$b_1,\ b_1 \cdot q,\ b_1 \cdot q^2,\ b_1 \cdot q^3, \ldots, b_1 \cdot q^{n-1}, \ldots .$$

Sekos bendrasis narys yra $b_n = a_1 \cdot q^{n-1}$; čia b_1 ir q – yra bet kurie realieji skaičiai, skaičius q vadinamas geometrinės progresijos *vardikliu*.

7 pavyzdys. Pastovioji seka $c, c, c, c, \ldots, c, \ldots$; čia c gali būti bet kuris realusis skaičius.

8 pavyzdys. Fibonačio (italų matematikas Leonardo Pisano Bigollo, gyvenęs apie 1170-1250 m., žinomas taip pat kaip Leonardo of Pisa, Leonardo Pisano, Leonardo Bonacci, Leonardo Fibonacci) seka $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$. Šios sekos, kurios pirmieji du nariai yra vienetai, kiekvienas narys yra prieš jį stovinčių dviejų narių suma. Jeigu šios sekos bendrąjį narį pažymėsime F_n, tai

$$F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ kai } n \geq 3.$$

Išreikšti šios sekos bendrąjį narį kintamuoju *n* nėra paprasta. Yra įrodyta, kad $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$. Tai Binė (prancūzų matematikas Jacques Philippe Marie Binet, 1786-1856) formulė.

Pastaba. Sekos, kurių kiekvienas narys yra apskaičiuojamas pagal tam tikrą formulę, kai žinomi ankstesni jos nariai, vadinamos *rekurenčiosiomis sekomis*. Apie tokias sekas išsamiau galima paskaityti LJMM knygelėje „Jaunajam matematikui 1“, Danieliaus leidykla, Vilnius, 2001.

9 pavyzdys. Sukonstruokime seką naudodamiesi tokiu algoritmu. Tegu $n \geq 1$ yra pirmasis sekos narys. Tolesnius narius nustatysime iš gautojo nario kartodami tokius veiksmus – jei jis lyginis, tai jį dalijame iš 2, jei – nelyginis, dauginame iš 3 ir pridedame 1.

Pavyzdžiui, kai $n = 10$, gausime seką

$$x_1 = 10 \Rightarrow x_2 = 5 \Rightarrow x_3 = 16 \Rightarrow x_4 = 8 \Rightarrow x_5 = 4 \Rightarrow x_6 = 2 \Rightarrow x_7 = 1.$$

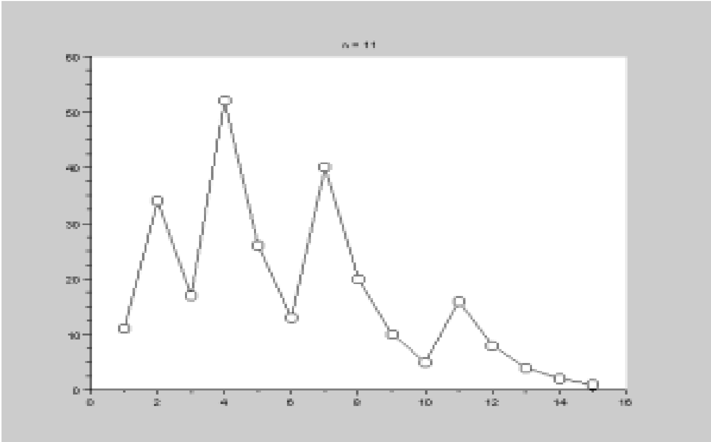
Procesą tęsdami toliau galime užrašyti ir tolesnius sekos narius:

$$x_7 = 1 \Rightarrow x_8 = 4 \Rightarrow x_9 = 2 \Rightarrow x_{10} = 1 \Rightarrow x_{11} = 4 \Rightarrow x_{12} = 2 \Rightarrow x_{13} = 1 \ldots.$$

Kai $n = 11$, tai

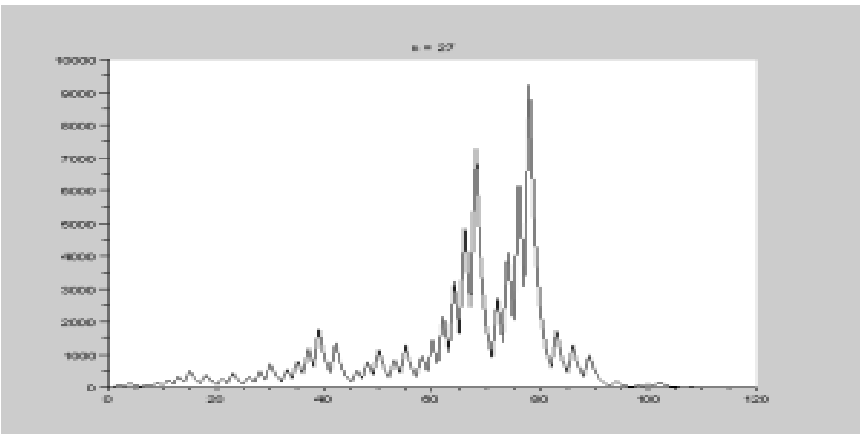
$11 \Rightarrow 34 \Rightarrow 17 \Rightarrow 52 \Rightarrow 26 \Rightarrow 13 \Rightarrow 40 \Rightarrow 20 \Rightarrow 10 \Rightarrow 5 \Rightarrow 16 \Rightarrow 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$. Šios sekos grafiką matome 4 pav.

ttp://mathematicalgarden.wordpress.com/2009/01/04/the-syracuse-problem/:)



4 pav.

Matome, kad abiem paminėtais atvejais kažkuris sekos narys tampa lygus 1. Kai $n=10$, tai pirmą kartą vienetui lygus septintas narys: $x_7=1$. Kai $n=11$, tai pirmą kartą vienetui lygus penkioliktas narys: $x_{15}=1$. Nors tokios sekos konstravimo algoritmas labai paprastas, bet **iki šiol nežinoma**, ar vienetą gausime su bet kuriuo pradiniu nariu $n\geq 1$. Tai garsioji Sirakūzų problema, dar kitaip vadinama $3n+1$ hipoteze arba Kolatso hipoteze (vokiečių matematikas Lothar



5 pav.

Collatz, 1910-1990). Dar pažvelkime į sekos grafinį vaizdą 5 pav., kai $n = 27$ (paveikslas tai pat paimtas iš aukščiau minėtos interneto svetainės). Čia pirmajam vienetui gauti prireikė daugiau kaip 100 žingsnių.

10 pavyzdys. Tegu $d(n)$ žymi natūraliojo skaičiaus daliklių skaičių. Užrašykime seką $(d(n))$:

$$d(1) = 1, d(2) = 2, d(3) = 2, d(4) = 3, d(5) = 2, d(6) = 4, d(7) = 2, \ldots.$$

Visada parašysime bet kurį sekos narį, jei tik sugebėsime suskaičiuoti kiek daliklių turi skaičius *n*. Tačiau užrašyti formulę, kuri išreikštų sekos bendrąjį narį $d(n)$ kintamuoju *n*, tikrai nepavyks, nes daliklių skaičius kintant *n* keičiasi neprognozuojamai: po skaičiaus, turinčio du daliklius gali sekti skaičius su labai dideliu daliklių skaičiumi. Gal būt galėtume įvertinti vidutinį daliklių skaičių tam tikroje natūraliųjų skaičių atkarpoje (tai vienas iš skaičių teorijos – matematikos šakos, tiriančios skaičių savybes – uždavinių).

Kaip rodo šie dešimt pavyzdžių, sekos gali būti labai įvairios prigimties. Tarp jų matome ir mokyklinio matematikos kurso sekas – aritmetinę ir geometrinę progresijas. Šioje temoje panagrinėsime kai kurias bendrąsias sekų savybes, išsamiau apsistodami ties sekų ribomis ir jų skaičiavimu.

Seka (x_n) *pastovioji*, kai $x_n = c, n \in \mathrm{N}$ (žr. 7 pavyzdį).

Seka (x_n) *didėjančioji*, jeigu $x_n < x_{n+1}, n \in \mathrm{N}$, *mažėjančioji* – jeigu $x_n > x_{n+1}, n \in \mathrm{N}$.

Seka $\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)$ yra mažėjančioji, nes

$$x_n = 2 + \frac{1}{n} > 2 + \frac{1}{n+1} = x_{n+1}, n \in \mathrm{N}$$

(žr. 1 pavyzdį). Tai aiškiai demonstruoja ir sekos grafikas, nubrėžtas 1 pav.

Seka $\left(\dfrac{5n-1}{n}\right)$ yra didėjančioji, nes

$$x_n = 5 - \frac{1}{n} < 5 - \frac{1}{n+1} = x_{n+1}, n \in \mathrm{N}$$

(žr. 2 pavyzdį ir 2 pav.).

Atkreipkime dėmesį, kad iš grafiko 3 pav. atrodo, kad seka $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)$ irgi yra didėjančioji. Taip yra iš tikrųjų. Tačiau įrodyti, kad nelygybė $(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$ teisinga su visais natūraliaisiais skaičiais *n*, nėra paprasta. Šį įrodymą galima rasti vadovėlio „A. Apynis, E. Stankus. Matematikos pagrindai, TEV, Vilnius, 2008“ 26 puslapyje.

Seka $(-1)^{n-1}$ nėra nei didėjančioji, nei mažėjančioji (4 pavyzdys).

Seka (x_n) *aprėžta iš apačios*, jeigu yra toks realusis skaičius *m*, su kuriuo galioja nelygybė $x_n \geq m,\ n \in \mathrm{N}$, *aprėžta iš viršaus* – jeigu yra toks realusis skaičius *M*, su kuriuo galioja nelygybė $x_n \leq M,\ n \in \mathrm{N}$.

Nesunku nustatyti, kad sekos $\left(\frac{2n+1}{n}\right)$ ir $\left(\frac{5n-1}{n}\right)$ (1 ir 2 pavyzdžiai) yra aprėžtos ir iš viršaus, ir iš apačios, nes galioja nelygybės $2 < 2+\frac{1}{n} \leq 3, n \in \mathrm{N}$ ir $4 \leq 5-\frac{1}{n} < 5, n \in \mathrm{N}$. Taip pat matome, kad seka $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)$ yra aprėžta iš apačios: $(1+\frac{1}{n})^n \geq 2$. Tačiau norint įrodyti, kad ji aprėžta iš viršaus, reikia subtilesnių samprotavimų (žr. aukščiau minėtą vadovėlį). Taigi seka $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)$ yra aprėžta ir iš apačios, ir iš viršaus. Kitų pateiktų sekų aprėžtumą siūlome panagrinėti savarankiškai.

Be minėtų bendrųjų sekų savybių, aritmetinė, taip pat ir geometrinė, progresijos (žr. 5, 6 pavyzdžius) turi specifines, tik joms būdingas savybes, išplaukiančias iš bendrojo nario pavidalo.

Pavyzdžiui, kiekvienas aritmetinės progresijos narys, išskyrus pirmąjį, yra jo gretimų narių aritmetinis vidurkis: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, o kiekvienas geometrinės progresijos narys, išskyrus pirmąjį, yra jo gretimų narių geometrinis vidurkis: $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$. Galima išvesti aritmetinės progresijos pirmųjų *n* narių sumos formulę $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ bei geometrinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulę $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$. (žr. „Matematika 11, II dalis, TEV, Vilnius, 2003“ 78-79 psl., 86-87 psl.).

Vėl sugrįžkime prie 1 pavyzdžio sekos $\left(\frac{2n+1}{n}\right)$. Kintant sekos nario numeriui n kinta ir sekos nario reikšmė. Šis kitimas aiškiau stebimas užrašius sekos bendrąjį narį pavidalu $x_n = 2 + \frac{1}{n}$. Akivaizdu, kad didėjant kintamojo n reikšmei, sekos nario reikšmė mažės, nes vis mažesnė darosi trupmena $\frac{1}{n}$. Jeigu, pavyzdžiui, $n = 1000$, tai $\frac{1}{n} = 0{,}001$. Taigi $\frac{1}{n}$ reikšmė tampa vis artimesnė nuliui, o sekos nario reikšmė – vis artimesnė skaičiui 2. Sakoma, kad sekos nariai artėja prie 2, o šis skaičius yra sekos $\left(\frac{2n+1}{n}\right)$ riba. Simboliškai tai užrašoma $\lim\limits_{n\to+\infty}(2 + \frac{1}{n}) = 2$, o skaitoma – sekos $\left(2 + \frac{1}{n}\right)$ riba, kai n artėja į begalybę, lygi 2. Lotyniškai *limes* reiškia sieną arba tiesiog ribą.

Taip pat samprotaudami gausime, kad sekos $\left(\frac{5n-1}{n}\right)$ riba, kai n artėja į begalybę, lygi 5, t. y. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5n-1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}(5 - \frac{1}{n}) = 5$.

Žinoma, šiems samprotavimams trūksta griežtumo, todėl siekdami jo, suformuluosime matematinį sekos ribos apibrėžimą.

Skaičius a vadinamas sekos (x_n) *riba, kai kiekvieną teigiamą skaičių* ε *atitinka toks natūralusis skaičius N, kad su visais* $n \geq N$ *galioja nelygybė* $|x_n - a| < \varepsilon$. Tuomet rašoma $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Jeigu riba a yra baigtinis skaičius, tai seka vadinama *konverguojančia*. Jeigu sekos riba neegzistuoja arba seka nėra aprėžta, ji vadinama *diverguojančia*.

Kitais žodžiais tariant – seka turės ribą tik tuomet, kai kad ir koks mažas būtų pasirinktas teigiamas skaičius ε, visada atsiras toks sekos narys x_N, kad visi sekos nariai su didesniais numeriais bus nutolę nuo ribos a arčiau negu ε. Taigi sekos nariai vis labiau ir labiau priartėja prie ribinio taško a.

Ne visuomet taip paprasta apskaičiuoti sekos ribą, kaip aukščiau pateiktais dviem atvejais. Pavyzdžiui, sekos $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)$ ribos egzistavimo įrodymas gana sudėtingas ir išeina iš mokyklinės matematikos ribų. Su šia seka betarpiškai susijęs svarbus matematikoje, ir ne tik, iracionalusis skaičius

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n, \quad \mathrm{e}=2{,}7182818\ldots . \qquad (1)$$

Panagrinėkime kai kurias sekas, kurių ribų apskaičiavimas paprastesnis. Tačiau ir šiais atvejais neapsieisime be konverguojančių sekų savybių: jeigu $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ ir $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$, tai

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = a + b, \ \lim_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b, \ \lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}, \text{ kai } b \neq 0. \qquad (2)$$

Taikydami (2) savybes apskaičiuokime šių sekų ribas.

11 pavyzdys. Apskaičiuokime sekos $\left(\frac{3n^2 - 2n + 1}{1-4n^2}\right)$ ribą.

Sprendimas. Iš karto taikyti (2) savybės paskutiniąją lygybę negalime, nes skaitiklio ir vardiklio reiškiniais nusakytos sekos yra diverguojančios: $\lim\limits_{n\to+\infty}(3n^2 - 2n + 1) = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(1 - 4n^2) = -\infty$ (toks atvejis žymimas simboliu $\frac{\infty}{\infty}$ ir vadinamas neapibrėžtumu „begalybė padalyta iš begalybės“). Todėl pertvarkykime sekos bendrąjį narį, skaitiklį ir vardiklį padalydami iš n^2. Turėsime $\frac{3n^2 - 2n + 1}{1 - 4n^2} = \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - 4}$. Tuomet, pasinaudoję minėtąja savybe, gausime

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2-2n+1}{1-4n^2}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}(3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2}-4)}=\frac{3}{-4}=-\frac{3}{4},$$

nes pagal (2) pirmąją savybę

$$\lim_{n\to+\infty}(3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})=3,\text{ o }\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2}-4)=-4.$$

Ats.: $-\frac{3}{4}$.

Skaičiuojant sekų ribas galima aptikti ir kitokių neapibrėžtumų. Visais atvejais reiškinį stengiamasi pertvarkyti taip, kad neapibrėžtumų neliktų, o tuomet ribą jau galima apskaičiuoti remiantis konverguojančių sekų savybėmis.

12 pavyzdys. Apskaičiuokime ribą $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-\sqrt{n^2-n+1}\right)$.

Sprendimas. Turime neapibrėžtumą $\infty-\infty$ (dviejų neaprėžtai augančių reiškinių, kai $n\to+\infty$, skirtumą). Nagrinėjamą reiškinį pertvarkykime jį padaugindami ir padalydami iš reiškinio $n+\sqrt{n^2-n+1}$ .Tuomet gausime:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n-\sqrt{n^2-n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n+\sqrt{n^2-n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{2}$$

Ats.: $\frac{1}{2}$.

Dar vienas kitokio pobūdžio pavyzdys, kai sekos bendrąjį narį sudaro kelių reiškinių suma.

13 pavyzdys. Apskaičiuokime ribą $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

Sprendimas. Atkreipkime dėmesį, kad su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi k galioja lygybė $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. Pritaikę šią formulę sekos bendrojo nario kiekvienam dėmeniui, gausime:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Ats.: 1.

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Parašykite sekos $\frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{13}{14}, \frac{18}{19}, \ldots$ bendrąjį narį.

2. Duota seka $\left(\frac{1}{n^2-6n+10}\right)$.

a) Nustatykite, ar ji yra didėjančioji (mažėjančioji).

b) Ar ši seka aprėžta iš viršaus? Jeigu taip, raskite mažiausią skaičių *M*, su kuriuo galioja nelygybė $x_n \le M$, $n \in \mathrm{N}$.

c) Ar ši seka aprėžta iš apačios? Jeigu taip, raskite didžiausią skaičių *m*, su kuriuo galioja nelygybė $x_n \ge m$, $n \in \mathrm{N}$.

3. Aritmetinės progresijos penktojo ir devintojo narių suma lygi 40, o septintojo ir tryliktojo narių suma lygi 58. Raskite šios progresijos pirmąjį narį.

4. Geometrinės progresijos pirmųjų trijų narių suma lygi 12, o pirmųjų šešių narių suma lygi -84. Apskaičiuokite šios progresijos trečiąjį narį.

5. Sekos (x_n), $x_n=\frac{n}{2n+1}$, riba lygi $\frac{1}{2}$. Kuriuo sekos nariu pradedant galioja nelygybė $|x_n-\frac{1}{2}|<0{,}01$?

6. Apskaičiuokite sekos $\left(\dfrac{(3n+1)^2-(n-1)^2}{(2n-3)^2}\right)$ ribą.

7. Apskaičiuokite sekos $\left(2^{\frac{3}{n}}-\dfrac{3n^4}{1-2n^4}\right)$ ribą.

8. Apskaičiuokite ribą $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{35}+\ldots+\dfrac{1}{4n^2-1}\right)$.

9. Apskaičiuokite ribą $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$.

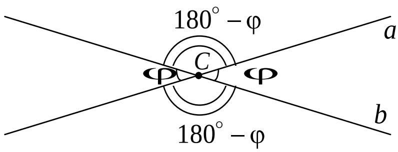
10. Apskaičiuokite ribą $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n}\right)$.

VII. TRIGONOMETRIJOS TAIKYMAS STEREOMETRIJOJE

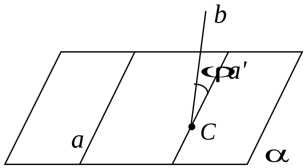
Edmundas Mazėtis
(Lietuvos edukologijos universitetas)

Matematikos pamokose susipažinote su trigonometrinėmis funkcijomis, jų savybėmis, trigonometrinėmis tapatybėmis, trigonometrinių lygčių sprendimo metodais. Atlikdami šią užduotį, Jūs ne tik pakartosite įgytas trigonometrijos žinias, bet ir išmoksite taikyti jas stereometrijos uždavinių sprendime.

1. Jei dvi erdvės tiesės a ir b susikerta taške C (1 pav.), tai jos yra vienoje plokštumoje. Jos sudaro keturis kampus; jei vieno jų didumas φ, tai likusių trijų didumai $180°-\varphi$, φ ir $180°-\varphi$. Jei φ – nebukasis (t. y. smailusis arba statusis) kampas, tai jis vadinamas *kampu tarp tiesių a ir b*. Jei tiesė a yra plokštumoje α, o tiesė b plokštumą α kerta taške C, nepriklausančiame tiesei a, tai tiesės a ir b yra *prasilenkiančios* (2 pav.). Per bet kurį erdvės tašką galima nubrėžti tieses, lygiagrečias su tiesėmis a ir b. Taigi per tašką C galime nubrėžti tiesę $a' \parallel a$. Tiesės a' ir b yra vienoje plokštumoje, kampas φ tarp jų yra kampas tarp prasilenkiančių tiesių a ir b.

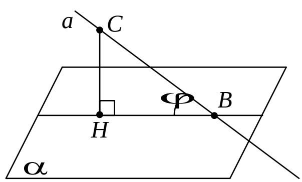


1 pav.



2 pav.

Tiesė b, statmena bet kuriai plokštumos α tiesei a, yra statmena plokštumai α. Per bet kurį erdvės tašką M nubrėžiama vienintelė tiesė a, statmena duotajai plokštumai α. Sakykime, kad tiesė a nėra statmena plokštumai α ir kerta ją taške B (3 pav.). Iš bet kurio tiesės a taško C nubrėžkime tiesę, statmeną plokštumai α; ji kerta plokštumą α taške

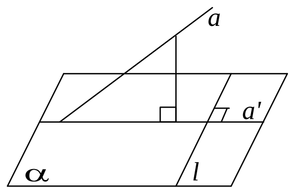


3 pav.

H. Tiesė BH, esanti plokštumoje α, yra vadinama tiesės a *ortogonaliąja projekcija plokštumoje* α. Kampas φ tarp tiesės a ir jos ortogonaliosios projekcijos plokštumoje α yra vadinamas *kampu tarp tiesės a ir plokštumos* α. Kartais sakoma, kad tiesė a pasvirusi į plokštumą α kampu φ.

Sprendžiant uždavinius dažnai tenka naudoti trijų statmenų teoremą. Priminsime jos formuluotę.

Jei tiesė l yra plokštumoje α ir statmena tiesei a, neesančiai plokštumoje α, tai ji statmena ir tiesės a ortogonaliajai projekcijai plokštumoje α (4 pav.).



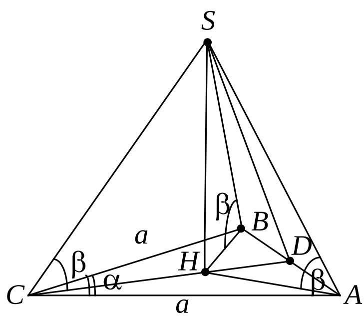
4 pav.

Teisingas ir atvirkščias teiginys: jei plokštumos α tiesė l yra statmena tiesės a ortogonaliajai projekcijai plokštumoje α, tai ji statmena ir tiesei a.

1 pavyzdys. Piramidės pagrindas – lygiašonis trikampis, kurio šoninė kraštinė lygi a, o kampas prieš pagrindą lygus α. Visos piramidės šoninės briaunos pasvirusios į pagrindo plokštumą tuo pačiu kampu β. Rasime piramidės tūrį.

Sakykime, kad piramidės $ABCS$ pagrindas lygiašonis trikampis ABC, $\angle ACB = \alpha$ $AC = BC = a$, (5 pav.). Nubrėžiame piramidės aukštinę SH, taigi piramidės briaunų SA, SB ir SC ortogonaliosios projekcijos pagrindo plokštumoje yra atkarpos AH, BH ir CH. Todėl kampai SAH, SBH ir SCH yra kampai tarp piramidės šoninių sienų briaunų ir pagrindo plokštumos, t. y.

$$\angle SAH = \angle SBH = \angle SCH = \beta.$$

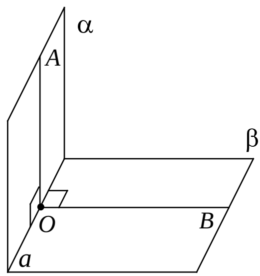


5 pav.

Stačiųjų trikampių SAH, SBH ir SCH statinis SH yra bendras, prieš jį esantys smailieji kampai lygūs β, taigi šie trikampiai lygūs, todėl lygios ir atkarpos AH, BH, CH. Taigi taškas H yra apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras. Jei $AH = BH = = CH = R$ – šio apskritimo spindulys, taškas D – atkarpos AB vidurio taškas, tai $\angle DCB = \frac{\alpha}{2}$, todėl trikampio ABC aukštinė $CD = h = a\cos\frac{\alpha}{2}$, o jo pagrindas $AB = 2AD = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$. Iš lygybės $AH^2 = HD^2 + AD^2$ seka, kad $R^2 = (h-R)^2 + \frac{AB^2}{4}$, t. y. $R^2 = \left(a\cos\frac{\alpha}{2} - R\right)^2 + a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Iš čia gauname $R = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. Iš stačiojo trikampio ASH randame $SH = R\,\mathrm{tg}\beta = \frac{a\,\mathrm{tg}\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. Kadangi trikampio ABC plotas $S = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha$, tai piramidės tūris

$$V = \frac{1}{3}S\cdot SH = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2\sin\alpha\cdot\frac{a\,\mathrm{tg}\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{6}a^3\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\beta.$$

2. Sakykime, kad dvi plokštumos α ir β susikerta, jų bendrų taškų aibė yra tiesė a. Tiesė a dalija kiekvieną iš šių plokštumų į dvi plokštumas; tiesė a yra tų pusplokštumių kraštas (arba kontūras). *Dvisieniu kampu* vadinama figūra, kurią sudaro tiesė a ir dvi pusplokštumės, neesančios vienoje plokštumoje, kurių kraštas yra tiesė a (6 pav.). Tiesė a yra vadinama dvisienio kampo briauna. Pasirinkime tiesėje a bet kurį tašką O, plokštumose α ir β nubrėžkime spindulius OA ir OB, statmenus tiesei a. Spindulių OA ir OB sudaromas kampas AOB yra vadinamas *dvisienio kampo tiesiniu kampu*. Tiesinis kampas yra plokštumoje, statmenoje plokštumoms α ir β. Dvisienio kampo tiesinių kampų aibė yra begalinė, visi to paties dvisienio kampo tiesiniai kampai yra lygūs. Dvisienio kampo didumas yra lygus bet kurio jo tiesinio kampo didumui.

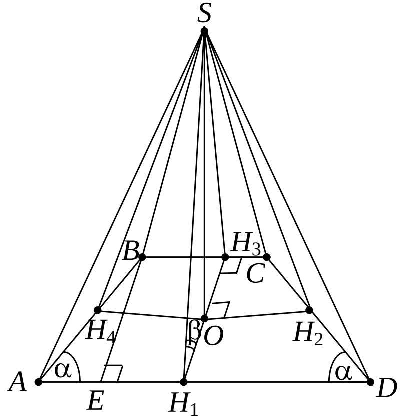


6 pav.

Dvi susikertančios plokštumos α ir β sudaro keturis dvisienius kampus. Jei vieno jų didumas φ, tai kitų trijų didumai yra $180° - \varphi$, φ ir $180° - \varphi$. Jei $\varphi = 90°$, tai plokštumos α ir β yra statmenos. Nebukasis (smailusis arba statusis) dvisienis kampas, kurį sudaro plokštumos α ir β, yra vadinamas *kampu tarp plokštumų* α ir β. Jei kampo tarp plokštumų α ir β didumas lygus φ, tai sakoma, kad plokštuma α pasvirusi į plokštumą β kampu φ.

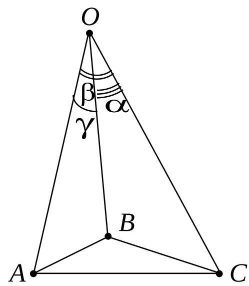
2 pavyzdys. Piramidės pagrindas – lygiašonė trapecija, kurios smailusis kampas lygus α, o plotas lygus S. Visos piramidės šoninės sienos pasvirusios į pagrindo plokštumą tuo pačiu kampu β. Rasime piramidės tūrį.

Sakykime, kad piramidės $SABCD$ pagrindas – lygiašonė trapecija $ABCD,\quad AD \parallel BC,\quad \angle A = \angle D = \alpha$ (7 pav.). Nubrėžkime sienų ASD, DSC, CSB ir ASB aukštines SH_1, SH_2, SH_3 ir SH_4, o taip pat piramidės aukštinę SO. Tiesės SH_1 ortogonalioji projekcija piramidės pagrindo plokštumoje yra tiesė OH_1. Kadangi $SH_1 \perp AD$, tai pagal trijų statmenų teoremą tiesė AD yra statmena tiesės SH projekcijai OH_1. Taigi kampas SH_1O yra dvisienio kampo tarp piramidės pagrindo plokštumos ir jos šoninės sienos ADS plokštumos tiesinis kampas, t. y. $\angle SH_1O = \beta$. Analogiškai įsitikiname, kad kampai SH_2O, SH_3O ir SH_4O yra kampų tarp piramidės pagrindo plokštumos ir jos šoninių sienų plokštumų tiesiniai kampai, taigi $\angle SH_2O = \angle SH_3O = \angle SH_4O = \beta$. Iš stačiųjų trikampių SOH_1, SOH_2, SOH_3 ir SOH_4 lygybės (jų statinis SO – bendras, o smailieji kampai prieš jį lygūs β) išplaukia, kad $OH_1 = OH_2 = OH_3 = OH_4$, t. y., taškas O yra į trapeciją įbrėžto apskritimo centras. Nubrėžkime trapecijos aukštinę $BE \perp AD$. Sakykime, kad $BE = h$, tuomet į trapeciją įbrėžto apskritimo spindulys



7 pav.

$OH_1 = OH_2 = OH_3 = OH_4 = \frac{h}{2}$. Kadangi į trapeciją galima įbrėžti apskritimą, tai $AB + CD = AD + BC$, $2AB = AD + BC$. Pagal sąlygą $S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot h = AB \cdot h = AB^2 \sin\alpha$. Iš čia $AB = \sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}$, $h = AB\sin\alpha = \sqrt{S\sin\alpha}$, $SO = OH_1 \mathrm{tg}\beta = \; = \frac{1}{2}\sqrt{S\sin\alpha}\ \mathrm{tg}\beta$, ir piramidės tūris $V = \frac{1}{3}S \cdot OS = \frac{1}{6}S\ \mathrm{tg}\beta\sqrt{S\sin\alpha}$.

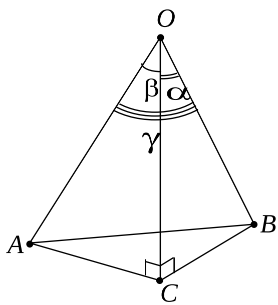


8 pav.

3. Sakykime, kad taškas *O* yra trijų spindulių *OA*, *OB*, *OC*, nesančių vienoje plokštumoje, pradžios taškas (8 pav.). Šie spinduliai yra trijų plokščiųjų kampų $\gamma = \angle AOB$, $\beta = \angle AOC$ ir $\alpha = \angle BOC$ kraštinės. Šie trys plokštieji kampai sudaro *trisienį kampą OABC* (arba trisienį kampą *O*). Taškas *O* yra trisienio kampo viršūnė, spinduliai *OA*, *OB*, *OC* – jo briaunos, plokštumos *OAB*, *OAC*, *OBC* – jo sienos. Kiekvieno trisienio kampo briauna apibrėžia dvisienį kampą, jį sudaro plokštumos, kurių bendroji briauna yra nagrinėjamoji briauna. Pažymėkime dvisienius kampus, kurių briaunos yra spinduliai *OA*, *OB* ir *OC* , atitinkamai *A*, *B* ir *C*.

Nagrinėkime trisienį kampą *O*, kurio du plokštieji kampai α ir β yra smailieji. Jų bendroje kraštinėje parinkime tašką *C* ir jų plokštumose nubrėžkime statmenis $CA \perp OC$ ir $CB \perp OC$ (9 pav.). Kampas *AOB* yra dvisienio kampo *C*, kurio briauna yra spindulys *OC*, tiesinis kampas. Trikampiui *CAB* pritaikome kosinusų teoremą:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cdot \cos\angle C.$$



9 pav.

Iš trikampio *OAB* gauname:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\gamma.$$

Atėmę vieną lygybę iš kitos turime

$$OA^2 - AC^2 + OB^2 - CB^2 + 2AC \cdot CB \cdot \cos\angle C - 2AO \cdot BO \cdot \cos\gamma = 0.$$

Iš stačiųjų trikampių *OCB* ir *OCA* seka tokios lygybės:

$$OA^2 - AC^2 = OC^2, \; OB^2 - BC^2 = OC^2.$$

Iš čia gauname, kad $2OC^2 + 2AC \cdot CB\cos\angle C = 2AO \cdot BO\cos\gamma.$ Padaliję abi lygybės puses iš $AO \cdot BO,$ užrašome tokią lygybę:

$$\cos\gamma = \frac{OC}{OA} \cdot \frac{OC}{OB} + \frac{AC}{OA} \cdot \frac{BC}{OB}\cos\angle C.$$

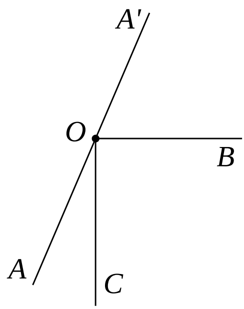
Kadangi iš stačiųjų trikampių *OAC* ir *OCB* seka

$$\frac{OC}{OA} = \cos\angle AOC = \cos\beta,$$

$$\frac{OC}{OB} = \cos\angle BOC = \cos\alpha,$$

$$\frac{AC}{OB} = \sin\angle BOC = \sin\alpha,$$

$$\frac{CB}{OA} = \cos\angle AOC = \cos\beta,$$



10 pav.

tai

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta\cos\angle C. \qquad (1)$$

Pastebėkime, kad gautoji formulė yra teisinga, kai α ir β nebūtinai smailieji kampai. Pvz., kai kampas β – bukasis, o α – smailusis, nubrėžiame spindulį OA', papildantį spindulį *OA* iki tiesės (10 pav.). Nagrinėjame trisienį kampą $OA'BC$, kurio du plokštieji kampai $\alpha = \angle BOC$ ir $\pi - \beta = \angle A'OC$ yra smailieji, trečiasis plokščiasis kampas $\angle A'OB = \pi - \gamma,$ o dvisienis kampas, kurio briauna yra spindulys *OC*, lygus $\pi - \angle C.$ Šiam trisieniam kampui taikome (1) lygybę:

$$\cos(\pi - \gamma) = \cos\alpha \cdot \cos(\pi - \beta) + \sin\alpha \cdot \sin(\pi - \beta) \cdot \cos(\pi - \angle C),$$

arba

$$-\cos\gamma = -\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta\cos\angle C,$$

Taigi ir šiuo atveju (1) lygybė teisinga. Analogiškai (1) lygybės teisingumas patikrinamas, kai du kampai α ir β bukieji, kai kampas α – statusis, o β – bukasis, kai abu kampai α ir β statieji. Patikrinkite tai savarankiškai.

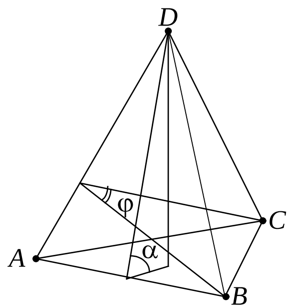
Gautoji (1) lygybė yra vadinama *trisienio kampo kosinusų teorema*.

Analogiškai galima užrašyti dar dvi lygybes kitiems trisienio kampo *OABC* plokštiesiems kampams

$$\cos\beta = -\cos\alpha\cdot\cos\gamma - \sin\alpha\cdot\sin\gamma\cdot\cos\angle B,$$
$$\cos\alpha = -\cos\alpha\cdot\cos\gamma - \sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos\angle A.$$

3 pavyzdys. Taisyklingosios trikampės piramidės dvisienis kampas prie pagrindo lygus α. Rasime dvisienį kampą tarp šios piramidės šoninių sienų.

Kaip žinome, taisyklingosios piramidės pagrindas yra taisyklingais daugiakampis, o šoninės sienos – lygūs lygiašoniai trikampiai. Duotosios piramidės *ABCD* (11 pav.) pagrindas *ABC* – lygiakraštis trikampis, dvisienis kampas tarp pagrindo plokštumos ir sienos *ADB* plokštumos lygus α. Rasime dvisienį kampą φ tarp šoninių sienų plokštumų *ABD* ir *ACD*. Nagrinėjame trisienį kampą *ABCD*, kurio viršūnė – taškas *A*, plokštieji kampai $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BAD = \angle CAD = \beta$, o dvisienis kampas, kurio briauna – spindulys *AB*, lygus α. Pritaikę šiam trisieniam kampui kosinusų teoremą, gauname



11 pav.

$$\cos\angle DAC = \cos\angle DAB\cdot\cos\angle CAB + \sin\angle DAB\cdot\sin\angle CAB\cdot\cos\alpha.$$

Iš čia seka, kad

$$\cos\beta = \cos\beta\cdot\cos 60^\circ + \sin\beta\cdot\sin 60^\circ\cos\alpha.$$

Padaliję abi lygybės puses iš $\sin\beta$, gauname, kad

$$\mathrm{ctg}\beta = \mathrm{ctg}\beta\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha,\ \text{t. y. } \mathrm{ctg}\beta = \sqrt{3}\cos\alpha.$$

Tam pačiam trisieniam kampui taikome kosinusų teoremą, kai dvisienio kampo briauna yra spindulys *AD*:

$$\cos\angle CAB = \cos\angle DAB\cdot\cos\angle CAD + \sin\angle DAB\cdot\sin\angle CAD\cdot\cos\varphi,$$

Iš čia gauname, kad

$$\cos\varphi = \frac{\cos 60^\circ - \cos\beta\cdot\cos\beta}{\sin\beta\cdot\sin\beta} = \frac{\frac{1}{2} - \cos^2\beta}{\sin^2\beta} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin^2\beta} - \mathrm{ctg}^2\beta =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot(1 + \mathrm{ctg}^2\beta) - \mathrm{ctg}^2\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{ctg}^2\beta;$$

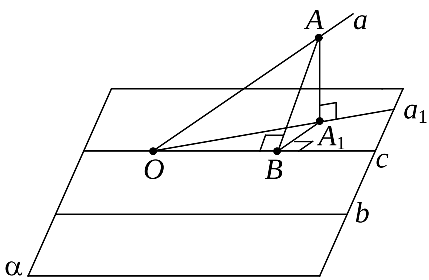
čia naudojome žinomą trigonometrinę tapatybę $1+\mathrm{ctg}^2\beta=\dfrac{1}{\sin^2\beta}$. Įrašę gautą $\mathrm{ctg}^2\beta$ reikšmę randame

$$\cos\varphi == \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos\alpha)^2 = \frac{1}{2}(1-3\cos^2\alpha).$$

4. Sakykime, kad tiesė *b* yra plokštumoje α, tiesė *a* kerta plokštumą α taške *O*, tiesė a' – tiesės *a* ortogonalioji projekcija plokštumoje α. Parodysime, kad kampo tarp tiesių *a* ir *b* kosinusas lygus kampų tarp tiesių *a* ir a_1 o taip pat tarp tiesių a_1 ir *b* kosinusų sandaugai:

$$\cos\angle(a,b)=\cos\angle(a,a_1)\cdot\cos\angle(a_1,b). \qquad (2)$$

Tarkime, kad tiesės a_1 ir *b* nėra statmenos. Nubrėžkime per tašką *O* tiesę *c*, lygiagrečią su tiese *b* (12 pav.), jei taškas *O* yra tiesėje *b*, tiesės *c* ir *b* sutampa. Tiesėje *a* pasirenkame tašką *A*, nuleidžiame iš jo statmenį AA_1 į plokštumą α, o iš taško A_1 nuleidžiame statmenį A_1B į tiesę *c*. Pagal trijų statmenų teoremą gauname, kad tiesės *AB* ir *c* yra statmenos. Akivaizdu, kad



12 pav.

$$\angle(a,b)=\angle(a,c)=\angle AOB,\quad \angle(a,a_1)=\angle AOA_1,$$
$$\angle(a_1,b)=\angle(a_1,c)=\angle A_1OB.$$

Iš stačiųjų trikampių AOA_1, A_1OB ir *AOB* turime

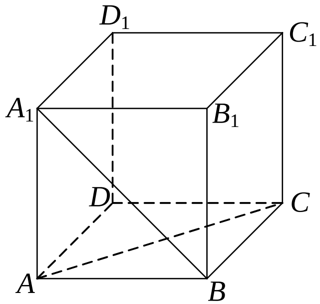
$$\cos\angle AOA_1=\frac{OA_1}{OA},\quad \cos\angle A_1OB=\frac{OB}{OA_1},\quad \cos\angle AOB=\frac{OB}{OA}.$$

Iš čia seka, kad $\cos\angle(a,a_1)\cdot\cos\angle(a_1,b)=\cos\angle(a,b)$. Jei tiesės a_1 ir *b* yra statmenos, tai pagal trijų statmenų teoremą statmenos ir tiesės *a* ir *b*, taigi (2) lygybė šiuo atveju irgi teisinga.

Įrodytoji (2) lygybė gali būti taikoma kampų tarp prasilenkiančių tiesių radimui, kai pavyksta tinkamai parinkti plokštumą α, kurioje yra viena iš tiesių.

4 pavyzdys. Rasime kampą φ, kurį sudaro gretimų kubo sienų prasilenkiančios įstrižainės.

Kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sienos $ABCD$ įstrižainė AC yra plokštumoje $ABCD$, sienos ABB_1A_1 įstrižainė A_1B kerta šią plokštumą taške B; tiesė AB yra tiesės A_1B ortogonalioji projekcija plokštumoje $ABCD$. Pagal (2) lygybę



13 pav.

$$\cos\varphi = \cos\angle(AC, BA_1) = \cos\angle(AC, AB)\cdot\cos\angle(AB, BA_1) =$$
$$= \cos 45^\circ \cdot \cos 45^\circ = \frac{1}{2},$$

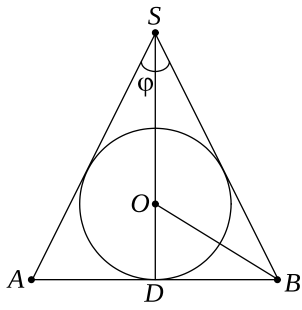
5. Kartais geometrijos uždavinio sprendimą patogu suvesti į trigonometrinės lygties sprendimą.

5 pavyzdys. Kūgio tūrio ir į jį įbrėžto rutulio tūrių santykis yra 8:3. Rasime kūgio ašinio pjūvio kampą prie viršūnės.

14 pav. nubrėžtas kūgio ir į jį įbrėžto rutulio ašinis pjūvis, trikampio ASB kraštinės SA ir SB yra kūgio sudaromosios, $\angle ASB = \varphi$, taškas D – kūgio pagrindo centras, taškas O – į kūgį įbrėžto rutulio centras. Sakykime, kad $OD = R$ – į kūgį įbrėžto rutulio spindulys. Kadangi

$\angle ABS = \angle BAS = \frac{1}{2}(180^\circ - \varphi) = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$, tai

$\angle OBA = \frac{1}{2}\angle ABS = 45^\circ - \frac{\varphi}{4}$,



14 pav.

Iš čia kūgio pagrindo spindulys

$r = DB = R\,\mathrm{ctg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{4}\right)$. Iš trikampio BDS randame kūgio aukštinę

$$h = SD = DB\,\mathrm{ctg}\angle BSD = R\,\mathrm{ctg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{4}\right)\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

Tuomet kūgio tūris

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi R^3 \text{ctg}^3\left(45^\circ - \frac{\varphi}{4}\right)\cdot \text{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

Kadangi rutulio tūris $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3$, tai iš sąlygos $V_1 : V_2 = 8:3$ išplaukia tokia trigonometrinė lygtis $\text{ctg}^3\left(45^\circ - \frac{\varphi}{4}\right)\cdot \text{ctg}\frac{\varphi}{2} = \frac{32}{3}$. Šią lygtį spręsime pažymėję $45^\circ - \frac{\varphi}{4} = x$. Tuomet $\frac{\varphi}{2} = 90^\circ - 2x$, $\text{ctg}\frac{\varphi}{2} = \text{ctg}\,(90^\circ - 2x) = = \text{tg}\,2x = \frac{2\text{tg}\,x}{1-\text{tg}^2 x}$, ir lygtis tampa tokia $\frac{2\text{ctg}^3 x\cdot \text{tg}x}{1-\text{tg}^2 x} = \frac{32}{3}$. Kadangi $\text{ctg}\,x\cdot \text{tg}\,x = 1$, o $\text{ctg}\,x = \frac{1}{\text{tg}\,x}$, tai iš čia gauname lygtį $\frac{1}{\text{tg}^2 x(1-\text{tg}^2 x)} = \frac{16}{3}$. Pažymėję $\text{tg}^2 x = y > 0$, turime kvadratinę lygtį $16y^2 - 16y + 3 = 0$, kurios sprendiniai $y_1 = \frac{3}{4}$, $y_2 = \frac{1}{4}$. Kadangi $x = 45^\circ - \frac{\varphi}{4}$ – smailusis kampas, tai $\text{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ir $\text{tg}\,x = \frac{1}{2}$. Iš čia $45^\circ - \frac{\varphi}{4} = \text{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$, arba $45^\circ - \frac{\varphi}{4} = \text{arctg}\frac{1}{2}$. Taigi $\varphi = 180^\circ - 4\text{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$ arba $\varphi = 180^\circ - 4\text{arctg}\frac{1}{2}$.

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1. Keturkampės piramidės pagrindas yra stačiakampis, kurio kampas tarp įstrižainių lygus β. Piramidės aukštinė lygi h, o jos kiekviena šoninė briauna su piramidės aukštine sudaro kampą α. Raskite piramidės tūrį.

2. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninė briauna lygi l, ji su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

3. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo briaunos ilgis a, visos šoninės sienos pasvirusios į pagrindo plokštumą tuo pačiu kampu β. Raskite piramidės tūrį.

4. Piramidės pagrindas yra lygiašonis trikampis, kurio perimetras lygus $2p$, o kampas prie pagrindo lygus α. Visos piramidės šoninės sienos į pagrindo plokštumą pasvirusios tuo pačiu kampu β. Raskite piramidės tūrį.

5. Kūgio aukštinės ilgis lygus h, ji su kūgio sudaromąja sudaro kampą α. Per kūgio viršūnę nubrėžta plokštuma, pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu β ir kertanti kūgį. Raskite gautojo pjūvio plotą.

6. Stačiakampio gretasienio įstrižainė lygi l, ji su šonine briauna sudaro kampą α. Gretasienio pagrindo perimetras lygus p. Raskite gretasienio tūrį.

7. Kampas tarp dviejų kūgio sudaromųjų lygus α. Per šias sudaromąsias išvesta plokštuma, kuri su kūgio pagrindo plokštuma sudaro kampą β. Kūgio aukštinė lygi h. Raskite kūgio tūrį.

8. Taisyklingosios keturkampės piramidės plokščiasis kampas prie viršūnės lygus α. Raskite a) dvisienio kampo tarp jos šoninės sienos ir pagrindo plokštumos kosinusą; b) dvisienio kampo tarp šoninių sienų kosinusą.

9. Taškas E yra kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunos A_1B_1 vidurio taškas. Raskite kampą tarp tiesių AE ir BD.

10. Kūgio tūrio ir į jį įbrėžto rutulio tūrio santykis lygus k. Raskite kampą tarp kūgio sudaromosios ir kūgio pagrindo plokštumos. Nurodykite galimas k reikšmes.

VIII. MONTE KARLO METODAS

Gediminas Stepanauskas
(Vilniaus universitetas)

ĮVADAS

Pirmas etapas tyrinėjant reiškinį yra modelio kūrimas. A. Rozenblatas (Arturo Rosenblueth – meksikiečių tyrėjas, fizikas ir psichologas, 1900–1970) ir N.Vineris (Norbert Wiener – amerikiečių matematikas, 1894–1964) rašė:

Jokia svarbi pasaulio sritis, dalis ar dalelė nėra tokia paprasta, kad galėtų būti suprasta ir kontroliuojama be abstrakcijos. Abstrakcija pakeičia ją panašios, bet paprastesnės struktūros modeliu, kurį galima tyrinėti.

Taigi modeliai yra mokslinių procedūrų būtinybė. Mokslinis modelis gali būti apibrėžtas kaip kažkokios realios sistemos abstrakcija, kuri gali būti panaudota sistemos prognozei ir kontrolei. Mokslinio modelio tikslas yra atsakyti į klausimą, kaip modeliuojamos sistemos elementų pokyčiai įvairiais aspektais veikia kitų sistemos dalių pasikeitimus ar visą sistemą.

Matematiniai modeliai gali būti įvairiai klasifikuojami.

Vieni modeliai yra statiniai, kiti dinaminiai. Statiniai modeliai tiesiogiai nepriklauso nuo laiko, tuo tarpu dinaminiai – tiesiogiai priklauso nuo laiko. Pavyzdžiui, Omo dėsnis yra statinio modelio pavyzdys, o Niutono judėjimo dėsnis yra dinaminis dėsnis.

Kita modelių klasifikacija būtų: deterministiniai ir stochastiniai modeliai. Deterministiniame modelyje matematiniai ir loginiai elementų ryšiai nekinta, yra fiksuoti. Iš šių ryšių kaip išvada išplaukia modelio sprendiniai.

Stochastiniame modelyje bent vienas kintamasis yra atsitiktinis. Stochastinis modeliavimas dar vadinamas ir *Monte Karlo modeliavimu* arba *modeliavimu Monte Karlo metodu*. Bet Monte Karlo modeliavimas ir stochastinis modeliavimas suprantami šiek tiek skirtingai. Stochastinis modeliavimas yra bendresnė sąvoka. Taigi Monte Karlo metodas tai priemonės, kai naudojami atsitiktiniai ar pseudoatsitiktiniai skaičiai. Jie gali būti naudojami modeliuojant sistemą ar ieškant sistemos modelio sprendinio, ar dar kaip nors kitaip. Visas procesas susideda iš trijų dalių:

pirma, atsitiktinio dydžio su duotu skirstiniu modeliavimas; antra, realios sistemos tikimybinio modelio sudarymas; trečia, statistinės įvertinimo teorijos uždaviniai, leidžiantys įvertinti sudarytą uždavinį įvairiais aspektais, atlikti modelio statistinę analizę.

Atsitiktinių procesų modeliavimo idėja labai sena ir, kai kurių autorių, pavyzdžiui, Haltono (J. H. Halton, A retrospective and prospective survey of the Monte Carlo method, SIAM Rev.(1970) **12**, No 1, 1–63) nuomone, siekia net Senovės Babilono ir Senojo Testamento laikus.

Toliau mums reikės kai kurių tikimybių teorijos sąvokų. Atsitiktinis dydis (ar tiesiog atsitiktinis skaičius) yra *pasiskirstęs tolygiai intervale* $[0;1]$, jei tikimybė, kad dydis paklius į intervalą $[a;b]\subset[0;1]$, yra lygi šio intervalo ilgiui, t.y. $b-a$.

Kadangi iš intervale [0; 1] tolygiai pasiskirsčiusių nepriklausomų atsitiktinių skaičių galima sukonstruoti kitokius atsitiktinius skaičius, tai intervale [0; 1] tolygiai pasiskirsčiusių skaičių gavimo algoritmai (generatoriai) ypač svarbūs. Sukurta daug tokių generatorių. Generatoriais gautos atsitiktinių skaičių sekos testuojamos, lyginamos jų statistinės savybės su tikrųjų atsitiktinių skaičių statistinėmis savybėmis. Labiausiai ištirtos ir dažniausiai naudojamos atsitiktinių skaičių sekos gaunamos tiesiniu kongruentiniu metodu. Monte Karlo metodas naudojamas ne tik stochastiniams, bet ir deterministiniams uždaviniams spręsti. Deterministinis uždavinys gali būti sprendžiamas Monte Karlo metodu, jei jo formali išraiška yra tokia pati kaip kokio nors stochastinio proceso arba dirbtinai padaroma tokia. Naudojant Monte Karlo metodą skaičiuojami daugialypiai integralai, masinio aptarnavimo uždavinių parametrai, sprendžiamos diferencialinės lygtys – tai, žinoma, jau ne mokyklinės matematikos uždaviniai. Monte Karlo metodas naudojamas 3D modeliuose, videožaidimuose, architektūroje, projektuojant, kuriant specialiųjų efektų filmus ir kitose srityse. Monte Karlo metodu galima spręsti sudėtingus uždavinius su didžiuliais duomenų masyvais. Stochastinis reiškinio (sistemos) modelis dažnai yra vienintelis įmanomas modeliuojant fizinę sistemą, nes realus modelis yra per brangus arba jo negalima sumodeliuoti realiame laike. Monte Karlo algoritmai dažnai yra iteraciniai, juos lengva programuoti. Monte Karlo metodas plačiai pradėtas taikyti XX a. viduryje, nors atsitiktinių procesų idėja ir taikymo užuomazgos (kaip jau minėta) yra labai senos. Šiuolaikinių galingų kompiuterių galimybės labai išplėtė Monte Karlo metodo taikymo sritis. Metodo populiarintojai ir pradininkai yra S. M. Ulamas (Stanislaw Marcin Ulam – lenkų-amerikiečių matematikas, 1909–1984), E. Fermi (Enrico Fermi – italų fizikas, 1901–1954), J. Noimanas (John von Neumann – amerikiečių matematikas, gimęs Vengrijoje, 1903–1957), N. Metropolis (Nicholas Constantine Metropolis – graikų-amerikiečių fizikas, 1915–1999).

Pats Monte Karlo pavadinimas įvestas J. Noimano ir S. M. Ulamo Antrojo pasaulinio karo metu. Buvo kuriama atominė bomba, sprendžiami atominės fizikos uždaviniai. Juose buvo naudojamas stochastinis modeliavimas. Užslaptinti darbai buvo pavadinti Monte Karlo (Monako Kunigaikštystės miestas, garsus savo lošimo namais) vardu, ir tas vardas prigijo.

ATSITIKTINIAI SKAIČIAI

Monte Karlo metodas naudoja atsitiktinius skaičius (toliau naudosime trumpinį a. s.), tiksliau – atsitiktinius dydžius, kurie pasiskirstę pagal reikiamą pasiskirstymo dėsnį. Kadangi iš nepriklausomų, tolygiai pasiskirsčiusių intervale [0; 1] a. s. galima sukonstruoti kitokius a. s., tai kalbėsime apie a. s. iš intervalo [0; 1]. Yra trijų tipų a. s.: tikrieji atsitiktiniai skaičiai, pseudoatsitiktiniai skaičiai ir kvaziatsitiktiniai skaičiai.

Tikrieji atsitiktiniai skaičiai

Tikrieji a. s. yra atsitiktiniai statistine prasme. Jokia a. s. serija nepriklauso nuo anksčiau gautų a. s. Tikrųjų a. s. serijos nepasikartoja antrą kartą. Jie negali būti atspėjami. Tikrieji a. s. gali būti generuoti atsitiktinio fizinio proceso metu, pavyzdžiui, rulete. Tarkime, ruletės rodyklė gali parodyti skaitmenis 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 su vienodomis tikimybėmis, lygiomis 1/10. Norimo tikslumo a. s. iš intervalo [0; 1] gausime taip: pirmas skaitmuo po kablelio – pirmas ruletės nurodytas skaičius, antrasis skaitmuo – skaičius po antro ruletės pasukimo ir t. t. Tikruosius a. s. galima generuoti ir mėtant monetą. Šiuo atveju būtų patogu naudoti skaičiaus dvejetainį užrašą. A. s. generavimui galima panaudoti ir radioaktyviųjų medžiagų skilimo procesą, skaičiuojant skilimų skaičių per laiko vienetą. Anksčiau mokslininkai, kuriems reikėjo

a. s., konstruodavo juos maišydami kortas, mesdami lošimo kauliuką arba traukdami iš dėžės rutulius, prieš tai juos gerai sumaišę. Vėliau a.s generavimui buvo sukonstruotos specialios mašinos. Pirmą tokią mašiną 1939 m. panaudojo Kendalas (Sir Maurice George Kendall – britų statistikas, 1907–1983) ir Babingtonas-Smitas (Bernard Babington-Smith – britų psichologas, 1905–1993). Jie sudarė 100000 a. s. Dar vėliau buvo sugalvota įvairių a. s. gavimo mechanizmų, ir gana greitų. Sukurti elektroniniai a. s. generatoriai (pavyzdžiui, ERNIE) buvo net tiesiogiai prijungiami prie kompiuterio.

Tikrųjų a. s. trūkumai:

- Jų generavimas reikalauja specialių priemonių.
- Juos generuoti reikia daug laiko.
- Jų negalima pakartoti. O modeliavime kartais prireikia pakartoti eksperimentą su ta pačia a.s. seka.
- Generatoriai gali turėti sisteminių (konstravimo ir pan.) klaidų.
- Gali pasirodyti, kad generuoti skaičiai jau ne visai atsitiktiniai, t.y. nėra tikrieji a.s.

Sakome, kad dešimtainiai skaitmenys 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 yra *tolygiai pasiskirstę dešimtainių atsitiktinių skaičių sekoje*, jeigu visų skaitmenų pasirodymo sekoje tikimybės vienodos ir lygios 1/10. Tikrųjų dešimtainių a. s. seka tokia ir turėtų būti.

Atlikite 1 ir 2 užduotis.

Kvaziatsitiktiniai skaičiai

Tai visiškai neatsitiktiniai skaičiai. Ilgos tokių skaičių sekos kai kuriems uždaviniams spręsti yra geresnės už tikruosius a. s. Kvaziatsitiktiniai skaičiai svarbūs apskaičiuojant integralus Monte Karlo metodu. Jame naudojant a. s., kurie yra atsitiktiniai statistine prasme, rezultato paklaida yra proporcinga $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Naudojant kvaziatsitiktinius skaičius, gaunamas tikslesnis rezultatas, kurio paklaida proporcinga $\frac{1}{N}$. Čia N – atsitiktinių skaičių skaičius.

Pseudoatsitiktiniai skaičiai

Pseudoatsitiktiniai skaičiai (naudosime trumpinį p. a. s.) yra generuojami kokiu nors algoritmu. Taigi kiekvienas paskesnis skaičius priklauso nuo ankstesnių skaičių. Bet ši priklausomybė tokia, kad p. a. s. turi tas pačias svarbias statistines savybes kaip ir tikrieji a. s. Aišku, tos savybės negali būti visiškai tos pačios. Tačiau bet kurios neilgos p. a. s. sekos statistinės savybės daugeliu aspektų turi būti labai panašios į tikrųjų a. s. savybes. Taikymuose paprastai to ir pakanka, jei skaičiai pakankamai sujaukiami.

Reikalavimai, keliami a. s. generatoriams:

- Generuoti skaičiai turi būti tolygiai pasiskirstę intervale [0; 1], nes taip pasiskirstę yra tikrieji a. s. Kitaip pasiskirstę a. s. gali būti gauti iš pastarųjų.
- Generuoti skaičiai turi būti statistiškai nepriklausomi, kadangi atsitiktinėje sekoje vieno skaičiaus reikšmė neturi turėti įtakos kito skaičiaus reikšmei.
- Generuojamų skaičių seka turi būti atstatoma. Tai leidžia kartoti eksperimentus.
- Bet kokio norimo ilgio seka neturi kartotis. Tai teoriškai neįmanoma, bet praktinėms reikšmėms užtenka ilgų besikartojančių ciklų.
- Skaičių generavimas turi būti greitas. Modeliavimo procese paprastai reikia daug p. a. s. Jei generatorius lėtas, tai modeliavimo procesui gali prireikti labai daug laiko, ir todėl pats modeliavimas pasidarys brangus.
- P. a. s. generatoriaus naudojamas metodas turi naudoti kiek galima mažiau atminties. Pats modeliavimas paprastai reikalauja daug atminties, o atminties resursai dažniausiai yra riboti.

Kompiuterio atmintyje laikyti generuotą p. a. s. seką nėra tikslo, nes reikėtų sugaišti daug laiko nuskaitant p. a. s., o ir pati seka užimtų daug atminties resursų. Be to, priklausomai nuo sprendžiamų uždavinių, reikėtų daug p. a. s. pavyzdžių. Geriausia kompiuteryje turėti programą, kuri, naudodama tam tikrus algoritmus, generuotų p. a. s. tada, kai jų prireikia pačiame modeliavimo procese.

Kai naudojami p. a. s., kurie labai svarbūs modeliavime, reikia ypač būti įsitikinusiam, kad p. a. s. seka sprendžiamam uždaviniui yra tikrai tinkama: yra pakankamai atsitiktinė, yra pakankamo ilgio nepasikartojantis ciklas ir kt. Taigi paprastai tenka įdėti daug darbo testuojant p. a. s. algoritmus.

PSEUDOATSITIKTINIŲ SKAIČIŲ GENERAVIMAS

P. a. s. gaunami skaitinių algoritmų pagalba. Bendriausias p. a. s. generavimo algoritmas gali būti užrašytas taip:

$$x_{n+1} = f(x_1, x_2, ..., x_n);$$

čia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yra kokia nors n kintamųjų funkcija.

Naudojant šitokį algoritmą, atmintyje reikėtų laikyti visus generuotus skaičius, pradedant pirmuoju. Tokia procedūra užimtų per daug kompiuterio atminties. Praktinėms reikmėms paprastai užtenka paprastesnių algoritmų. Dauguma jų turi tokią formą:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Funkcija $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ turi būti labai atidžiai parinkta. Kalbant vaizdžiau, taškai, kurių koordinatės yra gretimi skaičiai (x_1, x_2), (x_3, x_4), $(x_5, x_6), ...$, turi padengti vienetinį kvadratą kiek galima tolygiau.

Kvadrato vidurio metodas

Kvadrato vidurio metodas – tai Noimano pasiūlytas ir pirmas plačiai naudotas algoritminis metodas p. a. s. generuoti. Metodo idėja tokia: n-asis p. a. s. yra gaunamas paėmus vidurinius (n–1)-ojo p. a. s. kvadrato skaitmenis. Tarkime,

$$a_0=0{,}1234, \quad a_0^2=0{,}01\underline{5227}56.$$

Tuomet

$$\begin{aligned}
a_1&=0{,}5227, & a_1^2&=0{,}27\underline{3215}29,\\
a_2&=0{,}3215, & a_2^2&=0{,}10\underline{3362}25,\\
a_3&=0{,}3362, & a_3^2&=0{,}11\underline{3030}44,\\
a_4&=0{,}3030, & a_4^2&=0{,}09\underline{1809}00,\\
a_5&=0{,}1809, & a_5^2&=0{,}03\underline{2724}81,\\
&\ldots\ldots & &\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Kvadrato vidurio metodas nėra geras: yra skaičių, kurie „užsiciklina“, jis nepatogus statistinei analizei atlikti; seka labai priklauso nuo pirmojo skaičiaus parinkimo; jei sekoje pasitaiko nulis, tai visi tolimesni sekos nariai irgi bus lygūs nuliui; skaičiai generuojami ne pakankamai greitai. Atsiradus geresniems generatoriams, o ypač pradėjus naudoti tiesinį kongruentinį metodą, kvadrato vidurio metodas nebenaudojamas. Jis liko istorijoje kaip pirmasis algoritminis p.a.s. generatorius.

Atlikite 3 užduotį.

Tiesinis kongruentinis metodas

Šiandien p. a. s. dažniausiai gaunami taikant D. H. Lemerio (Derrick Henry Lehmer – amerikiečių matematikas, 1905–991) 1948 m. pasiūlytos schemos dalinius atvejus. Metodas vadinamas tiesiniu kongruentiniu metodu. Šiame skyrelyje jį ir panagrinėsime.

P. a. s. seka apibrėžiama lyginiu:

$$X_{n+1} \equiv (aX_n + c) \bmod m, \quad n \geq 0. \qquad (1)$$

Čia:

X_0 – pradinė reikšmė, $X_0 \geq 0$,

a – daugiklis, $a \geq 0$,

c – pokytis, $c \geq 0$,

m – modulis, $m > X_0$, $m > a$, $m > c$, yra parenkami.

Užrašas $A \equiv B \bmod m$ reiškia, kad skaičiai A ir B vienas nuo kito skiriasi tik skaičiaus m kartotiniu, t.y. jų skirtumas dalijasi iš m. Todėl visi sekos nariai gali būti paimti tokie, kad $0 \leq X_n < m$.

Tarkime, $X_0 = a = c = 7$, $m = 10$. Tada

$$X_1 \equiv (7 \cdot 7 + 7) = 56 \equiv 6 \bmod 10.$$

Kiti sekos nariai gaunami analogiškai. Gausime skaičių seką 7, 6, 9, 0, 7, 6, 9, 0, …

Atlikite 4 užduotį.

Toliau panagrinėsime principus, kaip gauti kuo ilgesnio ciklo („geras”) atsitiktines sekas priklausomai nuo pradinių parametrų. Pasikartojanti p. a. s. sekos dalis vadinama jos periodu. Tikslas – gauti kuo ilgesnio periodo sekas. Atvejų, kai a = 0 ir a = 1, nenagrinėsime, nes sekos gaunasi labai skurdžios ir, aišku, „mažai atsitiktinės”. Teisinga tokia teorema.

1 teorema. Tiesinės kongruentinės sekos periodo ilgis lygus m tada ir tik tada, kai

- skaičiai c ir m yra tarpusavyje pirminiai, t.y. $(c, m)=1$;
- jei m dalijasi iš kokio nors pirminio skaičiaus p, tai ir $a - 1$ turi dalytis iš p, t.y. $p \backslash m \Rightarrow p \backslash (a-1)$;
- jei m dalijasi iš 4, tai ir $a - 1$ turi dalytis iš 4, t.y. $4 \backslash m \Rightarrow 4 \backslash (a-1)$.

Čia užrašas $A|B$ reiškia, kad skaičius B dalijasi iš skaičiaus A. Skaičiai A ir B vadinami *tarpusavyje pirminiais*, jei jie neturi jokių bendrų daliklių, išskyrus 1.

Pateiksime tiesinės kongruentinės sekos su maksimaliai galimu periodu, lygiu 48, pavyzdį. Kadangi $m = 48 = 2^4\ 3$, tai iš 1 teoremos išplaukia, kad a ir c gali būti parinkti taip: $a = 13$, $c = 23$. Taigi c ir m yra tarpusavyje pirminiai, o $a - 1 = 12$ dalijasi iš 2, 3 ir 4, nes turi dalytis iš pirminių skaičių, iš kurių dalijasi m, ir iš 4, jei iš 4 dalijasi m. Tegul $X_0 = 0$. Visas atsitiktinės sekos periodas atrodo taip:

$$\begin{array}{l} 0, 23, 34, 33, 20, 43, 6, 5, \\ 40, 15, 26, 25, 12, 35, 46, 45, \\ 32, 7, 18, 17, 4, 27, 38, 37, \\ 24, 47, 10, 9, 44, 19, 30, 29, \\ 16, 39, 2, 1, 36, 11, 22, 21, \\ 8, 31, 42, 41, 28, 3, 14, 13. \end{array} \qquad (2)$$

Pateiktas pavyzdys irgi nėra geras: mažas atsitiktinumo laipsnis, kai kurie sekos dėsningumai lengvai pastebimi. Parinkti gerą atsitiktinę seką nėra paprasta. O ir parinkus ją, reikia naudoti įvairius testus, ir įsitikinti, kad seka tinka modeliavimui.

Atlikite 5 užduotį.

Iš generuotos atsitiktinės natūraliųjų skaičių sekos lengvai galima sudaryti tolygiai intervale [0; 1] pasiskirsčiusių pseudoatsitiktinų skaičių seką. Tai galima padaryti, pavyzdžiui, naudojantis formule $U_n = \dfrac{X_n}{m}$.

Dydžiai U_n bus pasiskirstę tolygiai intervale [0; 1]. Tolygiai pasiskirsčiusios intervale [0; 1] sekos naudojamos kitaip pasiskirsčiusioms sekoms sudaryti.

Iš natūraliųjų atsitiktinių skaičių sekos X_n, gautos pateiktame pavyzdyje su $m = 48$, sukonstruokime atsitiktinių skaičių, tolygiai pasiskirsčiusių intervale [0; 1], seką U_n. Naudodamiesi pateikta formule, gauname tokią tolygiai intervale [0; 1] pasiskirsčiusią seką (apvaliname 4 ženklų po kablelio tikslumu):

0	0,4792	0,7083	0,6877	0,4167	0,8958
0,125	0,1042	0,8333	0,3125	0,5417	0,5208
0,25	0,7292	0,9583	0,9375	0,6667	0,1458
0,375	0,3542	0,0833	0,5625	0,7917	0,7708
0,5	0,9792	0,2083	0,1875	0,9167	0,3958
0,625	0,6042	0,3333	0,8125	0,0417	0,0208
0,75	0,2292	0,4583	0,4375	0,1667	0,6458
0,875	0,8542	0,5833	0,0625	0,2917	0,2708.

Šios sekos statistinės savybės, kaip ir (2) natūraliųjų skaičių sekos, nėra geros – per mažas atsitiktinumo laipsnis.

Atlikite 6 užduotį.

Kai (1) formulėje $c = 0$, tiesinės sekos gavimo metodas vadinamas multiplikatyviuoju. Multiplikatyviuoju atveju p. a. s. generavimo procesas vyksta greičiau. Apribojimas $c = 0$ sumažina sekos periodo ilgį, bet ir šiuo atveju galima gauti gana ilgo periodo sekas.

Jau žinome, kad maksimalus tiesinės kongruentinės sekos periodas gaunamas, kai skaičius $a - 1$ yra visų pirminių *m* daliklių kartotinis ir 4 kartotinis, jei *m* dalijasi iš 4 (žr. 1 teoremą). Tiesinės kongruentinės sekos su maksimaliu periodu *galingumu* vadinsime mažiausią natūralųjį skaičių *s*, su kuriuo

$$(a-1)^s \equiv 0 \bmod m.$$

Toks skaičius *s* visuomet egzistuoja, kai *a* tenkina 1 teoremos reikalavimus. Jeigu *a* = 1, galingumas $s = 1$, $X_n \equiv cn \bmod m$, kai $X_0 = 0$. Seka, aišku, neatsitiktinė. Jeigu sekos galingumas didesnis už 1, seka yra „labiau atsitiktinė“. Ir kuo didesnis galingumas, tuo sekos statistinės savybės geresnės, ji labiau panaši į atsitiktinę. Galingumas yra vienas iš kriterijų parenkant daugiklį *a*.

Atlikite 7 užduotį.

STATISTINIAI TESTAI

Labai svarbu, kad kokiu nors būdu gauta p. a. s. seka būtų panaši į atsitiktinę. Jau žinome kaip gauti ilgo periodo sekas, kad praktiniuose uždaviniuose nebūtų sekos pasikartojimo. Bet ilgas periodas dar nereiškia, kad seka pasižymi atsitiktinės sekos savybėmis. Ryšį su sekos atsitiktinumu turi anksčiau aptartas sekos galingumas. Bet pats galingumas apibrėžiamas ne statistiniais terminais. Galingumas apsprendžia gretimų tiesinės kongruentinės sekos narių susijimo laipsnį. Didelis galingumas gerai, bet vis tiek seka gali nebūti panaši į atsitiktinę. Tai kaipgi nuspręsti, ar seka pakankamai atsitiktinė? Iš dalies atsakyti į iškeltą klausimą leidžia statistinė teorija. Tam yra daugybė statistinių testų.

Jeigu p. a. s. seka sėkmingai praėjo testų $T_1, T_2, \ldots, T_n$ patikrinimą, tai dar negalima daryti išvados, kad ji bus gerai įvertinta ir testu T_{n+1}, ir juo labiau, kad ji pasižymi visomis atsitiktinės sekos savybėmis. Tačiau kiekvienas testas mus vis labiau įtikina, kad seka atsitiktinė. Paprastai p. a. s. sekos tikrinamos daugybe testų (priklausomai nuo sprendžiamų uždavinių svarbumo, nuo sekos taikymo intensyvumo ir t.t.). Jeigu testų rezultatai teigiami, seką laikome atsitiktine (atsitiktine ji laikoma tol, kol kokiu nors testu įrodomas jos „kaltumas”).

Daugumai testų suprasti reikalingos gilios žinios iš tikimybių teorijos ir statistikos, todėl mes jų nenagrinėsime. Pakalbėsime tik apie gretimų sekos narių koreliaciją, išreikštą koreliacijos koeficientu *r*, kuris rodo gretimų sekos narių priklausomumo laipsnį. Kuo koreliacijos koeficientas mažesnis, tuo sekos nariai yra mažiau tarpusavyje statistiškai priklausomi – taigi jie labiau tinka modeliavimui.

2 teorema. Tiesinės kongruentinės sekos su maksimaliu periodu gretimų narių koreliacijos koeficientas

$$r \approx \frac{1}{a}\left(1 - 6\frac{c}{m} + 6\left(\frac{c}{m}\right)^2\right). \qquad (3)$$

Šios apytikslės formulės paklaida yra nedidesnė už $\dfrac{(a+6)}{m}$.

Iš pateiktos formulės galima padaryti keletą svarbių išvadų. Pirma, reikia vengti mažų *a* reikšmių. Antra, didelės *a* reikšmės negarantuoja, kad bus maža gretimų narių koreliacija, nes pateiktos formulės paklaida gali išaugti iki $\frac{a}{m}$. Iki šiol mes nieko nekalbėjome apie c parinkimą, išskyrus tai (žr. 1 teoremą), kad c ir m turi būti tarpusavyje pirminiai. Pateikta (3) apytikslė lygybė padeda pasirinkti tinkamas koeficiento c reikšmes. Lygties $1-6x+6x^2=0$ sprendiniai yra $\frac{1}{2}\pm\frac{1}{6}\sqrt{3}$.

Todėl pasirinkę c taip, kad galiotų apytikslė lygybė

$$\frac{c}{m}\approx\frac{1}{2}\pm\frac{1}{6}\sqrt{3},$$

gausime mažą koreliacijos koeficientą.

Atlikite 8 užduotį.

ĮVAIRIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ GAVIMAS

Jau mokame gauti tolygiai pasiskirsčiusius intervale [0;1] atsitiktinius dydžius U_0 , U_1 , ... Tarkime, kad jie elgiasi taip tarsi jie būtų atsitiktiniai ir nepriklausomi. Praktiniams taikymams dažnai reikia kitaip pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių rinkinių. Parodysime kaip galima gauti kai kuriuos iš jų.

Tolygiai intervale [a; b] pasiskirsčiusi atsitiktinė seka gaunama pasinaudojus formule

$$V_n=a+(b-a)U_n.$$

Atlikite 9 užduotį.

Atsitiktinį dydį W tokį, kad

$W=x_1$ su tikimybe p_1,
$W=x_2$ su tikimybe p_2,
…………………………
$W=x_k$ su tikimybe p_k ($p_1+\ldots+p_k=1$),

gausime pritaikę formulę

$$W=\begin{cases} x_1, \text{ kai } 0\le U<p_1, \\ x_1, \text{ kai } p_1\le U<p_1+p_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k, \text{ kai } p_1+\ldots+p_{k-1}\le U<1. \end{cases}$$

Atlikite 10 užduotį.

Iš tikrųjų Monte Karlo metodu sprendžiami uždaviniai yra labai sudėtingi, reikalauja gilių matematikos žinių. Čia pateikėme jums tik trumpą įvadą į teoriją. Įsigilinti ir geriau suprasti Monte Karlo metodus galima tik pastudijavus tokias matematikos sritis kaip tikimybių teorija, statistika, skaičių teorija, kombinatorika ir kt.

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Jums reikia gauti tikrąjį atsitiktinį dešimtainį skaitmenį, t. y. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 arba 9. Kurį iš metodų ir kodėl Jūs pasirinktumėte?
   1. Paprašysite draugo, kad jis sugalvotų vieną iš dešimties skaitmenų.
   2. Pažvelgsite į mechaninį laikrodį, rodantį sekundes. Jei sekundžių rodyklė yra tarp 6*n* ir 6(*n*+1) sekundžių (priklauso intervalui [6*n*, 6(*n*+1))), pasirinksite skaitmenį *n*.

2. Jums reikia gauti atsitiktinį skaitmenį iš keturių skaitmenų 0, 1, 2 arba 3. Sugalvokite metodą kaip reikėtų gauti tokį skaitmenį mėtant monetą.

3. Sugeneruokite 10 pirmųjų pseudoatsitiktinių skaičių kvadrato vidurio metodu, jei $a_0 = 0{,}328711$.

4. Užrašykite tiesinės kongruentinės sekos pirmuosius dešimt narių, kai $X_0 = 1$, $a = 3$, $c = 4$, $m = 15$.

5. Tiesiniu kongruentiniu metodu sugeneruokite pseudoatsitiktinių skaičių seką, turinčią maksimalų periodą, t. y. lygų 45. Imkite modulį $m = 45$, $X_0 = 0$. Skaičių *a* pasirinkite nelygų vienetui, mažiausią iš visų, tenkinančių 1 teoremos sąlygas, skaičių *c* pasirinkite iš intervalo [9; 12], taip pat tenkinantį 1 teoremos sąlygas.

6. Iš 5-oje užduotyje gautos sekos sukonstruokite tolygiai intervale [0; 1] pasiskirsčiusią seką. Apvalinkite keturių ženklų po kablelio tikslumu.

7. Kokius skaičius a galima būtų parinkti generuojant tiesinę kongruentinę seką su maksimaliu periodu, kai m = 405, kad sekos galingumas būtų didžiausias?

8. Kokius skaičius c galima būtų parinkti generuojant tiesinę kongruentinę seką su maksimaliu periodu, kai m = 405, kad sekos gretimų narių koreliacijos koeficientas būtų mažiausias?

9. Iš 6-oje užduotyje gautos tolygiai pasiskirsčiusios intervale [0; 1] sekos gaukite tolygiai pasiskirsčiusią seką intervale $[-3; 1]$.

10. Iš 6-oje užduotyje gautos tolygiai pasiskirsčiusios intervale [0; 1] sekos gaukite atsitiktinę seką, kurios nariai yra skaičiai 1, 2 ir 3 atitinkamai su tikimybėmis $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ ir $\frac{1}{4}$.

BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Edmundas Mazėtis, Juozas Šinkūnas (Lietuvos edukologijos universitetas)

1. Prekės kaina sumažinta 25 %. Keliais procentais reikia padidinti naują kainą, kad prekės kaina būtų 13 % mažesnė už pradinę kainą?

2. Apskaičiuokite ribą $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}\right)$.

3. Raskite lygties $x-2y+28=xy$ natūraliuosius sprendinius.

4. Apskaičiuokite taisyklingosios trikampės piramidės tūrį, jei pagrindo kraštinė lygi a, o šoninės briaunos pasvirusios į pagrindo plokštumą 60 ° kampu.

Užduočių sprendimai

STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Spręsime uždavinį laikydami, kad dviratininkai visą kelią važiavo pastoviais greičiais.

Tegu atstumas tarp vietovių yra S km, o iki susitikimo dviratininkai važiavo t minučių. Tada pirmasis dviratininkas į vietovę B atvyko per $(t+12)$ minučių, o antrasis dviratininkas – į vietovę A per $(t+27)$ minutes. Vadinasi, pirmojo dviratininko greitis yra $\frac{S}{t+12}\,\frac{\text{km}}{\text{min}}$, o antrojo – $\frac{S}{t+27}\,\frac{\text{km}}{\text{min}}$. Pagal sąlygą sudarome lygtį:

$$\frac{S}{t+12}\cdot t=\frac{S}{t+27}\cdot 27 \Rightarrow \frac{t}{t+12}=\frac{27}{t+27} \Rightarrow t^2=12\cdot 27 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t=18\ (\text{min}).$$

Taigi pirmasis dviratininkas kelionėje užtruko $18+12=30$ minučių, o antrasis – $18+27=45$ minutes.

Ats.: 30 min, 45 min.

2. *1 būdas.* Akivaizdu, kad $a^2 \le a^2+b^2 \le 4$ ir $b^2 \le a^2+b^2 \le 4$. Iš čia išplaukia, kad $|a| \le 2$ ir $|b| \le 2$. Reiškinys $a+b$ gali įgyti didžiausią reikšmę, kai $a \ge 0$ ir $b \ge 0$. Tada $0 \le a \le 2$ ir $0 \le b \le 2$. Vadinasi, $a+b \le 2+2=4$. Pastebėsime, kad $a+b=4$ tik tada, kai $a=2$ ir $b=2$. Tačiau šiuo atveju $a^2+b^2=2^2+2^2>4$. Taigi galiojant nelygybei $a^2+b^2 \le 4$, teisinga tokia nelygybė $a+b<4$.

2 būdas. Akivaizdu, kad $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab \ge 0$, t. y. $a^2+b^2 \ge 2ab$. Lygybė galima tik tada, kai $a=b$. Kadangi

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab \le a^2+b^2+a^2+b^2=2(a^2+b^2),$$

tai

$$|a+b| \le \sqrt{2(a^2+b^2)}=\sqrt{2\cdot 4}=2\sqrt{2}.$$

Lygybė galima tik tada, kai $a=b$. Taigi $a+b \le 2\sqrt{2}$. Lygybė galima tik tada, kai $a=b=\sqrt{2}$. Patikslinome įrodomąją nelygybę!

3. Tegu triženklis skaičius yra $\overline{xyz}$ ir $x \le z$. Tada $\overline{xyz} \cdot \overline{zyx} = 692\,443$. Iš čia išplaukia, kad skaitmenų x ir z sandauga baigiasi 3. Galimi tik du atvejai: 1) $x = 1,\ \ z = 3$ ir 2) $x = 7,\ \ z = 9$.

1) Kai $x = 1,\ \ z = 3$, net ir tuo atveju, kai $y = 9,$ turime:

$$\overline{xyz} \cdot \overline{zyx} = 193 \cdot 391 = 75463 < 692\,443.$$

Taigi šiuo atveju nėra triženklių skaičių, tenkinančių uždavinio sąlygą.

2) Kai $x = 7,\ \ z = 9,$ iš lygybės $\overline{7y9} \cdot \overline{9y7} = 692\,443$ gauname lygtį $(709 + 10y)(907 + 10y) = 692\,443,$

t. y. lygtį $10y^2 + 1616y - 49386 = 0.$ Jos teigiamas sprendinys lygus 3.

Uždavinio sąlygą tenkina du skaičiai 739 ir 937.

Ats.: 739, 937.

4. Tarkime, kad tarp tūkstančio skirtingų natūraliųjų skaičių nėra nė vienos poros nelyginių skaičių. Tada 1000 mažiausių lyginių skaičių 2, 4, 6, ..., 1998, 2000 suma

$$S = 2 + 4 + 6 + ... + 1998 + 2000 = 2(\underbrace{1001 + 1001 + ... + 1001}_{500}) =$$

$$= 1000 \cdot 1001 = 1001000 > 1\,000\,998.$$

Vadinasi, tarp 1000 skirtingų natūraliųjų skaičių turi būti bent du nelyginiai skaičiai, kad tų skaičių suma būtų lygi 1 000 998.

5. Tegu ieškomasis dviženklis skaičius yra $\overline{xy}.$ Pagal sąlygą $10x + y = 2xy.$ Iš čia išplaukia, kad y yra lyginis skaičius. Taigi $y = 2k,\ \ \ k = 1, 2, 3, 4.$ Šią y išraišką įrašę į turimą lygybę, gauname, kad $10x + 2k = 2x \cdot 2k,$ t. y. $5x = (2x - 1) \cdot k.$ Kadangi kairioji lygybės pusė dali iš 5, tai $2x - 1$ turi būti taip pat dalus iš 5. Vadinasi, $x = 3$ arba $x = 8.$

Kai $x = 3$, tai $k = 3$ ir $y = 6.$ Taigi dviženklis skaičius 36 tenkina uždavinio sąlygą.

Kai $x = 8,\ \ 40 = 15 \cdot k \Rightarrow k = \frac{8}{3} \notin \mathbf{N}.$ Šiuo atveju dviženklio skaičiaus, tenkinančio uždavinio sąlygą, nėra.

Ats.: 36.

6. Sudėję abi sistemos lygtis, gauname lygtį

$$x^2 + y^2 + 2xy + x + y = 6.$$

Tegu $x + y = t$. Tada gauname lygtį $t^2 + t - 6 = 0$. Jos sprendiniai yra $t_1 = -3$, $t_2 = 2$.

Taigi nagrinėjamoji lygčių sistema ekvivalenti lygčių sistemų

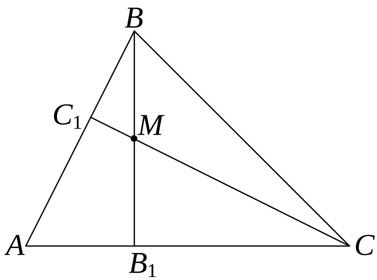
$$\begin{cases} x^2 + xy + y = 1, \\ x + y = -3 \end{cases} \text{ ir } \begin{cases} x^2 + xy + y = 1, \\ x + y = 2 \end{cases} \text{ visumai.}$$

Pirmosios sistemos sprendinys (–1; –2), o antrosios – (–1; 3).

Ats.: (–1; –2), (–1; 3).

7. Kadangi statieji trikampiai ABB_1 ir MB_1C yra lygūs ($\angle ABB_1 = \angle MCB_1$ ir $MC = AB$), tai $BB_1 = B_1C$. Vadinasi, statusis trikampis BB_1C yra lygiašonis ir $\angle BCB_1 = 45^\circ$.

Ats.: 45°.



8. Tegu stačiakampio plotas lygus S. Atkreipkime dėmesį, kad ir kaip sukarpytume stačiakampį į tris trikampius, vieno trikampio plotas bus lygus $\frac{S}{2}$. Jeigu kito trikampio plotą pažymėsime x, tai trečiojo trikampio plotas lygus $\frac{S}{2} - x$. Pagal sąlygą $x = \frac{\frac{S}{2} + \frac{S}{2} - x}{2}$. Iš čia randame, kad $x = \frac{S}{3}$. Tada $\frac{S}{2} - x = \frac{S}{2} - \frac{S}{3} = \frac{S}{6}$. Taigi trikampių plotai lygūs $\frac{S}{6}$, $\frac{S}{3}$ ir $\frac{S}{2}$, o jų plotų santykis $\frac{S}{6} : \frac{S}{3} : \frac{S}{2} = 1:2:3$.

Ats.: 1:2:3.

9. Tegu skydo (ketvirčio skritulio!) spindulys lygus R. Tada skydo plotas lygus $\frac{\pi R^2}{4}$, o jo kairiosios pusės – $\frac{\pi R^2}{8}$. Į skydą įbrėžto pusskritulio plotas lygus $\frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi R^2}{8}$. Taigi skydo kairiosios pusės ir pusskritulio plotų suma lygi viso skydo plotui. Į šią sumą raudonai nudažytos skydo dalies plotas įeina du kartus. Vadinasi, šiomis dviem skydo dalimis neužpildytos skydo dalies (nudažytos mėlyna spalva) plotas lygus skydo dalies, nudažytos raudona spalva, plotui.

Ats.: Ginklanešys neteisus. Skyde drąsos ir išminties yra po lygiai.

10. Tegu pirmąją naktį rūsyje sūrius graužė x pelių. Pagal sąlygą $x > 7$. Tą naktį kiekviena pelė sugraužė po $\frac{10}{x}$ sūrių. Antrąją naktį kiekviena atėjusi į rūsį pelė sugraužė po $\frac{5}{x}$ sūrių ir iš viso sugraužė $\frac{5}{x} \cdot 7$ sūrių. Taigi $\frac{35}{x}$ turi būti natūralusis skaičius. Kadangi $x > 7$, tai $x = 35$ ir $\frac{35}{35} = 1$.

Vadinasi, rūsyje buvo 11 sūrių, o pirmąją naktį sūrius graužė 35 pelės.

Ats.: 11.

PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tegu puodukas kainuoja a Lt, o lėkštutė – b Lt. Pagal sąlygą $a = 1{,}5b$ arba $b = \frac{2}{3}a$. Lėkštutė pigesnė už puoduką

$$\frac{a-b}{a}\cdot 100=\frac{a-\frac{2a}{3}}{a}\cdot 100=\frac{100}{3}=33\frac{1}{3}\text{ procentų.}$$

Ats.: $33\frac{1}{3}$ %.

2. Tegu banko metinė palūkanų norma yra p %. Sudarome lygtį

$$\left(2000\left(1+\frac{p}{100}\right)+540\right)\cdot\frac{p}{100}=78\Rightarrow p^2+127p-390=0\Rightarrow p=3.$$

Ats.: 3 %.

3. Sakykime, kad banko metinė palūkanų suma yra p %, o ūkininkas iš banko pasiskolino s litų. Po metų ūkininkas bankui grąžino $\frac{3}{4}s\left(1+\frac{p}{100}\right)$ litų ir liko skolingas $\frac{1}{4}s\left(1+\frac{p}{100}\right)$ litų. Dar po metų skola išaugo iki $\frac{1}{4}s\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$. Pagal sąlygą sudarome lygtį

$$\frac{1}{4}s\left(1+\frac{p}{100}\right)^2=0{,}36s\;\Rightarrow\; p=20.$$

Ats.: 20 %.

4. Jeigu skaičiai yra x ir y, tai pagal sąlygą $x+y=1{,}5(x-y)\Rightarrow x=5y$. Šių skaičių kvadratų suma yra didesnė už jų sandaugą

$$\frac{x^2+y^2-xy}{x\cdot y}\cdot 100=\frac{(5y)^2+y^2-5y\cdot y}{5y\cdot y}\cdot 100=\frac{21}{5}\cdot 100=420$$

procentų.

Ats.: 420 %.

5. Tegu už pirmąją vazą komiso parduotuvė mokėjo x litų, o už antrąją – y litų. Pagal sąlygą sudarome lygčių sistemą

$$\begin{cases}x+y=2250,\\ 1{,}25x+1{,}5y=1{,}4\cdot 2250\end{cases}\Rightarrow\; x=900,\;\; y=130.$$

Ats.: 900 Lt ir 1350 Lt.

6. Sakykime, kad nuskintų agurkų masė yra *m* kg ir iš jų išgaravo *x* kg vandens. Sudarome schemą

$$\boxed{\begin{array}{c} A(99, 1, m) \\ -V(100, 0, x) \end{array}} \quad \Rightarrow \quad A_1(98, 2, m-x)$$

ir gauname lygtį

$$1 \cdot m - 0 \cdot x = 2(m-x) \quad \Rightarrow \quad 2x = m \quad \Rightarrow \quad x = \frac{m}{2}.$$

Taigi agurkų masė sumažėjo $\dfrac{\frac{m}{2}}{m} \cdot 100 = 50$ procentų. Jeigu $\dfrac{m}{2} = 50$, tai $m = 100$.

Ats.: 50 %, 100 kg.

7. Tegu žiūrovų skaičius stadione iš pradžių (neatpigus bilietams!) buvo *y*, o bilietas į stadioną atpigo *x* litų. Sudarome lygtį

$$(15-x) \cdot 1{,}5y = 1{,}25 \cdot 15y \;\Rightarrow\; (15-x) \cdot 1{,}5 = 1{,}25 \cdot 15 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}5x = 3{,}75 \;\Rightarrow\; x = 2{,}5 \text{ (Lt)}.$$

Ats.: 2,5 Lt.

8. Tegu indo talpa yra *V* litrų. Sudarome pirmojo nupylimo ir įpylimo į indą schemą:

$$\boxed{\begin{array}{l} T_1(96, 4, V-25) \\ +T_2(80, 20, 2{,}5) \end{array}} \quad \Rightarrow \quad T_3(x, 100-x, V)$$

ir sudarome lygtį

$$4(V-2{,}5) + 20 \cdot 2{,}5 = V(100-x) \;\Rightarrow\; 4V - 10 + 50 = 100V - Vx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; x = \frac{96V-40}{V}.$$

Sudarome antrojo nupylimo ir įpylimo į indą schemą:

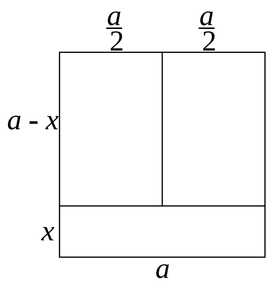
$$\boxed{\begin{array}{l} T_3\left(\dfrac{96V-40}{V}, \; \dfrac{4V+40}{V}, \; V-2{,}5\right) \\ +T_2(80, 20, 2{,}5) \end{array}} \quad \Rightarrow \quad T(89, 11, V).$$

Turime:

$$\frac{4V+40}{V}\cdot(V-2{,}5)+20\cdot 2{,}5=11\cdot V \;\Rightarrow 4V^2+30V+100=0 \;\Rightarrow\; V=10.$$

Ats.: 10 l.

9. Tegu kvadrato kraštinė lygi a ir nuo kvadrato nukirpta x pločio juostelė. Didžiausio ploto stačiakampis, kurio kraštinių ilgių santykis 2:3, yra lygūs ir viena jų kraštinė lygi $\frac{a}{2}$. Apskaičiuosime x, kad būtų $\frac{a}{2}=\frac{2}{3}(a-x)$. Iš čia išplaukia, kad $x=\frac{a}{4}$.



Vadinasi, buvo nukirpta juostelė, kurios plotas lygus $\frac{a^2}{4}$. Taigi kartono likutis sudaro $\frac{\frac{a^2}{4}}{a^2}\cdot 100=25$ procentus viso kartono.

Ats.: 25 %.

10. Sakykime, kad Petriuko pintinėje yra x grybų. Tarp jų raudonikių yra $0{,}48x=\frac{12}{25}x$. Iš čia išplaukia, kad grybų pintinėje gali būti 50 arba 75. Kai mama išmetė 5 grybus, pintinėje liko lyginis grybų skaičius (pagal sąlygą raudonikių liko 50 %!). Vadinasi, $x=75$. Taigi Petriukas buvo radęs $0{,}48\cdot 75=36$ raudonikių. Išmetus 5 grybus, pintinėje liko $0{,}5\cdot 70=35$ raudonikiai. Mama iš pintinės išmetė vieną raudonikį.

Ats.: 75 grybus, 1 raudonikį.

ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Reikia rasti visus lygties $x^2-y^2=15$ sprendinius sveikaisiais skaičiais. Nežinomieji x ir y lygties kairėje pusėje yra pakelti kvadratu, vadinasi, jeigu skaičių pora (x, y) yra sprendinys, tai poros $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$ taip pat bus sprendiniai. Todėl galima pirmiausia nagrinėti sprendinius, kuriuose abu nežinomieji x ir y yra neneigiami. Pagal kvadratų skirtumo formulę,

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 15 = 1\cdot 15 = 3\cdot 5.$$

Jeigu x ir y yra neneigiami, tai $x + y \geq x - y \geq 0$. Gauname:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 15 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (8, 7)$$

arba

$$\begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (4, 1).$$

Kaitaliodami x į $-x$ arba y į $-y$ gauname 8 sveikuosius sprendinius:

$$(8, 7), (-8, 7), (8, -7), (-8, -7),$$

ir

$$(4, 1),\ (-4, 1),\ (4, -1),\ (-4, -1).$$

2. Išspręsime šią lygtį išskirdami pilną sveikojo daugianario kvadratą dešinėje pusėje. Padauginkime lygties abi puses iš 4:

$$4x^2 = 4y^2 - 12y + 28.$$

Pastebime, kad iš pirmųjų dviejų narių dešinėje pusėje galime gauti $2y-3$ kvadratą: $4x^2 = (2y-3)^2 + 19$. Pažymėkime $X = 2x$, $Y = 2y - 3$. Gauname $X^2 = Y^2 + 19$, arba $X^2 - Y^2 = 19$. Panašią lygtį jau sprendėme: jos sprendiniai yra

$$(X, Y) = (10, 9), (-10, 9), (10, -9), (-10, -9).$$

Grįžę prie buvusių nežinomųjų (x, y), randame

$$(x, y) = (5, 6), (-5, 6), (5, -3), (-5, -3).$$

3. Perrašome lygtį taip: $xy - x + y = 35$ ir iš abiejų pusių atėmę po vienetą, išskaidome kairiąją pusę dauginamaisiais:

$$xy - x + y - 1 = 34 \Leftrightarrow (x+1)(y-1) = 34.$$

Išskaidę dauginamaisiais skaičių 34 visais įmanomais būdais

$$34 = 1 \cdot 34 = 2 \cdot 17 = (-1) \cdot (-34) = (-2) \cdot (-17)$$

randame visas galimas $(x+1)$ ir $(y-1)$ reikšmes, o iš jų, atitinkamai, visas sprendinių (x, y) poras:

$$(x, y) = (0, 35), (33, 2), (1, 18), (16, 3), (-2, -33), (-35, 0), (-3, -16), (-18, -1)$$

4. Pritaikykime kubų skirtumo formulę ir išskaidykime kairėje lygties pusėje esantį reiškinį: $(x-y)(x^2+xy+y^2)=56$. Pastebėkime, kad dauginamasis x^2+xy+y^2 yra teigiamas, nes

$$x^2+xy+y^2 = \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0 .$$

Vadinasi, kitas dauginamasis $(x-y)$ irgi turi būti teigiamas, taigi, $x-y>0$. Dar galima pastebėti, kad skaičiai x, y turi būti arba abu lyginiai, arba abu nelyginiai, nes jų kubų skirtumas turi būti lyginis. Pirmuoju atveju (abu nežinomieji lyginiai), skirtumas $x-y$ dalijasi iš 2, o x^2+xy+y^2 tikrai dalijasi iš 4. Antruoju atveju (jei abu nežinomieji nelyginiai), dauginamasis x^2+xy+y^2 yra nelyginis (trijų nelyginių skaičių suma), tuomet $x-y$ turi dalytis iš 8 (nes iš 8 dalijasi skaičius 56 dešinėje lygties pusėje). Išskaidykime skaičių 56 dviejų natūraliųjų skaičių sandauga visais įmanomais būdais: $56 = 1 \cdot 56 = 2 \cdot 28 = 4 \cdot 14 = 7 \cdot 8$. Remdamiesi mūsų samprotavimais apie lyginumą ir nelyginumą, gauname: pirmu atveju,

$$\begin{cases} x-y & = & 2, \\ x^2+xy+y^2 & = & 28 \end{cases}$$

arba

$$\begin{cases} x-y & = & 14, \\ x^2+xy+y^2 & = & 4, \end{cases},$$

antru atveju,

$$\begin{cases} x-y & = & 56, \\ x^2+xy+y^2 & = & 1 \end{cases}$$

arba

$$\begin{cases} x-y & = & 8, \\ x^2+xy+y^2 & = & 7. \end{cases}$$

Visose sistemose lygčių kairėje pusėje yra tie patys reiškiniai. Pakėlę pirmąją lygtį kvadratu, ir pridėję prie antrosios, visose sistemose gautume $x^2+xy+y^2-(x-y)^2=3xy$. Skiriasi tik antrosios pusės:

$$\begin{cases} x-y & = & 2, \\ 3xy & = & 24 \end{cases}$$

arba

$$\begin{cases} x-y & = & 14, \\ 3xy & = & -192, \end{cases}$$

arba

$$\begin{cases} x-y & = & 56, \\ 3xy & = & -3135, \end{cases}$$

arba

$$\begin{cases} x-y & = & 8, \\ 3xy & = & -57. \end{cases}.$$

Trečioji sistema neturi sveikųjų sprendinių (antrosios lygties pusė dalijasi iš 3, o dešinioji nesidalija). Likusiose sistemose, gauname:

$$\begin{cases} x-y & = & 2, \\ xy & = & 8 \end{cases}$$

arba

$$\begin{cases} x-y & = & 14, \\ xy & = & -64, \end{cases}$$

arba

$$\begin{cases} x-y & = & 8, \\ xy & = & -19. \end{cases}$$

Sprendžiame pirmąją sistemą:

$$\begin{cases} x = y+2, \\ xy = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+2, \\ (y+2)y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y+2, \\ (y-2)(y+4) = 0. \end{cases}$$

Randame sprendinius $(x, y) = (4, 2), (-2, -4)$.

Tokiu pat būdu sprendžiame antrąją ir trečiąją sistemas. Jos neturi sveikųjų sprendinių (gauname atitinkamas kvadratines lygtis $y^2 + 14y + 64 = 0$ ir $y^2 + 8y + 19 = 0$, kurių diskriminantai yra neigiami). Taigi, diofantinė lygtis turi lygiai 2 sprendinius

$$(x, y) = (4, 2), (-2, -4).$$

5. Reikia rasti lygties $x^2 + y^2 = 65$ natūraliuosius sprendinius. Kadangi lygtis yra simetriška x ir y atžvilgiu, galime laikyti, jog $x \le y$. Tuomet $2x^2 = x^2 + x^2 \le x^2 + y^2 = 65$, vadinasi, $x^2 < 32{,}5$. Taigi užtenka patikrinti, su kuriomis reikšmes $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ skaičius $65 - x^2$ yra natūraliojo skaičiaus kvadratas: tokių yra dvi, $x = 1$ ir $x = 4$. Šias x reikšmes atitinka $y = 8$ ir $y = 7$. Gavome du sprendinius $(x, y) = (1, 8), (4, 7)$. Sukeitę x ir y vietomis gauname dar du: $(8, 1), (7, 4)$.

6. Pastebėkime, kad jei vienas iš nežinomųjų x arba y lygus nuliui, tai ir kitas turi būti lygus 0. Tarkime, $xy \ne 0$. Prie abejų lygties pusių pridedame po 2:

$$2(x^4y^4 + 1) = (x^3 + 1) + (y^3 + 1).$$

Pritaikę nelygybę $a + b \le ab + 1$ kairėje natūraliesiems skaičiams $a = x^4$, $b = y^4$, gauname: $x^4 + y^4 \le x^4y^4 + 1$. Vadinasi,

$$2x^4 + 2y^4 \le (x^3 + 1) + (y^3 + 1).$$

Ši nelygybė galioja tik tada, kai $x = 1$ ir $y = 1$, nes visoms kitoms nenulinėms x ir y reikšmėms,

$$2x^4 = x^4 + x^4 > x^3 + 1 \text{ ir } 2y^4 = y^4 + y^4 > y^3 + 1,$$

todėl

$$2x^4 + 2y^4 > (x^3 + 1) + (y^3 + 1).$$

Galime padaryti išvadą, jog $(0,0), (1,1)$ yra vieninteliai nagrinėjamos lygties sprendiniai.

7. Pastebėkime, kad duota lygtis yra kvadratinė abiejų kintamųjų atžvilgiu. Laikykime kintamąjį y parametru ir spręskime lygtį kintamojo x atžvilgiu. Skaičiuojame diskriminantą

$$D(y) = b^2 - 4ac = (3y)^2 - 4\cdot 1\cdot (4y^2 - 29) = 116 - 5y^2.$$

Diskriminantas turi būti sveikojo skaičiaus kvadratas, taigi

$$116 - 5y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 23.2 \Rightarrow y^2 \in \{0,1,4,9,16\}.$$

Patikrinę šias reikšmes, randame, kad tinka tik $D(\pm 4) = 36 = 6^2$. Vadinasi, $y = -4$ arba $y = 4$. Pirmuoju atveju gauname

$$x^2 + 12x + 35 = 0 \Rightarrow x = -7, x = -5.$$

Antruoju atveju

$$x^2 - 12x + 35 = 0 \Rightarrow x = 5, x = 7.$$

Taigi sprendiniai yra $(x, y) = (-7, -4), (-5, -4), (5, 4), (7, 4).$

8. Pažymėkime $A = x + y,\ B = y + z,\ C = z + x$. Nesunku pastebėti, kad šių skaičių suma $A + B + C = 2(x + y + z)$ yra lyginis skaičius. Jeigu skaičiai A, B, C yra žinomi, tai pradinius nežinomuosius x, y, z galima rasti išsprendus sistemą

$$\begin{cases} x + y = A, \\ y + z = B, \\ z + x = C. \end{cases}$$

Jos sprendiniai yra tokie:

$x = (A + B + C)/2 - B$, $\quad y = (A + B + C)/2 - C$,

$z = (A + B + C)/2 - A$.

Vadinasi, reikia surasti mums tinkančius trejetus (A, B, C). Kadangi sandauga $ABC = 140 = 2\cdot 2\cdot 5\cdot 7$ dalijasi iš 4, tai kažkuris iš skaičių A, B arba C yra lyginis. Kita vertus, visi jie negali būti lyginiai, nes tuomet sandauga ABC dalytųsi iš 8. Be to, suma $A+B+C$ turi būti lyginė. Vadinasi, lygiai du iš skaičių A, B, C yra nelyginiai, o vienas turi būti lyginis (dalytis iš 4). Kadangi sandauga ABC yra teigiamas skaičius, tai arba visi dauginamieji turi būti teigiami, arba vienas teigiamas, o du – neigiami. Remdamiesi šia informacija sudarome galimus skaičių $\{A, B, C\}$ rinkinius, kurie tenkina nurodytas sąlygas. Patogiausia pirma parašyti nelyginius natūraliuosius skaičiaus 140 daliklius $(1, 5, 7, 35)$ ir nustatyti galimas teigiamas A, B, C reikšmes, o visas kitas gauti iš jų pakeičiant kurių nors dviejų skaičių ženklą iš + į –. Gausime štai tokią lentelę:

$\{A, B, C\}$	$(A+B+C)/2$	$\{x, y, z\}$
{1, 1, 140}	71	{–69, 70, 70}
{1, 5, 28}	17	{–11, 16, 12}
{1, 7, 20}	14	{ –6, 7, 13}
{1, 4, 35}	20	{–15, 16, 19}
{4, 5, 7}	8	{1, 3, 4}
{1, –1, –140}	–70	{–71, –69, 70}
{1, –5, –28}	–16	{–17, –11, 12}
{1, –7, –20}	–13	{–14, –6, 7}
{1, –4, –35}	–19	{–20, –15, 16}
{4, –5, –7}	–4	{–8, 1, 3}
{–1, 5, –28}	–12	{–11, –17, 16}
{–1, 7, –20}	–7	{–14,–6, 13}
{–1, 4, –35}	–16	{–20, –15, 19}
{–4, 5, –7}	–3	{–8, 1, 4}
{–1, –1, 140}	69	{–71, 70, 70}
{–1, –5, 28}	11	{–17, 12, 16}
{–1, –7, 20}	6	{–14, 7, 13}
{–1, –4, 35}	15	{–20, 16, 19}
{–4, –5, 7}	–1	{–8, 3, 4}

Šios lentelės antrame stulpelyje suskaičiuota sumos $\frac{(A+B+C)}{2}$ reikšmė, o trečiame – nežinomųjų x, y, z reikšmės pagal formules iš lygčių sistemos. Bet kuris sprendinys (x, y, z) gaunamas iš rinkinio $\{x, y, z\}$ skaičius imant laisvai pasirinkta tvarka. Jei skaičiai x, y, z skirtingi, tai iš vieno rinkinio galima gauti 6 sprendinius, jei kurie nors du skaičiai lygūs, tai tik 3. Iš viso taip galima gauti $17 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 108$ sprendinius.

9. Turime rasti diofantinės lygties $x^2 - y^2 = z^3$ sprendinius, kai x ir y yra tarpusavyje pirminiai skaičiai. Išskaidę kairiąją lygties pusę pagal kvadratų skirtumo formulę randame $(x-y)(x+y) = z^3$. Pažymėkime $x - y = u,\ \ x + y = v$. Rasime šių dviejų skaičių bendrą didžiausią daliklį. Pažymėkime jį $d = DBD(u, v)$. Kadangi d dalija abu, u ir v, tai d turi dalyti jų sumą ir skirtumą: $u + v = 2x$, $u - v = 2y$. Vadinasi, d dalija $2x$ ir $2y$. Kadangi x, y yra tarpusavyje pirminiai, tai d turi dalyti 2; vadinasi, $d = 1$ arba $d = 2$. Abu atvejus išnagrinėkime atskirai:

1) Atvejis $d = 1$: u ir v yra tarpusavyje pirminiai, $uv = z^3$. Tuomet u ir v turi būti sveikųjų skaičių kubai: $u = a^3, v = b^3$, čia a, b tarpusavyje pirminiai sveikieji skaičiai. Tuomet

$$2x = u + v = a^3 + b^3,$$
$$2y = u - v = a^3 - b^3,$$

taigi a, b abu yra nelyginiai. Gauname sprendinį:

$$x = \frac{a^3 + b^3}{2},\ y = \frac{a^3 - b^3}{2}.$$

2) Atvejis $d = 2$: abu skaičiai u, v yra lyginiai. Tuomet ir z turi būti lyginis, nes $uv = z^3$. Kadangi z kubas dalijasi iš 8, tai vienas iš dviejų skaičių u turi dalytis iš 2, o kitas iš 4 (abu negali dalytis iš 4, nes jų didžiausias bendras daliklis tik $d = 2$). Dėl lygties simetriškumo (u ir v galima sukeisti vietomis, nežino-

muosius (x, y) pakeičiant į $(x,-y)$), laikykime, kad $u = 2k$, $v = 4l$, kai k, l yra tarpusavyje pirminiai skaičiai, o skaičius k – nelyginis. Tuomet $uv = 8kl = z^3$. Kadangi k, l yra tarpusavyje pirminiai, tai jie turi būti sveikųjų tarpusavyje pirminių skaičių kubai: $k = a^3, l = b^3$; čia skaičius a yra nelyginis ir tarpusavyje pirminis su b. Iš čia randame, kad

$2x = u + v = 2k + 4kl = 2a^3 + 4b^3$ ir $2y = u - v = 2k - 4kl = 2a^3 - 4b^3$, todėl lygties sprendiniai yra $x = a^3 + 2b^3$, $y = a^3 - 2b^3$.

Ats.: $x = \dfrac{a^3 + b^3}{2}$, $y = \dfrac{a^3 - b^3}{2}$; čia a, b – tarpusavyje pirminiai nelyginiai sveikieji skaičiai, arba $x = a^3 + 2b^3$, $y = a^3 - 2b^3$, čia a yra nelyginis ir tarpusavyje pirminis su b.

10. Galime tarti, kad $x, y, z \geq 0$, priešingu atveju pakeistume ženklą. Perrašykime lygtį taip: $2y^2 = z^2 - x^2$. Pirmiausia pastebėkime, kad skaičiai *z, x* turi turėti tą pačią liekaną dalijant iš 2, nes $2y^2$ yra lyginis. Abu lyginiai jie būti negali, nes yra tarpusavyje pirminiai, vadinasi, abu yra nelyginiai, sakykim, $x = 2k+1, y = 2l+1$. Pagal kvadratų skirtumo formulę

$$2z^2 = z^2 - x^2 = (z - x)(z + x) = 4(k - l)(k + l + 1).$$

Jeigu z, x yra teigiami, tai $z + x$ teigiamas, todėl ir $(z - x)$ turi būti teigiamas. Vadinasi, z turi būti lyginis: $z = 2m$. Suprastinę iš 4, gauname: $2m^2 = (k - l)(k + l + 1)$. Pažymėkime $k - l = u$, $k + l + 1 = v$. Abu skaičiai u, v yra teigiami, nes $v = \dfrac{z + x}{2} > 0$ ir $u = \dfrac{z - x}{2} > 0$. Rasime šių dviejų skaičių bendrą didžiausią daliklį. Tegu $d = DBD(u, v)$. Kadangi d dalija abu, u ir v, tai d turi dalyti jų sumą ir skirtumą:

$$u + v = 2k + 1 = x, \quad v - u = 2l + 1 = y.$$

Tačiau x, y yra tarpusavyje pirminiai, taigi $d = 1$, todėl ir u, v taip pat yra tarpusavyje pirminiai, o jų sandauga $2m^2 = uv$. Vienas iš jų yra lyginis, o kitas – nelyginis. Tegu pirma u būna nelyginis, o v - lyginis: $v = 2w$, kai w yra tarpusavyje pirminis su u. Tuomet išprastinę dvejetus, gauname $m^2 = uw$, taigi abu, u, w turi būti sveikųjų skaičių kvadratai: $u = a^2, w = b^2$; čia a yra nelyginis ir tarpusavyje pirminis su b. Iš čia gauname sprendinius:

$$x = u + v = u + 2w = a^2 + 2b^2,$$

$$y = v - u = -u + 2w = -a^2 + 2b^2.$$

Kitu atveju, kai u yra lyginis, o v yra nelyginis, lygiai tokiu pačiu būdu randame

$$x = u + v = 2w + 2v = 2b^2 + a^2,$$

$$y = v - u = v - 2w = a^2 - 2b^2.$$

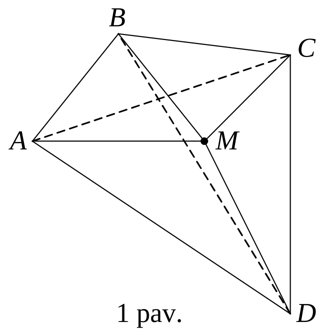
Šios formulės duoda visus natūraliuosius diofantinės lygties sprendinius (x, y, z). Sveikuosius sprendinius gausime, keisdami ženklus iš $+$ į $-$. Užrašysime bendrą formulę:

$$(x, y, z) = \left(\pm\left(a^2 + 2b^2\right),\ \pm\left(a^2 - 2b^2\right),\ \pm 2a^2b^2\right),$$

$a, b \in \mathrm{N}$, $a -$ nelyginis ir tarpusavyje pirminis su b.

TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Sakykime, kad mokykla pastatyta taške M (1 pav.) Iš trikampio nelygybės seka, kad atkarpų AM ir MC suma mažiausia tada ir tik tada, kai taškas M yra atkarpoje AC. Analogiškai atkarpų BM ir MD suma yra mažiausia, kai taškas M yra atkarpoje BD. Taigi suma $AM + BM + CM + DM$ mažiausią reikšmę įgyja tuo atveju, kai taškas M yra ir atkarpoje AC, ir atkarpoje BD, t. y., kai taškas M – keturkampio

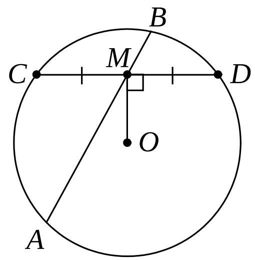


1 pav.

įstrižainių susikirtimo taškas.

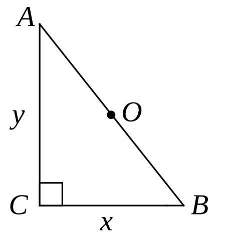
Ats.: Mokykla bus keturkampio įstrižainių sankirtos taške.

2. Sakykime, apskritimo centras – taškas O (2 pav.). Kaip žinome, jei per apskritimo viduje esantį tašką M brėžiame bet kurią stygą AB, tai atkarpų AM ir MB sandauga $AM \cdot MB$ yra vienoda visoms toms stygoms. Taigi suma $AM + MB$ įgyja mažiausią reikšmę tada ir tik tada, kai taškas M – stygos vidurio taškas. Norint nubrėžti tokią stygą, brėžiame tiesę OM ir iš taško M iškeliame šiai tiesei statmenį $CD \perp OM$.



2 pav.

3. Sakykime, kad stačiojo trikampio statiniai x ir y (3 pav.), tuomet $S = \frac{xy}{2}$, $xy = 2S$. Jei įžambinės vidurio taškas yra O, tai OB – apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo spindulys, taigi $OB^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$. Kadangi teigiamųjų skaičių x^2 ir y^2 sandauga $4S^2$ yra pastovi, tai jų suma $x^2 + y^2$ yra mažiausia, kai $DC = AD = 8,$, t. y. trikampis ABC lygiašonis $x = y = \sqrt{2S}$,



3 pav.

$$R = OB = \frac{1}{2}\sqrt{2S + 2S} = \sqrt{S}$$

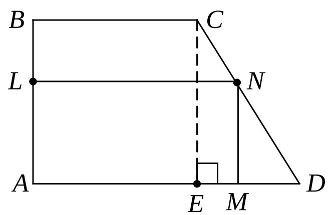
ir skritulio plotas $Q = \pi S$.

Ats.: $Q = \pi S$.

4. Jei a, b, c – trikampio kraštinės, $a + b + c = 2p$, tai pagal Herono formulę jo plotas $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Taigi plotas S įgyja didžiausią reikšmę, kai skaičius $\frac{S^2}{p} = (p-a)(p-b)(p-c)$ įgyja didžiausią reikšmę. Kadangi trijų teigiamų skaičių $p-a,$ $p-b,$ $p-c$ suma yra pastovi (ji lygi p), tai jų sandauga įgyja maksimalią reikšmę tada, kai tie skaičiai lygūs, t. y. kai $p-a=p-b=p-c,$ t. y. kai $a=b=c.$ Taigi didžiausią plotą turi lygiakraštis trikampis, kurio kraštinės ilgis $\frac{2p}{3}$, jo plotas lygus $\frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$

Ats.: $\frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$

5. Sakykime, kad trapecijos $ABCD$ pagrindai AD ir BC atitinkamai lygūs 24 ir 8, aukštinė $AB=12,$ stačiakampio $AMNL$ dvi viršūnės A ir M yra trapecijos pagrinde AD, viršūnė N – šoninėje kraštinėje CD, o viršūnė L – kraštinėje AB (4 pav.). Nubrėžę $CE \perp AD,$ turime $AE=BC=8,$ $ED=AD-AE=16$ ir iš stačiojo trikampio CED gauname $\operatorname{tg}\angle D=\frac{CE}{ED}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}.$



4 pav.

Pažymėkime $AL=x,$ $AM=y,$ tuomet stačiakampio $AMNL$ plotas S lygus. $S=xy.$ Kadangi $MD=AD-AM=24-y,$ tai iš stačiojo trikampio MND gauname $\frac{3}{4}=\frac{NM}{MD}=\frac{x}{24-y}$. Iš čia $x=18-\frac{3}{4}y$ ir $S=y\left(18-\frac{3}{4}y\right)$. Kadangi teigiamų skaičių $\frac{3}{4}y$ ir $18-\frac{3}{4}y$ suma visiems y pastovi, tai jų sandauga įgyja didžiausią reikšmę kai jie lygūs, t. y. kai $\frac{3}{4}y=18-\frac{3}{4}y.$ Iš čia $y=12,$ tuomet $x=9.$ Taigi ieškomojo stačiakampio kraštinių ilgiai 9 ir 12.

Ats.: 9 ir 12.

6. Sakykime, kad a ir b stačiojo trikampio statinių ilgiai, c – įžambinės ilgis, t. y. $c^2 = a^2 + b^2$. Lygybę $a + b = 8$ pakeliame kvadratu $a^2 + 2ab + b^2 = 64$, $c^2 + 2ab = 64$. Taigi, įžambinė c įgyja mažiausią reikšmę, kai skaičius $64 - 2ab$ yra mažiausias, t. y. kai sandauga ab yra didžiausia. Kadangi teigiamų skaičių a ir b suma pastovi, tai jų sandauga įgyja didžiausią reikšmę, kai jie lygūs, t. y. kai $a = b = 4$, tuomet $c^2 = 64 - 2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$, taigi mažiausia galima įžambinės ilgio reikšmė yra $\sqrt{32}$, Kadangi ši reikšmė didesnė už 5, tai trikampio įžambinė negali būti lygi 5.

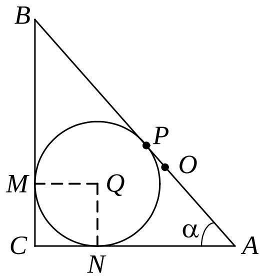
Ats.: Trikampio įžambinė negali būti lygi 5.

7. Sakykime, kad stačiojo trikampio ABC smailusis kampas A lygus α, R ir r – atitinkamai apie jį apibrėžto ir į jį įbrėžto apskritimų spinduliai (5 pav.), taškai O ir Q – tų apskritimų centrai, taškuose M ir N įbrėžtas į trikampį apskritimas liečia statinius $BC = a$ ir $AC = b$, o taške P – įžambinę $AB = c$. Kadangi

$$AN = AP = b - r, \quad BM = BP = a - r,$$

o $AP + PB = c$, tai

$$b - r + a - r = c \text{ ir } r = \frac{1}{2}(a + b - c).$$



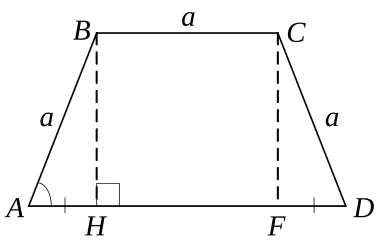
5 pav.

Kadangi $a = c\sin\alpha$, $b = c\cos\alpha$, tai $r = \frac{c}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha - 1)$. Akivaizdu, kad $R = \frac{c}{2}$, todėl $\frac{R}{r} = \frac{1}{\cos\alpha + \sin\alpha - 1}$. Kadangi reiškinio $\sin\alpha + \cos\alpha$ didžiausioji reikšmė lygi $\sqrt{2}$, tai reiškinys $\frac{R}{r}$ įgyja mažiausią reikšmę, lygią $\frac{1}{\sqrt{2} - 1}$, kai $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Ats.: $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

8. Lygiašonės trapecijos $ABCD$ pagrindo BC ir šoninių kraštinių AB ir CD ilgiai lygūs a, $\angle A = \angle D = \alpha$. Nubrėžiame $BH \perp AD$, $CF \perp AD$ (6 pav.), tuomet trapecijos plotas $S = HD \cdot BH$ (žr. 6 pavyzdį). Kadangi

$$BH = CF = a\sin\alpha,$$
$$AH = DF = a\cos\alpha,$$
$$HD = HF + AH = BC + AH =$$
$$= a + a\cos\alpha = a(1+\cos\alpha) =$$
$$= 2a\cos^2\frac{\alpha}{2},$$



6 pav.

tai

$$S = 2a\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot a\sin\alpha = 2a\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot 2a\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 4a^2\cos^3\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = 4a^2\sqrt{\cos^6\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

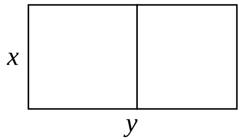
$$= 4a^2\sqrt{27\cdot\frac{1}{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Keturių teigiamų skaičių $\frac{1}{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}$, $\frac{1}{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}$, $\frac{1}{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}$ ir $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ suma yra pastovi (ji lygi 1), jų sandauga yra didžiausia, kai šie skaičiai lygūs, t. y. kai $\frac{1}{3}\cos^2\frac{\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}$. Iš čia seka, kad $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ir $\frac{\alpha}{2} = 30^\circ$, taigi $\alpha = 60^\circ$. Tuomet trapecijos plotas

$$S = 2a\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha = 2a^2\cdot\cos^2 30^\circ\cdot\sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Ats.: $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.

9. Stačiakampio kraštinių ilgius pažymėkime x ir y, be to, $x < y$ ir $xy = S$. Aišku, kad norint padalyti stačiakampį į du lygius stačiakampius, reikia tvora sujungti ilgesniųjų pagrindų vidurio taškus (7 pav.), nes jungiant trumpesniųjų pagrindų vidurio taškus, bendras tvoros ilgis bus didesnis. Taigi reikia tvoros ilgio, lygaus $2x + 2y + x = 3x + 2y$.



7 pav.

Kadangi teigiamųjų skaičių $3x$ ir $2y$ sandauga $3x \cdot 2y$ yra pastovi (ji lygi 6S), tai jų suma yra mažiausia, kai tie skaičiai lygūs, t. y. kai $3x = 2y$. Iš čia $y = \frac{3}{2}x$ ir $x \cdot \frac{3}{2}x = S$. Taigi $x = \sqrt{\frac{2}{3}S}$, tuomet

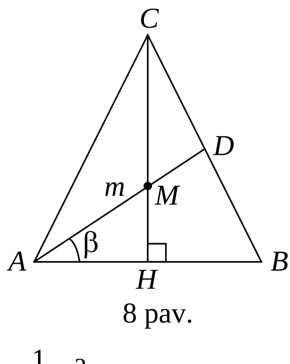
$$y = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}S} = \sqrt{\frac{3S}{2}}.$$

Ats.: $x = \sqrt{\frac{2}{3}S}$, $y = \sqrt{\frac{3S}{2}}$.

10 Lygiašonio trikampio ABC $(AC = BC)$ pusiaukraštinė AD lygi m, o kampas $\angle B = \beta$ (8 pav.). Trikampio ADB plotas lygus pusei trikampio ABC ploto. Nubrėžkime trikampio ABC aukštinę CH į pagrindą. Ji yra ir jo pusiaukraštinė, taigi kirsdama pusiaukraštinę AD taške M dalija ją santykiu $AM : MD = 2:1$, taigi $AM = \frac{2}{3}m$. Jei $AB = x$, tai $AH = \frac{x}{2}$ ir iš stačiojo trikampio AMH gauname

$$AH = AM \cos\angle MAH, \text{ t. y.}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{2}{3}m\cos\beta \text{ ir } x = \frac{4}{3}m\cos\beta.$$



8 pav.

Taigi trikampio ADB plotas lygus

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot m\sin\beta = \frac{2}{3}m^2 \sin\beta\cos\beta = \frac{1}{3}m^2 \sin 2\beta,$$

todėl trikampio ABC plotas $S=\frac{2}{3}m^2\sin 2\beta$. Jis įgyja didžiausią reikšmę, kai $\sin 2\beta=1$, t. y. kai $2\beta=90^\circ$, $\beta=45^\circ$.

Ats.: $\beta=45^\circ$.

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Iš lygybės $\overrightarrow{OA'}=-3\cdot\overrightarrow{OA}$ gauname $\overrightarrow{(x_{A'}-1;\,y_{A'}+3)}=-3\cdot\overrightarrow{(2-1;1+3)}=\overrightarrow{(-3;\,-12)}$ ir $x_{A'}=-3+1=-2$, $y_{A'}=-12-3=-15$. Taip gauname vaizdą $A'(-2;-15)$.

Jei taškas A yra taško A_0 vaizdas, tai $\overrightarrow{OA}=-3\cdot\overrightarrow{OA_0}$. Taigi

$$\overrightarrow{(1;\,4)}=-3\cdot\overrightarrow{(x_{A'}-1;\,y_{A'}+3)}\quad\text{ir}$$

$$\overrightarrow{(x_{A'}-1;\,y_{A'}+3)}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{(1;\,4)}=\left(-\frac{1}{3};-1\frac{1}{3}\right).$$

Tada $x_{A_0}=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$, $y_{A_0}=-1\frac{1}{3}-3=-4\frac{1}{3}$.

Ats.: $A'(-2;-15)$ ir $A_0=\left(\frac{2}{3};-4\frac{1}{3}\right)$.

2. a) Ieškomą koeficientą pažymėkime k. Tada $\overrightarrow{OA'}=k\cdot\overrightarrow{OA}$, t. y. $\overrightarrow{(-5;12)}=\overrightarrow{(3k;-4k)}$. Viena vertus, $k=-\frac{5}{3}$. Bet tuo pačiu metu turi galioti $k=\frac{12}{-4}=-3$. Taip negali būti, todėl ieškomo koeficiento nėra.

b) Iš lygybės $\overrightarrow{OA'}=2\cdot\overrightarrow{OA}$ gauname $\overrightarrow{(-5-x_0;12-y_0)}=2\overrightarrow{(3-x_0;-4-y_0)}=\overrightarrow{(6-2x_0;-8-2y_0)}$. Išsprendžiame lygtis $-5-x_0=6-2x_0$ bei $12-y_0=-8-2y_0$ ir randame tašką $O(11;-20)$.

Ats.: a) tokios homotetijos nėra; b) $O(11; -20)$.

2. a) ir b) Raskime atkarpų ilgius: $AB = 2\sqrt{2}$, $CD = \sqrt{2}$. Kadangi atlikus homotetiją atkarpa turi dvigubai sutrumpėti, tai $k = \frac{1}{2}$ arba $k = -\frac{1}{2}$. Atkarpos galas A turi būti pervestas į atkarpos galą, t. y. į C arba į D (o tada taškas B pervedamas į atitinkamai D arba C). Homotetijos centras O turi būti vienoje tiesėje su tašku ir jo vaizdu. Vadinasi, O galima rasti kaip tiesių AC: $y = 2x + 1$ ir BD: $y = -2\frac{1}{2}x + 4$ sankirtą arba kaip tiesių $AD = Oy$ ir BC: $y = -4x + 7$ sankirtą. Išsprendę lygčių sistemas

$$\begin{cases} y = 2x + 1, \\ y = -2\frac{1}{2}x + 4 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = -4x + 7 \end{cases}$$

randame du galimus centrus $O_1\left(\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3}\right)$ ir $O_2(0; 7)$, kuriems turi galioti lygybės $\overrightarrow{O_1C} = k_1 \cdot \overrightarrow{O_1A}$, $\overrightarrow{O_1D} = k_1 \cdot \overrightarrow{O_1B}$ bei $\overrightarrow{O_2D} = k_2 \cdot \overrightarrow{O_2A}$, $\overrightarrow{O_2C} = k_2 \cdot \overrightarrow{O_2B}$. Įrašę taškų koordinates nesunkiai patikriname, kad jos galioja su $k_1 = -\frac{1}{2}$ bei $k_2 = \frac{1}{2}$. Taip gauname dvi homotetijas.

Kai $D(0; 5)$ homotetijos nerastume, nes atkarpos vaizdas turi būti su ja lygiagretus, o atkarpos AB ir CD šiuo atveju nelygiagrečios.

Ats.: Homotetija su centru $O_1\left(\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3}\right)$ ir koeficientu $k_1 = -\frac{1}{2}$ bei homotetija su centru $O_2(0; 7)$ ir koeficientu $k_2 = \frac{1}{2}$.

4. Iš lygybių $\overrightarrow{O_1A'} = k_1 \cdot \overrightarrow{O_1A}$ ir $\overrightarrow{O_2A''} = k_2 \cdot \overrightarrow{O_2A'}$ randame, kad taškas iš pradžių pervedamas į $A'\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$, o tada į $A''(7; -3)$. Analogiškai randame $B'\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ ir $B''(3; 1)$. Tada iš lygybės $\overrightarrow{OA''} = k_1k_2 \cdot \overrightarrow{OA}$ randame $O\left(2\frac{1}{3};\ -\frac{1}{3}\right)$. Belieka patikrinti lygybę $\overrightarrow{OB''} = k_1k_2 \cdot \overrightarrow{OB}$, t. y. $\left(3-2\frac{1}{3};\ 1+\frac{1}{3}\right) = -2 \cdot \left(2-2\frac{1}{3}; -1+\frac{1}{3}\right)$.

5. Remiantis 5 teiginiu, egzistuoja homotetija pervedanti pirmąjį apskritimą į antrąjį. Žinoma, ši homotetija vienintelį bendrą apskritimų tašką *K* turi pervesti į jį patį (kaip ir jų bendrą liestinę – plg. Su 5 pavyzdžiu). Todėl šios homotetijos centras ir bus taškas *K*. Tašką *A* homotetija turi pervesti į antrojo apskritimo tašką, esantį tiesėje *KA* ir nesutampantį su tašku *K*, t. y. į tašką *B*. Todėl ir liestinė *m* yra pervedama į liestinę *n*. Dabar matome, kad $m \parallel n$ (tiesės vaizdas turi būti jai lygiagretus).

6. Nagrinėkime vektorius $\overrightarrow{DA_0}$ ir $\overrightarrow{DA_1}$. Kadangi taškai A_0 ir A_1 yra vienoje tiesėje su tašku *D* ir yra vienodai nuo jo nutolę, tai $\overrightarrow{DA_1} = (-1) \cdot \overrightarrow{DA_0}$. Analogiškai,

$$\overrightarrow{DB_1} = (-1) \cdot \overrightarrow{DB_0},\ \overrightarrow{DC_1} = (-1) \cdot \overrightarrow{DC_0},\ \overrightarrow{DD_1} = (-1) \cdot \overrightarrow{DD_0}.$$

Vadinasi, taškai A_1, B_1, C_1, D_1 yra atitinkamai taškų A_0, B_0, C_0, D_0 vaizdai, atlikus homotetiją su centru *D* ir koeficientu $k = -1$.

Dabar pastebėkime, kad keturkampis $A_0B_0C_0D_0$ yra rombas. Iš tiesų, $A_0B_0 \parallel AC$ (trikampio *ABC* vidurio linija) ir (analogiškai) $C_0D_0 \parallel AC$. Vadinasi, $A_0B_0 \parallel C_0D_0$ ir (analogiškai) $B_0C_0 \parallel D_0A_0$. Tai reiškia, kad $A_0B_0C_0D_0$ yra lygiagretainis. Vėlgi kaip vidurio linijos, $A_0B_0 = C_0D_0 = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD = B_0C_0 = A_0D_0$. Lygiagretainio $A_0B_0C_0D_0$ visos kraštinės lygios, todėl tai yra rombas. Rombo plotas lygus pusei Įstrižainių sandaugos

$$\frac{1}{2}A_0B_0 \cdot C_0D_0 = \frac{1}{2}BC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Homotetija su koeficientu –1, išlaiko atitinkamų kraštinių lygiagretumą bei ilgį, o įstrižainių ilgį, todėl keturkampis $A_1B_1C_1D_1$ taip pat yra ploto $\frac{1}{2}$ rombas.

Ats.: $\frac{1}{2}$.

7. Atkarpos *AB* vidurio tašką pažymėkime *D*. Taškai C_1, M_1 ir *D* yra vienoje tiesėje ir taškas M_1 atkarpą C_1D dalija santykiu 2:1, todėl

$$DC_1 = DM_1 + M_1C_1 = DM_1 + 2DM_1 = 3DM_1 \text{ ir } \overrightarrow{DM_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC_1}.$$

Analogiškai

$$\overrightarrow{DM_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC_2}, \ \overrightarrow{DM_3} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC_3} \text{ ir } \overrightarrow{DM_4} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC_4}.$$

Vadinasi, homotetija su centru *D* ir koeficientu $k = \frac{1}{3}$ taškus C_1, C_2, C_3, C_4 perveda atitinkamai į taškus M_1, M_2, M_3, M_4, o per pirmus keturis taškus einanti apskritimą – į spindulio $\frac{1}{3}r = \frac{1}{3}$ per taškus M_1, M_2, M_3, M_4 einantį apskritimą.

Ats.: $\frac{1}{3}$.

8. Iš 4 pavyzdžio žinome, kad taškai *H*, *M*, *O* priklauso Oilerio tiesei ir $OM = \frac{1}{2}HM$ (taškas *M* yra tarp taškų *H* ir *O*). Iš šio pavyzdžio mums jau pažįstama homotetija su centru M ir koeficientu $-\frac{1}{2}$ taškus A, B, C perveda atitinkamai į A', B', C', per A, B, C einantį apskritimą į per A', B', C' einantį apskritimą, o todėl ir pirmojo apskritimo centrą O į antrojo centrą O'. Vadinasi, $\overrightarrow{MO'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$, t. y. taškas O' yra (Oilerio) tiesėje MO, jis yra kitoje pusėje nuo taško M nei taškas O ir $MO' = \frac{1}{2}MO.$

Mums belieka rasti santykį $\frac{MO'}{O'O}$. Pažymėkime $x = MO.$ Tada

$$O'M = \frac{1}{2}MO = \frac{1}{2}x \text{ ir } O'O = O'M + MO = \frac{1}{2}x + x - \frac{3}{2}x.$$

Iš kitos pusės, $HM = 2MO = 2x > O'M$, todėl (taškai H ir O' yra vienoje pusėje nuo taško M ir taškas H yra toliau) gauname

$$HO' = HM - O'M = 2x - \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x \text{ bei } \frac{HO'}{O'O} = \frac{\frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}x} = 1.$$

Ats.: 1.

9. Iš 8 uždavinio žinome, kad taškas O' yra atkarpos OH vidurys. Atlikime kitą homotetiją nei prieš tai: su centru H ir koeficientu $\frac{1}{2}$.

Kadangi $\overrightarrow{HO'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HO}$, tai O' yra taško O vaizdas ir šios homotetijos atžvilgiu. Apskritimo, einančio per taškus A, B, C, su centru O vaizdas bus dvigubai trumpesnio spindulio apskritimas su centru O'. Bet toks kaip tik yra apskritimas, einantis per taškus A', B', C'. Šio apskritimo sankirtą su atkarpa AH pažymėkime A_0. Mūsų pasirinkta homotetija tiesę AH palieka vietoje, o jos sankirtą su trikampio ABC apibrėžtiniu apskritimu (t.y. tašką A) perveda į jos sankirtą su trikampio $A'B'C'$ apibrėžtiniu apskritimu, t. y. ir tašką

A_0. Vadinasi, A_0 yra taško A vaizdas ir $\overrightarrow{HA_0} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HA}$. O tai reiškia, kad A_0 yra atkarpos HA vidurys, t. y. ieškomas santykis yra 1:1. Toliau santykiu apskritimas dalija atkarpas BH bei CH.

Ats.: 1:1.

10. Kaip ir 5 pavyzdyje, egzistuoja homotetijos su centrais A ir B bei koeficientais $k = \frac{R}{r}$, pervedančios atitinkamai apskritimus c_1 ir c_2 į apskritimą c. Pirmoji homotetija tiesę AB palieka vietoje, jos sankirtą su c_1 (tašką B) pervesdama į jo sankirtą su c (tašką M), todėl $\overrightarrow{AM} = \frac{R}{r}\overrightarrow{AB}$ ir $AM = \frac{R}{r}AB$. Be to,

$$MB = MA - AB = MA - \frac{r}{R}MA = \frac{R-r}{R}MA \text{ ir } \frac{MB}{MA} = \frac{R-r}{R}.$$

Analogiškai, $\frac{MD}{MC} = \frac{R-r}{R}$. Taigi trikampiai AMC ir BMD yra panašūs pagal dvi proporcingas kraštines ir bendrą kampą tarp jų. Gauname, kad $\angle MBD = \angle MAC$ ir $AC \parallel BD$ pagal atitinkamuosius kampus. Kai $R = 10$ ir $r = 1$, tai $\frac{MB}{MA} = \frac{10-1}{10} = 0{,}9$.

Ats.: a) 0,9.

PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Komandos, užėmusios pirmąsias tris vietas, gali surinkti daugiausiai taškų tada, kai jos visos laimi prieš visas kitas komandas, t. y. prieš komandas, likusias 4–8 vietoje. Kadangi tokių komandų, likusių 4–8 vietose, yra 5, tai vien iš jų, tų paskesniųjų penkių komandų, pirmosios trys komandos „gali gauti“ 5 kartus po 3, arba iš viso 15 taškų. Toliau dar 3 taškus tos pirmosios trys komandos, kas benutiktų, visada „išžaidžia“ tarpusavio susitikimuose, todėl jos visos trys daugiausiai gali surinkti

$$3 \cdot 5 + 3 = 18$$

taškų.

O komandos užėmusios 5–8 vietas, jeigu nieko daugiau „neprisiduria“ iš kitur, t.y. negauna taškų iš kitų komandų, arba joms visoms pralaimi, tai tarpusavio susitikimuose vis tiek „išžaidžia“ 6 taškus, nes tiek kartų 4 komandos žaidžia tarpusavyje.

Todėl komandos, likusios 5–8 vietose mažų mažiausiai gali surinkti (ir visada surenka!) 6 taškus ir būtent tada jos ir galėtų turėti tris kartus mažiau taškų už pirmąsias tris vietas užėmusias komandas.

Todėl komanda, užėmusi šeštąją vietą turi būti pralaimėjusi visoms pirmosioms 4 komandoms, vadinasi, ir tai ketvirtąją vietą užėmusiai komandai.

Pastaba. Nors šiuo atveju „to tiesiogiai daryti nebūtina“, tačiau ir šiuo atveju sudaryti kokią nors vieną uždavinio sąlygas atitinkančią lentelę vis tiek yra naudinga.

Pateikiame vieną tokią lentelę. Ją sudarant 1–3 ir 5–8 vietų komandų grupių tarpusavio rezultatai gali būti absoliučiai bet kokie, o toliau visi kiti rezultatai „nusistato“ vieninteliu būdu – pirmosios trys komandos turi „laimėti viską“ prieš visas likusiais komandas, o komandos likusios 5–8 vietoje turi „pralaimėti viską“ prieš aukščiau esančias komandas, taigi ir prieš tą 4-je vietą esančią komandą. Tai vienintelė komanda, kurios rungtynių rezultatai yra visiškai nusakomi: jai „skirta“ prieš pirmąsias tris pralaimėti, o prieš likusias keturias – laimėti. Pateikiame vieną pavyzdį (žr. lentelę).

Komanda	A	B	C	D	E	F	G	H	Taškai	Vieta
A	X	1	1	1	1	1	1	1	7	I
B	0	X	1	1	1	1	1	1	6	II
C	0	0	X	1	1	1	1	1	5	III
D	0	0	0	X	1	1	1	1	4	IV
E	0	0	0	0	X	1	1	1	3	V
F	0	0	0	0	0	X	1	0	1	VI–VIII
G	0	0	0	0	0	0	X	1	1	VI–VIII
H	0	0	0	0	0	1	0	X	1	VI–VIII

Ats.: Komanda, užėmusi IV vietą yra laimėjusi prieš VI komandą.

2. Turnyrų, kur visi dalyviai surenka po skirtingai taškų, tikrai būna, ir mes iš karto pateikiame vieno tokio turnyro pavyzdį, kuriame dalyvaujantys šachmatininkai yra sužymėti raidėmis
A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K ir L atitinkamai ir kur „aukščiau abėcėlėje esantis“ sportininkas visada laimi prieš „žemiau abėcėlėje esantį“.

Tokio turnyro rezultatai surašyti 1 lentelėje. Visi dalyviai turi nevienodai taškų, o pirmą vietą užėmęs šachmatininkas A yra surinkęs maksimaliai daug taškų, nes laimėjo absoliučiai visas savo tame turnyre žaistas partijas.

Dabar esame klausiami, kaip kukliai gali sužaisti čempionas A, jei visi dalyviai, kaip kalbėta, surenka po skirtingą taškų skaičių.

1 lentelė

Šachm.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	TAŠKAI	VIETA
A	X	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	I
B	0	X	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	II
C	0	0	X	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	III
D	0	0	0	X	1	1	1	1	1	1	1	1	8	IV
E	0	0	0	0	X	1	1	1	1	1	1	1	7	V
F	0	0	0	0	0	X	1	1	1	1	1	1	6	VI
G	0	0	0	0	0	0	X	1	1	1	1	1	5	VII
H	0	0	0	0	0	0	0	X	1	1	1	1	4	VIII
I	0	0	0	0	0	0	0	0	X	1	1	1	3	IX
J	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	1	1	2	X
K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	1	1	XI
L	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	0	XII

Kad čempionas gali surinkti mažiau, yra visai aišku, nes, pavyzdžiui, pakeitę keturių „trivialaus“ turnyro, parodyto aukščiau, rezultatus taip, kaip tai parodyta 2 lentelėje, turėtume naują turnyrą, kur visos komandos vėl surenka skirtingą taškų skaičių ir kur nugalėtojas turi mažiau, nes jau tik 10 taškų.

Truputį pasidairę po lenteles ir „laikydamiesi simetrijos“, mes galime surasti ir kitokių lentelių, kur visi vėl surenka skirtingai, o nugalėtojas darosi vis „kuklesnis“, jei tą kuklumą imtume tiesiogiai sieti su jo surinktų taškų skaičiumi.

2 lentelė

Šachm.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	TAŠKAI	VIETA
A	X	½	1	1	1	1	1	1	1	1	1	½	10	I
B	½	X	1	1	1	1	1	1	1	½	½	1	9,5	II
C	0	0	X	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	III
D	0	0	0	X	1	1	1	1	1	1	1	1	8	IV
E	0	0	0	0	X	1	1	1	1	1	1	1	7	V
F	0	0	0	0	0	X	1	1	1	1	1	1	6	VI
G	0	0	0	0	0	0	X	1	1	1	1	1	5	VII
H	0	0	0	0	0	0	0	X	1	1	1	1	4	VIII
I	0	0	0	0	0	0	0	0	X	1	1	1	3	IX
J	0	½	0	0	0	0	0	0	0	X	1	1	2,5	X
K	0	½	0	0	0	0	0	0	0	0	X	1	1,5	XI
L	½	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	0,5	XII

Štai simetriškai pildant „užsipildo“ ir tokios lentelės, kur visi dalyviai vėl surenka po nevienodą taškų skaičių, o nugalėtojas turi dar mažiau taškų (3–5 lent.).

3 lentelė

Šachm.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	TAŠKAI	VIETA
A	X	½	½	½	1	1	1	1	1	1	1	1	9,5	I
B	½	X	½	½	½	1	1	1	1	1	1	1	9	II
C	½	½	X	½	½	½	1	1	1	1	1	1	8,5	III
D	½	½	½	X	½	½	½	1	1	1	1	1	8	IV
E	0	½	½	½	X	½	½	½	1	1	1	1	7	V
F	0	0	½	½	½	X	½	½	½	1	1	1	6	VI
G	0	0	0	½	½	½	X	½	½	½	1	1	5	VII
H	0	0	0	0	½	½	½	X	½	½	½	1	4	VIII
I	0	0	0	0	0	½	½	½	X	½	½	½	3	IX
J	0	0	0	0	0	0	½	½	½	X	½	½	2,5	X
K	0	0	0	0	0	0	0	½	½	½	X	½	2	XI
L	0	0	0	0	0	0	0	0	½	½	½	X	1,5	XII

4 lentelė

Šachm.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	TAŠKAI	VIETA
A	X	½	½	½	½	1	1	1	1	1	1	1	9	I
B	½	X	½	½	½	½	1	1	1	1	1	1	8,5	II
C	½	½	X	½	½	½	½	1	1	1	1	1	8	III
D	½	½	½	X	½	½	½	½	1	1	1	1	7,5	IV
E	½	½	½	½	X	½	½	½	½	1	1	1	7	V
F	0	½	½	½	½	X	½	½	½	½	1	1	6	VI
G	0	0	½	½	½	½	X	½	½	½	½	1	5	VII
H	0	0	0	½	½	½	½	X	½	½	½	½	4	VIII
I	0	0	0	0	½	½	½	½	X	½	½	½	3,5	IX
J	0	0	0	0	0	½	½	½	½	X	½	½	3	X
K	0	0	0	0	0	0	½	½	½	½	X	½	2,5	XI
L	0	0	0	0	0	0	0	½	½	½	½	X	2	XII

5 lentelė

Šachm.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	TAŠKAI	VIETA
A	X	½	½	½	½	½	1	1	1	1	1	1	8,5	I
B	½	X	½	½	½	½	½	1	1	1	1	1	8	II
C	½	½	X	½	½	½	½	½	1	1	1	1	7,5	III
D	½	½	½	X	½	½	½	½	½	1	1	1	7	IV
E	½	½	½	½	X	½	½	½	½	½	1	1	6,5	V
F	½	½	½	½	½	X	½	½	½	½	½	1	6	VI
G	0	½	½	½	½	½	X	½	½	½	½	½	5	VII
H	0	0	½	½	½	½	½	X	½	½	½	½	4,5	VIII
I	0	0	0	½	½	½	½	½	X	½	½	½	4	IX
J	0	0	0	0	½	½	½	½	½	X	½	½	3,5	X
K	0	0	0	0	0	½	½	½	½	½	X	½	3	XI
L	0	0	0	0	0	0	½	½	½	½	½	X	2,5	XII

Čempionas A darosi vis kuklesnis ir iškyla klausimas, kur yra „ribos“.

Jeigu mes dar padidintume ½ juostų, tai jau būtų nebegerai, nes žaidėjai F ir G, kurie dabar turi atitinkamai 6 ir 5 taškus, imtų abu turėti po 5,5 taško, o tai draudžia uždavinio sąlyga.

Ką gi mes toliau galėtume daryti?

Toliau mes vienaip ar kitaip turėtume prisiminti, kad „bet kokiam mažėjimui yra ribos“, arba kad
mes negalime „pažeisti“ išžaistų taškų balanso.

Kadangi 12 šachmatininkų vieno rato turnyre įvyksta 66 partijos, tai ir yra išžaidžiami 66 taškai, todėl jei tartume, kad čempionas galėtų surinkti dar mažiau, negu jis ką tik surinko, arba jau tik 8 taškus, tai kiti dar mažiau, arba per visus daugių daugiausiai

$$8 + 7{,}5 + 7 + 6{,}5 + 6 + 5{,}5 + 5 + 4{,}5 + 4 + 3{,}5 + 3 + 2{,}5 = 10{,}5 \cdot 6 = 63$$

taškus, o tai pažeidžia surenkamų balansą.

Gautasis prieštaravimas rodo, kad čempionas daugiausiai gali surinkti 8,5 taško, jeigu visi surenka skirtingai.

Ats.: Jeigu visi šachmatininkai surenka po skirtingą taškų skaičių, tai čempionas mažiausiai gali surinkti 8,5 taško.

Pastaba. Dar kartą atkreipiame dėmesį, kad mes ne tik tvirtiname, kiek mažiausiai gali sukaupti čempionas, bet ir pateikiame tinkamą pavyzdį.

3. Matome, kad šitas uždavinys yra labai giminingas prieš tai spręstam uždaviniui, todėl vėl pabandykime paimti optimalią to uždavinio lentelę ir iš jos išbraukti pačią pirmą ir dėl „pasiekimų simetrijos“ pačią paskutinę komandą. Gausime naują lentelę (žr. 1 lent.), kurioje likę šachmatininkai „pernumeruoti“ įprastine tvarka, pradedant nuo raidės A.

1 lentelė

Šachm.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	TAŠKAI	VIETA
A	X	½	½	½	½	½	1	1	1	1	6,5	I
B	½	X	½	½	½	½	½	1	1	1	6	II
C	½	½	X	½	½	½	½	½	1	1	5,5	III
D	½	½	½	X	½	½	½	½	½	1	5	IV
E	½	½	½	½	X	½	½	½	½	½	4,5	V-VI
F	½	½	½	½	½	X	½	½	½	½	4,5	V-VI
G	0	½	½	½	½	½	X	½	½	½	4	VII
H	0	0	½	½	½	½	½	X	½	½	3,5	VIII
I	0	0	0	½	½	½	½	½	X	½	3	IX
J	0	0	0	0	½	½	½	½	½	X	2,5	X

Matome, kad „išpjautoji lentelė“ sulygino dvi komandas, todėl dabar galime mėginti simetriškai iškirpti iš ankstesnės lentelės, tos, kur čempionas dar turėjo 9 taškus. Po įprastinio pernumeravimo gausime kitą turnyro rezultatų lentelę (žr. 2 lent.).

2 lentelė

Šachm.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	TAŠKAI	VIETA
A	X	½	½	½	½	1	1	1	1	1	7	I
B	½	X	½	½	½	½	1	1	1	1	6,5	II
C	½	½	X	½	½	½	½	1	1	1	6	III
D	½	½	½	X	½	½	½	½	1	1	5,5	IV
E	½	½	½	½	X	½	½	½	½	1	5	V
F	0	½	½	½	½	X	½	½	½	½	4	VI
G	0	0	½	½	½	½	X	½	½	½	3,5	VII
H	0	0	0	½	½	½	½	X	½	½	3	VIII
I	0	0	0	0	½	½	½	½	X	½	2,5	IX
J	0	0	0	0	0	½	½	½	½	X	2	X

Dabar rūpindamiesi, ar mažiausiai taškų surinkusi komanda jų galėtų surinkti dar daugiau, kai visos komandos surenka jų skirtingai, vėl žiūrėsime, ar nepažeidžiamas taškų balansas. Šiuo atveju taškų balansas yra toks, kiek partijų įvyksta dešimties komandų vieno rato turnyre. O tų partijų dešimties komandų vieno rato turnyre įvyksta (pasižiūrėkite į kurią nors lentelę)

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$

Vadinasi, jeigu paskutinę vietą užėmusi komandą galėtų turėti daugiau taškų, tai ji turėtų bent 2,5
taško, o kitos atitinkamai dar daugiau, arba per visas kartu jos būtų surinkusios mažų mažiausiai

$2{,}5 + 3 + 3{,}5 + 4 + 4{,}5 + 5 + 5{,}5 + 6 + 6{,}5 + 7 = 9{,}5 \cdot 5 = 47{,}5$

taško, o tai pažeidžia taškų balansą.

Todėl matome, kad paskutinę vietą užėmusi komanda gali daugiausiai surinkti 2 taškus.

Ats.: Dešimties komandų vieno rato turnyre, kur visos komandos surenka po skirtingai taškų, paskutinę vietą užėmusi komanda gali daugiausiai surinkti 2 taškus.

4. Jeigu komanda yra surinkusi 2 arba mažiau taškų, tai ji negali būti laimėjusi nė vienerių rungtynių, nes tada ji turėtų tris ar daugiau taškų. Todėl ji tada gali būti sužaidusi tik lygiosiomis – ir tai ne daugiau kaip 2 kartus. Vadinasi, tokia komanda yra mažiausiai tris kartus pralaimėjusi ir todėl bent trims komandoms yra „dovanojusi“ po 3 taškus, todėl tos trys komandos galutinėje komandų rikiuotėje bus aukščiau negu mūsiškė daugiausiai 2 taškus tesurinkusi komanda.

Na, o surinkusi tris taškus komanda gali patekti tarp pirmąsias tris vietas užėmusių komandų. Tai įvyksta tada, kai pirmosios dvi komandos laimi prieš visas kitas komandas, o visos kitos komandos visas tarpusavio rungtynes baigia lygiosiomis.

Tokiu atveju bus net keturios komandos, kurios bus sukaupusios po 3 taškus ir todėl bet kaip jas berikiuojant viena kuri iš tų keturių 3 taškus surinkusių komandų taps trečiąja ir pateks į tolimesnį varžybų etapą.

Pateikiame tokią lentelę.

Komanda	A	B	C	D	E	F	TAŠKAI	VIETA
A	X	3	3	3	3	3	15	I
B	0	X	3	3	3	3	12	II
C	0	0	X	1	1	1	3	III
D	0	0	1	X	1	1	3	IV
E	0	0	1	1	X	1	3	V
F	0	0	1	1	1	X	3	VI

Ats.: Mažiausiai reikia surinkti 3 taškus, kad komanda galėtų pakliūti į tolimesnį varžybų etapą.

5. Jeigu komanda surenka bent 7 taškus, tai jinai tikrai yra laimėjusi mažiausiai dvejas rungtynes – kitaip 7 taškų niekaip nesurenkama.

Tačiau laimėjusi bent du kartus komanda yra iš tų dviejų komandų jau „nusiskaičiusi“ po tris taškus, todėl abi tos komandos, kad kaip gerai jos besužaistų likusias savo (dvejas) rungtynes, jau besurinktų tik 6 taškus ir, vadinasi, būtų tos „7-taškės“ komandos aplenktos.

Taigi bent 7 taškus surinkusi komanda tikrai užims bent antrąją vietą ir išeis į tolimesnįjį varžybų etapą – ji pogrupyje „paskęsti“ negali.

Na, o surinkusi tik 6 taškus komanda jau gali „užgęsti pogrupyje“. Nurodysime kaip tai gali nutikti. Taip būtų, jeigu kurios nors trys komandos A, B ir C tarpusavyje sužaistų „prieš vieną laimėdamos, o kitai pralaimėdamos“ ir visos 3 laimėtų prieš ketvirtąją komandą D.

Tuomet komandos A, B ir C turėtų po 2 pergales ir po vieną pralaimėjimą ir sukauptų po 6 taškus (komanda D, kaip visoms joms pralaimėjusi, baigtų turnyrą be taškų).

Na, o jeigu jau 3 komandos tikrai, kaip tai yra dabar, turėtų surinkusios visos po 6 taškus, tai tada viena kuri nors iš jų – rikiuok kaip tinkamas – tikrai atsidurtų trečioje vietoje, arba „užgestų pogrupyje“.

Pateikiame galimą tokio turnyro lentelę:

Komanda	A	B	C	D	TAŠKAI	VIETA
A	X	3	0	3	6	I
B	0	X	3	3	6	II
C	3	0	X	3	6	III
D	0	0	0	X	0	IV

Ats.: Pats didžiausias taškų skaičius, su kuriuo komanda gali „užgesti pogrupyje“, yra 6 taškai.

6. Jeigu trumpumo dėlei mergaitėms paliktume jų vardų pirmąsias raides, tai pirmiausiai galima būtų pastebėti, kad kiekviena mergaitė į aikštelę žaisti buvo išėjusi 12 kartų. Konkretumo dėlei išvardinkime Aušrelės žaistas rungtynes.

Pirmiausiai Aušrelė kartu su Birute sužaidė trejas rungtynes: vienas prieš Ceciliją su Daiva, kitas prieš Ceciliją su Emilija ir trečias prieš Daivą su Emilija.

Toliau Aušrelė su Cecilija sužaidė irgi trejas rungtynes: vienas prieš Birutę su Daiva, antras prieš Birutę su Emilija ir trečias prieš Daivą su Emilija. Esant reikalui vadinsime jas atitinkamai ketvirtosiomis, penktosiomis ir šeštosiomis Aušrelės rungtynėmis.

Dar vėliau Aušrelė su Daiva irgi sužaidė trejas rungtynes: vienas prieš Birutę su Cecilija, kitas prieš Birutę su Emilija ir trečias prieš Ceciliją su Emilija. Esant reikalui jas atitinkamai vadinsime septintosiomis, aštuntosiomis ir devintosiomis Aušrelės sužaistomis rungtynėmis.

Galiausiai Aušrelei su Emilija liko sužaisti dar trejas rungtynes – vienas prieš Birutę su Cecilija, kitas prieš Birutę su Daiva ir trečiąsias prieš Ceciliją su Daiva. Tai būtų atitinkamai dešimtosios, vienuoliktosios ir dvyliktosios Aušrelės žaistosios rungtynės.

Pastebėkime, kad mes jau išvardinome ir beveik visas rungtynes apskritai: nes likusios rungtynės jau yra tos rungtynės, kuriose Aušrelė nedalyvavo. Tokių rungtynių yra tik trejos: Birutė su Cecilija sužaidžia prieš Daivą su Emilija, toliau Birutė su Daiva susitiks su Cecilija ir Emilija ir galiausiai Birutė su Emilija sužais prieš Ceciliją su Daiva. Jas vadinsime atitinkamai tryliktu, keturioliktu ir penkioliktu susitikimais.

Nuosekliai vardindami gavome daug konkrečios informacijos: supratome, kad taip žaidžiant įvyksta iš viso 15 susitikimų ir kad kiekviena dalyvė dalyvauja 12 iš 15 tų susitikimų.

Kadangi įvyko 15 susitikimų „dvi prieš dvi“ ir lygiųjų tenise nėra, tai skaičiuodami, kiek kartų iš viso kas laimėjo ir kiek kartų kas pralaimėjo, prieiname neginčijamų išvadų, kad įvykus 15 rungtynių yra 30 „asmeninių laimėjimų“ ir 30 „asmeninių pralaimėjimų“.

Kadangi Aušrelė laimėjo 10 kartų, o žaidė 12 kartų, tai ji $12 – 10 = 2$ rungtynes pralaimėjo.

Kadangi Birutė laimėjo 8 kartus, o žaidė ji irgi 12 kartų, tai ji $12 – 8 = 4$ rungtynes pralaimėjo.

Kadangi Cecilija pralaimėjo 9, o Daiva 7 kartus, tai jos visos, neskaitant Emilijos, pralaimėjo

$$2 + 4 + 9 + 7 = 22$$

kartus.

Kadangi „bendroji pralaimėjimų masė“ yra, kaip jau buvo paaiškinta, 30, tai visi likę

$$30 – 22 = 8$$

pralaimėjimai yra būtent Emilijos pralaimėjimai.

Priminkime, kad Emilija žaidė 12 kartų ir jei jau ji 8 kartus pralaimėjo, tai vis tiek Emilija yra

$$12 – 8 = 4$$

kartus laimėjusi.

Ats. Emilija žaidė (kaip ir visos kitos mergaitės) 12 kartų. Emilija yra pralaimėjusi 8 kartus.

7. Uždavinys yra panašus į 6 pavyzdyje spręstą uždavinį – skiriasi tiktai komandų skaičius: pavyzdyje buvo atvejis su 6 komandomis, o dabar yra tik 5. Pasižiūrėkime, kuo tai galėtų skirtis. Mes visi žinome, kad lyginio ir nelyginio komandų skaičiaus turnyrai skiriasi bent jau tuo, kad lyginio komandų skaičiaus turnyruose kiekvieną ratą yra laisva nežaidžianti komanda, o lyginio skaičiaus komandų turnyruose tokios komandos nėra.

Sprendimo planas yra toks pats kaip ir anksčiau: imti absoliučiai lygų atvejį, kai visos komandos surenka įmanomai daug taškų, bet visos – po tiek pat taškų ir vėliau pamėginti kuo mažiau „pabloginti“ vienos kurios nors komandos padėtį. O tada vėl pabandysime įrodyti, kad tai ir yra pats geriausias atvejis mažiausiai taškų surinkusiai komandai.

Pats geriausias atvejis, kai visos komandos turi po tiek pat taškų vėl panašiai yra atvejis, kai kiekviena komanda du kartus laimi ir du kartus pralaimi. Turnyrinė lentelė tada atrodytų, pavyzdžiui, kad ir taip:

Komanda	A	B	C	D	E	TAŠKAI	VIETA
A	X	3	3	0	0	6	I–V
B	0	X	3	3	0	6	I–V
C	0	0	X	3	3	6	I–V
D	3	0	0	X	3	6	I–V
E	3	3	0	0	X	6	I–V

Dabar pamėginsime kuo mažiau „pabloginti“ kurios nors komandos padėtį. Ir čia jau pastebime skirtumą tarp išnagrinėto 6 pavyzdžio ir mūsų padėties. Pavyzdyje mes galėjome „bloginti“ komandos pavyzdį labai švelniai, nes tik vienu tašku – ten mes keitėme lygiąsias į pralaimėjimą (tai tik vieno taško praradimas), o dabar mums teks atimti du taškus, nes reikės pralaimėjimą keisti lygiosiomis (o tai dviejų taškų „nuskaitymas“).

Taigi imame komandą E ir, pavyzdžiui, jos pergalę prieš komandą A pakeičiame lygiosiomis. Turnyrinė lentelė tada virsta tokia:

Komanda	A	B	C	D	E	TAŠKAI	VIETA
A	X	3	3	0	1	7	I
B	0	X	3	3	0	6	II–IV
C	0	0	X	3	3	6	II–IV
D	3	0	0	X	3	6	II–IV
E	1	3	0	0	X	4	V

Vėl norėtume „susamprotauti“, kad geriau pasirodyti, liekant paskutiniu ir turint mažiau taškų už visus, negalima.

Mėginame tai padaryti ir gauti prieštaravimą.

Sakome vėl panašiai: tarkime, kad paskutinę vietą užėmusi ir mažiau taškų už visas kitas surinkusi komanda surinko bent 5 taškus, tada likusios keturios komandos turi būti surinkusios mažiausiai po šešis, arba per visas penkias jos bus surinkusios bent

5 + 6 + 6 + 6 + 6,

arba bent

29

taškus.

Ir, rodytųsi, kad jokio prieštaravimo nėra, nes 4 komandų vieno rato turnyre įvyksta 10 rungtynių ir gali būti „išžaista“ 30 taškų.

Tačiau jeigu yra išžaista bent 29 taškai, tai tame turnyre, kaip nesunku matyti, gali būti tik vienerios lygiosios (arba jų visai nėra). Tačiau, jeigu paskutinioji komanda turi lygiai 5 taškus, tai tada ji yra dvejas rungtynes sužaidusi lygiosiomis – o bent 29 taškus “išžaidusiame turnyre” gali būti daugiausiai vienerios lygiosios.

Tai jau prieštaravimas, jei imtume atvejį su lygiai penkiais taškais.

Na, o jeigu paskutinioji komanda turėtų daugiau kaip 5, tai tada – bent 6, o likusios keturios komandos tada – bent po 7, arba per visas penkias komandas jau susirinktų bent

6 + 7 + 7 + 7 + 7,

arba

34

taškai, o tai jau „tradicinis“ prieštaravimas, toks pats kaip 6 pavyzdyje.

Ats.: 5 komandų turnyre mažiau už visas kitas komandas taškų surinkusi komanda gali surinkti daugių daugiausiai 4 taškus.

8. Sakykime, kad turnyre dalyvavo n komandų, o paskutiniąją vietą užėmusi komanda laimėjo ne mažiau kaip 25%, arba ketvirtadalį savo žaistų rungtynių. Kadangi n komandų turnyre kiekviena komanda žaidžia $n-1$ rungtynes, tai paskutinės komandos bent ketvirtadalis laimėtų rungtynių jau turi jai atnešti mažiausiai

$$\frac{2(n-1)}{4}=\frac{n-1}{2}$$

taškų.

Vadinasi, priešpaskutinė komanda jų turi turėti jau bent

$$\frac{n-1}{2}+1,$$

priešpaskutinė

$$\frac{n-1}{2}+2$$

ir taip toliau. O antroji komanda turi turėti bent

$$\frac{n-1}{2}+(n-2)=\frac{n-1}{2}+\frac{2(n-2)}{2}=\frac{3n-5}{2}$$

taškus.

Galiausiai pati pirmoji komanda, kadangi visos komandos turi skirtingai taškų, jų turi turėti dar mažiausiai bent vienu tašku daugiau, arba jau nors

$$\frac{n-1}{2}+(n-1).$$

Taigi visos tos n komandų, skaičiuojant jų visų surinktus visus taškus, jų turi turėti mažų mažiausiai

$$\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}+1+\frac{n-1}{2}+2+...+\frac{n-1}{2}+(n-1).$$

Sumuodami šią išraišką turime sudėti n kartų pasikartojantį dėmenį

$$\frac{n-1}{2}$$

ir dar sumą

$$1 + 2 + 3 +\ldots+ (n - 1).$$

Abi šios sumos yra lygios po

$$\frac{n(n-1)}{2},$$

todėl sudėję gausime

$$n(n-1).$$

Tačiau n komandų ledo ritulio turnyre, vykstančiame vieno rato sistema, kaip žinoma, iš viso sužaidžiama

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

rungtynių ir todėl yra “išžaidžiama” antra tiek, arba

$$n(n-1)$$

taškų.

Bet tai yra tiek pat taškų, kiek tos visos n komandų mažiausiai gali turėti. Todėl visi visų komandų taškų įverčiai virsta tiksliais taškų skaičiais ir iš čia mes iš karto matome, kad, pavyzdžiui, bent 25% paskutiniosios komandos pergalių turi būti lygut lygiai 25% paskutiniosios komandos pergalių (ir daugiau jokių kitų taškų).

Kitaip sakant, n turi būti toks, kad 25% sužaistų rungtynių būtų sveikasis skaičius, o tai, savo ruožtu, yra tas pats, kaip pasakyti, kad sužaistų rungtynių skaičius n-1 dalijasi be liekanos iš 4, arba kad n tegali būti 5, 9, 13, … .

Pati uždavinio sąlyga jau yra atmetusi skaičių 5, todėl kitas mažiausias galimas turnyro komandų skaičius yra 9.

Tačiau antroji komanda tegali būti laimėjusi ne daugiau kaip 40% savo žaistų rungtynių, vadinasi, kitas rungtynes ji geriausiu atveju gali būti sužaidusi lygiosiomis ir todėl ji tegali turėti daugių daugiausiai

$$\frac{2\cdot 2(n-1)}{5}+\frac{3(n-1)}{5}=\frac{7(n-1)}{5}$$

taškų.

Kadangi visi mūsų anksčiau minėti taškų įverčiai yra tikslūs, tai, vadinasi, antroji komanda turi lygiai

$$\frac{n-1}{2}+(n-2)=\frac{3n-5}{2}$$

taškų ir todėl turi galioti nelygybė

$$\frac{n-1}{2}+(n-2)\le\frac{7(n-1)}{5}.$$

Padauginę iš 10 turėtume

$$5(n-1)+10(n-2)\le 2\cdot 7(n-1),$$

arba

$$15n-25\le 14n-14),$$

o tai reiškia, kad

$$n\le 11.$$

Todėl n = 9 lieka vienintelė galima n reikšmė ir dabar belieka užpildyti lentelę, žiūrint, kad paskutinė komanda turėtų 2 pergales, nes pergalių turi būti ketvirtadalis nuo žaistų rungtynių skaičiaus, o žaistos yra 8 rungtynės. Antroji komanda gali laimėti ne daugiau kaip 40% žaistų rungtynių, vadinasi pildydami lentelę, turime žiūrėti, kad antrajai komandai „nepaskirtume“ daugiau kaip tris pergales. Trys pergalės aštuoniose žaistose rungtynėse yra 37,5% pergalių, o 4 pergalės jau būtų 50% .

Belieka užpildyti lentelę, kur paskutinioji komanda turi 2 pergales ir iš viso 4 taškus, o kitos komandos “kopia” aukštyn, surinkdamos vis po tašką daugiau.

Pateikiame vieną tokios lentelės pavyzdį.

Komanda	A	B	C	D	E	F	G	H	I	TAŠKAI	VIETA
A	X	1	1	1	1	2	2	2	2	12	I
B	1	X	1	1	1	2	1	2	2	11	II
C	1	1	X	1	2	1	1	1	2	10	III
D	1	1	1	X	1	1	1	1	2	9	IV
E	1	1	0	1	X	1	1	1	2	8	V
F	0	0	1	1	1	X	1	1	2	7	VI
G	0	1	1	1	1	1	X	1	0	6	VII
H	0	0	1	1	1	1	1	X	0	5	VIII
I	0	0	0	0	0	0	2	2	X	4	IX

Ats.: Sąlygoje aprašytas turnyras yra įmanomas, jame turi dalyvauti 9 komandos, o galima tokio turnyro lentelė yra pateikta aukščiau.

9. Pasižiūrėję į pateiktus rezultatus matome, kad komanda A yra laimėjusi visas trejas žaistas rungtynes, o likusios komandos tarpusavio susitikimuose yra laimėjusios tik vienerias rungtynes (tą padarė komanda B).

Prieš ką ji yra laimėjusi, pasakyti yra labai paprasta, nes visos komandos turi po pralaimėjimą (komandai A), todėl komanda B yra laimėjusi būtent prieš komandą D, nes tik ji turi 2 pralaimėjimus.

Visos kitos rungtynės turi būti pasibaigusios lygiosiomis.

Todėl rungtynių rezultatų lentelė yra tokia:

Komanda	A	B	C	D
A	XXXXXXXXXXX	PERGALĖ	PERGALĖ	PERGALĖ
B	PRALAIMĖJIMAS	XXXXXXXXXXX	LYGIOSIOS	PERGALĖ
C	PRALAIMĖJIMAS	LYGIOSIOS	XXXXXXX	LYGIOSIOS
D	PRALAIMĖJIMAS	PRALAIMĖJIMAS	LYGIOSIOS	XXXXXXX

Liko nustatyti konkrečius tų laimėtų, sužaistų lygiosiomis ir pralaimėtų rungtynių rezultatus.

Pasižiūrėję į turnyro lentelės įmuštų ir praleistų įvarčių skirtumą matome, kad komanda B turi pergalę ir pralaimėjimą ir po tiek įmuštų ir praleistų įvarčių.

Vadinasi, komanda B laimėjo ir pralaimėjo tokiu pačiu įvarčių skirtumu.

Toliau, komanda C turi vieną pralaimėjimą ir dvejas lygiąsias ir yra vienu įvarčiu daugiau praleidusi negu įmušusi. Vadinasi, savo vieninteles pralaimėtas rungtynes (komandai A) ji pralaimėjo vieno įvarčio skirtumu.

Tų pralaimėtų rungtynių rezultatas tada galėtų būti tik 0:1 arba 1:2 (nes komanda A yra praleidusi tik vieną įvartį per visas trejas rungtynes.

Išnagrinėsime abu atvejus.

Pirmas atvejis:

Komanda	A	B	C	D	Įmušta	Praleista
A	XXXXXXXXXXX	PERGALĖ	1:0	PERGALĖ	5	1
B	PRALAIMĖJIMAS	XXXXXXXXXXX	LYGIOSIOS	PERGALĖ	2	2
C	0:1	LYGIOSIOS	XXXXXXX	LYGIOSIOS	5	6
D	PRALAIMĖJIMAS	PRALAIMĖJIMAS	LYGIOSIOS	XXXXXXX	3	6

Šis atvejis yra neįmanomas, nes tada komanda C per kitas dvejas lygiosiomis sužaistas rungtynes turi pelnyti 5 įvarčius. Tačiau to negali būti, nes žaisdama lygiosiomis su komanda B ji tegali sužaisti rezultatu 0:0 arba 1:1, nes kitaip komanda B, kaip turinti bendrą įmuštų ir praleistų įvarčių balansą 2:2 jau nebegalėtų, nebemušdama daugiau įvarčių dar vieną kartą laimėti ir vieną kartą – pralaimėti (jos įmušti ir praleisti įvarčiai jai to „nebeleistų“ padaryti).

Tačiau jeigu komanda C tegali įmušti ne daugiau kaip vieną įvartį žaisdama lygiosiomis su komanda B, tai tada ji turi įmušti bent 4 įvarčius žaisdama lygiosiomis su komanda D. Tai irgi neįmanoma, nes komanda D apskritai tėra įmušusi 3 įvarčius.

Todėl pirmas atvejis yra neįmanomas.

Nagrinėjame antrą atvejį.

Koman-da	A	B	C	D	Įmuš-ta	Pra-leista
A	XXXXXXXXXXX	PERGALĖ	2:1	PERGALĖ	5	1
B	PRALAIMĖJIMAS	XXXXXXXXXXX	LYGIOSIOS	PERGALĖ	2	2
C	1:2	LYGIOSIOS	XXXXXXX	LYGIOSIOS	5	6
D	PRALAIMĖJIMAS	PRALAIMĖJIMAS	LYGIOSIOS	XXXXXXX	3	6

Dabar komanda A per likusias 2 pergales įmuša tris „sausus“ įvarčius – todėl yra tik du atvejai:

2:0 su komanda B ir 1:0 su komanda D

arba, atvirkščiai,

1:0 su komanda B ir 2:0 su komanda D.

Pavaizduokime juos abu:

Koman-da	A	B	C	D	Įmušta	Pra-leista
A	XXXXXXXXXXX	2:0	2:1	1:0	5	1
B	0:2	XXXXXXXXXXX	LYGIOSIOS	PERGALĖ	2	2
C	1:2	LYGIOSIOS	XXXXXXX	LYGIOSIOS	5	6
D	0:1	PRALAIMĖJIMAS	LYGIOSIOS	XXXXXXX	3	6

Koman-da	A	B	C	D	Įmušta	Pra-leista
A	XXXXXXXXXXX	1:0	2:1	2:0	5	1
B	0:1	XXXXXXXXXXX	LYGIOSIOS	PERGALĖ	2	2
C	1:2	LYGIOSIOS	XXXXXXX	LYGIOSIOS	5	6
D	0:2	PRALAIMĖJIMAS	LYGIOSIOS	XXXXXXX	3	6

Pirmu atveju komanda B turi laimėti rezultatu 2:0 su komanda D ir rezultatu 0:0 sužaisti su komanda C. Tuo atveju komanda D, sužaidusi dvejas rungtynes su A ir B rezultatais 0:1 ir 0:2, trečiąsias rungtynes su C turėtų sužaisti rezultatu 3:3.

Bet tai yra blogai, nes tada komanda C turėtų 4 įmuštus ir 5 praleistus įvarčius, o taip negali būti.

Antru atveju komanda C per dvejas lygiosiomis sužaistas rungtynes turi įmušti keturis įvarčius į varžovų vartus ir praleisti 4 įvarčius į savo vartus. Žaisdama su D ji gali sužaisti „aukščiausiai" rezultatu 3:3, o su B – rezultatu 1:1 ir kitaip neįmanoma dėl komandos B įvarčių balanso. Tada B privalo rezultatu 1:0 laimėti prieš komandą D. Gauname tokią galutinę turnyro lentelę:

Koman-da	A	B	C	D	Įmušta	Pra-leista
A	XXXXXXXXXXX	1:0	2:1	2:0	5	1
B	0:1	XXXXXXXXXXX	1:1	1:0	2	2
C	1:2	1:1	XXXXXXX	3:3	5	6
D	0:2	0:1	3:3	XXXXXXX	3	6

Ši lentelė ir yra uždavinio atsakymas.

10. Imkime komandą, kuri yra surinkusi daugiausiai taškų. Jeigu tokių komandų yra daugiau negu viena, tai imkime bet kurią iš tokių komandų. Pažymėkime ją pirmąja komanda (komanda I). Tuomet I komanda yra sukaupusi tiek taškų, kad daugiau taškų už tą I komandą jokia kita komanda neturi.

Sąlygoje garantuota, kad ir I komanda turi pralaimėjimų. Imkime bet kurią komandą, kuriai I komanda yra pralaimėjusi ir pavadinkime ją komanda III.

Dabar nagrinėjant III komandos „turnyrinę karjerą" yra galimi 2 atvejai.

1. Iš tų likusiųjų 8 komandų atsiranda tokia komanda, kurią I komanda yra nugalėjusi, o III komanda yra jai pralaimėjusi. Jeigu tokia komanda atsiranda, tai pavadinę ją II komanda, jau turėsime tokias tris komandas, kurias surasti mūsų ir buvo prašoma.

2. Jeigu III komanda yra laimėjusi prieš visas tas komandas, prieš kurias yra laimėjusi I komanda, tai tada III komanda, kaip dar laimėjusi ir prieš tą I komandą, jau turėtų daugiau taškų už I komandą, o tai jau prieštarautų I komandos pasirinkimui (ji buvo iš tų komandų, už kurias daugiau taškų niekas neturi).

Uždavinys yra išspręstas.

Matome, kad uždavinio sprendimas visiškai nepriklauso nuo tokiame turnyre dalyvaujančio komandų skaičiaus – svarbu tik tai, kad žaidžiama be lygiųjų ir kad kiekviena komanda turi pralaimėjimų.

Ats. Kiekvienu atveju rasis tokio trys komandos, kurios „cikliškai" viena kitai pralaimi.

ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Atkreipkime dėmesį, kad sekos trupmenų skaitikliai ir vardikliai yra aritmetinių progresijų nariai:

$$3+5(n-1)=5n-2 \text{ ir } 4+5(n-1)=5n-1.$$

Todėl duotoji seka yra $\left(\dfrac{5n-2}{5n-1}\right)$.

Ats.: $a_n=\dfrac{5n-2}{5n-1}$.

2. Užrašykime seką išskleistu pavidalu: $\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \ldots$.

a) Seka nėra nei didėjančioji, nei mažėjančioji, nes $a_1<a_2<a_3=1$, o $a_3>a_4>a_5>a_6>a_7>\ldots$.

b) Seka aprėžta iš viršaus: $x_n\le 1,\ n\in \mathrm{N}$ (iš kvadratinio trinario $n^2-6n+10$ savybių).

c) Seka aprėžta iš apačios: $x_n>0,\ n\in \mathrm{N}$ ($n^2-6n+10>0$ su visomis natūraliosiomis n reikšmėmis ir kvadratinio trinario $n^2-6n+10$ reikšmės neaprėžtai didėja, kai $n\to+\infty$).

Ats.: a) nei didėjančioji, nei mažėjančioji; b) aprėžta iš viršaus: $x_n\le 1,\ n\in \mathrm{N}$ **;** c) aprėžta iš apačios**:** $x_n>0,\ n\in \mathrm{N}$ **.**

3. Pagal sąlygą sudarome ir sprendžiame lygčių sistemą:

$$\begin{cases} a_5+a_9=40, \\ a_7+a_{13}=58 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1+6d=20, \\ a_1+9d=29 \end{cases}$$

(pasinaudojome aritmetinės progresijos bendrojo nario formulėmis: $a_5 = a_1 + 4d$, $a_9 = a_1 + 8d$, $a_7 = a_1 + 6d$, $a_{13} = a_1 + 12d$).
Išsprendę pastarąją lygčių sistemą, gauname: $a_1 = 2,\ d = 3$.

Ats.: $a_1 = 2$.

4. Pagal sąlygą sudarome ir sprendžiame lygčių sistemą, apskaičiuojame progresijos trečiąjį narį:

$$\begin{cases} \dfrac{b_1(q^3-1)}{q-1} = 12, \\ \dfrac{b_1(q^6-1)}{q-1} = -84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{7b_1(q^3-1)}{q-1} = 84, \\ \dfrac{b_1(q^6-1)}{q-1} = -84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b_1(q^3-1)}{q-1} = 12, \\ q^3 = -8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = 4, \\ q = -2 \end{cases} \Rightarrow b_3 = 4 \cdot (-2)^2 = 16.$$

Ats.: $b_3 = 16$.

5. Iš ribos apibrėžimo:

$$|\, x_n - \frac{1}{2} \,| = \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{100}.$$

Pastarosios nelygybės mažiausias natūralusis sprendinys yra $n = 25$.

Ats.: $n = 25$.

6. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(3n+1)^2 - (n-1)^2}{(2n-3)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(3+\frac{1}{n})^2 - (1-\frac{1}{n})^2}{(2-\frac{3}{n})^2} = \frac{3^2-1}{2^2} = 2.$$

Ats.: 2.

7. $$\lim_{n\to+\infty} \left(2^{\frac{3}{n}} - \frac{3n^4}{1-2n^4} \right) = \lim_{n\to+\infty} (1 - \frac{3}{\frac{1}{n^4} - 2}) = 1 - \frac{3}{-2} = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

Ats.: 2,5.

8. $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \ldots + \frac{1}{4n^2-1} \right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right)=$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\ldots+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})\right)=$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

Ats.: 0,5.

9. $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{1+n}{2}\cdot n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)=$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2(n+2)}-\frac{n}{2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{2}(\frac{n+1}{n+2}-1)\right)=$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{2}(\frac{n+1}{n+2}-1)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{2}(\frac{n+1}{n+2}-1)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{n}{2(n+2)}\right)=$$

$$=-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2(1+\frac{2}{n})}=-\frac{1}{2}.$$

Ats.: $-0{,}5$.

10. $$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n}\right)=$$

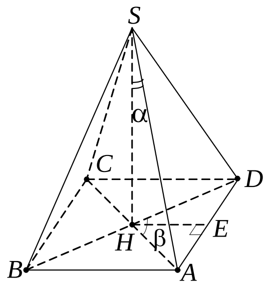
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n})\cdot(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n}}=$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{2}{2}=1$$

Ats.: 1.

SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Piramidės *SABCD* aukštinė *SH* su šoninėmis briaunomis sudaro lygius kampus α, todėl statieji trikampiai *SAH*, *SBH*, *SCH* ir *SDH* yra lygūs (jų statinis *SH* – bendras, o smailieji kampai prie jo yra lygūs α). Taigi $AH = BH = CH = DH$, t. y. taškas *H* yra stačiakampio *ABCD* įstrižainių sankirtos taškas (1 pav.). Iš stačiojo trikampio *SAH* randame $AH = h\,\mathrm{tg}\alpha.$ Tarkime, kad $AD < AB,$ t. y. kampas *AHD* – smailusis ir jis lygus β. Nubrėžiame $HE \perp AD$ ir iš trikampio *AHE* randame



1 pav.

$$AD = 2AE = 2AH\sin\frac{\beta}{2} = 2h\mathrm{tg}\alpha\sin\frac{\beta}{2},$$

$$AB = 2HE = 2AH\cos\frac{\beta}{2} = 2h\mathrm{tg}\alpha\cos\frac{\beta}{2}.$$

Taigi piramidės pagrindo plotas

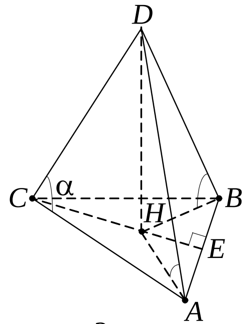
$$S = AB\cdot AD = 4h^2\mathrm{tg}^2\alpha\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} = 2h^2\mathrm{tg}^2\alpha\sin\beta,$$

o piramidės tūris

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{2}{3}h^3\mathrm{tg}^2\alpha\sin\beta.$$

Ats.: $\frac{2}{3}h^3\mathrm{tg}^2\alpha\sin\beta.$

2. Taisyklingosios trikampės piramidės *ABCD* pagrindas *ABC* yra lygiakraštis trikampis, o šoninės sienos *ABD*, *BCD* ir *ACD* yra lygūs lygiašoniai trikampiai (2 pav.). Nubrėžkime piramidės aukštinę *DH*, tai tiesių *AD*, *BD* ir *CD* ortogonaliosios projekcijos pagrindo plokštumose yra tiesės *AH*, *BH* ir *CH*, taigi $\angle DAH = \angle DBH = \angle DCH = \alpha.$ Kadangi statieji trikampiai *ADH*, *BDH* ir *CDH* yra



2 pav.

lygūs (jų statinis DH – bendras, o smailieji kampai lygūs α), tai $AH = BH = CH$. Taigi taškas H yra apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras. Iš trikampio ADH turime $AH = AD\cos\alpha = = l\cos\alpha$. Nubrėžiame $CE \perp AB$, tuomet $AE = \frac{1}{2}AB = AH\cos 30^\circ$, t. y.

$$AB = 2l\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha = \sqrt{3}\,l\cos\alpha.$$

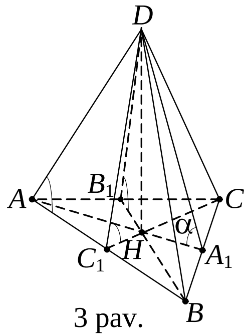
Pagrindo ABC plotas

$$S = \frac{1}{2}AB^2\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot 3l^2\cos^2\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}l^2\cos^2\alpha.$$

Iš trikampio ADH randame piramidės aukštinę $DH = l\sin\alpha$, taigi piramidės tūris $V = \frac{1}{3}S\cdot DH = \frac{\sqrt{3}\,l^3}{8}\sin 2\alpha\cos\alpha.$

Ats.: $\frac{\sqrt{3}}{8}l^3\sin 2\alpha\cos\alpha.$

3. Kadangi taisyklingosios piramidės $ABCD$ pagrindas – taisyklingasis trikampis ABC, o jo kraštinės ilgis lygus a, tai piramidės pagrindo plotas $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Nubrėžkime šoninių sienų ABD, BCD ir ACD aukštines DC_1, DA_1 ir DB_1, o taip pat piramidės aukštinę DH (3 pav.). Tiesės HC_1, HA_1 ir HB_1 yra tiesių DC_1, DA_1 ir DB_1 ortogonaliosios projekcijos piramidės pagrindo plokštumoje, todėl pagal trijų statmenų teoremą



3 pav.

$$HC_1 \perp AB,\ HA_1 \perp BC,\ HB_1 \perp AC,$$

t. y. kampai DC_1H, DB_1H ir DA_1H yra dvisienių kampų, kuriuos sudaro piramidės pagrindo plokštuma ir šoninių sienų plokštumos, tiesiniai kampai, taigi $\angle DC_1H = \angle DB_1H = \angle DA_1H = \alpha$. Iš trikampių DC_1H, DB_1H ir DA_1H lygumo seka, kad $HC_1 = HB_1 =$

$= HA_1$, t. y. taškas H yra į trikampį ABC įbrėžto apskritimo centras. Iš formulės $S = pr$ (čia p – trikampio ABC pusperimetris) randame šio apskritimo spindulį $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Iš stačiojo trikampio DA_1H randame piramidės aukštinę

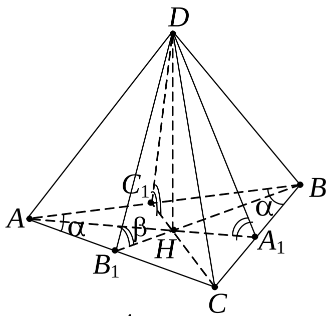
$$DH = A_1H\mathrm{tg}\beta = r\mathrm{tg}\beta = \frac{a\sqrt{3}}{6}\mathrm{tg}\beta$$

ir ieškomąjį piramidės tūrį

$$V = \frac{1}{3}S \cdot DA = \frac{a^3\mathrm{tg}\beta}{24}.$$

Ats.: $\dfrac{a^3\mathrm{tg}\beta}{24}$.

4. Sakykime, kad piramidės $ABCD$ pagrindas – lygiašonis trikampis ABC, $AC = CB$, jo perimetras lygus $2p$ (4 pav.). Todėl $\angle A = \angle B = \alpha$. Nubrėžkime piramidės sienų aukštines $DA_1 \perp BC$, $DB_1 \perp AC$, $DC_1 \perp AB$, o taip pat piramidės aukštinę DH. Tiesės A_1H, B_1H ir C_1H yra atitinkamai tiesių DA_1, DB_1 ir DC_1 ortogonaliosios projekcijos piramidės pagrindo plokštumoje, todėl pagal trijų statmenų teoremą $HA_1 \perp BC$, $HB_1 \perp AC$, $HC_1 \perp AB$.



4 pav.

Taigi kampai DA_1H, DB_1H ir DC_1H yra dvisienių kampų tarp piramidės pagrindo plokštumos ir jos šoninių sienų plokštumų tiesiniai kampai, t. y. $\angle DA_1H = \angle DB_1H = \angle DC_1H = \beta$. Statieji trikampiai DA_1H, DB_1H ir DC_1H yra lygūs, todėl $HA_1 = HB_1 = = HC_1$. Taigi taškas H yra į trikampį ABC įbrėžto apskritimo centras. Pažymėkime $AC = CB = x$, tuomet $AB = 2p - 2x$. Kadangi iš stačiojo trikampio ACC_1 $\frac{AC_1}{AC} = \cos\alpha$, tai

$$AB = 2AC_1 = 2AC\cos\alpha = 2x\cos\alpha.$$

Iš lygties $2p - 2x = 2x\cos\alpha$ randame $x = \frac{p}{1+\cos\alpha}$, todėl $AB = \frac{2p\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$. Trikampio ABC plotas

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin\alpha = \frac{p^2 \sin\alpha\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}.$$

Įbrėžto į trikampį ABC apskritimo spindulį $r = A_1H = B_1H = C_1H$ randame iš lygybės $S = pr$, t. y. $r = \frac{p\sin\alpha\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}$. Iš stačiojo trikampio A_1HD randame piramidės aukštinę

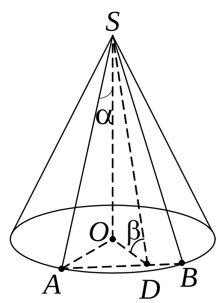
$$DH = A_1H\,\mathrm{tg}\beta = r\,\mathrm{tg}\beta = \frac{p\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\beta}{(1+\cos\alpha)^2}$$

ir piramidės tūris

$$V = \frac{1}{3} S \cdot DH = \frac{p^3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\beta}{3(1+\cos\alpha)^4}.$$

Ats.: $\frac{p^3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\beta}{3(1+\cos\alpha)^4}$.

5. Sakykime, kad kūgio viršūnė – taškas S, duotoji plokštuma kerta kūgį sudaromosiomis SA ir SB, taškas O – kūgio pagrindo apskritimo centras, tuomet $\angle OSA = \alpha$ (5 pav.). Trikampio ABS plotas yra ieškomasis pjūvio plotas. Nubrėžkime jo aukštinę SD, tai tiesė OD yra jos ortogonalioji projekcija kūgio pagrindo plokštumoje, todėl pagal trijų statmenų teoremą tiesė OD yra statmena tiesei AB, taigi kampas ODS yra dvisienio kampo tarp kūgio pagrindo



5 pav.

plokštumos ir kertančiosios plokštumos tiesinis kampas, t. y. $\angle ODS = \beta$. Iš stačiojo trikampio AOS randame kūgio pagrindo spindulį $R = OA = h\operatorname{tg}\alpha$, o iš stačiojo trikampio OSD gauname $OD = h\operatorname{ctg}\beta$, $DS = \dfrac{h}{\sin\beta}$. Iš trikampio OAD gauname

$$AD = \sqrt{AO^2 - OD^2} = h\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\beta},$$

taigi pjūvio plotas

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot DS = \frac{h^2}{\sin\beta}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\beta}.$$

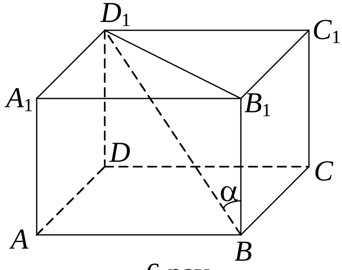
Ats.: $\dfrac{h^2}{\sin\beta}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\beta}.$

6. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ įstrižainė BD_1 su šonine kraštine BB_1 sudaro kampą α (6 pav.). Tiesės B_1D_1 ortogonalioji projekcija plokštumoje ABB_1A_1 yra tiesė A_1B_1. Kadangi $A_1B_1 \perp BB_1$, tai pagal trijų statmenų teoremą tiesės B_1D_1 ir BB_1 yra statmenos. Todėl iš stačiojo trikampio BD_1B_1 gauname

$$BB_1 = l\cos\alpha, \quad B_1D_1 = l\sin\alpha.$$

Jei x ir y – gretasienio pagrindo kraštinės, tai $2x + 2y = p$,

$$x^2 + y^2 = BD^2 = B_1D_1^2 = l^2\sin^2\alpha.$$



6 pav.

Lygybę $x + y = \dfrac{p}{2}$ keliame kvadratu ir vietoje $x^2 + y^2$ įrašome reikšmę $l^2\sin^2\alpha$. Gauname

$$l^2\sin^2\alpha + 2xy = \frac{p^2}{4}, \text{ t. y. } xy = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{4} - l^2\sin^2\alpha\right).$$

Gretasienio tūris

$$V = xy \cdot BB_1 = \frac{l\cos\alpha}{2}\left(\frac{p^2}{4} - l^2\sin^2\alpha\right).$$

Ats.: $\frac{l\cos\alpha}{2}\left(\frac{p^2}{4} - l^2\sin^2\alpha\right).$

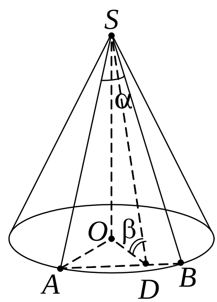
7. Kūgio sudaromosios *SA* ir *SB* sudaro kampą α (7 pav.), taškas *O* yra kūgio pagrindo centras. Nubrėžiame trikampio *SAB* aukštinę *SD*, tuomet tiesė *OD* yra tiesės *SD* ortogonalioji projekcija kūgio pagrindo plokštumoje. Todėl dvisienio kampo tarp kūgio pagrindo plokštumos ir kūgį kertančios plokštumos tiesinis kampas yra kampas *ODS*, taigi $\angle ODS = \beta$. Iš stačiojo trikampio *ODS* randame $OD = h\,\mathrm{ctg}\beta$, $SD = \frac{h}{\sin\beta}$. Iš stačiojo trikampio *ASD* turime $AD = SD\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{h\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\beta}$. Iš stačiojo trikampio *AOD* randame kūgio pagrindo spindulį

$$AO = \sqrt{AD^2 + OD^2} = h\sqrt{\frac{\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\beta} + \mathrm{ctg}^2\beta} =$$

$$= \frac{h}{\sin\beta}\sqrt{\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\beta}$$

ir kūgio tūrį

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot AO^2 \cdot h = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{h^3}{\sin^2\beta}\left(\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\beta\right).$$



7 pav.

Ats.: $\frac{\pi}{3}\cdot\frac{h^3}{\sin^2\beta}\left(\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\beta\right).$

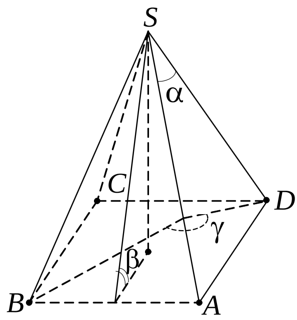
8. Taisyklingosios keturkampės piramidės kampai prie viršūnės $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSD = \angle DSA = \alpha$ (8 pav.). Sakykime, kad β – dvisienio kampo tarp pagrindo plokštumos ir šoninės sienos didumas. Taikome kosinusų teoremą trisienio kampo su viršūne A dvisieniam kampui, kurio briauna AB:

$$\cos\angle SAD = \cos\angle SAB \cdot \cos\angle DAB +$$
$$+\sin\angle SAB \cdot \sin\angle DAB \cdot \cos\beta.$$

Kadangi

$$\angle SAD = \angle SAB = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$\angle DAB = 90^\circ,$ tai iš čia gauname



8 pav.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot 0 + \cos\frac{\alpha}{2}\cdot 1\cdot\cos\beta,\ \text{t. y.}\ \cos\beta = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Jei γ – dvisienio kampo tarp piramidės šoninių sienų ASB ir ASD didumas, tai kosinusų teorema trisienio kampo A dvisieniam kampui, kurio briauna AD, leidžia parašyti lygybę

$$\cos\angle DAB = \cos\angle SAB\cdot\cos\angle SAD + \sin\angle SAB\cdot\sin\angle SAD\cdot\cos\gamma,$$

t. y. $0 = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\gamma.$ Taigi $\cos\gamma = -\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$

Ats.: a) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; b) $-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$

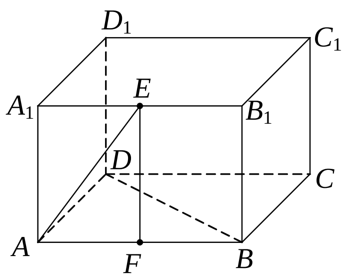
9. Tiesė AE yra plokštumoje ABB_1A_1, o tiesė BD šią plokštumą kerta taške B (9 pav.). Tiesė BA yra tiesės BD ortogonalioji projekcija plokštumoje ABB_1A_1. Pagal (2) lygybę

$$\cos\varphi = \cos\angle(AE,\ BD) =$$
$$= \cos\angle(BD,\ BA)\cdot\cos\angle(BA,\ AE).$$

Akivaizdu, kad

$$\angle(BD,\ BA) = 45^\circ.$$

Nubrėžę $EF \perp AB$ ir pažymėję kubo briaunos ilgį a, randame, kad



9 pav.

$$A_1E = \frac{1}{2}a,\quad AE = \sqrt{AA_1^2 + A_1E^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a,$$

taigi

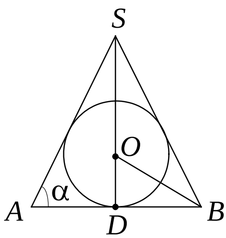
$$\cos\angle(BA, AE) = \cos\angle(FA, AE) = \frac{AF}{AE} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Todėl

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ats.: $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}.$

10. Nubrėžkime duotojo kūgio ašinį pjūvį (10 pav.), trikampio ASB kraštinės SA ir SB yra kūgio sudaromosios, taškas O – į kūgį įbrėžto rutulio centras. Kadangi tiesė DB yra tiesės SB ortogonalioji proporcija kūgio pagrindo plokštumoje, tai kampas SBD yra kampas tarp kūgio sudaromosios ir kūgio pagrindo plokštumos, t. y. $\angle SAD = SBD = \alpha.$



10 pav.

Pažymėkime $DB = r,$ tuomet kūgio aukštinė $SD = r\,\mathrm{tg}\alpha,$ o įbrėžto rutulio spindulys $OD = r\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. Taigi kūgio tūris

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi\cdot DB^2\cdot SD = \frac{1}{3}\pi\cdot r^3\mathrm{tg}\alpha,$$

o rutulio tūris

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi\cdot OD^3 = \frac{4}{3}\pi\cdot r^3\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2}.$$

Iš sąlygos $V_1 : V_2 = k$ gauname $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{4\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2}} = k.$ Kadangi $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$

tai iš čia gauname tokią lygtį

$$\frac{1}{2\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)} = k.$$

Pažymėję $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=y>0,$ turime $2ky^2-2ky+1=0.$ Šios lygties sprendiniai $y_{1,2}=\frac{k\pm\sqrt{k^2-2k}}{2k}.$ Kadangi $k>0,$ tai $k^2-2k\geq 0,$ kai $k\geq 2.$ Kai $k>2,$ $\sqrt{k^2-2k}<k,$ tai $\frac{k-\sqrt{k^2-2k}}{2k}>0.$ Taigi, kai $k>2,$ abi y reikšmės galimos, kai $k=2,$ $y_1=y_2=\frac{1}{2}>0.$ Iš čia seka, kad $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{k\pm\sqrt{k^2-2k}}{2k},$ t. y. $\alpha=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k\pm\sqrt{k^2-2k}}{2k}},$ kai $k\geq 2.$

Ats.: $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k\pm\sqrt{k^2-2k}}{2k}},$ kai $k\geq 2.$

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Reikia rinktis 2-ąjį būdą. Pirmasis būdas negeras, nes žmonės subjektyviai renkasi skaičius, t.y. skaitmens parinkimas labai priklauso nuo žmogaus – vienus skaitmenis žmonės mėgsta labiau, kitus ne. Antrasis būdas gana geras. Kai sekundžių rodyklė yra tarp 6*n* ir 6(*n*+1), o šios laiko dalies ilgis 6(*n*+1) – 6*n* = 6 sek. yra lygus 1/10 minutės ilgio, tai skaitmens *n* pasirodymo tikimybė yra lygi 1/10. Taigi skaitmenys 0, 1, 2, …, 9 gali pasirodyti su vienoda tikimybe lygia 1/10 ir yra pakankamai atsitiktiniai.

2. Meskime monetą du kartus. Raide H pažymėkime atvejį, kai iškrinta herbas, raide S, kai skaičius. Tuomet galimi keturi atvejai: HH, HS, SH, SS (pirma raidė žymi pirmo monetos metimo rezultatą, antra – antro metimo). Visų šių atvejų pasirodymo tikimybės vienodos ir lygios $\frac{1}{4}.$ Taigi atsitiktinį skaitmenį iš keturių skaitmenų 0, 1, 2 arba 3 galime pasirinkti tokiu būdu. Jeigu dukart metant monetą iškrinta HH, renkamės 0, jeigu iškrinta HS, renkamės 1, jeigu iškrinta SH, renkamės 2, o jeigu iškrinta SS, renkamės 3.

3. Skaičiuojant kvadrato vidurio metodu n-asis p. a. s. yra gaunamas paėmus vidurinius $(n-1)$-ojo p. a. s. kvadrato skaitmenis. Taigi

$$a_0=0{,}328711, \quad a_0^2=0{,}108\underline{050921}521,$$
$$a_1=0{,}050921, \quad a_1^2=0{,}002\underline{592948}241,$$
$$a_2=0{,}592948, \quad a_2^2=0{,}351\underline{587330}704,$$
$$a_3=0{,}587330, \quad a_3^2=0{,}344\underline{956528}900,$$
$$a_4=0{,}956528, \quad a_4^2=0{,}914\underline{945814}784,$$
$$a_5=0{,}945814, \quad a_5^2=0{,}894\underline{564122}596,$$
$$a_6=0{,}564122, \quad a_6^2=0{,}318\underline{233630}884,$$
$$a_7=0{,}233630, \quad a_7^2=0{,}054\underline{582976}900,$$
$$a_8=0{,}582976, \quad a_8^2=0{,}339\underline{861016}576,$$
$$a_9=0{,}861016, \quad a_9^2=0{,}741\underline{348552}256,$$
$$a_{10}=0{,}348552.$$

4. Tiesinės kongruentinės sekos nariai gaunami pasinaudojus formule $X_{n+1} \equiv (aX_n + c) \bmod m, \ n \geq 0$. Taigi

$$X_1 = 3 \cdot 1 + 4 = 7,$$
$$X_2 \equiv 3 \cdot 7 + 4 = 25 \equiv 10 \bmod 15,$$
$$X_3 \equiv 3 \cdot 10 + 4 = 34 \equiv 4 \bmod 15,$$
$$X_4 \equiv 3 \cdot 4 + 4 = 16 \equiv 1 \bmod 15,$$
$$X_5 \equiv 3 \cdot 1 + 4 = 7,$$
$$X_6 = 10, \quad X_7 = 4, \quad X_8 = 1, \quad X_9 = 7, \quad X_{10} = 10.$$

5. Kadangi 45 skaidinys pirminių skaičių laipsniais yra $45 = 3^2 \cdot 5$, tai iš 1 teoremos turime, kad $a-1$ turi dalytis iš 3 ir 5. Todėl mažiausias a, nelygus 1 ir tenkinantis 1 teoremos sąlygas, yra 16. Taigi $a = 16$. Iš 1 teoremos taip pat turime, kad c ir m turi būti tarpusavyje pirminiais. Toks skaičius iš intervalo [9;12] yra tik 11. Taigi $c = 11$. Visą seką gausime pasinaudoję formule

$$X_{n+1} \equiv (16X_n + 11) \bmod 45, \quad n \geq 0.$$

Taigi

$$X_1 \equiv 16 \cdot 0 + 11 \equiv 11 \bmod 45,$$
$$X_2 \equiv 16 \cdot 11 + 11 \equiv 7 \bmod 45,$$
$$X_3 \equiv 16 \cdot 7 + 11 \equiv 33 \bmod 45, \ldots$$

Visa seka, išrašyta eilės tvarka, atrodo taip:

0, 11, 7, 33, 44, 40, 21, 32, 28, 9,
20, 16, 42, 8, 4, 30, 41, 37, 18, 29,
25, 6, 17, 13, 39, 5, 1, 27, 38, 34,
15, 26, 22, 3, 14, 10, 36, 2, 43, 24,
35, 31, 12, 23, 19, 0, …

6. Tolygiai intervale [0; 1] pasiskirsčiusi seka gali būti gaunama pasinaudojus formule $U_n = \dfrac{X_n}{m}$. Taigi

$$U_0 = \frac{0}{45} = 0, \quad U_1 = \frac{11}{45} = 0{,}2444, \ldots$$

Visa seka, išrašyta eilės tvarka, atrodo taip:

0,0000; 0,2444; 0,1556; 0,7333; 0,9778; 0,8889; 0,4667; 0,7111; 0,6222; 0,2000;

0,4444; 0,3556; 0,9333; 0,1778; 0,0889; 0,6667; 0,9111; 0,8222; 0,4000; 0,6444;

0,5556; 0,1333; 0,3778; 0,2889; 0,8667; 0,1111; 0,0222; 0,6000; 0,8444; 0,7556;

0,3333; 0,5778; 0,4889; 0,0667; 0,3111; 0,2222; 0,8000; 0,0444; 0,9556; 0,5333;

0,7778; 0,6889; 0,2667; 0,5111; 0,4222; 0,000; …

7. Tiesinės kongruentinės sekos galingumu vadinamas mažiausias skaičius s, su kuriuo $(a-1)^s$ yra modulio m kartotinis. Kadangi 405 = $3^4 \cdot$ 5, tai iš 1 teoremos gausime, kad a – 1 turi būti 3·5 = 15 kartotinis, t.y. $a - 1 = 15k$. Iš čia išplaukia, kad jeigu k nesidalija iš 3, tai $(a - 1)^s$ bus 405 kartotinis, kai $s = 4$, ir jei k dalijasi iš 3, tai s bus mažesnis ir galingumas taip pat mažesnis. Taigi k galime parinkti lygius 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 26. Taip parinkus k daugiklis a, kad seka turėtų maksimalų periodą su didžiausiu galingumu lygiu 4, gali būti vienas iš skaičių:

16, 31, 61, 76, 106, 121, 151, 166, 196, 211, 241, 256, 286, 301, 331, 346, 376, 391.

8. Tiesinės kongruentinės sekos su maksimaliu periodu koreliacijos koeficientas bus mažiausias (žr. 2 teoremą), kai

$$\frac{c}{m} \approx \frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{3} \approx 0{,}7887 \text{ arba } 0{,}2113.$$

Taigi

$$c_1 \approx 405 \cdot 0{,}7887 \approx 319, \quad c_2 \approx 405 \cdot 0{,}2113 \approx 86.$$

Kadangi ir c_1, ir c_2 yra tarpusavyje pirminiai su 405, t.y. tenkina ir 1 teoremos sąlygą, tai abu juos galima rinktis. Gautos sekos koreliacijos koeficientas bus mažiausias. Taigi $c = 319$ arba 86.

9. Tolygiai intervale [–3; 1] pasiskirsčiusi atsitiktinė seka gaunama pasinaudojus formule $V_n = -3 + 4U_n$. Taigi

$$V_0 = -3 + 4 \cdot 0{,}0000 = -3{,}0000,$$
$$V_1 = -3 + 4 \cdot 0{,}2444 = -2{,}0224, \ldots$$

Visa seka, išrašyta eilės tvarka, atrodo taip:

–1,0000; –0,0224; –2,3776; –0,0668; 0,9112; 0,5556; –1,1332; –0,1556; –0,5112; –2,2000;

–1,2224; –1,5776; 0,7332; –2,2888; –2,6444; –0,3332; 0,6444; 0,2888; –1,4000; –0,4224;

–0,7776; –2,4668; –1,4888; –1,8444; 0,4668; –2,5556; –2,9112; –0,6000; 0,3776;0,0224;

–1,6668; –0,6888; –1,0444; –2,7332; –1,7556; –2,1112; 0,2000; –2,8224; 0,8224;–0,8668;

0,1112; –0,2444; –1,9332; –0,9556; –1,3112; –1,0000; …

10. Atsitiktinę seką W_n tokią, kad W_n = 1 su tikimybe $\frac{1}{4}$, W_n = 2 su tikimybe $\frac{1}{2}$, W_n = 3 su tikimybe $\frac{1}{4}$, galima gauti pasinaudojus formule

$$W_n = \begin{cases} 1, \text{ kai } 0 \le U_n < \frac{1}{4}, \\ 2, \text{ kai } \frac{1}{4} \le U_n < \frac{3}{4}, \\ 3, \text{ kai } \frac{3}{4} \le U_n < 1. \end{cases}$$

Taigi visa seka, išrašyta eilės tvarka, atrodo taip:

1, 1, 1, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 1,
2, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 3, 2, 2,
2, 1, 2, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 3,
2, 2, 2, 1, 2, 1, 3, 1, 3, 2,
3, 2, 2, 2, 2, 1, ...

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

1	**2**	**3**	**4**
16 %	$\frac{1}{12}$	(24; 2), (11; 3)	$\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Išleistose LJMM knygelėse buvo nagrinėtos tokios temos:

I KNYGA

I. J. Šinkūnas. *Kvadratinis trinaris.*
II. G. Stepanauskas. *Rekurenčiosios sekos.*
III. R. Kašuba. *Elementarinės matematikos uždavinių sprendimo metodai.*
IV. A.Skūpas. *Funkcija*.
V. V. Pekarskas. *Sveikoji ir trupmeninė skaičiaus dalis. Jų savybės.*
VI. P. Survila. *Kombinatorikos ir tikimybių skaičiavimo pradmenys.*
VII. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. *Grafai.*

II KNYGA

I. J. Šinkūnas, A. Urbonas. *Funkcija.*
II. E. Mazėtis. *Apskritimų geometrija. Įbrėžtiniai ir apibrėžtiniai daugiakampiai. Taisyklingieji daugiakampiai.*
III. B. Vasylienė. *Skaičiaus modulis algebros uždaviniuose.*
IV. J. Šinkūnas. *Figūrų panašumas. Talio teorema ir jos taikymai.*
V. D. Jurgaitis. *Matematinės indukcijos metodas.*
VI. A. Urbonas. *Lygčių, nelygybių bei jų sistemų ekvivalentumas.*
VII. B. Grigelionis. *Urnų schemos ir baigtinės Markovo grandinės.*
VIII. A. Juozapavičius, J. Šinkūnas. *Koordinačių sistemos. Žemėlapiai.*

III KNYGA

I. E. Stankus. *Skaičių dalumas.*
II. R. Skrabutėnas. *Grandininės trupmenos.*
III. V. Vitkus. *Vidurkiai.*
IV. E. Mazėtis. *Vektoriai.*
V. J. Šinkūnas. *Plokščių figūrų plotai.*
VI. S. Staknienė. *Iracionaliosios lygtys ir nelygybės.*
VII. A. Apynis, E. Stankus. *Trigonometrinės lygtys ir nelygybės.*
VIII. G. Stepanauskas. *Sekos.*

IV KNYGA

I. G. Stepanauskas. *Skaičiavimo sistemos.*
II. P. Vaškas. *Antrosios eilės kreivės.*
III. L. Maliaukienė. Įdomioji logika.
IV. A. Urbonas. *Atvirkštinės funkcijos.*
V. A. Apynis. *Optimizavimo uždaviniai.*
VI. P. Survila. *Kombinatorikos pradmenys.*
VII. P. Survila. *Tikimybių teorijos pradmenys.*
VIII. A. Nagelė. *Kompleksiniai skaičiai.*

V KNYGA

I. O. Jablonskienė. *Planimetrijos uždaviniai.*
II. V. Pekarskas. *Antrosios eilės kreivės.*
III. G. Stepanauskas. *Skaičių dalikliai.*
IV. V. Stakėnas. *Šifrai ir skaičiai.*
V. A. Apynis. *Tiesinių lygčių sistemos.*
VI. R. Skrabutėnas. *Algebrinės lygtys.*
VII. V. Vitkus. *Brėžimo uždaviniai.*
VIII. R. Kašuba. *Sudėtis, atimtis ir daugyba stulpeliu bei dalyba kampu.*

VI KNYGA

I. A. Bakštys. *Finansų matematika.*
II. E. Mazėtis. *Geometrinės transformacijos.*
III. B. Galbogienė. *Funkcijos reikšmių sritis.*
IV. V. Stakėnas. *Paskalio trikampis.*
V. A. Apynis. *Tiesinių lygčių sistemų taikymo uždaviniai.*
VI. L. Narkevičius. *Invariantų metodas.*
VII. J. Šinkūnas. *Tiesinės rekurenčiosios sekos.*
VIII. A. Apynis. *Uždaviniai su parametru.*

VII KNYGA

I. E. Stankus. *Skaičių dalumas, dalumo požymiai.*
II. E. Mazėtis. *Nelygybės geometrijoje.*
III. J. Šinkūnas. *Kraštinio elemento principas.*
IV. A. Apynis, E. Stankus. *Indukcijos principas.*
V. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. *Grafai. Oilerio formulė.*
VI. J. Vainavičienė. *Geometrinės vietos.*
VII. A. Apynis. *Aibės, taikymo uždaviniai.*
VIII. A. Skūpas. *Išvestinės ir integralai.*

VIII KNYGA

I. J. Šinkūnas. *Vidurkiai ir jų taikymai.*
II. I. Bagdonienė. *Dirichlė principas.*
III. E. Stankus. *Diofantinės lygtys.*
IV. L.Papreckienė. *Daugianarių dalumas.*
V. A. Apynis, J. Šinkūnas. *Niutono binomas.*
VI. E. Tumėnaitė. *Logaritminės ir rodiklinės lygtys, nelygybės irtapatybės.*
VII. E. Mazėtis. *Stereometrijos uždaviniai.*
VIII. A. Apynis. *Trigonometriniai uždaviniai.*

IX KNYGA

I. A. Urbonas. *Dirichlė principas.*
II. A. Apynis. *Neapibrėžtųjų koeficientų metodas.*
III. A. Apynis. *Sumavimas.*
IV. E. Tumėnaitė. *Logaritminės lygtys ir nelygybės.*
V. E. Mazėtis. *Geometrijos uždavinių sprendimo analiziniai metodai.*
VI. E. Stankus, J. Šinkūnas. *Pilnosios tikimybės formulė.*
VII. E. Mazėtis. *Vektoriai erdvėje.*
VIII. E. Stankus, J. Šinkūnas. *Progresijos.*

X KNYGA

I. A. Apynis, E. Stankus. *Racionaliosios lygtys*.
II. A. Urbonas. *Nestandartiniai uždaviniai.*
III. V. Pekarskas. *Trigonometrinių keitinių taikymas sprendžiant uždavinius.*
IV. A. Apynis. *Nelygybės tekstiniuose uždaviniuose.*
V. J. Šinkūnas. *Kompleksiniai skaičiai ir jų taikymas.*
VI. E. Mazėtis. *Kai kurios planimetrijos teoremos ir jų taikymai.*
VII. E. Stankus. *Bernulio formulė ir jos taikymas.*
VIII. E. Mazėtis. *Briaunainiai.*

XI KNYGA

I. E. Tumėnaitė. *Kvadratinės lygtys tekstiniuose uždaviniuose.*
II. A. Apynis. *Bezu teorema*.
III. J. Šinkūnas. *Masių centras ir jo taikymas*.
IV. E. Stankus. *Lyginiai ir jų taikymas*
V. A. Apynis. *Funkcinės lygtys.*
VI. E. Mazėtis. *Trigonometrijos taikymas g*eometrijoje.
VII. J. Šinkūnas. *Iškilosios funkcijos ir nelygybės*.
VIII. E. Stankus. *Priklausomi ir nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.*

XII KNYGA

I. R. Skrabutėnas. *Euklido algoritmas ir jo taikymas*.
II. J. Šinkūnas. *Lygčių ir nelygybių sprendimas taikant funkcijų savybes.*
III. A. Apynis. *Simetrinių lygčių sistemos.*
IV. R. Kašuba. *Svėrimo ir pilstymo uždaviniai*.
V. E. Stankus. *Pitagoro ir Herono skaičių trejetai*.
VI. J. Šinkūnas. *Sąlyginės tapatybės ir nelygybės*.
VII. E. Mazėtis. *Keturkampiai*.
VIII. A. Apynis. *Geriausio varianto pasirinkimo uždaviniai*.

XIII KNYGA

I. A. Apynis. *Kvadratinio trinario savybių taikymo uždaviniai*.
II. E. Mazėtis. *Apskritimų geometrija.*
III. G. Stepanauskas. *Pirminiai skaičiai*.
IV. R. Kašuba. *Kaip spręsti, kai nelabai žinai kaip?*
V. J. Šinkūnas. *Simetrinės tapatybės, lygtys ir nelygybės*.
VI. V. Pekarskas. *Nelygybės su parametrais*.
VII. E. Stankus. *Atsitiktiniai dydžiai*.
VIII. E. Mazėtis. *Sukiniai*.