LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Jaunajam matematikui

15

2012–2014 mokslo metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Vilnius, 2016

Leidinio sudarytojai:
Antanas APYNIS
Edmundas MAZĖTIS
Eugenijus STANKUS
Juozas ŠINKŪNAS

Leidinį maketavo Kristina LYNDIENĖ

TURINYS

PRATARMĖ

Šioje penkioliktoje Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos knygelėje „Jaunajam matematikui“ yra pateikta 2012–2014 mokslo metais nagrinėtų temų metodinė medžiaga, užduotys LJMM klausytojams ir jų sprendimai.

Knygelės turinį sudaro šios temos: lygtys ir jų sistemos tekstiniuose uždaviniuose (A. Apynis, J. Šinkūnas), trikampių uždaviniai (E. Mazėtis), variantų perrankos metodas (A. Apynis, J. Šinkūnas), kombinatorikos uždaviniai (A. Apynis, J. Šinkūnas), Fibonačio skaičiai (E. Stankus), įdomioji logika (L. Maliaukienė), plokštumos figūrų kombinacijos (E. Mazėtis), lygčių ir nelygybių sprendimas taikant funkcijų savybes (E. Stankus, J. Šinkūnas). Skaitytojas taip pat ras 2012 metų stojamąją užduotį ir jos sprendimą bei 2014 metų baigiamosios užduoties pavyzdį.

Kad būtų lengviau naudotis knygelėmis „Jaunajam matematikui“, šio leidinio paskutiniuose puslapiuose yra įdėtas ankstesnių keturiolikos LJMM mokslo metų temų sąrašas.

Antanas Apynis
Edmundas Mazėtis
Eugenijus Stankus
Juozas Šinkūnas

Metodinė medžiaga ir užduotys

STOJAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Lietuvos edukologijos universitetas)

1. Lentoje buvo užrašyti devyni skaičiai:

4, 5, 7, 8, 12, 13, 14, 23 ir 24.

Linas ir Romas išbraukė po keturis skaičius. Pasirodė, kad Lino išbrauktų skaičių suma 3 kartus didesnė už Romo išbrauktų skaičių sumą. Koks skaičius liko neišbrauktas?

2. Raskite visus triženklius natūraliuosius skaičius, kurie turi tokias savybes:
1) pirmas skaitmuo 3 kartus didesnis už trečią skaitmenį;
2) jo ir skaičiaus, gauto sukeitus antrą skaitmenį su trečiu, suma dalijasi iš 8.

3. Rinkimų dieną nuo 18 valandos iki 22 valandos balsavo 20 % dar nebalsavusių rinkėjų. Lygiai 22 valandą 32 % rinkėjų liko nebalsavę. Keliais procentais balsavusių rinkėjų skaičius padidėjo nuo 18 valandos iki 22 valandos?

4. Keleivis, eidamas judančiu eskalatoriumi, nusileidžia per 24 sekundes. Jeigu keleivis eitų (tuo pačiu greičiu) nejudančiu eskalatoriumi, jis nusileistų per 42 sekundes. Per kelias sekundes keleivis nusileistų eskalatoriumi, stovėdamas ant jo laiptelio?

5. Piastrų monetos sveria tiek gramų, kokia yra jų vertė. Tarp penkių monetų – 1, 2, 3, 5 ir 10 piastrų vertės viena moneta yra netikra; jos svoris nesutampa su verte. Kaip su lėkštinėmis svarstyklėmis (be svarmenų!) nustatyti, kuri moneta netikra?

6. Lentoje parašytas dviženklis skaičius $\overline{ab}$ pakeičiamas dviženklius skaičiumi $a \cdot b + 12$. Gautasis skaičius pagal tą pačią formulę pakeičiamas nauju dviženkliu skaičiumi. Koks dviženklis skaičius bus lentoje atlikus 100 tokių veiksmų, kai pradinis skaičius yra 23?

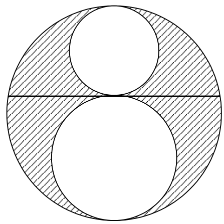
7. Raskite visas realiųjų skaičių x ir y poras $(x; y)$, kurios tenkina lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 + xy + x = 10, \\ y^2 + xy + y = 20. \end{cases}$$

8. Raskite didžiausią sandaugos $x \cdot y$ reikšmę, kai $3x + 4y = 12$.

9. Kvadrato $ABCD$ kraštinėse BC ir CD pažymėti taškai K ir M taip, kad $KC = 2KB$ ir $MC = MD$. Įrodykite, kad $\angle AKB = \angle AKM$.

10. Į apskritimą įbrėžti du tarpusavyje besiliečiantys apskritimai; jie liečia ir didįjį apskritimą. Per įbrėžtųjų apskritimų lietimosi tašką nubrėžta didžiojo apskritimo styga, kuri kartu yra ir įbrėžtųjų apskritimų liestinė. Šios stygos ilgis lygus 4 cm. Raskite užbrūkšniuotos didžiojo skritulio dalies (žr. pav.) plotą.



I. LYGTYS IR JŲ SISTEMOS TEKSTINIUOSE UŽDAVINIUOSE

Antanas Apynis (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Lietuvos edukologijos universitetas)

Tekstiniai uždaviniai (taip pat ir mokyklinės matematikos) priklauso matematinio modeliavimo uždavinių grupei. Juose matematinė problema nusakoma žodžiais aprašant situaciją ir tam tikras sąsajas tarp žinomų ir ieškomų dydžių. Kokį matematinį uždavinį – lygtį, nelygybę, lygčių ar nelygybių sistemą reikės spręsti, iš dalies priklauso ir nuo paties mode–liuotojo. Šioje jauniesiems matematikams skiriamoje užduotyje apsiri–bota tekstiniais uždaviniais, kuriuos galima išspręsti sudarant lygtis (nebūtinai tiesines) ir jų sistemas.

Matematiškai modeliuojant tekstinius uždavinius labai svarbu įsigilinti į uždavinio sąlygą ir sėkmingai pasirinkti ieškomųjų dydžių simbolių rinkinį. Bendrų taisyklių čia nėra, nors ir galima įžvelgti tam tikrų dėsningumų. Labai svarbi uždavinių sprendimo patirtis ir turimos žinios iš matematikos, fizikos, chemijos, ekonomikos bei kitų mokslų.

Tekstiniai uždaviniai pasižymi ir tuo, kad nagrinėjami dydžiai ir vartojamos sąvokos lyg ir nepakankamai aiškiai apibūdinamos. Pavyzdžiui, nepasakoma, kad keliu ar upe judantys objektai tapatinami su taškais, o patys keliai ir upės – su kreivėmis ar tiesių atkarpomis. Paprastai nerašoma, kad ieškomų dydžių reikšmės gali būti tik teigiami ar sveikieji skaičiai, jeigu tai savaime suprantama iš pačios uždavinio sąlygos.

Gana dažnai tekstiniai uždaviniai sugrupuojami pagal kuriuos nors požymius. Tada sprendžiami judėjimo, darbo, mišinių, tirpalų, procentų skaičiavimo ir kitų tipų tekstiniai uždaviniai. Bet visada atsiranda tekstinių uždavinių, kurie labiausiai tiktų įvairių tekstinių uždavinių grupei.

Šioje jauniesiems matematikams parengtoje temoje norėtume atkreipti mokinių dėmesį į tekstinių uždavinių matematinio modeliavimo procesą ir sudarytų uždavinių sprendimą. Aiškindami tai, apsiribosime keliais pavyzdžiais ir jų sprendimo komentarais.

1 pavyzdys. Sudaugindamas du natūraliuosius skaičius, iš kurių vienas didesnis už kitą 10 vienetų, mokinys apsiriko; todėl sandaugos dešimčių skaitmuo sumažėjo 4 vienetais. Gautąją sandaugą dalydamas iš mažesniojo skaičiaus (norėjo patikrinti gautą atsakymą!) gavo dalmenį 39 ir liekaną 22. Raskime abu dauginamuosius.

Sprendimas. Mažesnįjį skaičių pažymėkime *x*. Tada (pagal uždavinio sąlygą) $x+10$ yra didesnysis skaičius, o gautoji sandauga $x(x+10)-40$. Pagal dalybos rezultatus turi galioti lygybė

$$x(x+10)-40=39\cdot x+22.$$

Atlikę veiksmus, gauname kvadratinę lygtį $x^2-29x-62=0$, kurios sprendiniai yra skaičiai 31 ir –2. Antrasis sprendinys nėra natūralusis skaičius, todėl $x=31$ yra mažesnysis skaičius, o $31+10=41$ – didesnysis skaičius.

Ats.: 31 ir 41.

Komentaras. Šio uždavinio matematinis modelis yra kvadratinė lygtis $x^2-29x-62=0$.

Jei mažesnįjį skaičių pažymėtume *x*, o didesnįjį *y*, tai gautume tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} y-x=10, \\ xy-40=39x+22. \end{cases}$$

Atlikę veiksmus, turėtume lygčių sistemą:

$$\begin{cases} y-x=10, \\ xy-39x-62=0. \end{cases}$$

Ji ir būtų šio uždavinio matematinis modelis. Išsprendę gautume tokį atsakymą: $x=31,\ \ y=41$.

2 pavyzdys. Iš indo, pripilto 12 % druskos tirpalo, nupylė vieną litrą tirpalo. Po to įpylė vieną litrą vandens ir vėl nupylė vieną litrą tirpalo. Įpylus dar vieną litrą vandens, inde susidarė 3 % koncentracijos druskos tirpalas. Kokia indo talpa?

Sprendimas. Indo talpą (litrais) pažymėkime *x*. Pagal sąlygą jame buvo 0,12*x* litrų druskos. Pirmą kartą nupilta 0,12 litrų druskos, o antrą kartą dar

$$\frac{0{,}12x-0{,}12}{x}=0{,}12\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

litrų druskos. Taigi inde liko

$$0{,}12x-0{,}12-0{,}12\left(1-\frac{1}{x}\right)=0{,}12\left(x-2+\frac{1}{x}\right)$$

litrų druskos.

Kadangi pilstymo pabaigoje indas buvo pilnas, tai turi galioti lygybė

$$0{,}12\left(x-2+\frac{1}{x}\right)=0{,}03x.$$

Iš čia gauname kvadratinę lygtį

$$3x^2-8x+4=0,$$

turinčią du sprendinius: $x_1=\frac{2}{3}$ ir $x_2=2$.

Pirmasis sprendinys atmestinas, nes yra mažesnis už 1. Taigi indo talpa yra 2 litrai.

Ats.: 2 litrai.

3 pavyzdys. Du darbininkai, dirbdami kartu, atliktų užduotį per 12 dienų. Jeigu pirmasis darbininkas atliktų pusę užduoties, o po to darbą tęstų antrasis, tai visa užduotis būtų įvykdyta per 25 dienas. Per kelias dienas visą užduotį atliktų pirmasis darbininkas ir per kelias – antrasis?

Sprendimas. Darbo apimtį pažymėkime vienetu, o ieškomuosius dienų skaičius x ir y (x pirmojo darbininko, o y antrojo). Tada $\frac{1}{x}$ yra pirmojo darbininko, o $\frac{1}{y}$ – antrojo darbininko darbo tempas (per vieną dieną atliekamos darbo apimties dalis). Pagal uždavinio sąlygą turi galioti abi lygybės:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 12=1 \text{ ir } \frac{0{,}5}{\frac{1}{x}}+\frac{0{,}5}{\frac{1}{y}}=25.$$

Atlikę veiksmus, gausime lygčių sistemą

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12},\\ x+y=50,\end{cases}$$

turinčią du sprendinius: $x=20,\ \ y=30$ ir $x=30,\ \ y=20$.

Ats.: 20 ir 30 arba 30 ir 20.

Komentaras. Spręsdami šį uždavinį, visą darbo apimtį (abstrakčiais vienetais) įvertinome vienetu ir gavome *simetrinę lygčių sistemą*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{12}, \\ x + y = 50 \end{cases}$$

(sukeitus x ir y vietomis, lygčių sistema nepasikeičia). Tokią sistemą galima spręsti atliekant keitinį

$$u = x + y, \quad v = xy.$$

Kadangi

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{u}{v},$$

tai turėsime sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{u}{v} = \dfrac{1}{12}, \\ u = 50 \end{cases}$$

ir gausime vienintelį jos sprendinį: $u = 50, \; v = 600$.

Toliau reikia spręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + y = 50, \\ xy = 600. \end{cases}$$

Pagal Vijeto teoremą x ir y yra kvadratinės lygties $t^2 - 50t + 600 = 0$ sprendiniai: $t_1 = 20, \; t_2 = 30.$

Taigi $x = 20, \; y = 30$ arba $x = 30, \; y = 20$.

4 pavyzdys. Iš vietovės *A* į vietovę *B* išvyko motociklininkas. Po 20 minučių ta pačia kryptimi išvyko automobilis, kurio greitis 60 km/h. Pasivijęs motociklininką, jis tuojau pat apsisuko ir nuvažiavo atgal. Motociklininkas į *B* atvyko tuo metu, kai automobilis buvo pusiaukelėje nuo susitikimo su motociklininku taško iki *A*. Koks buvo motociklininko greitis, jei atstumas tarp *A* ir *B* yra 82,5 km?

Sprendimas. Tegu s yra atstumas (kilometrais) nuo *A* iki taško, kuriame automobilis pasivijo motociklininką, o v – motociklininko greitis (km/h).

Pažymėkime:

t_1 – laiką, per kurį motociklininkas nuvažiavo atstumą s;

t_2 – laiką, per kurį motociklininkas nuvažiavo likusią kelio dalį $82{,}5 - s$.

Pagal uždavinio sąlygą turi galioti tokios lygybės:

$$vt_1 = s,$$

$$60\left(t_1 - \frac{1}{3}\right) = s,$$

$$60t_2 = \frac{1}{2}s,$$

$$vt_2 = 82{,}5 - s.$$

Iš šios lygčių sistemos gauname:

1) $\begin{cases} vt_1 = s, \\ 60\left(t_1 - \frac{1}{3}\right) = s \end{cases} \Rightarrow vt_1 = 60\left(t_1 - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow t_1 = \frac{20}{60 - v};$

2) $\begin{cases} 60t_2 = \frac{1}{2}s, \\ vt_2 = 82{,}5 - s \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 120t_2 = s, \\ 82{,}5 - vt_2 = s \end{cases} \Rightarrow 120t_2 = 82{,}5 - vt_2 \Rightarrow t_2 = \frac{82{,}5}{120 + v};$

3) $\begin{cases} vt_1 = s, \\ 60t_2 = \frac{1}{2}s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} vt_1 = s, \\ 120t_2 = s \end{cases} \Rightarrow vt_1 = 120t_2.$

Tada

$$v \cdot \frac{20}{60 - v} = 120 \cdot \frac{82{,}5}{120 + v},$$

$$\frac{v}{60 - v} = \frac{6 \cdot 82{,}5}{120 + v},$$

$$\frac{v}{60 - v} = \frac{495}{120 + v},$$

$$v(120 + v) = 495(60 - v),$$

$$v^2 + 615v - 29700 = 0.$$

Šios kvadratinės lygties sprendiniai yra $v_1 = 45$ ir $v_2 = -660$. Vadinasi, $v = 45$ yra ieškomasis motociklininko greitis (km/h).

Ats.: 45 km/h.

Komentaras. Sprendžiant šį uždavinį galima apsieiti ir be perteklinių pažymėjimų t_1 ir t_2. Tačiau įvedus juos uždavinio sprendimas šiek tiek supaprastėja.

Taip pat atkreipkime dėmesį į tai, kad spręsdami šį uždavinį turėjome mintyje, kad ir motociklininkas, ir automobilis visą laiką važiavo pastoviu greičiu. Tradiciškai formuluojant judėjimo uždavinius greičio pastovumo sąlyga nepabrėžiama, nors ir turima mintyje; ji leidžia remtis kelio formule $s = vt$ (v – judėjimo greitis, t – judėjimo laikas).

5 pavyzdys. Į mero postą pretendavo trys kandidatai – Antanaitis, Jonaitis ir Petraitis. Pasibaigus rinkiminei kampanijai, kiekvienas rinkėjas galutinai apsisprendė ir tapo kurio nors pretendento šalininku. Jei į rinkimus būtų atvykę visi rinkėjai, tai jų balsai būtų pasiskirstę santykiu 1:2:3. Tačiau rinkimuose dalyvavo tik 50 % rinkėjų ir jų balsai pasiskirstė santykiu 6:9:5. Kiek procentų kiekvieno kandidato šalininkų nedalyvavo rinkimuose?

Sprendimas. Sakykime, kad Antanaitis, Jonaitis ir Petraitis turėjo atitinkamai x, $2x$ ir $3x$ šalininkų, o rinkimuose dalyvavo $6y$, $9y$ ir $5y$ rinkėjų. Pagal sąlygą galioja lygybė

$$6y + 9y + 5y = 0{,}5(x + 2x + 3x).$$

Iš čia randame, kad $y = \frac{3x}{20}$. Vadinasi, už Antanaitį neatėjo balsuoti $x - 6y = x - \frac{6 \cdot 3x}{20} = \frac{x}{10} = 0{,}1x$, t. y. 10 % jo šalininkų; už Jonaitį neatėjo balsuoti $2x - 9y = 2x - 9 \cdot \frac{3x}{20} = \frac{13x}{20} = \frac{13}{40} \cdot 2x = 0{,}325 \cdot 2x$, t. y. 32,5 % jo šalininkų; už Petraitį neatėjo balsuoti $3x - 5 \cdot \frac{3x}{20} = \frac{45x}{20} = 0{,}75 \cdot 3x$, t. y.75 % jo šalininkų.

Ats.: 10 %, 32,5 %, 75 %.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Du keleiviai vienu metu priešpriešiais išėjo iš vietovių A ir B. Kai pirmasis nuėjo pusę kelio, antrajam dar liko nueiti 24 km. O kai antrasis nuėjo pusę kelio, pirmajam dar liko nueiti 15 km. Kelių kilometrų atstumu iki A bus antrasis keleivis, kai pirmasis atvyks į vietovę B?

2. Kurjeris išvyko iš vietovės A į vietovę B, esančią už 120 kilometrų. Po valandos pavymui motociklu išvažiavo kitas kurjeris; jis pasivijo pirmąjį kurjerį, įteikė jam paketą ir apsisukęs nuvažiavo atgal. Antrasis kurjeris į vietovę A sugrįžo kaip tik tuo momentu, kai pirmasis atvyko į B. Koks pirmojo kurjerio greitis, jei antrojo greitis 50 km/h?

3. Šešiaženklio natūraliojo skaičiaus a pirmas skaitmuo yra 2. Perkėlus šį skaitmenį į galą, gaunamas šešiaženklis skaičius b, tris kartus didesnis už a. Raskite skaičių a.

4. Triženklio natūraliojo skaičiaus skaitmenų kvadratų suma lygi 74. Jo šimtų skaitmuo lygus dvigubai vienetų ir dešimčių skaitmenų sumai, o skirtumas tarp jo ir skaičiaus, užrašyto tais pačiais skaitmenimis atvirkščia tvarka, lygus 495. Raskite tą triženklį skaičių.

5. Iš indo buvo nupilta 60 litrų druskos rūgšties ir įpilta 60 litrų vandens. Po to buvo nupilta 60 litrų skiedinio ir vėl įpilta 60 litrų vandens. Dabar inde buvo 10 litrų druskos rūgšties. Kiek litrų druskos rūgšties buvo inde iš pradžių?

Pastaba. Spręsdami turėkite mintyje, kad iš pradžių inde buvo gryna druskos rūgštis.

6. Žolė pievoje auga pastoviu greičiu. Šioje pievoje 70 karvių galėtų ganytis 24 dienas, o 30 karvių – 60 dienų. Kelioms karvėms žolės šioje pievoje pakaktų 96 dienoms?

7. Šaudykloje galioja tokia taisyklė: šaulys, pataikęs į taikinį, gauna 5 žetonus, o už kiekvieną netaiklų šūvį turi atiduoti 3 žetonus. Nelabai taiklus šaulys į taikinį šovė n kartų $(10 < n < 20)$ ir jam nebeliko nė vieno žetono. Kiek kartų šaulys šovė į taikinį ir keli jo šūviai buvo taiklūs?

8. Prekybos centras „Svajonė“ už 45 000 litų pirko bulvių ir morkų. Jei visas šias daržoves jis parduotų bulvių kaina, tai patirtų 5 000 litų nuostolį. Visas daržoves pardavęs morkų kaina, prekybos centras gautų 3 000 litų pelną. Kiek litų „Svajonė“ sumokėjo už bulves ir kiek už morkas?

9. Penki darbininkai atlieka tam tikrą užduotį. Pirmas, antras ir trečias darbininkai, dirbdami kartu, ją galėtų atlikti per 7,5 valandos; pirmas, trečias ir penktas – per 5 valandas, trečias ir ketvirtas – per 6 valandas, o antras, ketvirtas ir penktas – per 4 valandas. Per kiek laiko užduotį atliks visi penki darbininkai?

10. Buvo trys vienodo ilgio, bet skirtingo storio žvakės. Iš pradžių buvo uždegta tik viena žvakė (pirmoji), o po valandos ir kitos dvi. Po tam tikro laiko pirmoji žvakė buvo tokio pat ilgio kaip trečioji, o nuo šio momento praėjus 2 valandoms susilygino pirmoji ir antroji žvakės. Per kiek laiko sudegė pirmoji žvakė, jei antroji sudegė per 12 valandų, o trečioji – per 8 valandas?

II. TRIKAMPIŲ UŽDAVINIAI

Edmundas Mazėtis
(Lietuvos edukologijos universitetas))

Trikampis – pati paprasčiausia plokštumos geometrinė figūra, apie trikampius mokytis pradedame nuo pirmųjų geometrijos pamokų ir jų savybes nagrinėjame kiekvienoje klasėje. Atrodo, kad apie trikampius žinome labai daug, bet ši užduotis supažindins Jus su dar nežinomais trikampio geometrijos faktais.

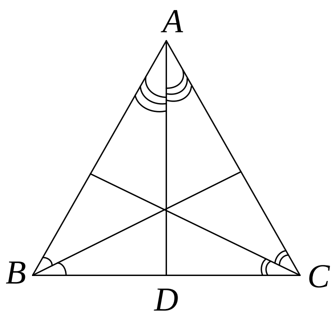
Primename keletą trikampio ir jo elementų savybių, kurias sužinojote matematikos pamokose.

1) Trikampio kampų suma lygi 180°; trikampio priekampis lygus jam negretutinių trikampio kampų sumai.

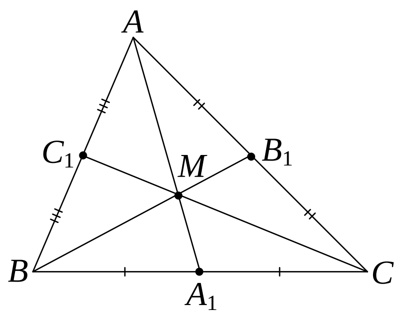
2) Lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo yra lygūs, aukštinė nubrėžta į jo pagrindą yra ir trikampio pusiaukampinė, ir trikampio pusiaukraštinė.

3) Stačiojo trikampio smailiųjų kampų suma lygi 90°; įžambinės kvadratas lygus statinių kvadratų sumai.

4) Trikampio pusiaukampinės susikerta viename taške, kuris yra įbrėžto į trikampį apskritimo centras. Trikampio pusiaukampinė dalija kraštinę į dalis, proporcingas prie jų esančioms trikampio kraštinėms: jei AD – trikampio ABC pusiaukampinė, tai $BD : DC = AB : AC$ (1 pav.).



1 pav.



2 pav.

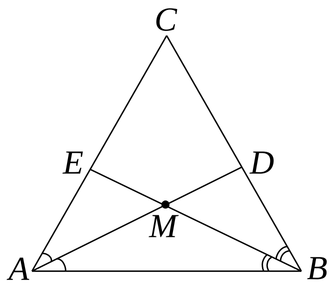
5) Trikampio pusiaukraštinės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta viename taške M ir $AM : MA_1 = BM : MB_1 = CM : MC_1 = 2:1$ (2 pav.).

6) Trikampio aukštinės susikerta viename taške.

7) Apie trikampį galima apibrėžti apskritimą, kurio centras yra trikampio kraštinių vidurio statmenų sankirtos taškas; apie statųjį trikampį apibrėžto apskritimo centras yra įžambinės vidurio taškas.

8) Trikampio *ABC* kraštinių *AB* ir *AC* vidurio taškus *M* ir *N* jungianti atkarpa vadinama trikampio *vidurine linija*, ji yra lygiagreti atkarpai *BC* ir lygi jos pusei.

1 pavyzdys. Trikampio *ABC* kraštinių ilgiai $BC=a,$ $AC=b,$ $AB=c,$ taškas *M* jo pusiaukampinių sankirtos taškas. Rasime kokiu santykiu jis dalija pusiaukampinę, nubrėžtą iš viršūnės *A*.



3 pav.

Sakykime, kad trikampio *ABC* pusiaukampinės *AD* ir *BE* susikerta taške *M* (3 pav.). Trikampiui *ABD* taikome pusiaukampinės savybę (4 savybė) ir turime $\dfrac{AM}{MD}=\dfrac{AB}{BD}$. Iš tos pačios savybės trikampiui *ABC* turime $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DB}{DC}$.

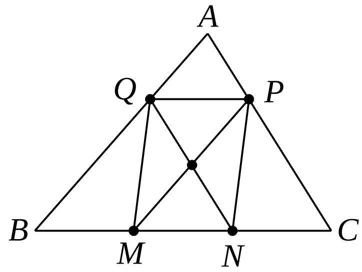
Kadangi $DB+DC=CB,$ tai $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DB}{CB-DB}$. Iš šios lygybės randame, kad $DB=\dfrac{AB\cdot CB}{AC+AB}=\dfrac{ca}{b+c}$. Taigi $\dfrac{AM}{MD}=\dfrac{c}{\dfrac{ca}{b+c}}=\dfrac{b+c}{a}$.

2 pavyzdys. Trikampio *ABC* kraštinės $AB=9,$ $AC=15$. Į trikampį įbrėžtas lygiagretainis taip, kad viena jo kraštinė lygi 6 ir ji yra trikampio kraštinėje *BC*, o lygiagretainio įstrižainės lygiagrečios su tiesėmis *AB* ir *AC*. Rasime kitos lygiagretainio kraštinės ir trikampio kraštinės *BC* ilgius.

Sakykime, kad lygiagretainis *MNPQ* įbrėžtas į trikampį *ABC*, atkarpa *MN* yra trikampio kraštinėje *BC*, $MN=6,$ o taškai *P* ir *Q* yra atitinkamai trikampio kraštinėse *AC* ir *AB* (4 pav.). Kadangi keturkampiai *BMPQ* ir *CNQP* pagal uždavinio sąlygą yra lygiagretainiai, tai $BM=NC=PQ=MN=6$ ir $BC=3\cdot 6=18$.

Kadangi tiesės AB ir PM lygiagrečios, tai pagal Talio teoremą $\frac{AB}{MP}=\frac{BC}{CM}$, t. y. $MP=\frac{AB\cdot CM}{BC}=\frac{9\cdot 12}{18},=6$. Analogiškai $\frac{QN}{AC}=\frac{BN}{BC}$, $QN=\frac{AC\cdot BN}{BC}=\frac{15\cdot 12}{18},=10$.

Lygiagretainiui $MNPQ$ taikome žinomą lygiagretainio savybę: lygiagretainio kraštinių kvadratų suma lygi jo įstrižainių kvadratų sumai (įsitikinkite tuo patys, iš trikampių MNQ ir MNP pagal kosinusų teoremą užrašę NQ^2 ir MP^2 išraiškas bei jas sudėję): $MP^2+NQ^2=2MN^2+2NP^2$. Iš čia



4 pav.

$$NP^2=\frac{1}{2}(6^2+10^2-2\cdot 6^2)=32 \text{ ir } NP=4\sqrt{2}.$$

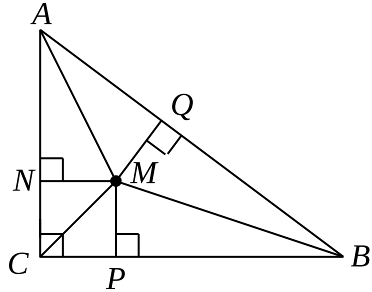
Trikampio ABC plotas lygus kraštinės ir į ją nubrėžtos aukštinės sandaugos pusei:

$$S=\frac{1}{2}a\cdot h_a=\frac{1}{2}b\cdot h_b=\frac{1}{2}c\cdot h_c.$$

Be to, $S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle A=\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin\angle C=\frac{1}{2}BC\cdot BA\cdot\sin\angle B$,

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; čia $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ – trikampio pusperimetris.

3 pavyzdys. Stačiojo trikampio statinių ilgiai 6 ir 8. Trikampio viduje yra taškas M, nutolęs nuo abiejų statinių vienodu atstumu, lygiu 2. Rasime, kokiu atstumu taškas M nutolęs nuo įžambinės.



5 pav.

Sakykime, kad stačiojo trikampio ABC statiniai AC ir CB lygūs atitinkamai 6 ir 8, taškas M nutolęs nuo statinių AC ir CB atstumais, lygiais 2. Iš taško M nuleidžiame statmenis MN, MP ir MQ į trikampio kraštines AC, CB ir AB (5 pav.).

Trikampių AMC, AMB ir CMB plotų suma yra lygi trikampio ABC plotui:

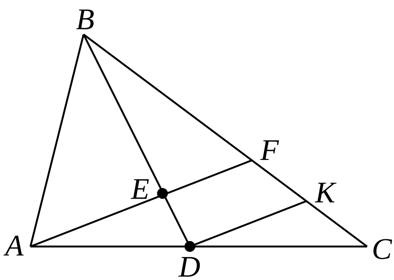
$$\frac{1}{2}AC\cdot MN+\frac{1}{2}CB\cdot MP+\frac{1}{2}AB\cdot MQ=\frac{1}{2}AC\cdot CB.$$

Kadangi $MN=MP=2$, tai $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 10\cdot MQ=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8$. Iš čia atstumas MQ nuo taško M iki įžambinės lygus 2, t. y. taškas M yra į trikampį įbrėžto apskritimo centras.

4 pavyzdys. Trikampio ABC pusiaukraštinėje BD pažymėtas taškas E taip, kad $DE=\frac{1}{4}BD$. Tiesė AE kerta kraštinę BC taške F. Rasime trikampio AFC plotą, jei trikampio ABC plotas lygus S.

Nubrėžiame tiesę DK lygiagrečią su tiese AF (6 pav.), tai pagal Talio teoremą $FK:KC=AD:DC=1$, t. y. $FK=\frac{1}{2}FC$. Kita vertus irgi pagal Talio teoremą turime, kad $\frac{BF}{FK}=\frac{BE}{ED}=3$, t. y. $BF=3FK=\frac{3}{2}FC$. Iš čia $BF:FC=3:2$. Kadangi trikampių ABC ir AFC aukštinės, nubrėžtos iš taško A, sutampa, tai jų plotų santykis lygus kraštinių, į kurias nubrėžtos tos aukštinės, ilgių santykiui, t. y.

$$S_{\Delta ABC}:S_{\Delta AFC}=BC:FC.$$



6 pav.

Iš lygybės $BF:FC=3:2$ seka, kad $\frac{BC-FC}{FC}=\frac{3}{2}$, t. y. $\frac{BC}{FC}-1=\frac{3}{2}$ ir $\frac{BC}{FC}=\frac{5}{2}$. Taigi trikampio AFC plotas lygus $\frac{2}{5}S$.

Trikampiai ABC ir $A'B'C'$ yra panašieji, jei jų atitinkami kampai lygūs, o prieš juos esančios kraštinės proporcingos: $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$,

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

Trikampių panašumo požymiai yra šie:

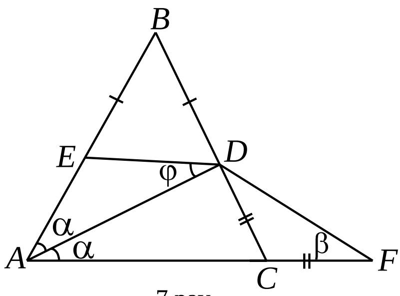
1) trikampiai panašieji, jei vieno jų du kampai lygūs atitinkamiems kito trikampio dviems kampams: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, jei $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$;

2) trikampiai panašieji, jei vieno jų kampas lygus atitinkamam kito trikampio kampui, o kraštinės, sudarančios tuos kampus, yra proporcingos: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, jei $\angle A = \angle A'$, $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$.

3) trikampiai panašieji, jei jų atitinkamos kraštinės proporcingos: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, jei $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$.

5 pavyzdys. Trikampio ABC visos kraštinės yra skirtingų ilgių, atkarpa AD yra jo pusiaukampinė. Žinoma, kad $AB - BD = a$, $AC + CD = b$. Rasime atkarpos AD ilgį.

Atidėkime atkarpoje AB atkarpą $BE = BD$, o kraštinės AC tęsinyje – atkarpą $CF = CD$ (7 pav.). Tuomet $AE = a$, $AF = b$.



7 pav.

Sakykime, kad
$\angle BAD = \angle DAC = \alpha$,
$\angle DFC = \angle CDF = \beta$, $\angle EDA = \varphi$.
Kadangi kampas ACD yra trikampio DCF priekampis, tai $\angle ACD = 2\beta$. Dėl tos pačios priežasties $\angle BED = \alpha + \varphi$. Kita vertus lygiašoniame trikampyje BDE teisinga lygybė $\angle BED = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B$. Iš trikampio ABC randame, kad

$\angle B = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$, todėl $\angle BED = 90^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha - 2\beta) = \alpha + \beta$.

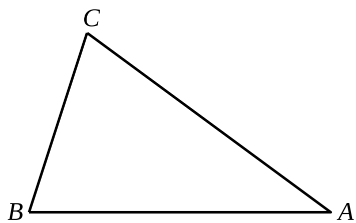
Taigi $\varphi = \beta$, trikampiai AED ir ADF – panašieji, todėl $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AD}{AF}$ ir $AD = \sqrt{AE \cdot AF} = \sqrt{ab}$.

Priminsime svarbiausias trikampio metrines priklausomybes.

1) Trikampiui ABC teisinga lygybė
$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle C$ (kosinusų teorema).

2) Jei R – apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo spindulys, tai
$\dfrac{BC}{\sin\angle A} = \dfrac{AC}{\sin\angle B} = \dfrac{AB}{\sin\angle C} = 2R$ (sinusų teorema).

6 pavyzdys. Trikampio vienas kampas du kartus didesnis už kitą, jiems priešingų kraštinių ilgių skirtumas lygus 2, o trečioji trikampio kraštinė lygi 5. Apskaičiuosime trikampio plotą.



8 pav.

Sakykime, kad trikampio ABC $\angle A = 2\angle B$ (8 pav.). Kadangi prieš didesnį trikampio kampą yra ilgesnė kraštinė, tai $BC - AC = 2,$ o $AB = 5.$ Pažymėkime $AC = x,$ tada $BC = x + 2.$ Pagal kosinusų teoremą turime

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B.$$

Iš čia

$$\cos\angle B = \frac{5^2 + (x+2)^2 - x^2}{2 \cdot 5 \cdot (x+2)} = \frac{29 + 4x}{10(x+2)}.$$

Pagal sinusų teoremą,

$$\frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{AC}{\sin\angle B}, \text{ arba } \frac{x+2}{2\sin\angle B\cos\angle B} = \frac{x}{\sin\angle B}.$$

Taigi $\cos\angle B = \dfrac{x+2}{2x}.$ Spręsdami lygtį $\dfrac{29+4x}{10(x+2)} = \dfrac{x+2}{2x}$ randame jos sprendinius $x_1 = 4,$ $x_2 = 5.$ Pirmuoju atveju $\cos\angle B = \dfrac{3}{4},$

$\sin\angle B = \sqrt{1 - \cos^2\angle B} = \dfrac{\sqrt{7}}{4},$ $BC = 6,$ taigi trikampio plotas

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\angle B = \frac{15\sqrt{7}}{4}.$$

Antruoju atveju $AC = AB = 5,$ $BC = 7,$ taigi $\angle B = \angle C = \dfrac{1}{2}\angle A.$ Iš čia

$\angle B = \angle C = 45^\circ$, $\angle A = 90^\circ$, taigi trikampis *ABC* statusis lygiašonis, jo įžambinė $BC = AC\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \neq 7.$ Taigi antrasis sprendinys netinka ir atsakymas yra $S = \dfrac{15\sqrt{7}}{4}$.

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Dvi trikampio kraštinės lygios 6 ir 8, į jas nubrėžtos trikampio pusiaukraštinės yra statmenos. Raskite trečiosios trikampio kraštinės ilgį

2. Stačiojo trikampio smailiojo kampo pusiaukampinė dalija trikampio statinį į dalis, kurių ilgiai lygūs 4 ir 5. Apskaičiuokite trikampio kraštinių ilgius.

3. Trikampio kraštinių ilgiai yra 10, 17 ir 21. Į jį įbrėžtas stačiakampis, kurio viena kraštinė yra trikampio ilgiausioje kraštinėje. Stačiakampio perimetras lygus 24. Apskaičiuokite stačiakampio kraštinių ilgius.

4. Trikampio kraštinių ilgiai $AB = 10,$ $BC = 17,$ $AC = 21$. Taškas *M* yra trikampio viduje, jo atstumai iki kraštinių *AC* ir *BC* atitinkamai lygūs 2 ir 4. Raskite taško *M* atstumą iki kraštinės *AB*.

5. Trikampio *ABC* plotas lygus *S*. Per kraštinės *BC* tašką *M* tokį, kad $BM : MC = 3 : 2,$ ir trikampio viršūnę *A* nubrėžta tiesė kerta pusiaukraštinę *BD* taške *F*. Raskite trikampio *AFB* plotą.

6. Trikampio aukštinių ilgiai lygūs 12, 15 ir 20. Raskite jo plotą.

7. Trikampio *ABC* kraštinių ilgiai $AB = 13,$ $BC = 15,$ $AC = 14$. Raskite trikampio *BHD* plotą, jei *BH* – aukštinė, o *BD* – pusiaukampinė.

8. Trikampio ABC visos kraštinės skirtingos, pusiaukampinės AD ilgis lygus a. Kraštinėje AC yra taškas M, kad $CD = CM$. Raskite atkarpos AM ilgį, jei $AB + BD = b$.

9. 60° kampo viduje yra taškas, nutolęs nuo kampo kraštinių per $\sqrt{7}$ ir $2\sqrt{7}$. Raskite to taško atstumą nuo kampo viršūnės.

10. Lygiašonio trikampio pusiaukampinė dalija šoninę kraštinę į dalis lygias b ir c. Raskite tos pusiaukampinės ilgį.

III. VARIANTŲ PERRANKOS METODAS

Antanas Apynis (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Lietuvos edukologijos universitetas)

Variantų perrankos metodo esmė gana aiškiai suprantama iš paties pavadinimo. Kai galimybių skaičius yra baigtinis, jos visos tam tikru nuoseklumu įvertinamos (patikrinamos), o tada pagal gautus rezultatus nustatomas sprendžiamo uždavinio atsakymas. Vis dėlto tik paprasčiausiais atvejais neiškyla jokių problemų.

1 pavyzdys. Tarp stačiakampių, kurių perimetras P lygus 26 (kuriais nors ilgio vienetais), o kraštinių ilgiai yra sveikieji skaičiai, raskime didžiausio ploto stačiakampį.

Sprendimas. Tegu a yra stačiakampio pagrindas, b – jo aukštinė, o S plotas. Sudarykime (pagal uždavinio sąlygą) galimybių (variantų) lentelę (žr. 1 lent.).

1 lentelė

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
b	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
S	12	22	30	36	40	42	42	40	36	30	22	12

Matome, kad didžiausią plotą turi stačiakampis, kurio viena kraštinė (pagrindas arba aukštinė) lygi 6, o kita 7.

Tęsdami pavyzdžio analizę, perimetrą $P = 26$ pakeiskime perimetru $P = 160$. Ieškodami didžiausio ploto stačiakampio, sudarykime panašią lentelę (žr. 2 lent.). Iš jos matyti, kad mažėjant skirtumui tarp

2 lentelė

a	1	2	3	...	39	40	41	...	77	78	79
b	79	78	77	...	41	40	39	...	3	2	1
S	79	156	231	...	1599	1600	1599	...	231	156	79

kraštinių ilgių a ir b stačiakampio plotas S didėja. Ir atvirkščiai, kai skirtumas tarp a ir b didėja, tai plotas S mažėja. Nors ir ne visos galimybės yra surašytos, atsakymą nustatyti nesunku. Didžiausią plotą turi stačiakampis, kurio abi kraštinės yra lygios: $a = b = 40$.

Panašių pavyzdžių analizė veda prie minties, kad skaičiuodami visų to paties perimetro P stačiakampių plotus, didžiausią ploto S reikšmę turėtume gauti atveju $a=b=\frac{P}{4}$ (čia a ir b – stačiakampio kraštinių ilgiai). Pasirodo, tą hipotezę visai nesunku įrodyti.

Tegu teigiami realieji skaičiai a ir b yra stačiakampio, kurio perimetras lygus P, kraštinių ilgiai. Remdamiesi akivaizdžia nelygybe $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0,$ gauname:

$$a-2\sqrt{ab}+b\geq 0,$$

$$\sqrt{ab}\leq \frac{a+b}{2},$$

$$ab\leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$$S\leq \left(\frac{P}{4}\right)^2=\frac{P^2}{16}.$$

Lygybė $S=\frac{P^2}{16}$ galioja tik tada, kai $a=b,$ nes lygybė $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=0$ galioja tik tada, kai $a=b.$ Vadinasi, kvadrato, kurio kraštinės ilgis lygus $\frac{1}{4}P,$ plotas yra didžiausias tarp stačiakampių, kurių perimetras lygus P.

Dabar sustokime prie *diofantinės* lygties $ax+by=c$ sprendimo. Priminsime, kad lygtis $ax+by=c$ vadinama tiesine diofantine lygtimi (pagal graikų matematiko Diofanto (Diophantus), gyv. III a., pavardę), jeigu jos koeficientai a ir b yra nelygūs nuliui sveikieji skaičiai, c – bet koks sveikasis skaičius ir reikalaujama rasti tik sveikuosius jos sprendinius (sveikųjų skaičių x ir y poras (x; y), kurios tenkina lygtį).

2 pavyzdys. Išspręskime diofantinę lygtį

$$2x+5y=25 \tag{1}$$

Sprendimas. Pradėkime nuo natūraliųjų skaičių x ir y porų, tenkinančių lygtį, paieškos.

Matome, kad galimos y reikšmės yra 1, 2, 3 ir 4 ir tiks tik tos, su kuriomis skaičius

$$x=\frac{25-5y}{2}$$

yra teigiamas sveikasis skaičius.

Gauname du lygties sprendinius: (5; 3) ir (10; 1).

Aišku, kad negalimi atvejai, kai $x \le 0$ ir $y \le 0$ (nes tada būtų $2x + 5y \le 0 < 25$).

Turime išsiaiškinti, ar (1) lygtis turi sveikųjų sprendinių $(x; y)$, kuriuose $x < 0,\ \ y > 0$ arba $x > 0,\ \ y < 0.$ Perrankos metodas čia netinka, nes yra be galo daug teigiamų ir neigiamų sveikųjų skaičių, o konkrečių apribojimų jų didumui neturime.

Darykime taip:

$$2x = 25 - 5y,$$

$$x = \frac{25}{2} - \frac{5y}{2} = 12 + \frac{1}{2} - \frac{5y}{2} = 12 + \frac{1-5y}{2}.$$

Kadangi x ir 12 yra sveikieji skaičiai, tai ir skaičius $\frac{1-5y}{2}$ turi būti sveikasis skaičius. Pažymėkime

$$t = \frac{1-5y}{2}.$$

Tuomet

$$x = 12 + t$$

ir

$$y = \frac{1-2t}{5}.$$

Skaičius $1-2t$ turi dalytis iš 5; taigi turi būti: $1-2t = 5k,$ k – sveikasis skaičius.

Iš čia gauname, kad

$$2t = 1 - 5k,\ k \text{ – sveikasis skaičius.}$$

Jei k būtų lyginis skaičius, tai $1-5k$ būtų nelyginis skaičius. Šis atvejis netinka.

Jei $k = 2m-1,$ m – sveikasis skaičius, tai

$$2t = 1 - 5(2m-1),$$

$$2t = 6 - 10m,$$

$$t = 3 - 5m.$$

Vadinasi,

$$x = 12 + (3 - 5m) = 15 - 5m,$$

$$y = \frac{1-2(3-5m)}{5} = \frac{10m-5}{5} = 2m-1,$$

m – sveikasis skaičius.

Sprendinius $(x; y)$, kuriuose $x<0$ ir $y>0$ gausime tada, kai

$$15-5m<0 \quad \text{ir} \quad 2m-1>0.$$

Iš čia $m>3$ ir $m>\frac{1}{2}$. Taigi $m>3$.

Sprendinius $(x; y)$, kuriuose $x>0$ ir $y<0$, gausime tada, kai

$$15-5m>0 \quad \text{ir} \quad 2m-1<0.$$

Iš čia $m<3$ ir $m<\frac{1}{2}$. Taigi $m \le 0$.

Atkreipkime dėmesį, kad iš formulių

$$x = 15-5m,$$
$$y = 2m-1$$

galima gauti ir abu natūraliuosius sprendinius ((5; 3) ir (10; 1)). Tereikia išspręsti nelygybių sistemą

$$\begin{cases} 15-5m>0, \\ 2m-1>0. \end{cases}$$

Ji turi du sprendinius: $m=1$ ir $m=2$.

Kai $m=1$, tai $x=10$, $y=1$; kai $m=2$, tai $x=5$, $y=3$.

Išvada: diofantinė lygtis $2x+5y=25$ turi be galo daug sprendinių $(x; y)$, kurie užrašomi formulėmis

$x = 15-5m$ ir $y = 2m-1$; čia m yra bet kuris sveikasis skaičius.

Matome, kad sprendžiant diofantines lygtis taip pat galima taikyti (bent iš dalies) variantų perrinkimo metodą.

Išnagrinėkime dar kelis variantų perrankos metodo taikymo uždavinius.

3 pavyzdys. Raskime natūraliųjų skaičių x ir y poras $(x; y)$, kurios tenkina lygtį

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{14}. \qquad (2)$$

Sprendimas. Lygtį pertvarkykime taip:

$$xy-14x-14y=0,$$

$$(xy-14x)-(14y-196)-196=0,$$
$$x(y-14)-14(y-14)=196,$$
$$(y-14)(x-14)=196.$$

Išskaidę 196, gauname, kad $196=2^2\cdot 7^2.$ Toliau nagrinėkime lygtį

$$(x-14)(y-14)=2^2\cdot 7^2.$$

Galimos $x-14$ reikšmės yra 1; 2; 4; 7; 14; 28; 49; 98 ir 196, o atitinkamos $y-14$ reikšmės yra196; 98; 49; 28; 14; 7; 4; 2 ir 1. Iš čia (pridėdami po 14) randame visus (2) lygties natūraliuosius sprendinius: (15; 210), (16; 112), (18; 63), (21; 42), (28; 28), (42; 21), (63; 18), (112; 16), (210; 15).

4 pavyzdys. Raskime visas natūraliųjų skaičių a ir b poras $(a;b)$, kurios tenkina lygiai tris iš šių keturių sąlygų:

1) $a+1$ dalijasi iš b;
2) $a=2b+5$;
3) $a+b$ dalijasi iš 3;
4) $a+7b$ yra pirminis skaičius.

Sprendimas. Jei $a+b$ dalytųsi iš 3, tai galiotų lygybė $a+b=3m$, kurioje m – kuris nors natūralusis skaičius. Tada

$$a+7b=(a+b)+6b=3m+6b=3(m+2b).$$

Taigi šiuo atveju $a+7b$ nebūtų pirminis skaičius.

Darome išvadą, kad natūralieji skaičiai a ir b būtinai turi tenkinti pirmą ir antrą sąlygas. Spręsdami lygčių sistemą

$$\begin{cases} a+1=kb, \ k\in N, \\ a=2b+5, \end{cases}$$

gauname:

$$2b+6=kb \Rightarrow b(k-2)=6 \Rightarrow b=\frac{6}{k-2}, \ k>2 \ \Rightarrow b\in\{1;2;3;6\}.$$

Galimos tokios skaičių a ir b poros:

(7; 1), (9; 2), (11; 3), (17; 6).

Nė viena iš sumų $a+b$ nesidalija iš 3. Todėl reikia tikrinti, kurios iš jų tenkina ketvirtą sąlygą (skaičius $a+7b$ yra pirminis). Gauname dvi poras: (9; 2) ir (17; 6).

Ats.: (9; 2), (17; 6).

5 pavyzdys. Dėžėje yra 22 rutuliukai. Kiekvienas iš jų per pusę nudažytas dviem spalvomis: 10 rutuliukų – raudona ir mėlyna, 7 rutuliukai – mėlyna ir žalia, o 5 rutuliukai – žalia ir raudona. Kiek mažiausia rutuliukų reikia (nežiūrint) ištraukti iš dėžės, kad tarp jų būtų ne mažiau kaip 5 rutuliukai, per pusę nudažyti ta pačia spalva?

Sprendimas. Uždavinį spręskime „nuo kito galo". Pabandykime išsiaiškinti, kiek daugiausia rutuliukų galima ištraukti iš dėžės, kad tarp jų nebūtų penkių rutuliukų, per pusę nudažytų viena spalva. Pagal spalvas rutuliukus pažymėkime simboliais RM, MŽ ir ŽR. Jei ištrauktume du RM, du MŽ ir du ŽR, tai turėtume po keturias kiekviena spalva nudažytas rutuliukų puses. Taigi septintuoju traukimu visada turėtume bent penkias ta pačia spalva nudažytas rutuliukų puses.

Ats.: 7.

6 pavyzdys. Raskime visus natūraliuosius lygčių sistemos

$$\begin{cases} 8x+5y+z=100, \\ x+y+z=20 \end{cases} \tag{3}$$

sprendinius.

Sprendimas. Iš antros lygties gauname, kad

$$z=20-x-y.$$

Įrašę šią išraišką į pirmąją lygtį, gausime lygtį su dviem nežinomaisiais:

$$7x+4y=80.$$

Lengva matyti, kad galimos x reikšmės priklauso intervalui (1; 11). Kadangi

$$y=20-\frac{7x}{4}$$

turi būti natūralusis skaičius, tai skaičius x turi dalytis iš 4. Vadinasi, $x=4$ arba $x=8$. Gauname du (4) lygties natūraliuosius sprendinius (4; 13) ir (8; 6) ir apskaičiuojame z reikšmes.

Taigi (3) sistema turi du natūraliuosius sprendinius – trejetus (4; 13; 3) ir (8; 6; 6).

Ats.: (4; 13; 3), (8; 6; 6).

Išsamesnei pažinčiai su čia aiškinama tema bei gilesnėms diofantinių lygčių sprendimo studijoms tiktų kad ir tokia literatūra:

1. R. Skrabutėnas. *Grandininės trupmenos.* Jaunajam matematikui. 3, Danieliaus leidykla, Vilnius, 2002, 15–24, 88–93 psl.

2. E. Stankus. *Diofantinės lygtys.* Jaunajam matematikui. 8, Danieliaus leidykla, Vilnius, 2007, 26–35, 103–105 psl.
3. J. Šinkūnas. *Ekstremumai be išvestinių*. Vilnius, TEV, 2008.

Pateikiame uždavinių rinkinėlį savarankiškam sprendimui (pasitreniravimui). Šių uždavinių sprendimų patikrinimui siųsti nereikia.

1. Dėžėje yra 70 rutuliukų: 20 raudonų, 20 mėlynų, 20 juodų, 5 balti ir 5 žali. Kiek mažiausia rutuliukų reikia atsitiktinai išimti iš dėžės, kad tarp jų būtų ne mažiau kaip 10 tos pačios spalvos?

Ats.: 38.

2. Dėžėje yra 10 raudonų, 8 mėlyni ir 6 juodi rutuliukai. Kiek daugiausia rutuliukų galima atsitiktinai išimti iš dėžės, kad dėžėje liktų bent 5 vienos spalvos rutuliukai ir 3 kitos spalvos rutuliukai?

Ats.: 9.

3. Ant vienos kortelės užrašytas skaičius 1, ant dviejų kortelių – skaičius 2, ant trijų kortelių – skaičius 3 ir t. t., ant 50 kortelių – skaičius 50. Tos kortelės sudėtos į dėžutę ir sumaišytos. Kiek mažiausia kortelių reikia ištraukti iš dėžutės, kad tarp jų būtų bent 10 kortelių su vienodais skaičiais?

Ats.: 415.

4. Tamsiame sandėlyje padėta 20 porų juodų ir 20 porų rudų vienodo dydžio batų, nesurištų poromis. Tamsoje negalima atskirti ne tik batų spalvos, bet ir kairiojo nuo dešiniojo bato. Kokį mažiausią skaičių batų reikia paimti, kad tarp jų būtų bent:
1) viena tos pačios spalvos batų pora?
2) viena juodų batų pora?
3) dvi poros vienos spalvos batų?
4) dvi poros skirtingų spalvų batų?
5) dvi poros juodų batų?
6) keturios poros juodų batų?
7) šešios poros vienos spalvos batų?
8) keturios poros juodų ir 6 poros rudų batų?

Ats.: 1) 41; 2) 61; 3) 43; 4) 61; 5) 62; 6) 64; 7) 51; 8) 66.

5. a) Trys vyrai ir trys berniukai turi persikelti per upę valtimi, kuria gali plaukti tik vienas vyras arba 1–2 berniukai. Sudarykite jų persikėlimo planą.

b) Trys vaikinai ir trys merginos turi persikelti per upę valtimi, kuria gali plaukti ne daugiau kaip du žmonės. Sudarykite tokį jų persikėlimo planą, kad bet kuriuo momentu viename krante nebūtų daugiau vaikinų negu merginų (kai vaikinų yra daugiau negu merginų, jie sukelia tarpusavyje muštynes).

6. Seka sudaroma taip: pirmas narys lygus 7, o po to kiekvienas kitas narys lygus prieš jį esančio nario kvadrato skaitmenų sumai, padidintai vienetu. Taigi antras narys lygus 14 ($7^2 = 49$ ir $4+9+1=14$), trečias narys lygus 17 ir t. t. Koks yra tūkstantasis sekos narys?

Ats.: 11.

7. Linas sugalvojo natūralųjį skaičių ir, padauginęs jį iš 13, nubraukė gautojo skaičiaus paskutinį skaitmenį. Gautąjį skaičių padaugino iš 7 ir, taip pat nubraukęs paskutinį skaitmenį, gavo 21. Kokį skaičių sugalvojo Linas?

Ats.: 24.

8. Žvejai pagavo lydekų, ešerių ir kuojų (daugiau kaip 30 bet mažiau už 100). Pasirodė, kad 48 % sugautų žuvų yra ešeriai. Penkias mažiausias žuvis žvejai paleido atgal į ežerą. Perskaičiavus žuvis, buvo nustatyta, kad ešeriai sudarė jau 50 %likusių žuvų. Kiek žuvų buvo sugauta? Kiek ešerių buvo paleista atgal į ežerą?

Ats.: 75; 1.

9. Kiek yra triženklių skaičių, kurių paskutinis skaitmuo lygus pirmųjų skaitmenų sandaugai?

Ats.: 32.

10. Kiek yra triženklių skaičių, kurių bet kurių dviejų skaitmenų suma dalijasi iš trečiojo skaitmens?

Ats.: 39.

11. Triženklis skaičius, kurio skaitmenys skirtingi, dalijasi iš dviženklio skaičiaus, gauto iš triženklio skaičiaus išbraukus bet kurį skaitmenį. Raskite visus tokius skaičius.

Ats.: 120, 150, 240, 360, 480.

12. Raskite tokį keturženklį skaičių, kurio šimtų skaitmuo yra nulis, o jį išbraukus gaunamas 9 kartus mažesnis triženklis skaičius.

Ats.: 2025, 4050, 6075.

13. Penkiaženkliame skaičiuje, kurio nė vienas skaitmuo nelygus nuliui ir kuris dalijasi iš 54, išbrauktas vienas skaitmuo. Gautas keturženklis skaičius irgi dalijasi iš 54. Iš jo išbraukus vieną skaitmenį, gautas triženklis skaičius taip pat dalijasi iš 54. Pagaliau iš triženklio skaičiaus, išbraukus vieną skaitmenį, gaunamas skaičius 54. Raskite tą penkiaženklį skaičių.

Ats.: 59 994.

14. Mokinys už teisingai išspręstą uždavinį gauna 15 taškų, o už blogai išspręstą uždavinį – praranda 34 taškus. Išsprendęs ne daugiau kaip 150 uždavinių, jis gavo 114 taškų. Kiek uždavinių mokinys išsprendė teisingai ir kiek klaidingai?

Ats.: 1) t – 28, k – 9; 2) t – 62, k –24; 3) t – 96, k – 39.

15. Keliais skirtingais būdais 66 litrus uogienės galima išpilstyti į trijų ir penkių litrų talpos stiklainius (pripilant pilnus)?

Ats.: 4, (2; 12), (7; 9), (12; 6), (17; 3).

16. Raskite lygties $5x+19y=674$ natūraliuosius sprendinius.

Ats.: (131; 1), (112; 6), (93; 11), (74; 16), (55,21), (36; 26), (17; 31).

17. Raskite lygties $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ natūraliuosius sprendinius.

Ats.: (3; 3; 3), (2; 4; 4), (2; 3; 6) ir jų perstatos.

18. Raskite lygties $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{14}$ sveikuosius sprendinius.

Ats.: (–182; 13), (–84; 12), (–35; 10), (–14; 7), (7; –14), (10; –35), (12; –84), (13; –182),

(15; 210), (16,112), (18; 63), (21; 42), (28; 28),
(42; 21), (63; 18), (112; 16), (210; 15).

19. Raskite lygties $6xy - 4x + 9y - 366 = 0$ sveikuosius sprendinius.

Nurodymas.

$6xy - 4x + 9y - 366 = 0 \iff (2x+3)(3y-2) = 3^2 \cdot 5 \cdot 2^3$. Turint mintyje, kad $2x+3$ yra nelyginis skaičius, reikia išnagrinėti galimus atvejus.

Ats.: (3; 14), (–24; –2).

20. Raskite lygčių sveikuosius sprendinius:

a) $3x + 5y = 40$;

b) $5x - 8y = 35$.

Ats.: a) $x = 5 - 5t,\ y = 5 + 3t,\ t \in R$;
b) $x = -1 + 8t,\ y = -5 + 5t,\ t \in R.$

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Raskite visus natūraliuosius skaičius, kuriems esant skaičius $n^3 + 3$ dalijasi iš skaičiaus $n + 3$.

2. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių, kuris pasižymi tokiomis savybėmis:
jo pusė yra sveikojo skaičiaus kvadratas;
jo trečdalis yra sveikojo skaičiaus kubas;
jo penktadalis yra sveikojo skaičiaus penktasis laipsnis.

3. Rūsyje yra 20 vienodos talpos ir formos stiklainių su uogiene: 8 stiklainiai braškių uogienės, 7 stiklainiai mėlynių uogienės ir 5 stiklainiai vyšnių uogienės. Stiklainiai imami vienas po kito atsitiktinai. Raskite didžiausią skaičių stiklainių, kuriuos galima paimti, kad rūsyje liktų nemažiau kaip 4 vienos rūšies uogienės ir nemažiau kaip 3 kitos rūšies uogienės stiklainiai.

4. Raskite visus sveikųjų skaičių x, y ir z trejetus $(x; y; z)$, kurie tenkina lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - z^2 = 1, \\ x - y - z = -3. \end{cases}$$

5. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių, prasidedantį skaitmeniu 1, iš kurio gaunamas trigubai didesnis skaičius, kai skaitmuo 1 perkeliamas į skaičiaus galą.

6. Raskite keturženklį skaičių, dalų iš 7, kurį galima išreikšti kurio nors natūraliojo skaičiaus kvadrato ir jo kubo suma.

7. Raskite visas natūraliųjų skaičių m ir n poras $(m; n)$, kurios tenkina lygtį

$$12m + 31n = 170.$$

8. Į kiek maišelių po 5 kg ir 19 kg galima supilti 674 kg kavos pupelių? Raskite visus įmanomus variantus.

9. Linas mėlynais brūkšneliais padalijo liniuotę į 50 lygių dalių, o Romas tą pačią liniuotę raudonais brūkšneliais padalijo į 47 lygias dalis. Nustatykite, tarp kurių mėlynų ir raudonų brūkšnelių atstumas yra mažiausias.

10. Raskite sveikųjų skaičių x ir y poras $(x; y)$, kurios tenkina lygtį

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}.$$

IV. KOMBINATORIKOS UŽDAVINIAI

Antanas Apynis (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Lietuvos edukologijos universitetas)

Pasirinkus bet kurią baigtinę aibę, tarkime, $A=\{a_1; a_2; ...; a_n\}$, iš jos elementų galima sudaryti įvairių naujų matematinių objektų, vadinamų *junginiais*. Panašiai kaip iš gimtosios kalbos abėcėlės raidžių galima sudaryti įvairių vienokią ar kitokią prasmę turinčių žodžių.

Žinome, kad ne visi kalbos abėcėlės raidžių junginiai (žodžiai) yra prasmingi (dabartinės vartosenos požiūriu). Panašiai yra ir su matematinių objektų junginiais. Dažniausia nagrinėjami junginiai yra sutvarkytos elementų poros, sutvarkyti elementų trejetai, baigtinės skaičių sekos. Kiekvieną natūralųjį skaičių galima suvokti kaip sutvarkytą skaitmenų aibės $\{0; 1; 2; ...; 9\}$ elementų junginį. Bet kuris n-matės erdvės taškas, užrašytas koordinatėmis, yra kurių nors realiųjų skaičių junginys.

Natūralu aiškintis, kiek (o kartais ir kokių) junginių, tenkinančių tam tikras sąlygas, galima sudaryti iš pasirinktos aibės A ir jos poaibių elementų. Vienu metu net buvo išpopuliarėjęs žaidimas – kas parašys daugiau prasmingų žodžių, sudarytų iš konkretaus žodžio raidžių (nebūtinai imant visas).

Prisiminkime pradines kombinatorikos sąvokas ir pagrindines kombinatorikos uždavinių sprendimo taisykles bei formules.

Tegu $A=\{a_1; a_2; ...; a_n\}$ yra kurių nors matematinių objektų (nebūtinai skaičių) aibė. Bet kurį jos elementų junginį, sudarytą iš m skirtingų aibės A elementų pažymėkime $J_n(m)$, $m \in \{1; 2; ...; n\}$. Kartais sakoma, kad toks junginys yra *junginys be pasikartojimų*.

Apibrėžimai:

1) Nesutvarkytas junginys $J_n(m)$ vadinamas *deriniu* iš n elementų po m elementų;

2) Sutvarkytas junginys $J_n(m)$ vadinamas *gretiniu* iš n elementų po m elementų;

3) Sutvarkytas junginys $J_n(n)$ vadinamas *kėliniu* iš n elementų.

Aišku, kad derinį (nesutvarkytą junginį be pasikartojimų) galima tapatinti su bet kuriuo aibės A poaibiu, turinčiu m elementų. Kiekvieną gretinį iš n elementų po m elementų (sutvarkytą junginį be pasikartojimų) galima apibūdinti kaip sutvarkytą aibės A poaibį, sudarytą iš m elementų, o kėlinį iš n elementų galima nusakyti kaip sutvarkytą aibę A. Kita vertus, kėlinys yra gretinys iš n elementų po n elementų.

Aibės $A = \{a_1; a_2; ...; a_n\}$ poaibių po m elementų (derinių) skaičius žymimas C_n^m. Gretinių iš n elementų po m elementų skaičius žymimas A_n^m, o kėlinių iš n elementų skaičius žymimas P_n.

Nesunku suprasti, kad skaičiai C_n^m, A_n^m ir P_m susiję tokia formule:

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m \tag{1}$$

(čia $m \in \{1; 2; ...; n\}$).

Vadinasi, pakanka išsiaiškinti, kad

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{2}$$

ir

$$P_m = m! \tag{3}$$

Šiose formulėse simboliu $k!$ žymima sandauga $k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$, kuri vadinama skaičiaus k *faktorialu*. Turėsime mintyje, kad visos trys formulės LJMM mokiniams yra žinomos iš mokyklinių vadovėlių; todėl jų išvedimą čia praleisime.

Sprendžiant kombinatorikos uždavinius nepakanka (1) – (3) formulių. Labai svarbu suvokti ir įsiminti kombinatorinę *sudėties* ir kombinatorinę *daugybos* taisyklę.

Tegu A ir B yra baigtinės aibės, neturinčios bendrų elementų ($A \cap B = \varnothing$), $A \cup B$ yra aibių A ir B sąjunga, o $A \times B$, apibrėžiama formule

$$A \times B = \{(a; b) : a \in A, b \in B\},$$

yra aibių A ir B Dekarto sandauga. Šių aibių elementų skaičių pažymėkime atitinkamai $m(A)$, $m(B)$, $m(A \cup B)$ ir $m(A \times B)$. Pagal kombinatorinę sudėties taisyklę gaunama formulė

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B), \tag{4}$$

o pagal kombinatorinę daugybos taisyklę – formulė

$$m(A \times B) = m(A) \cdot m(B). \tag{5}$$

Jei aibės A ir B turi bendrų elementų, t. y. $A \cap B \neq \varnothing$, tai

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B). \qquad (6)$$

Čia pateiktų sąvokų ir formulių pakanka ir tuo atveju, kai reikia nagrinėti sutvarkytus junginius su pasikartojimais. Junginių su pasikartojimais skaičiams rasti yra išvesta įvairių formulių, bet sprendžiant nesudėtingus kombinatorikos uždavinius galima ir be jų apsieiti.

Išnagrinėkime kelis pavyzdžius.

1 pavyzdys. Kiek yra penkiaženklių skaičių, dalių iš 4, kurie užrašyti visais skaitmenimis 1, 2, 3, 4 ir 5.

Sprendimas. Bet kurį penkiaženklį skaičių $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ galima užrašyti formule

$$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5} = \overline{a_1a_2a_3} \cdot 100 + \overline{a_4a_5}.$$

Aišku, kad jis dalijasi iš 4 tik tada, kai dviženklis skaičius $\overline{a_4a_5}$ dalijasi iš 4. Iš to darome išvadą, kad dalių iš 4 penkiaženklių skaičių gale turi būti 12, 24, 32 arba 52. Kiekvienu atveju turime $P_3 = 3! = 6$ variantus pirmiesiems trims skaitmenims užrašyti. Pagal kombinatorinę daugybos taisyklę gauname $6 \cdot 4 = 24$ penkiaženklius skaičius, tenkinančius uždavinio sąlygas.

Ats.: 24.

2 pavyzdys. Kiek penkiaženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis galima sudaryti iš skaitmenų 0, 1, 2, 3 ir 4 esant sąlygai, kad pirmas skaitmuo ne vienetas?

Sprendimas. Aišku, kad pirmas skaitmuo negali būti nulis. Lieka trys skaitmenys (2, 3 ir 4), galintys užimti pirmą poziciją. Su kiekvienu iš jų yra $P_4 = 4! = 24$ skirtingų variantų kitoms pozicijoms užimti. Pagal kombinatorinę daugybos taisyklę gauname $3 \cdot 24 = 72$ penkiaženklius skaičius.

Ats.: 72.

3 pavyzdys. Nustatykime, kokiu skaitmeniu baigiasi visų skaičių, gautų iš skaičiaus 2013 keičiant vietomis jo skaitmenis, šešiasdešimtųjų laipsnių suma. Skaičius 2013 yra tarp jų, o nulis, atsidūręs pirmoje pozicijoje, nubraukiamas.

Sprendimas. Aišku, kad galima sudaryti 24 skaičius; šeši iš jų bus triženkliai. Vienetų pozicijoje gali būti bet kuris iš skaitmenų 0, 1, 2 ir3. Kiekvienas iš jų bus šešių skaičių paskutinis skaitmuo. Skaičiaus

$2^{60}=(2^3)^{20}=(8^4)^5=(64^2)^5$ paskutinis skaitmuo yra 6, o skaičiaus $3^{60}=(3^4)^{15}=(8^4)^5=81^{15}$ yra 1. Kadangi $0^{60}=0$ ir $1^{60}=1$, tai sudėję visų skaičių 60-uosius laipsnius, gausime tokią jų vienetų sumą:

$$6(6+1+0+1)=48.$$

Vadinasi, paskutinis sumos skaitmuo yra 8.

Ats.: 8.

4 pavyzdys. Plokštumoje pažymėta 11 taškų. Penki iš jų yra viename apskritime ir nėra nė vieno kito apskritimo, kuris eitų per daugiau negu tris taškus. Be to, jokie trys taškai nėra vienoje tiesėje. Kiek apskritimų, einančių lygiai per tris pažymėtus taškus, galima nubrėžti?

Sprendimas. Žinome, kad per bet kuriuos tris nesančius vienoje tiesėje plokštumos taškus galima nubrėžti apskritimą (visada tik vieną). Apskritimą, einantį per penkis pažymėtus taškus, pažymėkime raide *A*. Kitus apskritimus sugrupuokime pagal pažymėtų taškų, esančių apskritime *A*, skaičių; jis gali būti du, vienas arba nulis. Tokius apskritimus žymėkime (atitinkamai) simboliais A_2, A_1 ir A_0. Pagal kombinatorinę daugybos taisyklę apskritimų A_2 galima nubrėžti $C_5^2\cdot C_6^1=60,$ apskritimų A_1 galima nubrėžti $C_5^1\cdot C_6^2=75,$ o apskritimų $A_0=C_6^3=20.$ Iš viso bus $60+75+20=155$ apskritimai, einantys lygiai per tris pažymėtus taškus.

Ats.: 155.

5 pavyzdys. Keliais būdais iš natūraliųjų skaičių 1, 2, 3, ... , 100 galima pasirinkti tris skaičius, kurių suma dalijasi iš 3?

Sprendimas. Tarp skaičių nuo 1 iki 100 yra 33 skaičiai, kurie dalijasi iš 3. Yra 34 skaičiai, kuriuos dalijant iš 3 gaunama liekana 1, ir 33 skaičiai, kuriuos dalijant iš 3, gaunama liekana 2. Dalią iš 3 sumą galima gauti tokiais atvejais: 1) visi trys skaičiai dalijasi iš 3; 2) visų trijų skaičių dalybos iš 3 liekana lygi 1; 3) vienas skaičius dalijasi iš 3, vieno dalybos iš 3 liekana lygi 1 ir vieno dalybos iš 3 liekana lygi 2; 4) visų trijų skaičių dalybos iš 3 liekanos lygios 2.

Gauname

$$C_{33}^3+C_{34}^3+C_{33}^1\cdot C_{34}^1\cdot C_{33}^1+C_{33}^3=5456+5984+37026+5456=53922$$

trijų skaičių, kurių suma dalijasi iš 3, pasirinkimo būdų.

Ats.: 53 922.

6 pavyzdys. Kiek skirtingų 9-ženklių skaičių galima sudaryti iš skaičiaus $a = 512312171$ skaitmenų keičiant juos vietomis?

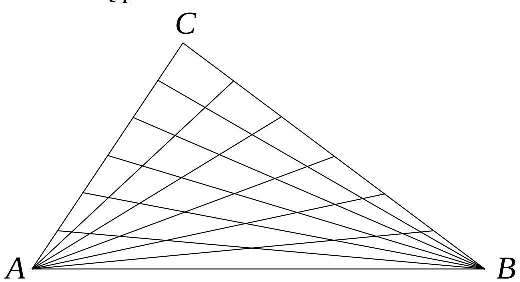
Sprendimas. Jei visi skaičiaus a skaitmenys būtų skirtingi, tai gautume $n = 9!$ skirtingų 9-ženklių skaičių (žinoma, kai tarp skaitmenų nėra nulio). Kadangi skaitmuo 1 pasikartoja keturis kartus, o skaitmuo 2 pasikartoja du kartus, tai bendras 9-ženklių skaičius sumažėja $4! \cdot 2! = 48$ kartus. Taigi ieškomasis skaičius (jį pažymėkime m) yra toks:

$$m = \frac{9!}{4!\,2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 7560\,.$$

Ats.: 7560.

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Suskaičiuokite, kiek trikampių (įskaitant ir ABC) yra šiame atkarpų tinkle. Skaičiavimą paaiškinkite.



2. Plokštumoje yra pažymėti 7 taškai $A_1, A_2, ..., A_7$ taip, kad jokie trys iš jų nėra vienoje tiesėje. Kiek yra skirtingų kelių iš A_1 į A_7, jei galima eiti tik atkarpomis, jungiančiomis pažymėtuosius taškus, ir draudžiama tame pačiame taške atsirasti daugiau kaip vieną kartą?

3. Kiek skirtingų keturženklių skaičių, dalių iš 5, galima sudaryti iš skirtingų skaitmenų 0, 1, 3, 5 ir 7?

4. Kiek skirtingų penkiaženklių skaičių, didesnių už 20 000, galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3 ir 4, jei skaitmenys 2, 3 ir 4 įeina po vieną kartą, o 1 – du kartus?

5. Kiek skirtingų trejetų galima sudaryti iš skaičių 1, 2, 3, ..., 30, kad kiekvieno iš jų skaičių suma būtų lyginė?

6. Apskaičiuokite sumą tokių keturženklių skaičių, kuriuos galima užrašyti keičiant vietomis skaitmenis 1, 2, 3 ir 4.

7. Kiek septynženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3, ..., 8, kad skaitmuo 2 į juos įeitų nemažiau kaip tris kartus?

8. Kiek skirtingų šešiaženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6 ir 7, kad visi jo skaitmenys būtų skirtingi, o pirmas ir paskutinis skaitmenys būtų lyginiai?

9. Kiek keturženklių skaičių galima sudaryti iš skaičiaus 123153 skaitmenų? Skaitmenys 1 ir 3 gali įeiti nedaugiau kaip po du kartus, o skaitmenys 2 ir 5 – nedaugiau kaip po vieną kartą.

10. Gėlininkė Justina nori pasodinti vienoje eilėje 9 gėles: 6 vienodus kardelius ir tris rožes – raudoną, baltą ir oranžinę. Keliais būdais ji gali pasodinti šias gėles esant sąlygai, kad kiekviena rožė būtų tarp kardelių?

V. FIBONAČIO SKAIČIAI

Eugenijus Stankus
(Vilniaus universitetas)

Skaičių eilė

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots \qquad (1)$$

vadinama *Fibonačio skaičių seka* arba tiesiog *Fibonačio seka*. Nesunku pastebėti, kad kiekvienas šios sekos narys, pradedant trečiuoju, lygus dviejų prieš jį stovinčių narių sumai. Taigi, jei šios sekos n-ąjį narį pažymėsime F_n, tai galime užrašyti formulę, pagal kurią surandami Fibonačio skaičiai:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 3). \qquad (2)$$

Šiek tiek istorijos. Fibonačis (1180-1240) buvo vienas iš žymiausių viduramžių matematikų. Tikrasis Fibonačio vardas yra Leonardas iš Pizos, tačiau jis labiau žinomas kaip Fibonačis – lietuviškai tai reikštų Bonačio sūnus. Jo tėvas buvo pirklys, todėl Fibonačis kartu su tėvu daug keliavo. Alžyre įgijo pradinį išsilavinimą, ten susipažino su arabų aritmetika ir algebra. Vėliau jis išleido knygą „Liber abacci“ („Abako knyga“), kuri kitus tris amžius buvo svarbiausia aritmetikos ir algebros knyga Vakarų Europoje. Plačiau apie Fibonačio darbus galima susipažinti neseniai išleistoje knygoje [2]. Fibonačis suformulavo ir tokį uždavinį.

Subrendusi triušių pora kas mėnesį pagimdo naują triušių porą, kuri subręsta po dviejų mėnesių ir pagimdo naują triušių porą. Kiek triušių bus metų pabaigoje, jei metų pradžioje turime vieną nesubrendusią triušių porą?

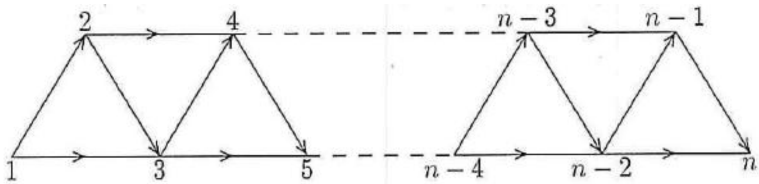
Pastaba. Šį istorinį uždavinį metodiniais tikslais šiek tiek pakoregavome įrašydami „nesubrendusią“ vietoje „subrendusią“.

Panagrinėkime jį. Pirmoji triušių pora gali susilaukti jauniklių tik po dviejų mėnesių, tai pirmą ir antrą mėnesį porų skaičius išlieka tas pats – lygus 1. Trečiąjį mėnesį, kai ši pora susilaukia palikuonių, porų skaičius tampa lygus 2. Senoji triušių pora po mėnesio vėl susilauks porelės. Vadinasi, ketvirtąjį mėnesį jau bus 3 poros. Penktąjį mėnesį palikuonių susilauks ir senoji, ir trečiąjį mėnesį gimusi pora, taigi jau bus 5 triušių poros. Šeštąjį mėnesį jau turėsime 8 triušių poras. Skaičiavimą tokiu būdu tęsdami toliau, gausime, kad po 12 mėnesių bus 144 triušių poros.

Kaip matome, gauname (1) Fibonačio skaičių sekos pirmuosius 12 narių. Aišku, kad tęsdami skaičiavimą iš eilės galime gauti bet kurį šios begalinės sekos narį.

Atkreipkime dėmesį, kad pagal (2) formulę galime parašyti be galo daug skirtingų sekų – priklausomai nuo to, kokius pasirinksime pradinius sveikuosius skaičius F_1 ir F_2. Su kitomis F_1 ir F_2 reikšmių parinktimis gausime kitas sekas. Pavyzdžiui, kai $F_1 = 2,\ F_2 = 5,$ gausime seką 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, ... Jei $F_1 = 1,\ F_2 = 3,$ tai seka tokia: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ... Viena iš žinomesnių yra seka 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521 su $F_1 = 2,\ F_2 = 1,$ vadinama Lukaso (François Edouard Anatole Lucas – prancūzų matematikas, 1842-1891) seka, kurios savybės labai panašios į Fibonačio sekos savybes. Atkreipiame dėmesį, kad tik (1) seka, kurios $F_1 = F_2 = 1,$ vadinama Fibonačio seka.

Fibonačio skaičiai pasirodo ir tokiame kombinatorikos uždavinyje: keliais skirtingais keliais iš viršūnės 1 galima patekti į viršūnę *n* judant tik rodyklių nurodytomis kryptimis? (1 pav.)



1 pav.

Atsakydami į šį klausimą matome, kad iš 1 į 2 viršūnę galima patekti vieninteliu būdu ($1 = F_2$), iš 1 į 3 viršūnę – dviem keliais ($2 = F_3$), iš 1 į 4 – trim būdais ($3 = F_4$), iš 1 į 5 – penkiais keliais ($5 = F_5$) ir t. t. Tęsdami skaičiavimą gauname, kad galimų kelių iš 1 viršūnės į *n* viršūnę skaičiai yra lygūs F_n.

Skaičių sekos, kurių kiekvienas narys (išskyrus kelis pradinius) apskaičiuojamas iš anksčiau gautų narių pagal tam tikrą formulę, matematikoje vadinamos *rekurenčiosiomis sekomis*.

Fibonačio skaičius galima aptikti ne tik matematikos šakose – skaičių teorijoje, kombinatorikoje, geometrijoje, lošimų teorijoje, bet ir fizikoje, informatikoje, taip pat įvairiuose gamtos reiškiniuose. Nuo 1963 metų JAV leidžiamas žurnalas „The Fibonacci Quarterly“, skirtas

Fibonačio sekų ir jų taikymo tyrimams. Šios sekos turi daug įdomių ir svarbių savybių. Kelias iš jų čia panagrinėsime.

1 savybė. Su bet kuriuo $n \geq 1$ galioja lygybė

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1. \tag{3}$$

Įrodymas. Iš (2) formulės turime, kad $F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$ $(n \geq 3)$. Čia vietoje n įrašę $3, 4, 5, \ldots, n+1, n+2$ gausime n lygybių

$$\begin{aligned}
F_1 &= F_3 - F_2 \,, \\
F_2 &= F_4 - F_3 \,, \\
F_3 &= F_5 - F_4 \,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n \,, \\
F_n &= F_{n+2} - F_{n+1} \,.
\end{aligned}$$

Jas sudėję gauname (3) lygybę. Savybė įrodyta.

Šis įrodymo metodas, pagrįstas tam tikrų lygybių sumavimu, gali būti taikomas ir kai kurių kitų Fibonačio sekų savybių įrodymui, pavyzdžiui, įrodyti lygybei

$$F_1^{\,2} + F_2^{\,2} + \cdots + F_n^{\,2} = F_n \cdot F_{n+1}. \tag{4}$$

Čia reikia panariui sudėti lygybes

$$F_k F_{k+1} - F_{k-1} F_k = F_k \left(F_{k+1} - F_{k-1}\right) = F_k^{\,2}$$

su $k = 1, 2, \ldots, n$.

Fibonačio sekų savybėms įrodyti taikomas ir kitas – *matematinės indukcijos metodas*. Šis metodas patogus įrodinėti teiginiams, priklausantiems nuo natūraliojo skaičiaus n – kai norima įrodyti, jog teiginys teisingas su visais natūraliaisiais skaičiais. Daugelis Fibonačio sekų savybių – kaip tik tokios.

Matematinės indukcijos metodas remiasi ***matematinės indukcijos principu***: *jeigu*

1. *teiginys teisingas su* $n = 1$ (indukcijos pagrindas),
2. *iš to, kad teiginys teisingas su bet kuriuo* $n = k$ (indukcijos prielaida)*, išplaukia jog jis teisingas ir su* $n = k + 1$ (indukcinis perėjimas),

tuomet teiginys teisingas su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi n.

Išsamiau su šiuo metodu ir jo taikymo pavyzdžiais galima susipažinti Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos leidiniuose [1,3]. Egzistuoja įvairios matematinės indukcijos metodo variacijos, tarp jų ir atvejis, kai indukcijos pagrindas toks: teiginys teisingas su $n=1$ ir $n=2$. Tuomet indukcijos prielaida – teiginys teisingas su $n=k$ ir su $n=k+1$, o indukcinis perėjimas – prie $n=k+2$. Vadovaujantis matematinės indukcijos principu tada galima teigti, kad teiginys teisingas su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi *n*. Šią matematinės indukcijos metodo modifikaciją ir taikysime įrodydami tolesnę Fibonačio sekos savybę.

Prisiminkime:

jeigu yra toks natūralusis skaičius *k*, jog $n=d\cdot k$, tai sakoma, kad *natūralusis skaičius n dalijasi iš natūraliojo skaičiaus d* arba *skaičius d dalija skaičių n,* arba *d* yra *skaičiaus n daliklis;*

skaičius *d* vadinamas skaičių *m* ir *n bendruoju dalikliu*, jei jis dalija *m* ir *n*;

jeigu skaičiai *m* ir *n* turi vienintelį bendrąjį daliklį, lygų 1, tai jie vadinami *tarpusavyje pirminiais skaičiais* (žymima (*m*,*n*)=1).

2 savybė. Koks bebūtų natūralusis $n>1$ su visais natūraliaisiais $m\geq 1$ galioja lygybė

$$F_{n+m}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}. \tag{5}$$

Įrodymas. Įrodysime, kad su bet kuriuo *n* (5) lygybė galioja su visais natūraliaisiais *m*.

Indukcijos pagrindas: (5) formulė, teisinga su $m=1$: $F_{n+1}=F_{n-1}F_1+F_nF_2=F_{n-1}+F_n$ (nes $F_1=F_2=1$) ir su $m=2$: $F_{n+2}=F_{n-1}F_2+F_nF_3=F_{n-1}+2F_n=F_{n+1}+F_n$.

Indukcijos prielaida: (5) formulė galioja su $m=k$, t. y. $F_{n+k}=F_{n-1}F_k+F_nF_{k+1}$ ir su $m=k+1$, t. y. $F_{n+k+1}=F_{n-1}F_{k+1}+F_nF_{k+2}$. Turime įrodyti (indukcinis perėjimas), kad (5) formulė galioja ir su $m=k+2$. Tuo tikslu panariui sudėkime ką tik gautas lygybes. Gausime, kad $F_{n+k+2}=F_{n-1}(F_k+F_{k+1})+F_n(F_{k+1}+F_{k+2})=$ $F_{n-1}F_{k+2}+F_nF_{k+3}$, ką ir reikėjo įrodyti. Taigi (5) formulė galioja su visais natūraliaisiais *m*. Savybė įrodyta.

Fibonačio skaičiai turi daug įdomių dalumo savybių

3 savybė. Fibonačio skaičius dalijasi iš 3 tik tuomet, kai jo numeris dalijasi iš 4.

Įrodymas. Tegu Fibonačio skaičiaus numeris *n* dalijasi iš 4, t. y. $n = 4k$. Matematinės indukcijos metodu (*k* atžvilgiu) įrodysime, kad atitinkamas Fibonačio skaičius F_n dalijasi iš 3.

Teiginys teisingas su $k = 1$, nes $F_4 = 3$.

Tarkime, kad teiginys teisingas su kuriuo nors *k*, t. y., kai $n = 4k$, tai F_{4k} dalijasi iš 3. Įrodysime, kad teiginys teisingas su $n = 4(k+1)$. Pasinaudosime (5) formule:

$$F_{4(k+1)} = F_{4k+4} = F_{4k-1}F_4 + F_{4k}F_5 = 3F_{4k-1} + 5F_{4k}.$$

Kadangi pastarosios sumos abu dėmenys dalijasi iš 3 (antrasis – pagal prielaidą), tai ir $F_{4(k+1)}$ dalijasi iš 3.

Taigi teiginys teisingas su bet kuriuo natūraliuoju *k*.

Savybės pilnam įrodymui dar turėtume įrodyti ir atvirkščią teiginį: jei Fibonačio skaičius F_n dalijasi iš 3, tai jo numeris *n* dalijasi iš 4. Tačiau šis įrodymas sudėtingesnis ir jo čia nepateiksime.

Kiekvienas Fibonačio skaičius randamas sudedant du prieš jį gautus skaičius – taip galima gauti Fibonačio skaičius su kiek norima dideliu numeriu. Tačiau taip skaičiuojant tenka rasti visus Fibonačio skaičius pradedant pirmaisiais. O ar galima iš karto rasti Fibonačio skaičių su norimu numeriu neieškant jų iš eilės? Į šį klausimą „atsako“ Binė (J. Binet – prancūzų matematikas ir astronomas, 1786-1856) formulė

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)\ ;\ \text{čia}$$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033989\ldots,\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}618033988\ldots. \quad (6)$$

Šios formulės įrodymą galima rasti knygoje [6].

Tačiau ir naudojantis Binė formule rasti Fibonačio skaičių su dideliu numeriu nėra paprasta – reikia mokėti apskaičiuoti pakankamai didelius dvinarių $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ laipsnius. Bet atkreipkime dėmesį, kad $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}618033988\ldots$ tenkina nelygybę $|\beta| < 1$ ir todėl β^n modulis mažėja didinant *n*. Vadinasi, Binė formulėje atmetę „labai mažą“ antrąjį narį β^n gausime apytikslę Fibonačio skaičiaus F_n reikšmę:

$$F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n. \qquad (7)$$

Kuo didesnis Fibonačio skaičiaus numeris, tuo ši formulė tikslesnė. Pavyzdžiui, pagal šią formulę gauname, kad

$$F_{15} \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{15} = 609{,}9996721\ldots \approx 610.$$

Fibonačio sekos – įdomi ir plati tema. Žinomos įvairios kitos jų savybės, Fibonačio skaičių sąsajos su binominiais koeficientais, su aukso pjūviu ir kt. Susidomėjusiems siūlome išsamiau išstudijuoti cituojamą literatūrą.

Literatūra

1. A. Apynis, E. Stankus**.** Indukcijos principas**.** *Jaunajam matematikui* 7, Vilnius: Danieliaus leidykla, 2006, 29-35.
2. G. Ifrah. Universalioji skaičių teorija. Vilnius: Žara, 2013.
3. D. Jurgaitis. Matematinės indukcijos metodas. *Jaunajam matematikui 2*, Vilnius: Danieliaus leidykla, 2001, 50-56.
4. G. Stepanauskas. Fibonačio skaičiai. Alfa plius omega, Nr.2(6), Lietuvos matematikos rinkinio priedas, 1998, 78-84.
5. P. Tannenbaumas, R. Arnoldas. Kelionės į šiuolaikinę matematiką. Vilnius: TEV, 1995.
6. Воробьов Н. Н., Числа Фибоначчи, Москва: Наука, 1978.

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Naudodamiesi formule $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}\ (n \geq 3)$, kai $u_1 = -1$, $u_2 = -4$, parašykite pirmuosius 15 sekos narių.

2. Įrodykite, kad su bet kuriuo natūraliuoju n galioja lygybė

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

3. Įrodykite, kad su bet kuriuo natūraliuoju n galioja lygybė

$$F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$$

4. Įrodykite, kad su bet kuriuo natūraliuoju n galioja lygybė

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2.$$

5. Matematinės indukcijos metodu įrodykite, kad su bet kuriuo natūraliuoju $n \geq 2$ galioja lygybė $F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n+1}$.

6. Matematinės indukcijos metodu įrodykite, kad su bet kuriuo natūraliuoju n galioja lygybė

$$F_1F_2 + F_2F_3 + F_3F_4 + \ldots + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2 .$$

7. Įrodykite teiginį: jei Fibonačio skaičiaus numeris dalijasi iš 5, tai ir pats Fibonačio skaičius dalijasi iš 5.

8. Įrodykite teiginį: jei Fibonačio skaičiaus numeris dalijasi iš 12, tai šis Fibonačio skaičius dalijasi iš 16.

9. Įrodykite, kad gretimi Fibonačio skaičiai yra tarpusavyje pirminiai, t. y. $(F_n, F_{n+1}) = 1$, kai $n \geq 2$.

10. Naudodamiesi formule $F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n$ apskaičiuokite F_{50}.

VI. ĮDOMIOJI LOGIKA

Livija Maliaukienė
(Lietuvos edukologijos universitetas)

Žodis „logika“ yra kilęs iš graikų kalbos žodžio „logos“, reiškiančio „išmintis“, „sąvoka“, „mokymas“. Logikos mokslo kūrėju laikomas senovės graikų filosofas Aristotelis (IV a. p. m. e.), o jo sukurta *formalioji logika* naudojama ir šiandien. Sunku pervertinti tą vaidmenį, kurį logika vaidina ne tik matematikoje, bet ir visur, kur reikalingas gebėjimas nuosekliai mąstyti, įrodyti teisingas ar paneigti klaidingas išvadas. Sąvoka „įrodymas“ dažniausiai siejamas su matematika. Taip yra todėl, kad matematinių įrodymų teisingumas grindžiamas ne bandymų ar stebėjimų rezultatais, o nuoseklia loginių samprotavimų seka, pradedama *aksiomomis*, t.y. pradiniais tvirtinimais, kurie laikomi *tapatingai* teisingais. Tačiau koks visuotinis nustebimas kilo paaiškėjus, kad pačioje matematikoje bei logikoje egzistuoja, atrodo, nepriekaištingi samprotavimai, kurių išvados vis tik viena kitai prieštarauja. Tokie samprotavimai vadinami *paradoksais* (graikiškai *para* – prieš ir *doxa* – nuomonė), ir šis žodis vartojamas kaip sinonimas bet kurio tvirtinimo, kuris taip prieštarauja įprastiniam mąstymo būdui ir intuicijai, kad negali nekelti nustabos. Paradoksais taip pat vadinami logiškai teisingi teiginiai, kurių išvadų negalima priskirti nei teisingoms, nei klaidingoms.

Vienas iš seniausių žinomų, minimų net Naujajame Testamente, apaštalo Pauliaus laiške Titui, paradoksų yra Epimenido (legendinio graikų poeto, gyvenusio VI a. pr. Kr. Kretos saloje) arba melagio paradoksas. Epimenidui priskiriamas tvirtinimas: „Visi Kretos salos gyventojai – melagiai“ (1).

Šis tvirtinimas logiškai prieštaringas, tariant, kad melagiai visuomet meluoja, o teisuoliai visuomet sako teisybę. Esant šiai prielaidai, (1) teiginys negali būti teisingas, nes tuomet ir Epimenidas būtų melagis, o jo teiginys – melas. Bet (1) negali būti ir klaidingas, nes tai reikštų, kad Kretos salos gyventojai sako tik teisybę, o tuomet ir Epimenido žodžiai – tiesa, bet iš (1) išplauktų, kad Epimenidas – melagis.

Egzistuoja daug melagio paradokso variantų:

a) užrašas ant sienos: „Nerašinėkite ant sienų!“;

b) užrašas: „Neskaitykite, kas čia parašyta!“;

c) viengungis skelbia, kad ves tik tą merginą, kuriai užteks proto netekėti už jo, ir pan.

Panašūs į paradoksą ir tokie tvirtinimai: „bet koks žinojimas abejotinas“ ar „vienintelė auksinė taisyklė yra ta, kad auksinių taisyklių nėra“ (Bernardas Šou).

Iš antikos laikų mus pasiekė dar vienas garsus paradoksas apie krokodilą, pagriebusį iš motinos rankų kūdikį.

Krokodilas. Ar aš suėsiu tavo kūdikį? Jei atsakymas bus teisingas, aš grąžinsiu jį tau sveiką ir nepaliestą.

Motina. O, vargas man! Tu suėsi mano kūdikį!

Krokodilas (sutrikęs). Jei atiduočiau tau kūdikį, tai tavo atsakymas būtų klaidingas ir aš galėčiau suėsti mažylį. Puiki idėja.

Motina. Bet jei tu suėstum mano kūdikį, tai mano atsakymas būtų teisingas, ir tu turėtum kūdikį grąžinti man.

Nelaimingas krokodilas taip susimąstė, kad netyčia paleido kūdikį. Motina jį pastvėrė, ir tiek jis juos tematė.

Krokodilas. Kaip gaila! Va, jei ji būtų pasakiusi, kad aš grąžinsiu kūdikį, aš būčiau turėjęs pietus!

Krokodilas atsidūrė prieš neišsprendžiamą dilemą: jis turi ir suėsti kūdikį, ir tuo pačiu metu grąžinti jį motinai.

Klasikiniai paradoksai turėjo didelę įtaką vystant logiką ir aibių teoriją. Ypač pažymėtini Bertrano Raselio (1872–1970) darbai. Jis 1902 m. suformulavo **barzdaskučio paradoksą.** *Barzdaskutys skuta tik tuos, kurie nesiskuta patys. Ar jis skutasi pats?*

Kaip buvo minėta, sprendžiant įvairius uždavinius tenka sudaryti (ilgesnę ar trumpesnę) subtilių samprotavimų grandinėlę. Panagrinėkime pavyzdį.

1 pavyzdys. Turistas ėjo ežero link. Priėjęs kryžkelę, pamatė du kelius, kurių vienas ėjo ežero link, o kitas – ne. Kryžkelėje sėdėjo du vaikinai. Vienas iš jų visada sakydavo tiesą, kitas visuomet meluodavo. Į bet kurį klausimą jie atsakydavo arba „taip“, arba „ne“. Visa tai turistui buvo žinoma, tik jis nežinojo, kuris iš jų melagis, o kuris teisuolis. Tada jis abiem pateikė tą patį klausimą. Koks tai buvo klausimas, jei turistas iš gautų atsakymų neklysdamas nustatė, kuris kelias eina ežero link?

Sprendimas. Turistas parodė į vieną kelią ir paklausė: „Ar tiesa, kad šis kelias eina ežero link ir kad dabar diena?“

I galimybė. Kelias, į kurį parodė turistas, eina ežero link. Teisuolis į klausimą, ar šis kelias eina link ežero, atsakytų „taip“, o į klausimą, ar tiesa, kad dabar diena, – taip pat „taip“, ir todėl į visą klausimą atsakys „taip“. Melagis į pirmąją klausimo dalį atsakytų „ne“, taip pat „ne“ atsakytų ir į antrąją dalį, vadinasi, į visą klausimą atsakys „ne“.

II galimybė. Kelias, kurį parodė turistas, neina ežero link. Teisuolis į pirmąją klausimo dalį atsakytų „ne“, o į antrąją – „taip“. Vadinasi, į visą klausimą atsakys „ne“. Melagis į pirmąją klausimo dalį atsakytų „taip“, o į antrąją – „ne“, todėl atsakymas į klausimą bus „ne“.

Išvada. Jei abu atsakymai – „ne“, tai parodytas kelias neina ežero link. Jei vienas atsakymas – „taip“, o kitas – „ne“, tai parodytas kelias veda ežero link.

Žinoma, turistas galėjo ir kitaip paklausti, tačiau sudėtinė klausimo dalis negali būti „ar tu sakai tiesą?“

Sprendžiant kai kuriuos uždavinius, pravartu susidaryti duomenų lentelę, kuri padėtų pašalinti negalimas prielaidas.

2 pavyzdys. Parodoje susitiko trys draugai: skulptorius Baltaitis, smuikininkas Juodviršis ir dailininkas Rudokas. „Įdomu, kad vieno iš mūsų balti, vieno juodi ir vieno rudi plaukai, bet nė vienas iš mūsų neturime tokios spalvos plaukų, kurią rodo pavardė,” – pastebėjo juodaplaukis. „Tu teisus“, – pasakė Baltaitis. Kokios spalvos dailininko plaukai?

Sprendimas. a) Sudarome duomenų lentelę. Kadangi kiekvienas iš draugų negali turėti tokios spalvos plaukų kaip jo pavardė, tai išbraukiame lentelės įstrižainės langelius.

Plaukų spalva / Pavardė	balta	juoda	ruda
Baltaitis			
Juodviršis			
Rudokas			

b) Skulptorius Baltaitis negali būti juodaplaukis, nes jis atsakė juodaplaukiui. Todėl lentelėje išbraukiame langelį Bj. Pirmoje eilutėje lieka vienintelis langelis Br, taigi Baltaitis yra rudaplaukis.

	b	j	r
B			O
J			
R			

c) Kadangi rudaplaukis – Baltaitis, tai toks negali būti Juodviršis; todėl išbraukiame langelį Jr. Antroje eilutėje lieka vienintelis langelis Jb, taigi Juodviršis yra baltaplaukis.

	b	j	r
B			O
J	O		
R			

d) Rudokas negali būti baltaplaukis, nes baltaplaukis – Juodviršis, todėl išbraukiame langelį Rb. Trečioje eilutėje lieka vienintelis langelis Rj. Vadinai, dailininkas Rudokas – juodaplaukis.

	b	j	r
B			O
J	O		
R		O	

Norint išspręsti kai kuriuos uždavinius, reikia žinoti tokio tipo uždavinių sprendimo *algoritmą* (algorithmi – lotyniška IX a. mokslininko al – Chorezmi pavardės forma).

Pakalbėkime, pavyzdžiui, apie skaičių 9, turintį nemažai mįslingų savybių. Ar žinote, kad jis, be kita ko, yra nematoma kiekvienos garsenybės gimimo datos sudėtinė dalis? Pavyzdžiui, Lietuvos patriarchas Jonas Basanavičius gimė 1851 m. lapkričio 23 d. Jo gimimo datą užrašykime vienu skaičiumi: 18511123. Bet kaip perstatykime skaitmenis ir iš didesniojo atimkime mažesnįjį. Sudėję visus skirtumo skaitmenis, gausime 36, o 3 plius 6 yra 9! Pritaikę tą patį algoritmą Antano Baranausko (18350117), Jono Kubiliaus (19210727) ar bet kurios kitos įžymybės gimimo datai, irgi gautume 9. Ar devintukas paslėptas ir jūsų gimimo datoje?

Dabar pasiaiškinkime šio fenomeno priežastis. Sudėkime bet kokio skaičiaus skaitmenis, po to – gautos sumos skaitmenis ir tęskime šią operaciją, kol gautoji suma taps vienaženkliu skaičiumi. Šį skaičių vadinsime *skaitine šaknimi*. Bet kokio skaičiaus skaitinė šaknis lygi šio skaičiaus liekanai, gaunamai dalijant jį iš 9 (patikrinkite). Matematikas pasakytų, kad pradinis skaičius lygsta skaitinei šakniai moduliu 9. (2)

Matematika, kaip ir kitos mokslo sritys, nagrinėja įvairius teiginius. *Teiginių logika* analizuoja tik tokius teiginius, kurie yra arba teisingi, arba klaidingi, bet negali būti kartu teisingi ir klaidingi. Pavyzdžiui, teiginys „16 dalijasi iš 8“ yra teisingas teiginys, o „$\cos x > 2$“ yra klaidingas teiginys.

Teiginiai tarpusavyje gali būti jungiami loginėmis jungtimis: & (skaitoma „ir“), $\vee$ („arba“), $\supset$ („jei, tai“), $\neg$ („ne“), ~ („ekvivalentu“). Naudojant logines jungtis iš elementarių teiginių, sudaromi sudėtiniai teiginiai, kurių teisingumas gali būti nustatomas remiantis juos sudarančių teiginių bei loginių jungčių teisingumo reikšmėmis (žr. 1 lentelę, kurioje *t* reiškia teisingą teiginį, *n* – klaidingą).

1 lentelė

A	B	A&B	$A \vee B$	$A \supset B$	A~B	$\neg A$
t	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*	*n*
t	*n*	*n*	*t*	*n*	*n*	*n*
n	*t*	*n*	*t*	*t*	*n*	*t*
n	*n*	*n*	*n*	*t*	*t*	*t*

Matome, kad dviejų elementarių teiginių A ir B *konjunkcija* A&B teisinga tik tuomet, kai abu teiginiai yra teisingi, *disjunkcija* $A \vee B$ teisinga visuomet, išskyrus atvejį, kai abu teiginiai yra klaidingi, *implikacija* $A \supset B$ klaidinga tik tuomet, kai iš teisingos prielaidos A išplaukia klaidinga išvada B, *ekvivalentumas* A~B teisingas, kai abu teiginiai turi tą pačią reikšmę, *neigimo* $\neg A$ reikšmės yra priešingos teiginio A reikšmėms.

Jei sudėtinis teiginys teisingas su visomis jį sudarančių teiginių reikšmėmis, tai sakome, kad jis vadinamas *tapatingai teisingu* arba *tautologija*. *Tapatingai klaidingi* teiginiai vadinami *prieštaromis*. Teiginiai, kurie nėra nei tautologijos, nei prieštaros, vadinami *išpildomais.*

Pavyzdžiui, $(A \supset B) \sim (\neg(A \& \neg B))$ – tautologija, $A \& \neg A$ – prieštara, $A \supset (B \supset C)$ – išpildomas teiginys (patikrinkite).

3 pavyzdys. Pasitelkę teiginių logiką, išspręskime tokį uždavinį. Trys įmonės cechai (I, II ir III) yra susitarę dėl projektų tvirtinimo tvarkos:

1) jei II cechas nedalyvauja tvirtinant projektą, tai nedalyvauja ir I cechas;

2) jei II cechas dalyvauja tvirtinant projektą, tai kartu dalyvauja I ir III cechai.

Ar privalo, esant šioms sąlygoms, III cechas dalyvauti tvirtinant projektą, jei projektą tvirtina I cechas?

Sprendimas. Teiginį „I cechas dalyvauja projekto tvirtinime“ pažymėsime raide A, o analogiškus teiginius apie II ir III cechus – atitinkamai raidėmis B ir C. Tuomet uždavinių sąlygas galima užrašyti taip:

1) $\neg B \supset \neg A$,

2) $B \supset (A\&C)$.

Šie du sudėtiniai teiginiai turi būti tapatingai teisingi, nes laikomasi sutarties sąlygų. Mums reikia atsakyti į klausimą, ar tuomet ir $A \supset C$ bus tautologija. Sudarykime lentelę:

A	B	C	$\neg B$	$\neg A$	A&C	$\neg B \supset \neg A$	$B \supset A\&C$	$A \supset C$
t	***t***	***t***	*n*	*n*	*t*	***t***	***t***	***t***
t	*t*	*n*	*n*	*n*	*n*	*t*	*n*	*n*
t	*n*	*t*	*t*	*n*	*t*	*n*	*t*	*t*
n	*t*	*t*	*n*	*t*	*n*	*t*	*n*	*t*
t	*n*	*n*	*t*	*n*	*n*	*n*	*t*	*n*
n	*t*	*n*	*n*	*t*	*n*	*t*	*n*	*t*
n	***n***	***t***	*t*	*t*	*n*	***t***	***t***	***t***
n	***n***	***n***	*t*	*t*	*n*	***t***	***t***	***t***

Iš lentelės matome, kad abi 1) ir 2) formulės kartu bus teisingos, tik imant išskirtas teiginių A, B, C reikšmes. Šioms reikšmėms $A \supset C$ įgyja tik reikšmę t, todėl galime daryti išvadą, kad jei 1), 2) yra teisingi teiginiai, tai ir $A \supset C$ – teisingas, t.y. esant nurodytoms sąlygoms, jei projektą tvirtina I cechas, tai turi dalyvauti ir III.

Panagrinėkime teiginį „Egzistuoja už kiekvieną nelyginį skaičių didesnis nelyginis skaičius“ (3). Pabandykime jį užrašyti teiginių logikos pagalba. Tegu

A: „a – bet koks nelyginis skaičius“,

B: „egzistuoja nelyginis skaičius b“,
C: „a mažesnis už b“,
Tuomet (3) teiginį galima užrašyti taip:
$A \supset (B \& C)$. (4)

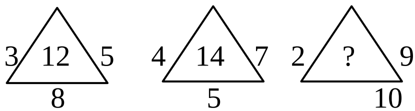
Nors (3) teiginys yra teisingas, tačiau (4) teiginys nėra tautologija. Tuo galima įsitikinti iš (4) teiginio teisingumo reikšmių lentelės (išanalizuokime savarankiškai). Kodėl taip atsitiko? Todėl, kad (3) teiginio teisingumui įrodyti nepakanka teiginių logikos, nes ji nenagrinėja teiginių struktūros. Tam reikia papildomų sąvokų, tokių kaip kvantoriai, priedikatai, termai. Dažniausiai naudojami du kvantoriai: bendrumo kvantorius $\forall$ (skaitoma „visiems“, „kiekvienam“) ir egzistencijos kvantorius $\exists$ („egzistuoja“). Papildę šiomis sąvokomis bei atitinkamomis aksiomomis teiginių logiką, gauname predikatų logiką, kuri nagrinėjama aukštųjų mokyklų matematinės logikos kurse.

Norintiems plačiau susipažinti su matematine logika, rekomenduojame paskaityti šią knygelę: R. Pliuškevičius. *Susipažinkime su matematine logika*. Vilnius, 1983.

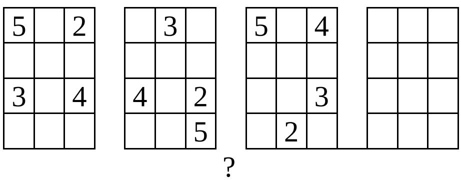
ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Nustatykite dėsningumą ir, juo remdamiesi, į klaustuku pažymėtas vietas įrašykite: a) skaičių; b) skaičius 2, 3, 4, 5 atitinkamuose langeliuose.

a)



b)



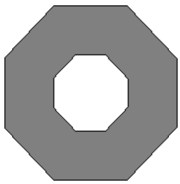
2. Kaip sustatyti prie kambario sienų:
a) 3 kėdes, kad prie kiekvienos sienos būtų po kėdę?
b) 4 kėdes, kad prie kiekvienos sienos stovėtų po dvi kėdes?
c) 7 kėdes, kad prie kiekvienos sienos jų būtų po lygiai?

3. Turtuolis surinko 11 senų prabangių automobilių kolekciją, kurią testamentu paliko trims sūnums, nurodęs pasidalyti jas taip: pusę automobilių turi gauti vyriausias sūnus, ketvirtį vidurinysis ir vieną šeštąją – jauniausias. Kaip broliams pasidalyti automobilius?

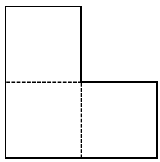
4. Sudarykite:

a) iš taisyklingo aštuonkampio su taisyklinga aštuonkampe skyle (1 pav.), padalijęs jį į 8 lygias dalis – aštuonkampę žvaigždę su taisyklinga aštuonkampe skyle.

b) iš 2 paveikslėlyje pavaizduotos figūros (sudarytos iš 3 lygių kvadratų), dalydami ją į dvi dalis –kvadratą su anga, lygia vienam duotosios figūros kvadratui.



1 pav.



2 pav.

5. Teisme apklausiami trys žmonės, iš kurių kiekvienas yra arba čiabuvis, arba kolonistas. Čiabuviai visada teisingai atsako į klausimus, o kolonistai visada meluoja. Teisėjas klausia pirmojo, bet nesupranta jo atsakymo. Todėl jis teiraujasi antrojo, po to – trečiojo apie tai, ką pasakė pirmasis. Antrasis sako, kad pirmasis prisipažinęs esąs čiabuvis. Trečiasis teigia, kad pirmasis prisistatęs kolonistu. Kas buvo antrasis ir trečiasis liudytojai?

6. Paprašykite kurį nors savo draugą, jums nematant, užrašyti piniginės kupiūros numerį (ar bet kokį daugiaženklį skaičių), po to bet kaip perdėlioti skaičius ir iš didesniojo atimti mažesnįjį, paskui paprašykite išbraukti bet kurį gautojo skirtumo skaitmenį, nelygų nuliui, o likusius bet kuria tvarka pasakyti jums. Jūs lengvai atspėsite užbrauktą skaitmenį. (Jums lieka tik išsiaiškinti, kaip jūs tai padarysite.)

7. Penki draugai turi po vieną sūnų. Kiekvienas sūnus pasiskolino po knygą iš vieno savo tėvo draugų. Visų šių draugų pavardės panašios į profesijų pavadinimus, bet nė vieno iš jų pavardė neprimena jo paties profesijos. Kalvio sūnus paėmė Kalvelio knygą; jo pavardė primena Kalvelio sūnaus profesiją, taip pat jis bendrapavardis su tuo, kieno knygą paėmė Kalvelio sūnus. Žinoma, jog dailidės pavardė ne Puodžiūnas ir kad dailidė paėmė knygą iš Šikšniaus. Kokia stikliaus pavardė? (Pagal seną tradiciją sūnus paveldi savo tėvo profesiją.)

8. Vienoje saloje veikė toks įstatymas: kiekvieną, einantį tiltu į salą, teisėjai klausdavo, kur ir ko jis eina. Tuos, kurie pasakydavo tiesą, teisėjai praleisdavo, o tuos, kurie sumeluodavo, siųsdavo į kartuves. Kartą vienas keliauninkas prisiekė, jog eina tam, kad jį pakartų. Teisėjai sutriko. Kodėl?

9. Nustatykite, ar teiginys

$$[(A \& B) \supset C] \sim [\neg(A \supset B) \& (C \vee \neg B)]$$

yra tautologija, ar prieštara, ar išpildomas.

10. Geležinkelio stotyje nustatyta tokia tvarka: jeigu iš stoties išvažiuoja traukiniai A ir B, tai turi išvykti ir traukinys C. Jei išvyksta traukiniai B ir C, tai išvyksta ir traukinys A. Nustatykite, ar esant šiai tvarkai, galimas atvejis, kai, išvykstant traukiniams A ir C, traukinys B neišvyksta? Spręsdami uždavinį, pasinaudokite teiginių logika.

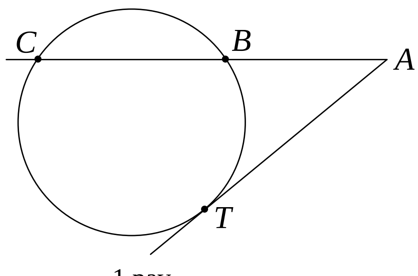
VII. PLOKŠTUMOS FIGŪRŲ KOMBINACIJOS

Edmundas Mazėtis
(Lietuvos edukologijos universitetas)

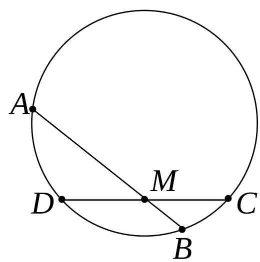
Dažnai tenka spręsti geometrijos uždavinius, kuriuose nagrinėjama ne kuri nors viena, o įvairios tarpusavyje susijusios geometrinės figūros. Tokie uždaviniai paprastai nebūna lengvi, nes nėra kažkokio bendro metodo, padedančio juos išspręsti. Kiekvienas iš Jums žinomų ir matematikos pamokose nagrinėtų metodų paprastai tarnauja tam, kad uždavinį suvestume į kitą uždavinį, sprendžiamą kitokiais metodais. Atlikdami šitą užduotį, Jūs nagrinėsite žinomas geometrines figūras (tieses, atkarpas, trikampius, keturkampius, apskritimus, skritulius), todėl turėsime prisiminti įvairias pamokose išmoktas šių figūrų savybes ir kūrybiškai jas pritaikyti.

Be visiems žinomų geometrijos faktų šioje užduotyje teks naudoti ir mažiau girdėtas ar apskritai pamokose nenagrinėtas geometrijos teoremas. Keletą svarbiausių čia pateikiame.

1. Jei taškas *A* yra apskritimo išorėje, tiesė, einanti per tašką *A*, kerta apskritimą taškuose *B* ir *C*, tai teisinga lygybė $AB \cdot AC = AT^2$, čia taškas *T* yra iš taško *A* nubrėžtos apskritimo liestinės ir apskritimo lietimosi taškas (1 pav.). Jei taškas *M* yra apskritimo viduje, o per jį eina dvi apskritimo stygos *AB* ir *CD*, tai $AM \cdot MB = CM \cdot MD$ (2 pav.).

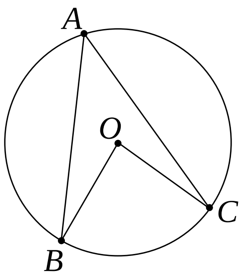


1 pav.

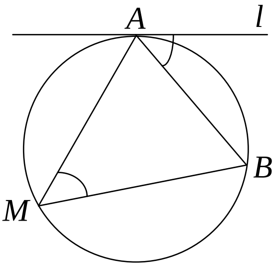


2 pav.

2. Kampas, kurio viršūnė yra apskritimo taškas, o kraštinės tą apskritimą kerta, vadinamas *įbrėžtiniu*. Jei taškas *O* yra apskritimo centras, taškai *A*, *B* ir *C* yra apskritimo taškai, tai $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$ (3 pav.).



3 pav.



4 pav.

Be to, visi įbrėžtiniai kampai, kurių kraštinės eina per du dotuosius apskritimo taškus *B* ir *C*, o viršūnės yra vienoje tiesės *BC* pusėje, yra lygūs. Atskiru atveju, jei taškai *B* ir *C* yra skersmens galai, tai bet kuriam apskritimo taškui *A* kampas *BAC* yra statusis.

3. Jei tiesė *l* taške *A* liečia apskritimą, o atkarpa *AB* yra apskritimo styga, tai kampas tarp liestinės *l* ir stygos *AB* lygus įbrėžtiniam kampui, kurio kraštinės eina per taškus *A* ir *B* (4 pav.).

4. Keturkampio visos viršūnės yra apskritimo taškai tik tada, kai jo priešingųjų kampų suma lygi 180°. Toks keturkampis vadinamas *įbrėžtiniu*.

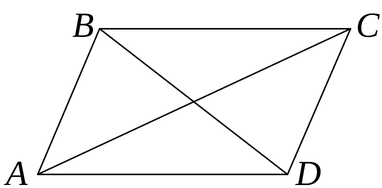
5. Skritulio, kurio spindulys *R*, plotas lygus πR^2, skritulio išpjovos, kurios centrinis kampas lygus α°, plotas lygus $\dfrac{\pi R^2\alpha}{360}$.

6. Jei apskritimai, kurių centrai yra taškai O_1 ir O_2, o spindulių ilgiai R_1 ir R_2, liečiasi taške *A*, tai taškai O_1, *A* ir O_2 yra vienoje tiesėje ir $O_1O_2 = R_1 + R_2$, jei apskritimai liečiasi išoriškai, arba $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$, jei apskritimai liečiasi iš vidaus.

1 pavyzdys. Įrodysime, kad lygiagretainio kraštinių kvadratų suma lygi jo įstrižainių kvadratų sumai (5 pav.). Trikampiams *ABC* ir *ABD* pritaikę kosinusų teoremą, turime

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cdot\cos\angle B,$$

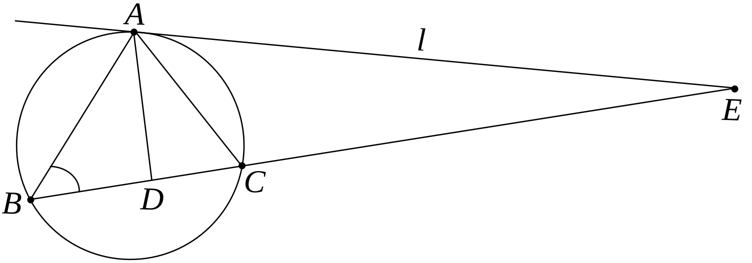
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB\cdot AD\cdot\cos\angle A.$$



5 pav.

Kadangi $\angle A + \angle B = 180^\circ$, t. y. $\cos \angle B = -\cos \angle A$, o $AD = BC$, tai sudėję gautąsias lygybes matome, kad $AC^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2BC^2$, ką ir reikėjo įrodyti.

2 pavyzdys. Apie trikampį *ABC* apibrėžtas apskritimas, tiesė *l* yra to apskritimo liestinė taške *A* ir kerta tiesę *BC* taške *E*. Įrodysime, kad $AE = ED$, čia atkarpa *AD* yra trikampio *ABC* pusiaukampinė.



6 pav.

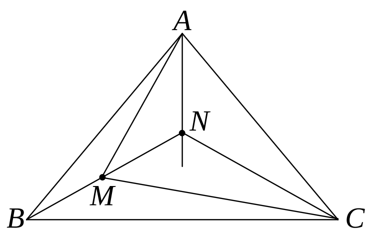
Sakykime, kad taškas *E* yra spindulyje *BC* (6 pav.); kai taškas *E* yra spindulyje *CB* nagrinėjimas analogiškas (įsitikinkite tuo patys). Kadangi tiesė *AE* yra apskritimo liestinė, o atkarpa *AC* – kirstinė, tai $\angle EAC = \angle CBA$. Be to, $\angle ADE = \angle ABC + \angle BAD$, nes kampas *ADE* – trikampio *ABD* priekampis. Kadangi *AD* – kampo *BAC* pusiaukampinė, tai $\angle ADE = \angle ABC + \angle BAD = \angle ABC + \angle CAD = \angle EAC + \angle CAD =$ $= \angle EAD$. taigi trikampis *AED* – lygiašonis ir $AE = ED$.

3 pavyzdys. Lygiašonio trikampio *ABC* $(AB = AC)$ kampas *A* lygus 80°. Trikampio viduje yra taškas *M* toks, kad $\angle MBC = 30^\circ$, $\angle MCB = 10^\circ$. Rasime kampą *AMC*.

Sakykime, kad kampo *A* pusiaukampinė tiesę *BM* kerta taške *N* (7 pav.). Iš trikampių *ANB* ir *ANC* lygumo seka, kad

$$BN = CN\,,\ \angle ANB = \angle ANC,$$

$\angle ABN = \angle ACN$ ir $\angle NBC = \angle NCB$. Kadangi



7 pav.

$\angle BNC = 180^\circ - 2\angle NBC = 120^\circ$, tai ir $\angle ANB = \angle ANC = 120^\circ$. Tuomet

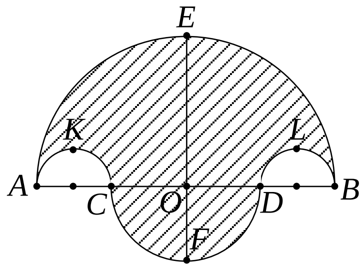
$$\angle NCA = 180^\circ - \angle ANC - \frac{1}{2}\angle A = 20^\circ,$$

o $\quad \angle NCM = \angle NCB - \angle MCB = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ.$

Taigi $\angle NCA = \angle NCM$, todėl $\Delta NBC = \Delta NCA$ (jų kraštinė *NC* bendra, o prie jos esantys kampai lygūs 20° ir 40°). Iš trikampių lygumo turime, kad $MC = AC$, trikampis *AMC*– lygiašonis ir

$$\angle AMC = \frac{1}{2}(180^\circ - \frac{1}{2}\angle A) = 70^\circ.$$

4 pavyzdys. 8 paveiksle nubrėžti keturi pusapskritimiai *AEB, AKC, CFD* ir *DLB,* be to, $AC = DB$. Įrodysime, kad subrūkšniuotos figūros plotas lygus skritulio, kurio skersmuo – atkarpa *EF*, plotui.



8 pav.

Sakykime, kad taškas *O* yra atkarpos *AB* vidurio taškas ir pažymėkime

$$OE = OA = OB = R, \quad AC = DB = a.$$

Tuomet

$$OF = OC = OD = R - a.$$

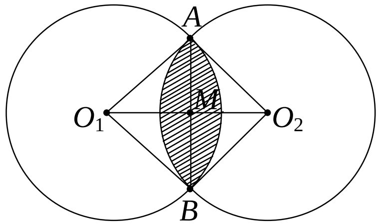
Ieškomasis plotas *S* gaunamas iš pusskritulių *AEB* ir *CFD* plotų sumos atėmus pusskritulių *AKC* ir *DLB* plotų sumą (t. y. skritulio, kurio skersmuo *AC*, plotą). Todėl

$$S = \frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi (R-a)^2}{2} - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \pi\left(R^2 - Ra + \frac{a^2}{4}\right) = \pi\left(R - \frac{a}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi}{4}(OE + OF) = \pi \cdot \left(\frac{EF}{2}\right)^2,$$

ką ir reikėjo įrodyti.

5 pavyzdys. Plokštumos dalis, kurią riboja du skirtingų apskritimų lankai, kartais vadinama „mėnuliu“. 9 paveiksle. pavaizduotas „mėnulis“, kurį riboja apskritimų su centrais O_1 ir O_2, besikertančių taškuose *A* ir *B*, lankai. Rasime šio „mėnulio“ plotą, jei apskritimų spindulių ilgiai lygūs 1, o atstumas tarp jų centrų $O_1O_2 = \sqrt{3}$.



9 pav.

Kadangi apskritimų spinduliai yra lygūs, tai keturkampis AO_1BO_2 yra rombas, jo įstrižainės O_1O_2 ir AB yra statmenos, jų susikirtimo taškas M yra atkarpos O_1O_2 vidurys. Iš čia seka, kad ieškomasis plotas lygus dvigubam skritulio nuopjovos, kurios pagrindas AB, plotui. Kadangi stačiajame trikampyje AO_1M statinis $O_1M = \frac{1}{2}O_1O_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, o įžambinė $O_1A = 1$, tai $\sin\angle AO_1M = \frac{\sqrt{3}}{2}$, t. y. $\angle AO_1M = 30^\circ$, o $\angle BO_1A = 60^\circ$. Minėtos nuopjovos plotas lygus skritulio išpjovos AO_1B ir trikampio AO_1B plotų skirtumui. Kadangi išpjovos AO_1B centrinis kampas lygus 60°, tai jos plotas

$$S_1 = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 60}{360} = \frac{\pi}{6}.$$

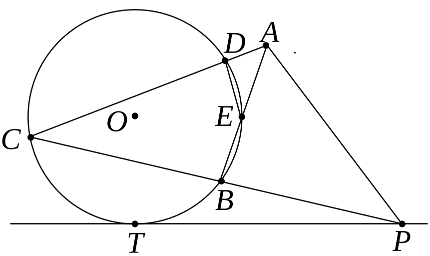
Trikampio AO_1B plotas

$$S_2 = \frac{1}{2}O_1A^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Taigi ieškomasis plotas

$$S = 2(S_1 - S_2) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6 pavyzdys. Taškas A yra apskritimo išorėje, taškas P yra toks, kad per jį išvestos apskritimo liestinės atkarpa PT iki lietimosi taško T lygi atkarpai PA. Taškas C yra bet kuris apskritimo taškas, atkarpos AC ir PC kerta apskritimą atitinkamai taškuose D ir B, o atkarpa AB –



10 pav.

taške E. Įrodysime, kad tiesės ED ir AP lygiagrečios. (10 pav.

Pagal apskritimo liestinių ir kirstinių savybę teisinga lygybė

$$PB \cdot PC = TP^2, \text{ t. y. } \frac{PC}{PT} = \frac{PT}{PB}.$$

Kadangi $PT = AP$, tai $\frac{PC}{AP} = \frac{AP}{PB}$. Trikampiai APC ir BPA turi bendrą kampą $\angle APC$, o prie to kampo esančios jų kraštinės proporcingos. Taigi šie trikampiai panašieji, todėl $\angle BAP = \angle ACP$. Kadangi keturkampis $DEBC$ yra įbrėžtas į apskritimą, tai $\angle DEB = 180^\circ - \angle ACP$. kita vertus $\angle DEB = 180^\circ - \angle AED$. iš čia išplaukia, kad $\angle ACP = \angle AED$. Taigi $\angle BAP = \angle ACP = \angle AED$, todėl tiesės DE ir AP yra lygiagrečios.

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1. Į 60° kampą įbrėžti penki apskritimai taip, kad kiekvienas jų pradedant antruoju liečia prieš jį esantį. Kiek kartų visų penkių apskritimų ribojamų skritulių plotų suma didesnė už mažiausiojo skritulio plotą?

2. Tiesė l yra apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo liestinė taške B. Tiesės AC ir l kertasi taške M. Raskite santykį $AM : MC$, jei $AB : BC = k$.

3. Du apskritimai liečia vienas kitą vidiniu būdu taške A. Iš didesniojo apskritimo centro O nubrėžtas jo spindulys OB, liečiantis mažesnįjį apskritimą taške C. Raskite kampą BAC.

4. Į trikampį ABC įbrėžtas lygiagretainis, kurio kraštinių ilgiai 3 ir 5, o vienos įstrižainės ilgis 6. Lygiagretainio įstrižainės lygiagrečios su trikampio kraštinėmis AB ir AC, o trumpesnioji lygiagretainio kraštinė yra trikampio kraštinėje BC. Raskite trikampio ABC kraštinių ilgius.

5. Trikampis ABC – lygiašonis, $AB = AC$, $\angle A = 80^\circ$. Trikampio išorėje yra taškas P toks, kad $\angle PBC = \angle PCA = 30^\circ$, o taškai B ir P yra skirtingose tiesės AC pusėse. Raskite kampą PAC.

Nurodymas. Apie trikampį APC apibrėžkite apskritimą ir pasinaudokite 4 pavyzdžiu.

6. Stačiakampio $ABCD$ kraštinių ilgiai $AB = 2$, $BC = 4$. Nubrėžtas pusskritulis, esantis stačiakampio išorėje, kurio skersmuo yra atkarpa BC. Taip pat nubrėžti apskritimų, kurių centrai – taškai A ir D, o spinduliai lygūs 2, ketvirčiai, einantys per atkarpos AD vidurio tašką M ir atitinkamai per taškus B ir C. Raskite šių trijų lankų ribojamos plokštumos dalies plotą.

7. Apie kvadratą, kurio kraštinė lygi 1, apibrėžtas apskritimas. Taip pat nubrėžti keturi pusapskritimiai, esantys kvadrato išorėje, kurių skersmenys yra kvadrato kraštinės. Raskite susidariusių keturių „mėnulių“ plotų sumą.

8. Trikampio ABC aukštinės kertasi taške H, apibrėžto apie trikampį apskritimo skersmuo lygus 20, o kraštinės BC ilgis 16. Raskite atkarpos AH ilgį.

9. Taškas A yra apskritimo viduje. Taškas P yra toks, kad per jį išvesta apskritimo liestinės atkarpa PT iki lietimosi taško T lygi atkarpai PA. Taškas C yra bet kuris apskritimo taškas, atkarpos AC ir PC kerta apskritimą taškuose D ir B, o atkarpa AB – taške E. Įrodykite, kad tiesės ED ir AP yra lygiagrečios.

10. Trapecijos $ABCD$ pagrindai $AD = 4$, $BC = 3$, šoninė kraštinė AB yra statmena pagrindams. Apskritimas, einantis per taškus C ir D, liečia atkarpą AB taške E. Raskite taško E atstumą nuo tiesės CD.

VIII. LYGČIŲ IR NELYGYBIŲ SPRENDIMAS TAIKANT FUNKCIJŲ SAVYBES

Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Lietuvos edukologijos universitetas)

Ši užduotis skirta lygčių ir nelygybių sprendimui taikant funkcijų savybes. Daugiausia dėmesio skirta iracionaliųjų lygčių ir nelygybių sprendimui. Apsiribota tik tokių lygčių ir nelygybių nagrinėjimu, kurių tradicinis sprendimas yra daug sudėtingesnis.

Susipažinę su metodine medžiaga ir išnagrinėję pateiktų lygčių ir nelygybių sprendimus, jūs sėkmingai atliksite šią užduotį.

1. Lygčių (nelygybių) apibrėžimo sritis. Lygties $f(x)=g(x)$ (nelygybės $f(x)\underset{\le}{\ge}g(x)$) *apibrėžimo sritimi* vadinama nežinomojo *x* reikšmių, priklausančių funkcijų *f* ir *g* apibrėžimo sričių bendrajai daliai, aibė.

Lygtys (nelygybės), kuriose nežinomasis *x* yra po šaknies ženklu, vadinamos *iracionaliosiomis* lygtimis (nelygybėmis).

Toliau lygties apibrėžimo sritį žymėsime $D(L)$, o nelygybės – $D(N)$.

Kartais sprendžiant lygtį (nelygybę) užtenka rasti tik jos apibrėžimo sritį.

1 pavyzdys. Išspręskime lygtis:

a) $\sqrt{x^2-5x+6}=\sqrt[4]{9x-10-2x^2}$;

b) $\sqrt{x^2-5x+6}+1=\sqrt{9x-10-2x^2}$.

Sprendimas. a) Lygties apibrėžimo sritį $D(L)$ rasime išsprendę nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} x^2-5x+6\ge 0, \\ 9x-10-2x^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3)\ge 0, \\ (x-2)\left(x-\dfrac{5}{2}\right)\le 0. \end{cases}$$

Sistemos pirmos nelygybės sprendinių aibė yra $(-\infty;2]\bigcup[3;+\infty)$, o antrosios – intervalas – [2; 2,5]. Jų bendroji dalis $D(L)=\{2\}$.

Nesunku įsitikinti, kad $x = 2$ yra lygties sprendinys.

Ats.: 2.

b) Kadangi $D(L) = \{2\}$, o $x = 2$ nėra lygties sprendinys, tai lygtis sprendinių neturi.

Ats.: $\varnothing$.

2 pavyzdys. Išspręskime nelygybes:

a) $\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{x - 3} > \sqrt{x + 3} - \sqrt{2x + 1}$;

b) $\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{x - 3} \le \sqrt{x + 3} - \sqrt{2x + 1}$.

Sprendimas. a) Nelygybės apibrėžimo sritį $D(N)$ rasime išsprendę nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} 9 - x^2 \ge 0, \\ x - 3 \ge 0, \\ x + 3 \ge 0, \\ 2x + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+3) \le 0, \\ x \ge 3, \\ x \ge -3, \\ x \ge -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Nelygybės apibrėžimo sritis $D(N) = \{3\}$. Kai $x = 3$, kairioji nelygybės pusė lygi 0, o dešinioji $\sqrt{6} - \sqrt{7} < 0$. Taigi $x = 3$ tenkina nelygybę ir yra nelygybės sprendinys.

Ats.: 3.

b) Nelygybės apibrėžimo sritis $D(N) = \{3\}$. Kai $x = 3$, kairioji nelygybės pusė lygi 0, o dešinioji $\sqrt{6} - \sqrt{7} < 0$. Taigi $x = 3$ nėra nelygybės sprendinys. Vadinasi, nelygybė sprendinių neturi.

Ats.: $\varnothing$.

2. Funkcijų monotoniškumas. Funkcija $f:\ (a; b) \to R$ vadinama *didėjančia* (*mažėjančia*) intervale (a; b), jeigu su bet kuriais intervalo taškais x_1 ir x_2, $x_1 < x_2$, galioja nelygybė

$$f(x_1) < f(x_2) \ \ (f(x_1) > f(x_2)).$$

Pastaba. Intervalas, kuriame funkcija yra didėjanti (mažėjanti) nebūtinai atviras.

Didėjančios ir mažėjančios funkcijos vadinamos *monotoninėmis*.

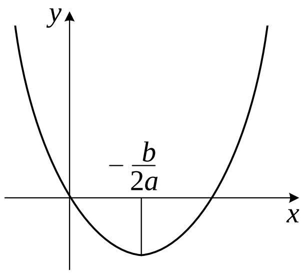
Pavyzdžiui, funkcija $f(x)=ax=b,\ \ a,b\in R,$ yra didėjanti intervale $(-\infty;+\infty)$, kai $a>0,$ ir mažėjanti intervale $(-\infty;+\infty)$, kai $a<0,$ nes

$$f(x_1)-f(x_2)=ax_1+b-(ax_2+b)=a(x_1-x_2)<0,$$

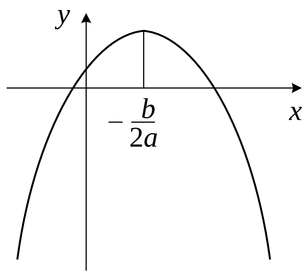
kai $x_1<x_2$ ir $a>0$;

$$f(x_1)-f(x_2)>0,\ \text{kai}\ x_1<x_2\ \text{ir}\ a<0.$$

Kvadratinis trinaris $f(x)=ax^2+bx+c$ intervale $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right)$ yra mažėjanti funkcija, o intervale $\left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$ – didėjanti, kai $a>0$ (žr. 1 pav.); taške $x=-\dfrac{b}{2a}$ jis įgyja mažiausią reikšmę. Jeigu $a<0,$ tai kvadratinis trinaris yra didėjanti intervale $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right)$ ir mažėjanti intervale $\left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$ funkcija, o taške $x=-\dfrac{b}{2a}$ įgyja didžiausią reikšmę (žr. 2 pav.).



1 pav. ($a>0$)



2 pav. ($a<0$)

3 pavyzdys. Įrodysime teiginį: jei funkcija f yra didėjanti ir $f(x)\ge 0,$ tai funkcija $g(x)=\sqrt{f(x)}$ yra didėjanti.

Įrodymas. Tegul $x_1,x_2\in D(f)$ ir $x_1<x_2$. Tada

$$g(x_1)-g(x_2)=\sqrt{f(x_1)}-\sqrt{f(x_2)}=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{\sqrt{f(x_1)}+\sqrt{f(x_2)}}<0,$$

nes $f(x_1)-f(x_2)<0.$

Atkreipkime dėmesį, kad teisingas ir toks teiginys: kai funkcija *f* yra didėjanti ir $f(x) \geq 0$, tai funkcija $g(x) = \sqrt[4]{f(x)} = \sqrt{\sqrt{f(x)}}$ taip pat yra didėjanti.

Kiti pavyzdžiai: funkcija $f(x) = \sqrt{2x+3}$ yra didėjanti intervale $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$, funkcija $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 4x + 10}$ yra mažėjanti intervale $(-\infty; 2)$ ir didėjanti intervale $(2; +\infty)$.

Pratimai. Įrodykite šiuos teiginius:

1) funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x}$ yra didėjanti;

2) jeigu funkcija *f* ir *g* intervale (*a*; *b*) yra didėjančios (mažėjančios), tai jų suma $f + g$ yra didėjanti (mažėjanti) funkcija;

3) jeigu funkcija *f* yra didėjanti (mažėjanti), o funkcija *g* yra mažėjanti (didėjanti), tai jų skirtumas $f - g$ yra didėjanti (mažėjanti) funkcija.

Spręsdami lygtis ir nelygybes, remsimės šiomis akivaizdžiomis monotoninių funkcijų savybėmis:

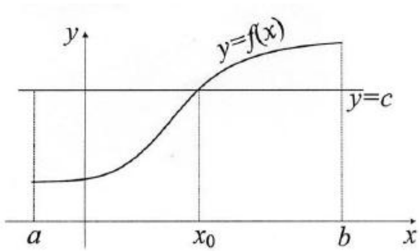
1 savybė. Jeigu funkcija *f* yra didėjanti (mažėjanti), tai lygtis $f(x) = a, a \in R,$ turi daugiausiai vieną sprendinį;

2 savybė. Jeigu funkcija *f* yra didėjanti (mažėjanti), o funkcija *g* yra mažėjanti (didėjanti), tai lygtis $f(x) = g(x)$ turi daugiausia vieną sprendinį;

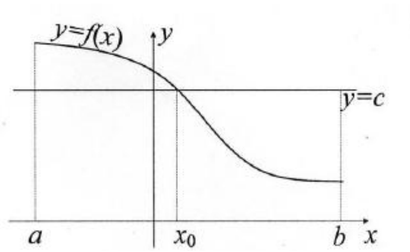
3 savybė. Jeigu funkcija $f:(a;b) \to R$ yra didėjanti (mažėjanti) ir $f(x_0) = c, c \in R, a < x_0 < b,$ tai nelygybės $f(x) < c$ sprendinių aibė yra intervalas $(a; x_0)$ $((x_0; b))$;

4 savybė. Jeigu funkcija $f:(a;b) \to R$ yra didėjanti (mažėjanti), o funkcija $g:(a;b) \to R$ yra mažėjanti (didėjanti), ir taške $(x_0 \in (a;b)$ galioja lygybė $f(x_0) = g(x_0),$ tai nelygybės $f(x) > g(x)$ sprendinių aibė yra intervalas $(x_0; b)$ $((a; x_0))$.

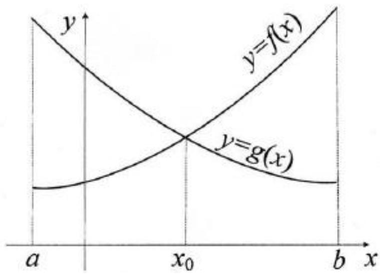
3–4 savybes pailiustruosime grafiškai (3 pav., a), b)) ir (4 pav., a), b)).



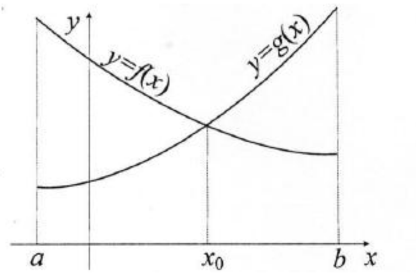
3 pav. a)



3 pav. b)



4 pav. a)



4 pav. b)

4 pavyzdys. Išspręskime lygtis:

a) $3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25}=\dfrac{120}{x}$.

b) $\ln(x-1)+x^2+2x-8=0$.

Sprendimas.

a) Lygties apibrėžimo sritis $D(L)=(-\infty;-5]\cup[5;+\infty)$. Pastebėję, kad kairioji lygties pusė yra teigiama (teigiama turi būti ir dešinioji lygties pusė, t. y. $x>0$), ieškome lygties sprendinių intervale $[5;+\infty)$. Kai $x\geq 5$, funkcijos $f_1(x)=3\sqrt{x^2-9}$, $f_2(x)=4\sqrt{x^2-16}$, $f_3(x)=5\sqrt{x^2-16}$ yra didėjančios, tai didėjanti yra ir funkcija

$$f(x)=3\sqrt{x^2-9}+43\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25}\,.$$

Kadangi funkcija $g(x)=\dfrac{120}{x}$ intervale $[5;+\infty)$ yra mažėjanti funkcija, tai nagrinėjama lygtis gali turėti daugiausia vieną sprendinį

(2 savybė). Aišku, kad $x=5$ yra lygties vienintelis sprendinys.

Ats.: 5.

Pastaba. Tradiciškai spręsdami, panaikinę iracionalumą, būtume gavę tokią lygtį

$$x^{16}-50x^{14}-4375x^{12}+278\,800x^{10}+1\,670\,600x^{8}-364\,700\,000x^{6}+$$
$$+7\,641\,610\,000x^{4}-54\,468\,000\,000x^{2}+129\,600\,000\,000=0.$$

Įsitikinti, kad ši lygtis turi vienintelį sprendinį $x=5$ būtų gana sudėtinga.

b) Lygties apibrėžimo sritis yra intervalas (1; +∞). Lygtį pertvarkome taip: $\ln(x-1)=-x^2-2x+8$. Kadangi funkcija $f(x)=\ln(x-1)$ intervale (1; +∞) yra didėjanti, o funkcija $g(x)=-x^2-2x+8$ šiame intervale yra mažėjanti, tai pagal 2 savybę lygtis $\ln(x-1)=-x^2-2x+8$ gali turėti daugiausia vieną sprendinį.

Nesunku patikrinti, kad vienintelis sprendinys yra $x=2$.

Ats.: 2.

5 pavyzdys. Išspręskite nelygybes:

a) $\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}<9-8x-x^2$;

b) $\sqrt{1-4x}+\sqrt{2-x}\geq 5$.

Sprendimas. a) Nelygybės apibrėžimo sritis $D(N)=[-3;5]$. Šiame intervale funkcija $f_1(x)=\sqrt{x+3}$ yra didėjanti, o funkcija $f_2(x)=\sqrt{5-x}$ mažėjanti. Todėl funkcija $f(x)=f_1(x)+(-f_2(x))=\sqrt{x+3}+(-\sqrt{5-x})$ yra didėjanti. Kadangi funkcija $f(x)=9-8x-x^2$ (kvadratinis trinaris) intervale [–3; 5] yra mažėjanti, o $x=1$ yra lygties $\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}=9-8x-x^2$ sprendinys, tai pagal 4 savybę nelygybės $\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}<9-8x-x^2$ sprendinių aibė yra intervalas [–3; 1).

Ats.: [–3; 1).

b) Nelygybės apibrėžimo sritis $D(N)=\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$. Kadangi funkcija

$f(x)=\sqrt{1-4x}+\sqrt{2-x}$ intervale $D(N)=\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$ yra mažėjanti ir $f(-2)=5$, tai pagal 3 savybę nelygybės $\sqrt{1-4x}+\sqrt{2-x}\geq 5$ sprendinių aibė yra intervalas $(-\infty;-2]$.

Ats.: $(-\infty;-2]$.

3. Funkcijos didžiausia ir mažiausia reikšmės. Sakoma, kad funkcija *f*: $Df \to R$ taške $x_0 \in Df$ įgyja didžiausią (mažiausią) reikšmę, jeigu $f(x_0)\geq f(x)$ ($f(x_0)\leq f(x)$) su visais $x\in Df$.

Spręsdami lygtis ir nelygybes, kartais naudosimės šiomis savybėmis.

1 savybė. Jeigu $f(x)\leq A$ ir $g(x)\geq A$ funkcijų *f* ir *g* apibrėžimo sričių bendroje dalyje, tai lygtis $f(x)=g(x)$ ekvivalenti lygčių sistemai $\begin{cases} f(x)=A, \\ g(x)=A \end{cases}$ (lygties ir lygčių sistemos sprendiniai sutampa).

2 savybė. Jeigu $f(x)\leq A<a$ ($f(x)\geq A>a$) su visais $x\in Df$, tai lygtis $f(x)=a$ sprendinių neturi.

3 savybė. Jeigu $f(x)\leq A<a$ ($f(x)\geq A>a$) su visais $x\in Df$, tai nelygybė $f(x)\geq a$ ($f(x)\leq a$) sprendinių neturi.

6 pavyzdys. Išspręskime lygtis:

a) $\dfrac{18x^2}{x^4+81}=x^2-6x+10;$

b) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11;$

c) $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}}+\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{2x-1}}=\sqrt{4x-x^2}.$

Sprendimas. a) Kadangi $x^2-6x+10=(x-3)^2+1\geq 1$ (lygybė galioja tik tada, kai $x=3$), o

$$\frac{18x^2}{x^4+81}=\frac{18}{x^2+\frac{81}{x^2}}\leq\frac{18}{2\sqrt{x^2\cdot\frac{18}{x^2}}}=\frac{18}{2\cdot\sqrt{81}}=1$$

(pritaikėme aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę), tai pagal 1 savybę lygtis ekvivalenti lygčių sistemai

$$\begin{cases} x^2-6x+10=1, \\ \dfrac{18}{x^4+81}=1. \end{cases}$$

Lygties $x^2-6x+10=1$ sprendinys yra $x=3$, o lygybė $\frac{18x^2}{x^4+81}=1$ teisinga tik tada, kai $x^2=\frac{81}{x^2}$, t. y. kai $x=-3$ arba $x=3$. Taigi lygčių sistema (tuo pačiu ir duotoji lygtis) turi vienintelį sprendinį $x=3$.

Ats.: 3.

b) Lygties apibrėžimo sritis $D(L)=[2;4]$. Šitoje srityje funkcija $f_1(x)=\sqrt{x-2}$ yra didėjanti, o funkcija $f_2(x)=\sqrt{4-x}$ yra mažėjanti. Atkreipkime dėmesį, kad funkcijai $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ negalime taikyti 2 skyrelyje (funkcijų monotoniškumas) naudotos savybės apie funkcijų sumos monotoniškumą.

Ieškosime funkcijų $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$ ir $g(x)=x^2-6x+11$ didžiausios ir mažiausios reikšmių. Tegul $t=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}>0.$ Tada $t^2=2+2\sqrt{6x-x^2-8}=2+2\sqrt{1-(x-3)^2}\leq 4.$ Iš čia $t\leq 2.$ Lygybė galioja tik tada, kai $x=3.$ Kadangi $g(x)=x^2-6x+11=$ $=(x-3)^2+2\geq 2$ ir lygybė galioja tik tada, kai $x=3$, tai lygtis $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$ ekvivalenti lygčių sistemai:

$$\begin{cases} \sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2, \\ x^2-6x+11=2. \end{cases}$$

Jos vienintelis sprendinys yra $x=3.$

Ats.: 3.

c) Lygties apibrėžimo sritis yra $D(L)=\left[\frac{1}{2};4\right]$.

Kadangi $\sqrt{\frac{2x-1}{x^2-x+1}}+\sqrt{\frac{x^2-x+1}{2x-1}}\geq 2$ (pritaikėme aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę; lygybė galioja tik tada, kai $\frac{2x-1}{x^2-x+1}=1$), o $g(x)=\sqrt{4x-x^2}=\sqrt{4-(x-2)^2}\leq\sqrt{4}=2$ (lygybė galioja tik tada, kai $x=2$), tai lygtis ekvivalenti lygčių sistemai

$$\begin{cases}\sqrt{\frac{2x-1}{x^2-x+1}}+\sqrt{\frac{x^2-x+1}{2x-1}}=2,\\ \sqrt{4x-x^2}=2,\end{cases}$$ kuri turi vienintelį sprendinį $x=2$.

Ats.: 2.

7 pavyzdys. Išspręskime nelygybes: a) $\sqrt{x-4}-\sqrt{6-x}<x^2-12x+35$;

b) $\sqrt{4x+9}+\sqrt[4]{81-x}>-x^2+6x-7$.

Sprendimas. a) Nelygybės apibrėžimo sritis $D(L)=[4;6]$. Funkcija $f(x)=\sqrt{x-4}-\sqrt{6-x}$ intervale [4; 6] yra didėjanti, o funkcija $g(x)=x^2-12x+35$ – mažėjanti. Kadangi $f(5)=g(5)=0$, tai nelygybė $\sqrt{x-4}-\sqrt{6-x}<x^2-12x+35$ teisinga su visais x priklauso [4; 5).

Ats.: [4; 5).

b) Nelygybės apibrėžimo sritis $D(L)=\left[-\frac{9}{4};81\right]$. Kai $x\in\left[-\frac{9}{4};0\right]$, tai $\sqrt{4x+9}\geq 0$ ir $\sqrt[4]{81-x}\geq 3$. Kai $x\in[0;81]$, tai $\sqrt{4x+9}\geq 3$, $\sqrt[4]{81-x}\geq 0$. Taigi, kai $x\in\left[-\frac{9}{4};81\right]$, $\sqrt{4x+9}+\sqrt[4]{81-x}\geq 3$. Kita vertus, $g(x)=-x^2+6x-7=2-(x-3)^2\leq 2$. Vadinasi,

$$\sqrt{4x+9}+\sqrt[4]{81-x}>-x^2+6x-7 \text{ su visais } x\in\left[-\frac{9}{4};81\right].$$

Ats.: $\left[-\frac{9}{4};81\right]$.

4. Funkcijos grafikas. Funkcijos $f:\ Df \to R$ grafiku stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje *xOy* vadinama plokštumos taškų, kurių koordinatės yra $(x;\ f(x)),\ x \in Df$, aibė.

Remdamiesi funkcijos grafiku išspręsime pavyzdį.

8 pavyzdys. Raskime lygties $\min\{x^2 - 4x; 6 - x^2\} = a$ sprendinių skaičių priklausomai nuo parametro $a \in R$ reikšmės; čia $\min(u; v)$ – mažiausias iš skaičių *u* ir *v*.

Sprendimas. Nubrėžkime funkcijos $f(x) = \min\{x^2 - 4x; 6 - x^2\}$ grafiką. Toje pačioje koordinačių sistemoje nubraižome funkcijų $f_1(x) = x^2 - 4x$ ir $f_2(x) = 6 - x^2$ grafikus (5 pav.). Šių grafikų susikirtimo taškai yra lygčių sistemos

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x, \\ y = 6 - x^2. \end{cases}$$

sprendiniai *A*(–1; 5) ir *B*(3; –3). Šių parabolių viršūnės yra taškuose *C*(0; 6) ir *D*(2; 4).

Iš brėžinio matome, kad

$$f(x) = \begin{cases} 6 - x^2, -\infty < x \le -1, \\ x^2 - 4x, -1 < x \le 3, \\ 6 - x^2, 3 < x < +\infty. \end{cases}$$

Funkcijos *f* grafikas (žr. 5 pav.) yra užtušuotos srities kontūras *MADBN*.

Rasime šio grafiko ir tiesės $y = a$ susikirtimo taškų skaičių priklausomai nuo parametro *a* reikšmių.

Kai $-\infty < a < -4$, tiesė $y = a$ grafiką kerta dviejuose taškuose; kai $a = -4$, tiesė $y = -4$ grafiką kerta trijuose taškuose; kai $-4 < a < -3$ – keturiuose taškuose; kai $a = -3$ – trijuose taškuose; kai $-3 < a < 5$ – dviejuose taškuose; kai $a = 5$ – viename taške ir kai $a > 5$ – grafiko nekerta.

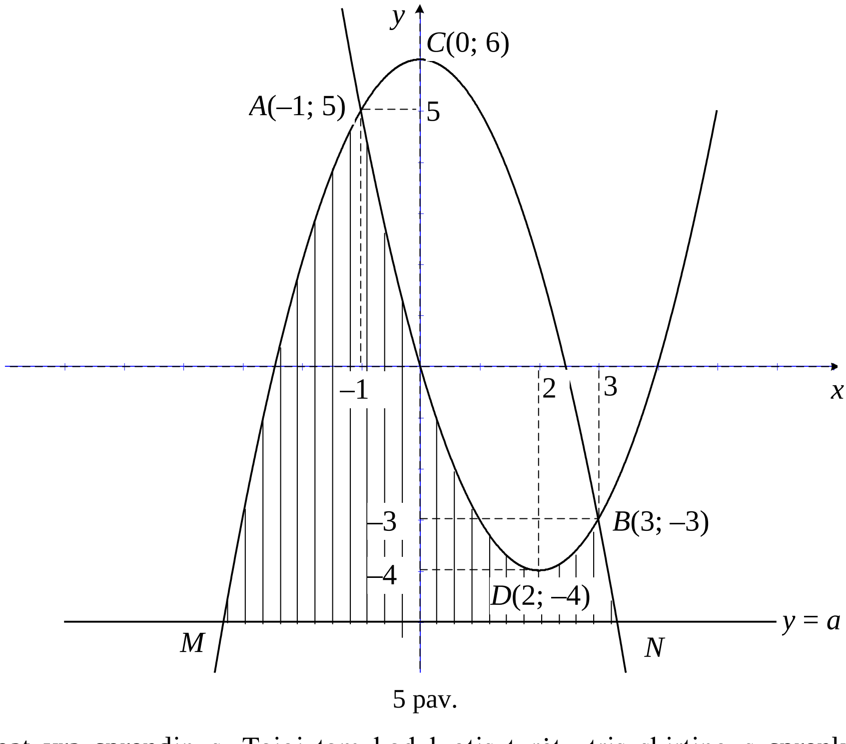
Ats.: Kai $a > 5$, lygtis sprendinių neturi; kai $a = 5$, lygtis turi vieną sprendinį; kai $a \in (-\infty; -4) \cup (-3; 5)$ – lygtis turi du sprendinius; kai $a = -4$ ir $a = -3$ – tris sprendinius, o kai $a \in (-4; -3)$ – keturis sprendinius.

5. Funkcijos lyginumas. Funkcija $f:(-a;a)\to R$ vadinama *lygine*, jeigu su bet kuriais $x\in(-a;a)$ teisinga lygybė $f(-x)=f(x)$.

Pasinaudojus į lygtį įeinančių funkcijų lyginumu, kartais pavyksta supaprastinti uždavinio sprendimą.

9 pavyzdys. Ištirsime su kuriomis parametro a reikšmėmis lygtis $x^4-3x^2-5=a$ turi tris skirtingus sprendinius ir juos rasime.

Sprendimas. Jeigu $x_0\neq 0$ yra šios lygties sprendinys, tai $(-x_0)$ taip



5 pav.

pat yra sprendinys. Taigi tam kad lygtis turėtų tris skirtingus sprendinius, vienas sprendinys turi būti lygus 0. Nulis yra lygties sprendinys, kai $a=-5$. Tada lygtis yra tokia: $x^4-3x^2=0$, t. y. $x^2(x^2-3)=0$. Jos sprendiniai: $x_1=-\sqrt{3}$; $x_2=0$; $x_3=\sqrt{3}$.

Ats.: $a=-5$; sprendiniai yra $-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$.

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

Išspręskite šias lygtis ir nelygybes:

1. $\sqrt{-x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-4x+3}=\sqrt{2}(1-\sqrt{x})$;

2. $\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{x}}+\sqrt{x^2-x-2}<5-\sqrt{3x^2+4}$;

3. $\sqrt{x}+\sqrt{4-x}=x^2-4x+4+2\sqrt{2}$;

4. $\dfrac{32x^2}{x^4+16}=x^2-6x+13$;

5. $\sqrt{x^2+2x+9}+\dfrac{9}{\sqrt{x^2+2x+9}}=2-4x-x^2$;

6. $\sqrt{3x+4}+\sqrt[4]{16-x}\le 4x-x^2-3$;

7. $\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}=x^2-14x+24$;

8. $\sqrt{8-x}-\sqrt{x+2}\le x^2+4x+5$;

9. Raskite lygties $|2x^2-5x-7|=a$ sprendinių skaičių priklausomai nuo parametro a reikšmės.

10. Nustatykite su kuriomis parametro a reikšmėmis lygtis $x^2-5|x|-a^2+4=0$ turi tris skirtingus sprendinius.

BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Edmundas Mazėtis, Juozas Šinkūnas (Lietuvos edukologijos universitetas)

1. Kai bilieto kaina į kino teatrą padidėjo 40 %, pajamos už bilietus padidėjo tik 26 %. Keliais procentais sumažėjo žiūrovų skaičius?

2. Raskite visas natūraliųjų skaičių *x* ir *y* poras (*x*; *y*), kurios tenkina lygtį

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}.$$

3. Išspręskite nelygybę $\sqrt{5-4x}+\sqrt[4]{80-x}>6$.

4. Skritulyje, kurio spindulys 11 cm, taškas *P*, nuo skritulio centro nutolęs 7 cm atstumu. Per tašką *P* nubrėžta styga, kurios ilgis 18 cm. Į kokio ilgio dalis taškas *P* dalija stygą *AB*?

Užduočių sprendimai

STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Lino ir Romo išbrauktų skaičių suma dalijasi iš 4, o visų lentoje užrašytų skaičių suma lygi 110 ir dalijant iš 4 gaunama liekana 2. Todėl neišbraukto skaičiaus dalijimo iš 4 liekana yra 2. Toks skaičius vienintelis – 14.

Ats.: 14.

2. Ieškome triženklių skaičių $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$, kurių skaitmenys x, y ir z $(x \neq 0)$ tenkina tokią sąlygų sistemą

$$\begin{cases} x = 3z, \\ 100x + 10y + z + 100x + 10z + y = 8n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3z, \\ 600z + 11(y + z) = 8n. \end{cases}$$

Kadangi 600z dalijasi iš 8, tai iš 8 turi dalytis ir $11(y+z)$. Taigi $y + z$ turi dalytis iš 8. Galimos z reikšmės yra 1, 2 ir 3, todėl $y + z = 8.$ Kai $z = 1,$ tai $y = 7$ ir $x = 3.$ Gauname skaičių 371. Kai $z = 2,$ tai $y = 6,$ $x = 6$; kai $z = 3,$ tai $y = 5$ ir $x = 9.$

Ats.: 371, 662 ir 953.

3. Tegu x yra rinkėjų skaičius, o y – iki 18 valandos nebalsavusių rinkėjų skaičius. Tada iki 22 valandos nebalsavo 0,8y rinkėjų. Pagal uždavinio sąlygą $0{,}8y = 0{,}32x.$ Iš čia $y = 0{,}4x.$ Taigi iki 18 valandos balsavo $x - y = 0{,}6x$ rinkėjų, o iki 22 valandos – 0,68x rinkėjų. Vadinasi, balsavusiųjų nuo 18 val. iki 22 val. skaičius padidėjo $0{,}68x - 0{,}6x = 0{,}08x.$ Tai sudaro $\dfrac{0{,}08x}{0{,}6x} \cdot 100 = 13\dfrac{1}{3}$ procento.

Ats.: $13\dfrac{1}{3}$ %.

4. Tarkime, eskalatoriaus ilgis yra d metrų, keleivio greitis – $x\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$, o eskalatoriaus greitis – $y\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$. Tuomet $\dfrac{d}{y}$ yra keleivio, stovinčio ant eskalatoriaus laiptelio, nusileidimo laikas. Pagal uždavinio sąlygą sudarome ir sprendžiame sistemą:

$$\begin{cases} d = 24(x+y), \\ d = 42x; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 24\left(\dfrac{d}{42} + y\right), \\ \dfrac{d}{42} = x; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3d}{7} = 24y, \\ \dfrac{d}{42} = x; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{y} = 56, \\ \dfrac{d}{x} = 42. \end{cases}$$

Taigi keleivis, stovėdamas ant eskalatoriaus laiptelio, nusileis per 56 sekundes.

Ats.: 56 s.

5. Atlikime tris svėrimus. Pirmą kartą į vieną lėkštę dėkime 1 ir 2, o į kitą dėkime 3 piastrų monetą. Antrą kartą dėkime 2 ir 3 piastrų monetas į vieną lėkštę, o 5 piastrų monetą – į kitą. Trečią kartą į vieną lėkštę dėkime 2, 3 ir 5 piastrų monetas, o į kitą – 10 piastrų monetą. Jeigu visos monetos būtų tikros, tai svarstyklės būtų pusiausvyroje, nes

$$1 + 2 = 3, \qquad (1)$$
$$2 + 3 = 5 \qquad (2)$$

ir

$$2 + 3 + 5 = 10. \qquad (3)$$

Jeigu vieno piastro moneta būtų netikra, tai negaliotų tik (1) lygybė. Jeigu netikra 2 piastrų moneta, būtų neteisingos visos trys lygybės (svarstyklių lėkštės nusvirusios į tą pačią pusę). Jeigu netikra 3 piastrų moneta , tai visos lygybės būtų neteisingos, bet pirmo ir antro svėrimų lėkštės nusvirtų į skirtingas puses. Jeigu netikra 5 piastrų moneta, tai negaliotų (2) ir (3) lygybės. Jeigu netikra būtų 10 piastrų moneta – negaliotų tik trečioji lygybė.

6. Lentoje rašomi tokie skaičiai:

$$23 \to 2\cdot 3 + 12 = 18 \to 1\cdot 8 + 12 = 20 \to 2\cdot 0 + 12 = 12 \to 1\cdot 2 + 12 =$$
$$= 14 \to 1\cdot 4 + 12 = 16 \to 1\cdot 6 + 12 = 18 \to \ldots$$

Matome, kad rašomi skaičiai pasikartoja su periodu 5. Vadinasi, po 100 tokių veiksmų lentoje bus parašytas skaičius 16.

Ats.: 16.

7. $\begin{cases} x^2 + xy + x = 10, \\ y^2 + xy + y = 20; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + xy + x = 10, \\ x^2 + y^2 + 2xy + x + y = 30; \end{cases} \Rightarrow$

$\uparrow$

Sudėjus lygtis

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + xy + x = 10, \\ (x+y)^2 + (x+y) = 30. \end{cases}$$

Tegu $x + y = t$. Tada antrą sistemos lygtį galima užrašyti taip: $t^2 + t - 30 = 0$. Šios lygties sprendiniai: $t_1 = -6$, $t_2 = 5$. Toliau sprendžiame dvi lygčių sistemas:

$$\begin{cases} x^2 + xy + x = 10, \\ x + y = -6 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} x^2 + xy + x = 10, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Jų sprendiniai yra atitinkamai (–2; –4) ir $\left(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

Ats.: (–2; –4) ir $\left(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

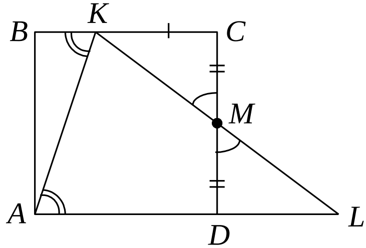
8. Iš lygybės $3x + 4y = 12$ gauname, kad $y = \frac{12 - 3x}{4}$. Turime:

$$x \cdot y = \frac{12 - 3x}{4} \cdot x = \frac{-3x^2 + 12x}{4} = \frac{-3(x^2 - 4x)}{4} =$$

$$= \frac{-3(x^2 - 4x + 4 - 4)}{4} = \frac{-3(x-2)^2 + 12}{4} \leq 3.$$

Didžiausia sandaugos $x \cdot y$ reikšmė lygi 3 (kai $x = 2$).

Ats.: 3.



9. Tegu (žr. pav.) $AB = a$. Tada (pagal sąlygą)

$BK = \frac{1}{3}a$, $KC = \frac{2}{3}a$,

$CM = \frac{1}{2}a, \ \ MD = \frac{1}{2}a.$

Kadangi $\angle BKA = \angle KAL$ (vidaus priešiniai kampai, gauti lygiagrečias tieses AD ir BC perkirtus tiese AK), tai užtenka parodyti, kad $\angle KAL = \angle AKL$ (t. y., kad $KL = AL$). Aišku, kad $\Delta KCM = \Delta MDL$ (statieji trikampiai, turintys lygius kampus ir po lygų statinį). Todėl $DL = \frac{2a}{3}$ ir $AL = AD + DL = a + \frac{2a}{3} = \frac{5a}{3}$.

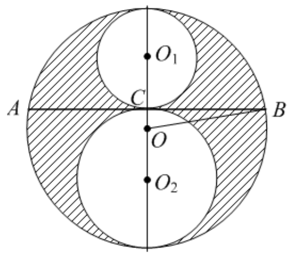
Kadangi

$$KM = ML \text{ ir } KM = \sqrt{KC^2 + CM^2} = \sqrt{\left(\frac{2a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{5a}{6},$$

tai $KL = 2KM = \frac{5a}{3}$.

Taigi $KL = AL$ ($\angle KAL = \angle AKL$). Vadinasi, $\angle BKA = \angle KAL$.

10. Tegul didžiojo apskritimo spindulys R, o į jį įbrėžtų apskritimų spinduliai r_1 ir r_2 $(r_1 \le r_2)$.



Kadangi $2R = 2r_1 + 2r_2$, tai $R = r_1 + r_2$. Apskaičiuosime užbrūkšniuotos didžiojo skritulio dalies plotą S. Gausime:

$$S = \pi R^2 - \pi r_1^2 - \pi r_2^2 =$$

$$= \pi(r_1 + r_2)^2 - \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = 2\pi r_1 r_2.$$

Iš stačiojo trikampio OCB gauname:

$$OC = R - 2r_1 = r_1 + r_2 - 2r_1 = r_2 - r_1,$$

$$CB = \frac{AB}{2} = 2.$$

Pagal Pitagoro teoremą

$$OC^2 + CB^2 = OB^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (r_2 - r_1)^2 + 2^2 = (r_1 + r_2)^2 \Rightarrow r_1 r_2 = 1.$$

Vadinasi, $S = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$ (cm^2).

Ats.: 2π cm^2.

PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Atstumą tarp A ir B pažymėkime s (km), o keleivių greičius atitinkamai x ir y (km/h). Kai pirmasis keleivis nuėjo pusę kelio, t. y. $\frac{s}{2}$ km, antrasis nuėjo $(s-24)$ km; kai pirmasis keleivis nuėjo $(s-15)$ km, antrasis nuėjo $\frac{s}{2}$ km. Sudarome lygčių sistemą (sulyginame laiką, per kurį keleiviai nuėjo nurodytus atstumus) ir sprendžiame ją:

$$\begin{cases} \dfrac{s}{2x} = \dfrac{s-24}{y}, \\ \dfrac{s-15}{x} = \dfrac{s}{2y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sy = (2s-48)x, \\ (2s-30)y = sx \end{cases} \Rightarrow \frac{s}{2s-30} = \frac{2s-48}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^2 = 4s^2 - 96s - 60s + 1440 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^2 - 52s + 480 = 0 \Rightarrow s_1 = 12,\ s_2 = 40.$$

Akivaizdu, kad tinka tik antroji s reikšmė. Taigi $s = 40$ km. Šią reikšmę įrašę į 1-ąją sistemos lygtį, gauname:

$$\frac{20}{x} = \frac{16}{y} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{4}{5} \Rightarrow y = \frac{4}{5}x.$$

Sakykime, kad pirmasis keleivis atstumą tarp A ir B įveikė per t valandų. Per tą laiką antrasis keleivis nuėjo yt km. Vadinasi, $40 - yt = 40 - \frac{4}{5}x \cdot \frac{40}{x} = 8$ (km).

Ats.: 8 km.

2. Sakykime, kad pirmojo kurjerio greitis v km/h ir jį po t_1, $t_1 > 1$, valandų pasivijo antrasis kurjeris s km atstumu nuo A. Po to abu kurjeriai kelionėje užtruko t_2 valandų. Sudarome lygčių sistemą ir sprendžiame ją:

$$\begin{cases} vt_1 = s, \\ 50(t_1 - 1) = s, \\ vt_2 = 120 - s, \\ 50t_2 = s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} vt_1 = 50(t_1 - 1), \\ t_2 = t_1 - 1, \\ v(t_1 - 1) = 120 - vt_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} vt_1 = 50(t_1 - 1), \\ v(2t_1 - 1)t_1 = 120 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t_1}{2t_1 - 1} = \frac{50(t_1 - 1)}{120} \Rightarrow t_1 = \frac{5}{2} \text{ arba } t_1 = \frac{1}{5}.$$

Antroji reikšmė netinka, nes $t_1 > 1$. Taigi $t_1 = \dfrac{5}{2}$ h. Tada $s = 50(t_1 - 1) = 50 \cdot \dfrac{3}{2} = 75$ (km) ir $v = \dfrac{s}{t_1} = \dfrac{75}{\frac{5}{2}} = 30$ (km/h).

Pastaba. Šį uždavinį galima spręsti ir neįvedus pažymėjimų t_1 ir t_2. Jeigu pirmojo kurjerio greitis v km/h ir jį pavijo antrasis kurjeris s km atstumu nuo A, sudarome tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \dfrac{s}{v} = \dfrac{s}{50} + 1, \\ \dfrac{120 - s}{v} = \dfrac{s}{50}. \end{cases}$$

Ją spręsdami gauname:

$$\begin{cases} 50s = sv + 50v, \\ 6000 - 50s = sv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s(50 - v) = 50v, \\ s(50 + v) = 6000 \end{cases} \Rightarrow \frac{50 - v}{50 + v} = \frac{50v}{6000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 + 170v - 6000 = 0 \Rightarrow v = 30 \text{ (km/h)}.$$

Ats.: 30 km/h.

3. Tegu $a = \overline{2x}$. Tada $b = \overline{x2}$. Kadangi $b = 3a$ ir a yra šešiaženklis skaičius, tai

$$\overline{x2} = 3 \cdot \overline{2x} \Rightarrow x \cdot 10 + 2 = 3(200000 + x) \Rightarrow 7x = 599998 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 85714 \Rightarrow a = 285714.$$

*Ats.:*285714.

4. Sakykime, kad triženklis skaičius yra $\overline{xyz}$. Pagal sąlygą sudarome lygčių sistemą ir sprendžiame ją:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=74, \\ x=2(y+z), \\ 100x+10y+z-(100z+10y+x)=495 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=74, \\ x-2z=2y, \\ x-z=5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=74, \\ x=10-2y, \\ z=5-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (10-2y)^2+y^2+(5-2y)^2=74, \\ x=10-2y, \\ z=5-2y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9y^2-60y+51=0, \\ x=10-2y, \\ z=5-2y \end{cases} \Rightarrow y=1,\ \ x=8,\ \ z=3.$$

Ats.: 813.

5. *Pastaba.* Spręsdami turėkite mintyje, kad iš pradžių inde buvo gryna druskos rūgštis.

Sprendimas. Tegu inde yra x litrų druskos rūgšties. Po pirmojo nupylimo inde liko $(x-60)$ litrų rūgšties. Antruoju nupylimu buvo nupilta $\dfrac{(x-60)\cdot 60}{x}$ litrų druskos rūgšties. Sudarome lygtį: $x-60-\dfrac{(x-60)\cdot 60}{x}=10$ ir gauname $x=90$.

Ats.: 90 litrų.

6. Tegu pievoje yra z kg žolės, per dieną priauga x kg žolės, viena karvė per dieną suėda y kg žolės, o n karvėms žolės pakaks 96 dienoms. Sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 70\cdot 24y=z+24x, & (1) \\ 30\cdot 60y=z+60x, & (2) \\ 96\cdot ny\ \ =z+96x. & (3) \end{cases}$$

Iš (2) lygties z reikšmę įrašę į (3) lygtį, gauname lygtį

$$96\cdot ny=1800\,y+36x. \qquad (4)$$

Iš (2) lygties atėmę (1) lygtį, gauname:

$$36x = 120y \Rightarrow \; x = \frac{10}{3}y.$$

Šią x išraišką įrašę į (4) lygtį, gauname:

$$96 \cdot ny = 1800y + 120y \;\; \Rightarrow \;\; n = 20.$$

Ats.: 20.

7. Tegu šaulys į taikinį šovė n kartų ir pataikė x kartų. Pagal sąlygą sudarome lygtį $5x-(n-x)\cdot 3=0$ ir gauname:

$$5x-(n-x)\cdot 3 = 0 \Rightarrow 8x = 3n \Rightarrow x = \frac{3n}{8}.$$

Kadangi $10 < n < 20,$ tai x yra natūralusis skaičius tik tada, kai $n = 16$. Taigi $x = 6$.

Ats.: 16; 6.

8. Tegu bulvių kilogramas kainuoja x Lt ir jų buvo nupirkta m kilogramų, o morkų kilogramas kainuoja y Lt ir jų buvo nupirkta n kilogramų. Sudarome ir sprendžiame lygčių sistemą:

$$\begin{cases} mx+ny = 45\,000, \\ mx+nx = 40\,000, \\ my+ny = 48\,000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n(y-x) = 5\,000, \\ m(y-x) = 3\,000 \end{cases} \Rightarrow n = \frac{5}{3}m.$$

Tada iš antrosios lygties gauname:

$$mx + \frac{5}{3}mx = 40\,000 \Rightarrow mx = 1500.$$

Vadinasi, $ny = 30\,000$.

Ats.: 15 000 Lt, 30 000 Lt.

9. Tegu x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – laikas (valandomis), per kurį darbą gali atlikti kiekvienas iš 5 darbininkų atskirai, o x – laikas per kurį darbą gali atlikti visi darbininkai dirbdami kartu. Per 1 valandą jie atliks atitinkamai $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}, \frac{1}{x_5}$ ir $\frac{1}{x}$ darbo dalį. Remdamiesi sąlyga, sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}=\dfrac{1}{7{,}5}, \\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_5}=\dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}=\dfrac{1}{6}, \\ \dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_4}+\dfrac{1}{x_5}=\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}+\dfrac{1}{x_5}=\dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{15}-\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_3}, \\ \dfrac{1}{x_5}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_3}, \\ \dfrac{1}{x_4}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_3}, \\ \dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_4}+\dfrac{1}{x_5}=\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}+\dfrac{1}{x_5}=\dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Dydžių $\dfrac{1}{x_2}$, $\dfrac{1}{x_3}$ ir $\dfrac{1}{x_4}$ išraiškas įrašę į (4) lygybę, gauname, kad $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_3}=\dfrac{1}{12}$. Tada iš (1)–(3) lygčių nustatome, kad $\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{20}$, $\dfrac{1}{x_5}=\dfrac{7}{60}$, $\dfrac{1}{x_4}=\dfrac{1}{12}$. Rezultatus įrašę į (5) lygtį, gauname:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{12}+\frac{7}{60}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\Rightarrow x=3.$$

Ats.: 3 h.

10. Tegu žvakių ilgis H ir pirmoji žvakė sudega per x valandų. Per 1 valandą sudegs atitinkamai $\dfrac{H}{x}$, $\dfrac{H}{12}$ ir $\dfrac{H}{8}$ pirmos, antros ir trečiosios žvakių dalys

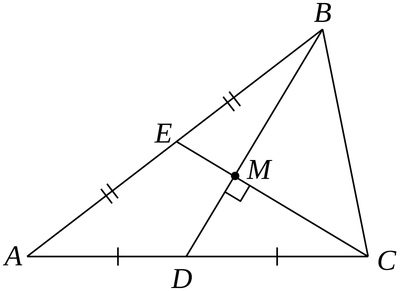
Tegu po t valandų pirmoji ir trečioji žvakės buvo vienodo ilgio. Sudarome ir sprendžiame lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \dfrac{H}{x}(t+1)=\dfrac{H}{8}t, \\ \dfrac{H}{x}(t+1+2)=\dfrac{H}{12}(t+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{t+1}{x}=\dfrac{t}{8}, \\ \dfrac{t+3}{x}=\dfrac{t+2}{12} \end{cases} \Rightarrow\ t=1,\ \ x=16.$$

Ats.: 16 h.

ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Sakykime, kad trikampio *ABC* kraštinės *AB* ir *AC* lygios atitinkamai 8 ir 6, į jas nubrėžtos pusiaukraštinės *CE* ir *BD* yra statmenos (1 pav.), taškas *M* – pusiaukraštinių susikirtimo taškas. Jei $EM = x$, tai pagal pusiaukraštinių savybę $MC = 2x$; analogiškai $DM = y$, tai $MB = 2y$. Trikampiams *DMC* ir *BME* taikome Pitagoro teoremą:



1 pav.

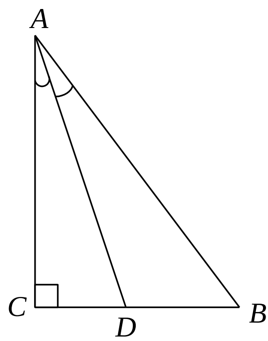
$y^2 + 4x^2 = 3^2$,

$4y^2 + x^2 = 4^2$.

Iš šios sistemos randame $x^2 = \dfrac{4}{3}$, $y^2 = \dfrac{11}{3}$. Iš stačiojo trikampio *BMC* turime $BC^2 = 4x^2 + 4y^2 = 20$, $BC = 2\sqrt{5}$.

Ats.: $2\sqrt{5}$.

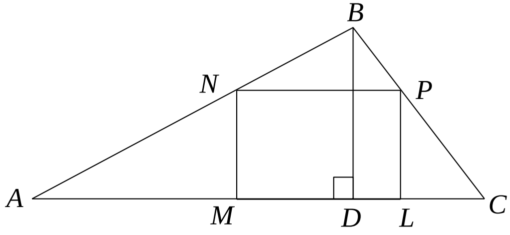
2. Stačiojo trikampio *ABC* smailiojo kampo *A* pusiaukampinė – atkarpa *AD* (2 pav.). Kadangi $\dfrac{CD}{AC} = \dfrac{DB}{AB}$, o $AC < AB$, tai ir $CD < DB$. Taigi $CD = 4$, $DB = 5$. Pažymėkime $AC = x$, $AB = y$, tai $\dfrac{4}{x} = \dfrac{5}{y}$, arba $x = \dfrac{4}{5}y$. Iš stačiojo trikampio *ABC* turime $y^2 = x^2 + 9^2$ arba $y^2 = \left(\dfrac{4}{5}y\right)^2 + 81$. Iš čia $y = 15$, $x = \dfrac{4}{5} \cdot 15 = 12$.



2 pav.

Ats.: 15, 9, 12.

3. Sakykime, kad trikampio ABC kraštinės $AB=17,$ $BC=10,$ $AC=21$ (3 pav.), į jį įbrėžtas stačiakampis $MNPL$, kurio viršūnės M ir L yra kraštinėje AC, viršūnė N – kraštinėje AB, o viršūnė P – kraštinėje BC. Jei $ML=x,$ tai iš uždavinio sąlygos išplaukia, kad $MN=12-x.$ Iš trikampių ABC ir NBP panašumo gauname, kad $\frac{AB}{NB}=\frac{AC}{NP},$ t. y.
$\frac{17}{NB}=\frac{21}{x},$
$NB=\frac{17x}{21}.$ Tuomet
$AN=AB-NB=$
$=\frac{17}{21}(21-x).$



3 pav.

Pagal Herono formulę randame trikampio ABC plotą: jo pusperimetris $p=24,$ todėl

$$S=\sqrt{24\cdot(24-21)(24-17)(24-10)}=84.$$

Tuomet trikampio aukštinės BD ilgis

$$BD=\frac{2S}{AC}=\frac{2\cdot 84}{21}=8.$$

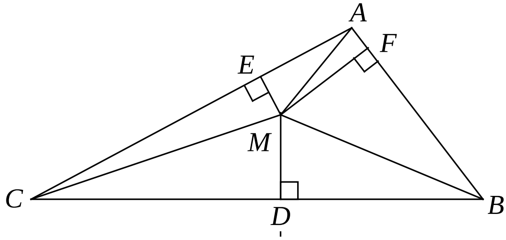
Iš trikampių ABD ir ANM panašumo turime

$$\frac{BD}{MN}=\frac{AB}{AN},\ \text{t. y.}\ \frac{8}{12-x}=\frac{17}{\frac{17}{21}(21-x)}.$$

Iš čia randame $x=\frac{84}{13}.$ Taigi įbrėžtojo stačiakampio kraštinių ilgiai lygūs $\frac{84}{13}$ ir $\frac{72}{13}$.

Ats.: $\frac{84}{13}$ ir $\frac{72}{13}$.

4. Sakykime, kad taškas *M* yra nutolęs nuo trikampio kraštinių *CA* ir *CB* atstumais 2 ir 4. Tada nuleidę statmenis $ME \perp AC$ ir $MD \perp CB$, gausime, kad $ME = 2,\ MD = 4$ (4 pav.) Jei $MF \perp AB$, tai trikampių *AMB*, *BMC* ir *CMA* plotų suma lygi trikampio *ABC* plotui:



4 pav.

$$\frac{1}{2}AB \cdot MF + \frac{1}{2}BC \cdot MD + \frac{1}{2}AC \cdot ME = S_{ABC}.$$

Pagal Herono formulę, $S_{ABC} = 84$ (žr. 3 uždavinio sprendimą).

Taigi $MF = \dfrac{2S_{ABC} - BC \cdot MD - AC \cdot ME}{AB} = 5{,}8.$

Ats.: 5,8.

5. Kadangi trikampių *AFB* ir *ADB* aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės *A*, yra lygios, tai jų plotų santykis lygus kraštinių *BF* ir *BD* santykiui (5 pav.). Per tašką *D* nubrėžiame tiesę *DE*, lygiagrečią su tiese *AM*; pagal Talio teoremą taškas *E* yra atkarpos *MC* vidurio taškas. Iš čia

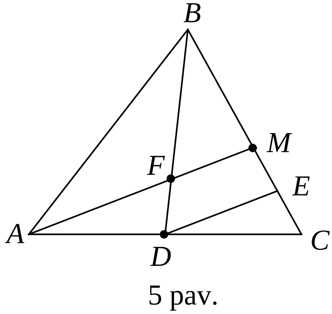
$$BM : ME : EC = 3:1:1.$$

Kadangi $FM \parallel DE,$ tai pagal Talio teoremą turime

$$\frac{BF}{FD} = \frac{BM}{ME} = 3.$$

Taigi

$$\frac{S_{AFB}}{S_{ABD}} = \frac{BF}{BD} = \frac{3}{4}.$$



5 pav.

Kadangi atkarpa *BD* – trikampio *ABC* pusiaukraštinė, tai trikampio *ABD* plotas lygus trikampio *ABC* ploto pusei. Taigi

$$S_{AFB}=\frac{3}{4}S_{ABD}=\frac{3}{8}S.$$

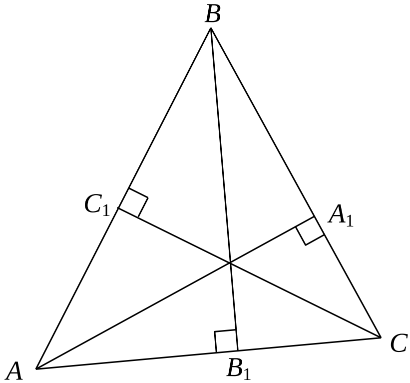
Ats.: $\frac{3}{8}S.$

6. Trikampio *ABC* aukštinės

$$AA_1=h_a=12,$$
$$BB_1=h_b=15,$$
$$CC_1=h_c=20$$

(6 pav.). Pagal Herono formulę $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

Įrašę $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ ir atlikę veiksmus, gauname



6 pav.

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(c+b-a)}.$$

Iš trikampio ploto formulės randame

$$S=\frac{1}{2}a\cdot h_a=\frac{1}{2}b\cdot h_b=\frac{1}{2}c\cdot h_c,$$

t. y. $a=\frac{2S}{h_a},\ b=\frac{2S}{h_b},\ c=\frac{2S}{h_c}.$

Įrašę šias išraiškas į Herono formulę turime

$$S=\frac{1}{4}4S^2\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)}.$$

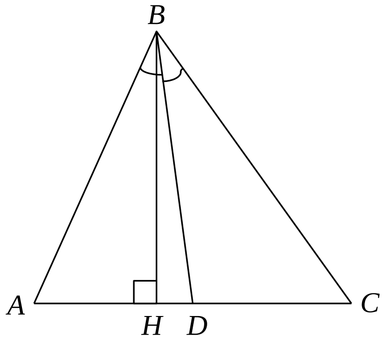
Iš čia

$$S=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)}}.$$

Įrašę sąlygoje duotas h_a, h_b ir h_c reikšmes gauname $S=150.$

Ats.: 150.

7. Pagal Herono formulę apskaičiuojame trikampio ABC plotą: $p=\frac{1}{2}(13+14+15)=21$, $S=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=84$. Tuomet aukštinė $BH=\frac{2S}{AC}=12$ (7 pav.). Pagal trikampio pusiaukampinės savybę $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}=\frac{13}{15}$.
Pažymėję $AD=x$, turime $\frac{x}{14-x}=\frac{13}{15}$. Iš čia $x=\frac{13}{2}$, tai $HD=AD-AH=\frac{3}{2}$ ir trikampio BHD plotas

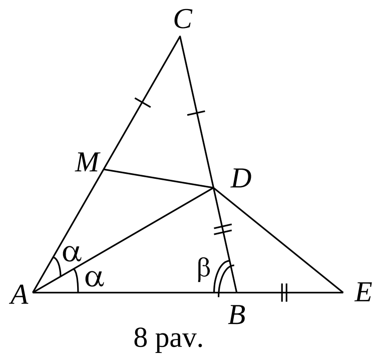


7 pav.

$$S_{BHD}=\frac{1}{2}BH\cdot HD=9.$$

Ats.: 9.

8. Trikampio ABC kraštinės AB tęsinyje nuo taško B atidėkime atkarpą BE, lygią atkarpai BD (8 pav.), tuomet
$AE=AB+BE=AB+BD=b.$
Sakykime, kad
$\angle CAD=\angle DAB=\alpha,$
$\angle ABC=\beta,$
tuomet $\angle EBD=180^\circ-\beta$, o



8 pav.

$$\angle BED=\angle EDB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle EBD)=\frac{\beta}{2}.$$

Iš čia $\angle ADE=180^\circ-\alpha-\frac{\beta}{2}.$

Kita vertus $\angle ACB=180^\circ-2\alpha-\beta,$

$$\angle CMD=\angle CDM=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ACB)=\alpha+\frac{\beta}{2},$$

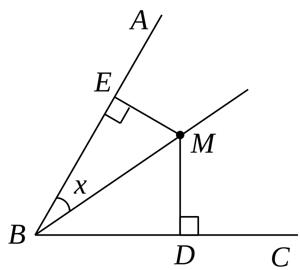
$\angle AMD = 180^\circ - \angle CMD = 180^\circ - \alpha - \dfrac{\beta}{2} = \angle ADE$. Taigi trikampiai ADE ir AMD – panašieji ($\angle DAE = \angle DAM$, $\angle ADE = \angle AMD$),

$\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AM}{AD}$ ir $AM = \dfrac{AD^2}{AE} = \dfrac{a^2}{b}$.

Ats.: $\dfrac{a^2}{b}$.

9. Sakykime, kad duotojo kampo ABC didumas 60°, taškas M nuo kraštinės AB nutolęs atstumu $ME = \sqrt{7}$, o nuo kraštinės BC – atstumu $MD = 2\sqrt{7}$ (9 pav.). Pažymėkime $\angle ABM = x$, tuomet $\angle MBC = 60^\circ - x$. Kadangi $\sin x = \dfrac{EM}{BM} = \dfrac{\sqrt{7}}{BM}$,

$$\sin(60^\circ - x) = \frac{MD}{BM} = \frac{2\sqrt{7}}{BM},$$



9 pav.

tai $\sin(60^\circ - x) = 2\sin x$. Pritaikę kampų skirtumo sinuso formulę turime

$$\sin 60^\circ \cos x - \cos 60^\circ \sin x = 2\sin x,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 2\sin x,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{5}{2}\sin x,$$

$$\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Kadangi $EB = \dfrac{EM}{\mathrm{tg}x}$, tai $EB = \dfrac{5\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$. Tuomet ieškomasis atstumas

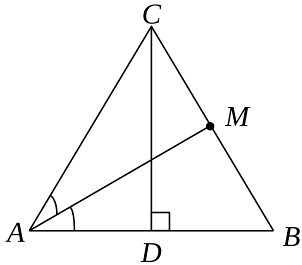
$$BM = \sqrt{EB^2 + EM^2} = \sqrt{\frac{196}{3}} = \frac{14}{\sqrt{3}}.$$

Ats.: $\dfrac{14}{\sqrt{3}}$.

10. Sakykime, kad atkarpa AM yra lygiašonio trikampio ABC $(AC = CB)$ kampo prie pagrindo $\angle A$ pusiaukampinė, CD – trikampio aukštinė, $CM = b,\ BM = c$ (10 pav.). Pagal pusiaukampinės savybę $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BM}{MC} = \dfrac{c}{b}$. Kadangi

$$AC = BC = c + b,$$

tai $AB = \dfrac{c(c+b)}{b}$. Trikampiui AMB taikome kosinusų teoremą ir gauname



10 pav.

$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos\angle B.$ Iš stačiojo trikampio BCD seka $\cos\angle B = \dfrac{DB}{CB} = \dfrac{AB}{2CB} = \dfrac{c}{2b}$. Taigi

$$AM^2 = \frac{c^2(c+b)^2}{b^2} + c^2 - \frac{2c^2(c+b)}{b} \cdot \frac{c}{2b} = \frac{c^3 + 2c^2 b}{b},$$

$$AM = \sqrt{\frac{c^3 + 2c^2 b}{b}}.$$

Ats.: $\sqrt{\dfrac{c^3 + 2c^2 b}{b}}$.

TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Reiškinį $n^3 + 3$ pertvarkome taip:

$$n^3 + 3 = n^3 + 27 - 24 = (n^3 + 3^3) - 24 = (n+3)(n^2 - 3n + 9) - 24.$$

Vadinasi, $n^3 + 3$ dalijant iš $n + 3$ tik tuomet, kai 24 dalijasi iš $n + 3$; taigi, kai $n = 1, 3, 5, 9$ ir 21.

Ats.: {1; 3; 5; 9; 21}.

2. Ieškome natūraliojo skaičiaus *a*, kurio pavidalas yra $a = 2^k \cdot 3^m \cdot 5^n$, $k, m, n \in N$. Jeigu skaičius *a* turėtų daugiau daugiklių, jis nebūtų pats mažiausias.

1) Kadangi $\frac{a}{2} = 2^{k-1} \cdot 3^m \cdot 5^n$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas, tai skaičiai $k-1$, *m* ir *n* turi dalytis iš 2;

2) Kadangi $\frac{a}{3} = 2^k \cdot 3^{m-1} \cdot 5^n$ yra sveikojo skaičiaus kubas, tai skaičiai *k*, $m-1$ ir *n* turi dalytis iš 3;

3) Analogiškai skaičiai *k*, *m* ir $n-1$ turi dalytis iš 5. Iš 1) – 3) sąlygų išplaukia, kad skaičius *k* yra nelyginis ir dalijasi iš 3 ir 5. Pats mažiausias toks skaičius yra 15. Pats mažiausias lyginis skaičius *m*, kuris dalijasi iš 5, o $m-1$ dalijasi iš 3, yra 10. Nesunkiai surandame, kad $n = 6$. Taigi pats mažiausias skaičius, tenkinantis uždavinio sąlygas, yra $a = 2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$.

Ats.: $a = 2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$.

3. Palikę rūsyje 12 stiklainių uogienės, tarp jų ne visada rasime 4 stiklainius vienos rūšies uogienės ir 3 stiklainius kitos rūšies uogienės (pavyzdžiui, galėtų būti 8 stiklainiai braškių uogienės, 2 stiklainiai mėlynių uogienės ir 2 stiklainiai vyšnių uogienės). Tik palikę rūsyje 13 stiklainių uogienės galime būti tikri, kad tarp jų visada bus bent 4 stiklainiai vienos rūšies uogienės ir 3 stiklainiai kitos rūšies uogienės. Taigi iš rūsio daugiausia galima paimti $20-13=7$ stiklainius uogienės.

Ats.: 7.

4. Iš antrosios lygties išreiškę *x* ir gautą išraišką įrašę į pirmąją lygtį, gauname lygtį $yz-3y-3z+4=0$. Iš čia $y = \frac{3z-4}{z-3} = 3 + \frac{5}{z-3}$. Kad *y* būtų sveikasis skaičius, $z-3$ turi įgyti tik tokias reikšmes: –1, 1, –5 ir 5. Taigi, $z_1 = -2$, $z_2 = 2$, $z_3 = 4$, $z_4 = 8$. Šias *z* reikšmes atitinka tokios *y* reikšmės: $y_1 = 2$, $y_2 = -2$, $y_3 = 8$, $y_4 = 4$ ir tokios *x* reikšmės: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 9$, $x_4 = 9$.

Ats.: (–3; 2;–2), (–3; –2; 2), (9; 8; 4), (9; 4; 8).

5. Tegu ieškomasis skaičius yra $n = 1 \cdot 10^m + x.$ Pagal sąlygą $(1 \cdot 10^m + x) \cdot 3 = 10x + 1.$ Iš čia $x = \dfrac{3 \cdot 10^m - 1}{7}.$ Tikrindami įsitikiname, kad x nėra sveikasis skaičius, kai $m = 1, 2, 3, 4.$ Kai $m = 5,$ gauname $x = 42\ 857$. Taigi $n = 142\ 857$.

Ats.: 142 857.

6. Ieškosime natūraliojo skaičiaus x, užrašomo formule $x = a^2 + a^3 = = a^2(a+1)$, $a \in N$. Kadangi x yra keturženklis skaičius, tai nesunku įsitikinti, kad $9 < a < 22$. Skaičius x dalijasi iš 7 tik tada, kai iš 7 dalijasi a arba $a+1$. Perrinkdami a reikšmes įsitikiname, kad $a \in \{13; 14; 20; 21\}$. Taigi $x_1 = 2366,$ $x_2 = 2940,$ $x_3 = 8400,$ $x_4 = 9702.$

Ats.: 2366, 2940, 8400, 9702.

7. Iš lygties išsireiškiame n: $m = \dfrac{170 - 31n}{12}$. Remdamiesi akivaizdžia sąlyga $170 - 31n \geq 12,$ nustatome, kad galimos n reikšmės yra 1, 2, 3, 4 ir 5. Tikrindami šias reikšmes įsitikiname, kad m yra natūralusis skaičius (lygus 9) tik tada, kai $n = 2$.

Ats.: (9; 2).

8. Tegu kavos pupeles galima supilstyti į x maišelių po 5 kg ir į y maišelių po 19 kg. Pagal sąlygą sudarome lygtį $5x + 19y = 674$. Iš čia $x = \dfrac{674 - 19y}{5}$. Ieškosime tokių sveikų neneigiamų y reikšmių, su kuriomis galioja nelygybė $674 - 19y \geq 0.$ Taigi $y \in \{0; 1; 2; ...; 35\}$. Pastebėję, kad $x = 134 - 4y + \dfrac{y+4}{5}$, matome, kad $y = 5k - 4,$ $k = 1, 2, ..., 7.$ Gauname: $y_1 = 1,$ $y_2 = 6,$ $y_3 = 11,$ $y_4 = 16,$ $y_5 = 21,$ $y_6 = 26$ ir $y_7 = 31.$ Šias y reikšmes atitinka tokios x

reikšmės: $x_1 = 131,\ x_2 = 112,\ x_3 = 93,\ x_4 = 74,\ x_5 = 55,\ x_6 = 36,$ $x_7 = 17.$

Ats.: (131; 1), (112; 6), (93; 11), (74; 16), (55; 21), (36; 26), (17; 31).

9. Tegul liniuotės ilgis yra *a*. Linas 49 mėlynais brūkšneliais liniuotę padalijo į 50 lygių dalių, o Romas 46 raudonais brūkšneliais šią liniuotę padalijo į 47 lygias dalis. Lino padalos ilgis yra $\frac{a}{50}$, o Romo – $\frac{a}{47}$. Kadangi skaičiai 50 ir 47 yra tarpusavyje pirminiai, tai nėra sutampančių mėlynų ir raudonų brūkšnelių. Mažiausias atstumas tarp mėlyno ir raudono brūkšnelių yra $\frac{a}{47 \cdot 50}$. Tegu šis atstumas yra tarp *x*-jo raudonojo ir *y*-jo mėlyno brūkšnelių. Sudarykime dvi lygtis

$$\frac{a}{47}x - \frac{a}{50}y = \frac{a}{47 \cdot 50} \quad \text{ir} \quad \frac{a}{47}x - \frac{a}{50}y = -\frac{a}{47 \cdot 50},$$

Iš čia gauname $50x - 47y = 1$ ir $50x - 47y = -1$.

Rasime lygties $50x - 47y = 1$ natūraliuosius sprendinius. Ieškosime tokių *y* reikšmių $(0 < y < 49)$, su kuriomis $x = \frac{1 + 47y}{50}$ yra natūralusis skaičius. Gauname vienintelį sprendinį $x = 16$, kai $y = 17$.

Analogiškai surandame ir lygties $50x - 47y = -1$ natūraliuosius sprendinius: $x = 31,\ y = 33$.

Ats.: Mažiausias atstumas yra tarp 16-jo raudonojo ir 17-jo mėlynojo brūkšnelių, bei tarp 31-jo raudonojo ir 33 mėlynojo brūkšnelių.

10. Kadangi $x \neq 0,\ y \neq 0,$ tai

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow xy - 5x - 5y = 0 \Leftrightarrow (x-5)(y-5) = 25 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5=1, \\ y-5=25 \end{cases}$ arba $\begin{cases} x-5=5, \\ y-5=5, \end{cases}$ arba $\begin{cases} x-5=25, \\ y-5=1, \end{cases}$ arba

$\begin{cases} x-5=-1, \\ y-5=-25, \end{cases}$ arba $\begin{cases} x-5=-5, \\ y-5=-5, \end{cases}$ arba $\begin{cases} x-5=-25, \\ y-5=-1. \end{cases}$

Šių lygčių sistemų sprendiniai tokie: (6; 30), (10; 10), (30; 6), (4; –20), ∅, (–20; 4).

Ats.: (6; 30), (10; 10), (30; 6), (4; –20), (–20; 4).

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Pirmiausia suskaičiuosime trikampius, kurių viena kraštinė yra *AB*. Po to skaičiuosime trikampius, kurių viršūnė yra *A* (be kraštinės *AB*) ir trikampius, kurių viršūnė yra *B* (be kraštinės *AB*).

a) Trikampių, kurių viena kraštinė *AB* yra $6\times 6=36$;

b) trikampių, kurių viršūnė *A* (be kraštinės *AB*) yra $6\cdot C_6^2=90$;

c) trikampių, kurių viršūnė *A* (be kraštinės *AB*) yra $6\cdot C_6^2=90$.

Taigi iš viso yra $36+90+90=216$ trikampių.

Ats.: 216.

2. Iš taško A_1 į tašką A_7 galima patekti taip:

1) Iš taško A_1 į tašką A_7 tiesiogiai – 1 kelias;

2) Iš taško A_1 į tašką A_7 per vieną iš taškų A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 – $A_5^1=5$ keliai;

3) Iš taško A_1 į tašką A_7 per du iš taškų A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 – $A_5^2=20$ kelių;

4) Iš taško A_1 į tašką A_7 per 3 iš taškų A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 – $A_5^3=60$ kelių;

5) Iš taško A_1 į tašką A_7 per 4 iš taškų A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 – $A_5^4=120$ kelių;

6) Iš taško A_1 į tašką A_7 per 5 iš taškų A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 – $A_5^5 = 120$ kelių;

Taigi iš taško A_1 į tašką A_7 yra
$1+5+20+60+120+120=326$ keliai.

Ats.: 326.

3. Paskutinį skaitmenį galima pasirinkti dviem būdais (0 arba5). Priešpaskutinį skaitmenį galima parinkti 4 būdais; antrąjį skaitmenį – 3 būdais, o pirmąjį skaitmenį – 2 būdais. Taigi iš viso yra $2\cdot3\cdot4\cdot2=48$ keturženkliai skaičiai. Iš jų reikia išmesti tuos skaičius, kurie prasideda 0, o baigiasi 5. Tokių skaičių yra 6. Vadinasi, yra $48-6=42$ keturženkliai skaičiai, dalūs iš 5.

Ats.: 42.

4. Penkiaženklių skaičių, kurių skaitmenys 1, 1, 2, 3, 4, yra $\frac{5!}{2!}=60.$ Skaičiai, kurių pirmas skaitmuo 1, yra mažesni už 20 000. Tokių skaičių yra $P_4=24.$ Taigi penkiaženklių skaičių, kurių skaitmenys 1, 1, 2, 3, 4, didesnių už 20 000 yra $60-24=36$.

Ats.: 36.

5. Tarp 30 pirmųjų natūraliųjų skaičių 15 skaičių yra lyginiai ir 15 skaičių – nelyginiai. Trijų skaičių suma yra lyginė, kai visi trys skaičiai lyginiai arba vienas skaičius lyginis, o du nelyginiai. Taigi iš skaičių 1, 2, ..., 30 galima sudaryti $C_{15}^3+C_{15}^1\cdot C_{15}^2=2030$ trejetų, kurių skaičių suma yra lyginė.

Ats.: 2030.

6. Iš skaitmenų 1, 2, 3 ir 4 galima sudaryti $P_4=24$ keturženklius skaičius. Kiekvienas skaitmuo kiekviename skyriuje yra parašytas $P_3=6$ kartus. Todėl sudėję pirmojo skyriaus skaitmenis, gauname: $6(1+2+3+4)=60.$ Sudėję antrojo, trečiojo ir ketvirtojo skyrių skaitmenis atitinkamai gauname: 600, 6000 ir 60 000. Vadinasi, visų keturženklių skaičių suma lygi

$$60+600+6000+60\,000=66\,660.$$

Ats.: 66 660.

7. Pagal sąlygą septynženkliuose skaičiuose turi būtinai būti trys dvejetai, o kiti skaitmenys bet kokie iš 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 rinkinio skaičiai. Tris dvejetus septynženklyje skaičiuje galima parašyti $C_7^3=70$ skirtingų būdų, į likusias 4 vietas galima rašyti bet kuriuos iš minėtų skaičių. Taigi septynženklių skaičių yra

$$C_7^3\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8=143\,360.$$

Ats.: 143 360.

8. Pirmąjį ir paskutinį lyginius skaitmenis galima pasirinkti $A_3^2=6$ būdais ((2...4), (4...2), (2...6), (6...2), (4...6), (6...4)). Likusius keturis skaitmenis ir 5 skaitmenų galima pasirinkti $A_5^4=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=$ $=120$ būdų. Taigi iš viso yra

$A_3^2\cdot A_5^4=6\cdot 120=7206$ šešiaženklių skaičių.

Ats.: 720.

9. Keturženklį skaičių galima sudaryti arba iš 4 skirtingų skaitmenų (1, 2, 3, 5), arba iš trijų skaitmenų (1, 1, 2, 3; 1, 1, 2, 5; 1, 1, 3, 5; 1, 2, 3, 3; 1, 3, 3, 5; 2, 3, 3, 5), arba iš dviejų skaitmenų (1; 1; 3; 3).

Pirmuoju atveju yra $P_4=24$ skirtingi keturženkliai skaičiai. Antruoju atveju yra $6\cdot\dfrac{P_4}{P_2}=6\cdot\dfrac{24}{2}=72$ keturženkliai skaičiai. Pagaliau trečiuoju atveju yra $\dfrac{P_4}{P_2\cdot P_2}=\dfrac{4!}{2!2!}=6$ keturženkliai skaičiai. Vadinasi, iš viso yra $24+72+6=102$ keturženkliai skaičiai.

Ats.: 102.

10. Tris rožes turi atskirti kardeliai. Tegul Justina iš pradžių sodina $1+n_1$ kardelių, vieną rožę, $1+n_2$ kardelių, vieną rožę, $1+n_3$

kardelių, vieną rožę ir pagaliau $1+n_4$ kardelių. Sudarome lygtį: $1+n_1+1+n_2+1+n_3+1+n_4=6,$ t. y. $n_1+n_2+n_3+n_4=2;$ čia $0\le n_1, n_2, n_3, n_4\le 2.$ Šios lygties sprendiniai yra: (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1). Taigi pasodinti kardelių galima 10 skirtingų būdų. Kadangi rožės yra skirtingos, tai pasodinti galima $P_3=6$ skirtingais būdais. Vadinasi, Justina rožes ir kardelius gali pasodinti $10\cdot 6=60$ skirtingais būdais.

Ats.: 60.

PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Pirmi du nariai duoti. Taikydami rekurenčiąją formulę apskai–čiuojame ir tolesnius narius:
$-1, -4, -5, -9, -14, -23, -37, -60, -97, -157, -254, -411,$.
$-665, -1076, -1741$

2. Iš lygybių $F_2=F_1$, $F_4=F_3+F_2$, $F_6=F_5+F_4$, ... , $F_{2n}=F_{2n-1}+F_{2n-2}$ išreiškę narius su nelyginiais numeriais gauname $F_1=F_2$,

$$F_3=F_4-F_2 ,$$
$$F_5=F_6-F_4 ,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$F_{2n-1}=F_{2n}-F_{2n-2} .$$

Šias lygybes sudėję turėsime, kad $F_1+F_3+F_5+\cdots+F_{2n-1}=F_{2n}$.

3. Į (3) lygybę $F_1+F_2+\cdots+F_n=F_{n+2}-1$vietoje n įrašykime $2n$. Gausime lygybę

$$F_2+F_4+\cdots+F_{2n}=F_{2n+2}-1.$$

Iš jos atimkime lygybę $F_1+F_3+F_5+\cdots+F_{2n-1}=F_{2n}$. Gausime, kad

$$F_2+F_4+F_6+\dots+F_{2n}=F_{2n+2}-1-F_{2n}.$$

Kadangi $F_{2n+2}-F_{2n}=F_{2n+1}$, tai

$$F_2+F_4+F_6+\dots+F_{2n}=F_{2n+1}-1.$$

4. Į lygybę $F_{n+m}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}$ įrašykime $m=n$. Gausime $F_{2n}=F_{n-1}F_n+F_nF_{n+1}=F_n(F_{n-1}+F_{n+1})$. Kadangi

$$F_n=F_{n+1}-F_{n-1},$$

tai

$$F_{2n}=(F_{n+1}-F_{n-1})(F_{n+1}+F_{n-1})=F_{n+1}^2-F_{n-1}^2.$$

5. Indukcijos pagrindas – teiginys teisingas su $n=2$, t. y. $F_2^2=$ $=F_1F_3+(-1)^3$. Tuo nesunku įsitikinti įrašius į šią lygybę $F_1=F_2=1$, $F_3=2$.

Indukcinis perėjimas – turime įrodyti, kad iš lygybės

$$F_k^2=F_{k-1}F_{k+1}+(-1)^{k+1}$$

(indukcijos prielaida – teiginys teisingas su $n=k$) išplaukia lygybė

$$F_{k+1}^2=F_kF_{k+2}+(-1)^{k+2}$$

(teiginys teisingas su $n=k+1$).

Tuo tikslu prie lygybės $F_k^2=F_{k-1}F_{k+1}+(-1)^{k+1}$ abiejų pusių pridėkime sandaugą F_kF_{k+1}. Gausime lygybę

$$F_k^2+F_kF_{k+1}=F_{k-1}F_{k+1}+F_kF_{k+1}+(-1)^{k+1}.$$

Pertvarkykime ją:

$$F_k(F_k+F_{k+1})=F_{k+1}(F_{k-1}+F_k)+(-1)^{k+1}.$$

Tačiau $F_{k-1}+F_k=F_{k+1}$, $F_k+F_{k+1}=F_{k+2}$, todėl turėsime:

$$F_kF_{k+2}=F_{k+1}^2+(-1)^{k+1}\Rightarrow F_{k+1}^2=F_kF_{k+2}+(-1)^{k+2}.$$

Pagal matematinės indukcijos principą galime teigti, kad teiginys teisingas su visais $n\ge 2$, t. y. kad lygybė

$$F_n^2=F_{n-1}F_{n+1}+(-1)^{n+1}$$

teisinga su visais $n\ge 2$.

6. Indukcijos pagrindas – teiginys teisingas su $n=1$, t. y. $F_1F_2=F_2^2$ (nes $F_1=F_2=1$).

Indukcinis perėjimas – turime įrodyti, kad iš lygybės

$$F_1F_2+F_2F_3+F_3F_4+\ldots+F_{2k-1}F_{2k}=F_{2k}^2$$

(indukcijos prielaida – teiginys teisingas su $n=k$) išplaukia lygybė

$$F_1F_2+F_2F_3+F_3F_4+\ldots+F_{2k-1}F_{2k}+F_{2k}F_{2k+1}+F_{2k+1}F_{2k+2}=$$
$$=F_{2k+2}^2 \qquad (1)$$

(teiginys teisingas su $n=k+1$).

Pasinaudoję prielaidos lygybe gausime:

$$F_1F_2+F_2F_3+F_3F_4+\ldots+F_{2k-1}F_{2k}+F_{2k}F_{2k+1}+F_{2k+1}F_{2k+2}=$$
$$=F_{2k}^2+F_{2k}F_{2k+1}+F_{2k+1}F_{2k+2}=F_{2k}(F_{2k}+F_{2k+1})+F_{2k+1}F_{2k+2}=$$
$$=F_{2k}F_{2k+2}+F_{2k+1}F_{2k+2}=F_{2k+2}(F_{2k}+F_{2k+1})=F_{2k+2}^2,$$

t. y. (1) lygybė teisinga.

Pagal matematinės indukcijos principą galime teigti, kad teiginys teisingas su visais natūraliaisiais skaičiais *n*, t. y. su bet kuriuo natūraliuoju *n* galioja lygybė

$$F_1F_2+F_2F_3+F_3F_4+\ldots+F_{2n-1}F_{2n}=F_{2n}^2.$$

7. Tegu Fibonačio skaičiaus numeris *n* dalijasi iš 5, t. y. $n=5m$. Teiginio įrodymui taikysime matematinės indukcijos metodą *m* atžvilgiu.

Teiginys teisingas su $m=1$, nes $F_5=5$.

Tarkime, kad teiginys teisingas su $m=k$, t. y. F_{5k} dalijasi iš 5. Įrodysime, kad teiginys teisingas su $m=k+1$, t. y. kad $F_{5(k+1)}$ dalijasi iš 5. Pasinaudosime formule $F_{n+m}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}$:

$$F_{5(k+1)}=F_{5k+5}=F_{5k-1}F_5+F_{5k}F_6=5F_{5k-1}+8F_{5k}.$$

Kadangi paskutiniosios sumos abu dėmenys dalijasi iš 5 (antrasis – pagal prielaidą), tai ir $F_{5(k+1)}$ dalijasi iš 5.

Taigi teiginys teisingas su bet kuriuo natūraliuoju *m*, t.y. F_{5m} su bet kuriuo natūraliuoju *m* dalijasi iš 5.

8. Tegu Fibonačio skaičiaus numeris n dalijasi iš 12, t. y. $n = 12 \cdot m$. Teiginio įrodymui taikysime matematinės indukcijos metodą m atžvilgiu.

Teiginys teisingas su $m = 1$, nes $F_{12} = 144$, o 144 dalijasi iš 16.

Tarkime, kad teiginys teisingas su $m = k$, t. y. F_{12k} dalijasi iš 16. Įrodysime, kad teiginys teisingas su $m = k + 1$, t. y. kad $F_{12(k+1)}$ dalijasi iš 16. Pasinaudosime formule $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$:

$F_{12(k+1)} = F_{12k+12} = F_{12k-1}F_{12} + F_{12k}F_{13} = 144 \cdot F_{12k-1} + 233 \cdot F_{12k}$. Kadangi paskutiniosios sumos abu dėmenys dalijasi iš 16 (antrasis – pagal prielaidą), tai ir $F_{12(k+1)}$ dalijasi iš 16.

Taigi teiginys teisingas su bet kuriuo natūraliuoju *m*, t.y. F_{12m} su bet kuriuo natūraliuoju *m* dalijasi iš 16.

9. Įrodydami šį teiginį taikysime prieštaros metodą. Tarkime, kad gretimi Fibonačio skaičiai F_n ir F_{n+1} dalijasi iš skaičiaus $d > 1$. Tada iš *d* dalysis ir $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$, o tuomet ir $F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$. Taip samprotaudami toliau gausime, kad iš d turi dalytis $F_{n-3} = F_{n-1} - F_{n-2}$, $F_{n-4} = F_{n-2} - F_{n-3}$, ..., $F_1 = F_3 - F_2$. Tačiau $F_1 = 1$ ir todėl iš $d > 1$ nesidalija. Gauta prieštara rodo, kad prielaida buvo neteisinga. Taigi gretimi Fibonačio skaičiai yra tarpusavyje pirminiai.

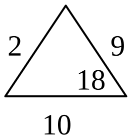
10. Apskaičiavę

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{50} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{50} \approx 12586269024{,}99999999830948...,$$

gauname, kad F_{50}=12586269025.

ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. a)



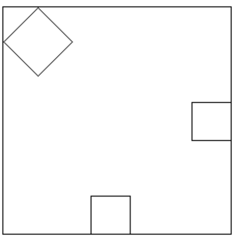
$$18 = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10}{10}$$

b)

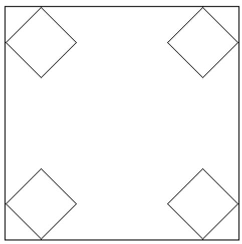
2		
3	4	5

Kiekvienoje kitoje (iš kairės į dešinę) figūroje skaičiai perstumiami laikrodžio rodyklės kryptimi per tiek langelių, kokia yra skaičiaus reikšmė.

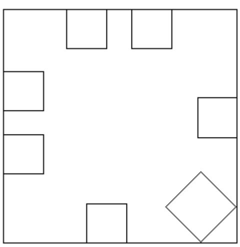
2. a)



b)

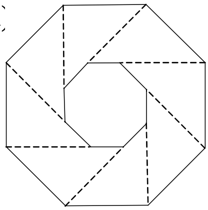


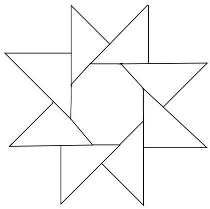
c)



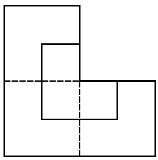
3. Šalia 11 testamentu paliktų mašinų reikia pastatyti dar vieną, bet kurią, tarkim, tuo metu važiavusią pro šalį, tuomet turėsime 12 mašinų. Po to pusę, arba 6 mašinas, reikia atiduoti vyriausiajam sūnui, ketvirtį, arba 3 mašinas – viduriniajam ir vieną šeštąją, arba 2 mašinas – jauniausiajam sūnui. $6+3+2=11$ mašinų. O šalia jų stovėjusi mašina gali ramiai važiuoti toliau!

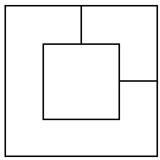
4. a)





b)





5. Tarkime, kad pirmasis apklausiamasis (pažymėkime jį A) yra čiabuvis, tuomet jis ir prisistato esąs čiabuvis. Antrasis apklausiamasis (pažymėkime jį B) sako teisybę, o trečiasis (pažymėkime jį C) – meluoja.

Jeigu A – kolonistas, tai jis prisistato esąs čiabuvis. B ir šiuo atveju sako teisybę, o C – meluoja. Vadinasi, antrasis liudytojas yra čiabuvis, o trečiasis – kolonistas.

6. Šio triuko esmė tokia: nurodytas skirtumas turi skaitinę šaknį, lygią 9. Kai jums sakomi skaičiai, jūs juos mintyse turite sudėti, kiekvieną kartą imdami tik liekaną moduliu 9. Kai bus pasakytas paskutinis skaičius, jūs iš 9 atimate savo gautąjį rezultatą ir sužinote, koks skaičius buvo išbrauktas. (Jei jūsų gautas rezultatas lygus 9, tai buvo išbrauktas skaičius 9.)

7.

Profesija \ Pavardė	Kalvelis	Dailidė	Puodžiūnas	Šikšnius	Stiklius
Kalvis			O		
Dailidė					O
Puodžius	O				
Šikšnius		O			
Stiklius				O	

8. Jei keliautojas sakė teisybę, jį turėjo praleisti į salą, bet kad jo teiginys taptų teisybe – reikia pakarti keliautoją, bet kariama tik sumelavus.

Jei keliautojo teiginys – melas, jį reikia pakarti pagal įstatymą, bet pakorus išaiškėtų, kad keliautojas sakė teisybę, o tuomet jį reikia praleisti į salą.

Matome, kad abiem atvejais reikia atlikti vienas kitam prieštaraujančius veiksmus, kas yra neįvykdoma. Gavome paradoksą.

9.

A	B	C	$A\&B$	I $(A \& B) \supset C$	$A \supset B$	$\neg(A \supset B)$
t	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*	*n*
t	*t*	*n*	*t*	*n*	*t*	*n*
t	*n*	*t*	*n*	*t*	*n*	*t*
n	*t*	*t*	*n*	*t*	*t*	*n*
t	*n*	*n*	*n*	*t*	*n*	*t*
n	*t*	*n*	*n*	*t*	*t*	*n*
n	*n*	*t*	*n*	*t*	*t*	*n*
n	*n*	*n*	*n*	*t*	*t*	*n*

$\neg B$	$C \vee \neg B$	II $\neg(A \supset B) \& (C \vee \neg B)$	I~II
n	*t*	*n*	*n*
n	*n*	*n*	*t*
t	*t*	*t*	*t*
n	*t*	*n*	*n*
t	*t*	*t*	*t*
n	*n*	*n*	*n*
t	*t*	*n*	*n*
t	*t*	*n*	*n*

Kadangi paskutiniame lentelės stulpelyje yra įvairios teisingumo reikšmės, tai teiginys $[(A \& B) \supset C] \sim [\neg(A \supset B) \& (C \vee \neg B)]$ yra išpildomas.

10. Teiginį „iš stoties išvyksta traukinys *X*“ pažymėkime raide *x* (čia *X* = *A*, *B*, *C*, o *x* = *a*, *b*, *c*), tuomet uždavinio sąlygą teiginių logikos simboliais galėsime užrašyti taip:

I) $(a \& b) \supset c$, II) $(b \& c) \supset a$.

Mums reikia patikrinti, ar, esant patenkintoms I ir II sąlygoms, bus patenkinta ir sąlyga

III) $(a \& c) \supset b$,

t.y., išvykstant traukiniams *A* ir *C*, iš stoties turi išvykti ir traukinys *B*. Visų trijų sąlygų teisingumas yra ekvivalentus teiginio

$$Q{:}\{[\ (a \& b) \supset c\,] \& [\,(b \& c) \supset a\,]\} \supset [\,(a \& c) \supset b\,]$$

teisingumui. Sudarykime šio teiginio teisingumo lentelę:

a	*b*	*c*	*a*&*b*	I $(a \& b) \supset c$	*b*&*c*	II $(b \& c) \supset a$
t	*t*	*t*	*t*	***t***	*t*	***t***
t	*t*	*n*	*t*	*n*	*n*	*t*
t	*n*	*t*	*n*	***t***	*n*	***t***
n	*t*	*t*	*n*	*t*	*t*	*n*
t	*n*	*n*	*n*	***t***	*n*	***t***
n	*t*	*n*	*n*	***t***	*n*	***t***
n	*n*	*t*	*n*	***t***	*n*	***t***
n	*n*	*n*	*n*	***t***	*n*	***t***

I&II	*a*&*c*	III $(a \,\&\, c) \supset b$	*Q* I&II⊃III
t	*t*	***t***	*t*
n	*n*	*t*	*t*
t	*t*	***n***	*n*
n	*n*	*t*	*t*
t	*n*	***t***	*t*
t	*n*	***t***	*t*
t	*n*	***t***	*t*
t	*n*	***t***	*t*

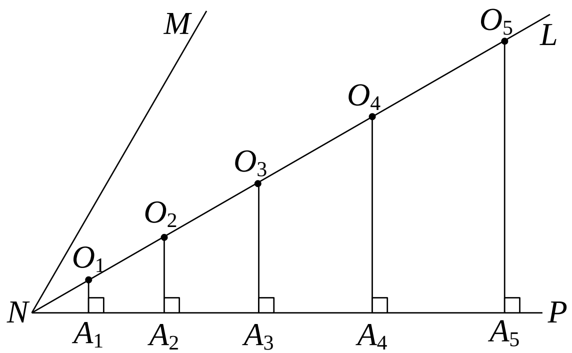
SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Sakykime, kad $\angle MNP = 60^\circ$, visų sąlygoje minimų apskritimų centrai O_1, O_2, O_3, O_4 ir O_5 yra to kampo pusiaukampinėje *NL* (1 pav.). Iš taškų O_1, O_2, O_3, O_4 ir O_5 į kampo kraštinę *NP* nuleiskime statmenis O_1A_1, O_2A_2, O_3A_3, O_4A_4, O_5A_5, tai apskritimų spinduliai r_1, r_2, r_3, r_4 ir r_5 lygūs minėtų atkarpų ilgiams. Kadangi $\angle O_1NA_1 = 30^\circ$, tai

$NO_1 = 2A_1O_1 = 2r_1$,

$NO_2 = 2r_2$. Kita vertus

$NO_2 = AO_1 + O_1O_2 = 2r_1 + r_1 + r_2$.



1 pav.

Iš lygties $2r_2 = 3r_1 + r_2$ randame $r_2 = 3r_1$. Analogiškai

$NO_3 = 2r_3 = NO_2 + r_2 + r_3 = 2r_2 + r_2 + r_3,$

t. y. $r_3 = 3r_2 = 9r_1,$

$NO_4 = 2r_4 = 2r_3 + r_3 + r_4,$

$r_4 = 3r_3 = 27r_1,$

$NO_5 = 2r_5 = 2r_2 + r_4 + r_5,$

$r_5 = 3r_4 = 81r_1.$ Tada

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5}{S_1} = \frac{\pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2)}{\pi r_1^2} =$$

$$= 1 + 3^2 + 9^2 + 27^2 + 81^2 = 7381.$$

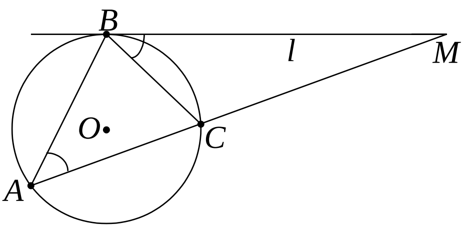
Ats.: 7 381.

2. Iš trikampių *MAB* ir *MBC* panašumo (2 pav.) seka

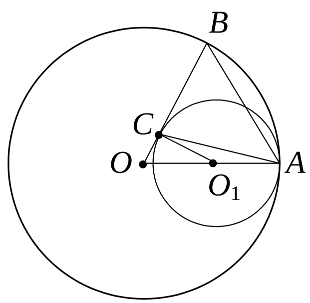
$\frac{MA}{MB} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{BC}.$ Tada

$\frac{MA}{MC} = \frac{MA}{MB} \cdot \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB}{BC} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = k^2.$

Ats.: k^2.



2 pav.



3 pav.

3. Sakykime, kad taškas O_1 yra mažesniojo apskritimo centras (3 pav.). Jei $\angle BOA = \varphi$, o tiesės O_1C ir OB statmenos, tai

$\angle CO_1O = 90^\circ - \varphi,\ \angle OAB = \angle OBA = \frac{1}{2}(180^\circ - \varphi) = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}.$

Tuomet

$\angle CO_1A = 180^\circ - \angle OO_1C = 90^\circ + \varphi,$

$$\angle CAO_1 = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CO_1A) = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}.$$

Iš čia $\angle CAB = \angle OAB - \angle CAO_1 = (90^\circ - \frac{\varphi}{2}) - \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) = 45^\circ.$

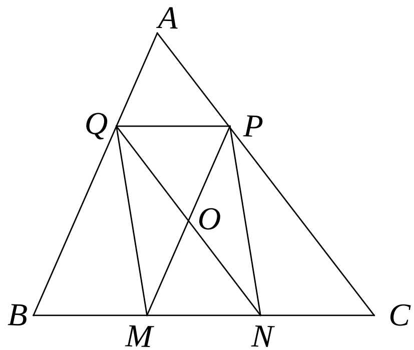
Ats.: 45°.

4. Sakykime, kad *MNPQ* – lygiagretainis, kurio kraštinė *MN* yra trikampio *ABC* kraštinėje *BC*, viršūnės *P* ir *Q* yra atitinkamai kraštinėse *AC* ir *AB*, be to $MP \| AB,\ NQ \| AC$ (4 pav.). Pagal sąlygą $MN = 3,\ MP = 6,\ NP = 5.$

Kadangi keturkampiai *BQPM*, *MQPN* ir *NQPC* yra lygiagretainiai, tai $BM = QP = MN = NC$, t. y. $BC = 9$. Kadangi lygiagretainio kraštinių kvadratų suma lygi jo įstrižainių kvadratų sumai, tai iš lygybės

$$2\cdot 5^2 + 2\cdot 3^2 = 6^2 + QN^2$$

randame antrosios įstrižainės ilgį $QN = 4\sqrt{2}$. Iš trikampių *ABC* ir *MPC* panašumo turime



4 pav.

$$\frac{AB}{MP} = \frac{BC}{MC},\ \text{t. y. } AB = \frac{BC\cdot MP}{MC} = \frac{9\cdot 6}{6} = 9.$$

Analogiškai iš trikampių *ABC* ir *QBN* panašumo gauname, kad

$$\frac{AC}{BC} = \frac{QN}{BN},\ \text{t. y. } AC = \frac{QN\cdot BC}{BN} = 6\sqrt{2}.$$

Ats.: $AB = BC = 9,\ AC = 6\sqrt{2}.$

5. Apie trikampį *APC* apibrėžkime apskritimą, kuris atkarpą *PB* kerta taške *M* (5 pav.) Tuomet $\angle PAC = \angle PMC,\ \ \angle CPM = \angle CAM$.

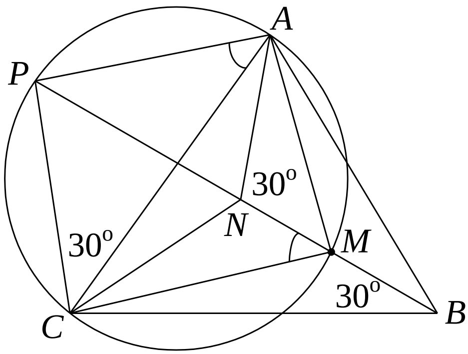
Kaip ir 4 pavyzdyje nubrėžiame pusiaukampinę AN. Kadangi $\angle ACB = \angle ABC = 50^\circ$, tai $\angle MBA = 20^\circ$, todėl

$$\angle ANB = 180^\circ - \angle NAB - \angle NBA = 180^\circ - 40^\circ - 20^\circ = 120^\circ.$$

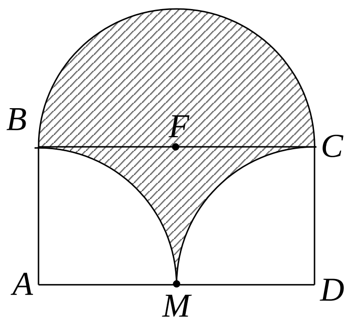
Trikampiai ACN ir ABN yra lygūs, nes $AC = AB$, AN – bendra, $\angle CAN = \angle BAN$.

Kadangi $CN = NB$, tai $\angle NBC = \angle NCB = 30^\circ$, todėl $\angle CNB = 120^\circ$. Taigi ir $\angle ANC = 120^\circ$, Kadangi $\angle AMP = \angle ACP = 30^\circ$, tai $\angle NAM = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ$. Todėl trikampis ANM – lygiašonis ($AN = NM$) ir trikampiai CNA ir CNM lygūs. Iš jų lygumo seka, kad $\angle CAN = \angle CMN = 40^\circ$, todėl $\angle CAP = \angle CMP = 40^\circ$.

Ats.: 40°.



5 pav.



6 pav.

6. Figūra, kurios plotą skaičiuojame, pavaizduota 6 pav. Jei taškas F yra atkarpos BC vidurio taškas, tai pusskritulio, kurio skersmuo – atkarpa BC, plotas lygus

$$S_1 = \frac{\pi \cdot FB^2}{2} = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 2\pi.$$

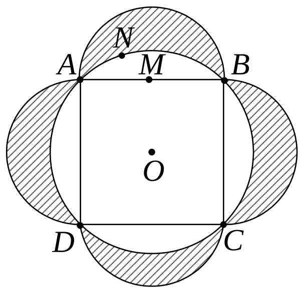
Iš stačiakampio ploto atėmę dviejų skritulių ketvirtadalių plotus, rasime likusios ieškomosios figūros dalies plotą

$$S_2 = 2\cdot 4 - 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2 = 8 - 2\pi.$$

Tada ieškomasis plotas $S = S_1 + S_2 = 8.$

Ats.: 8.

7. 7 pav. nubraižytas kvadratas *ABCD*, apie kurį apibrėžtas apskritimas. Sakykime, kad kraštinės *AB* vidurio taškas yra *M*, o taške *O* susikerta kvadrato įstrižainės. Vieno „mėnulio“ plotą rasime iš pusskritulio, kurio centras – taškas *M*, o spindulys $\frac{1}{2}$, ploto $S_1 = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}$ atėmę skritulinės nuopjovos *ANB* plotą S_2, kuris lygus išpjovos *AOB* ploto ir trikampio *AOB* ploto skirtumui. Kadangi išpjovos *AOB* centrinis kampas *AOB* yra statusis, tai jos plotas lygus



7 pav.

$\frac{\pi\cdot AO^2\cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}\pi\cdot AO^2 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\pi = \frac{\pi}{8}.$ Trikampio *AOB* plotas

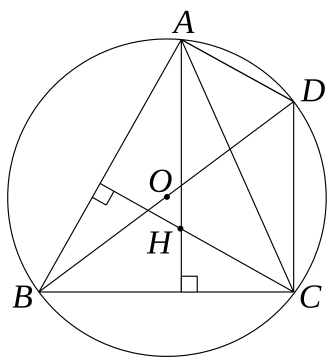
lygus $\frac{1}{2}AO\cdot BO = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$

Taigi $S_2 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4},$ ir vieno „mėnulio“ plotas lygus

$$S_1 - S_2 = \frac{\pi}{8} - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

Tada keturių „mėnulių“ plotas lygus 1.

Ats.: 1.

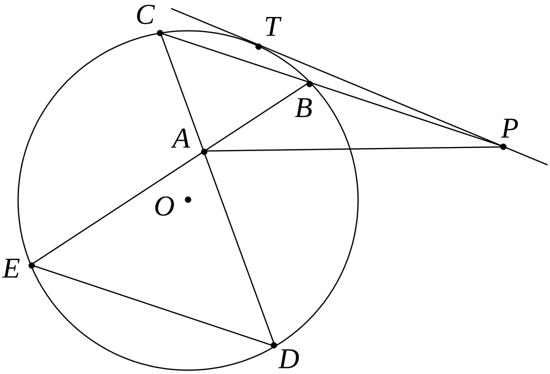


8 pav.

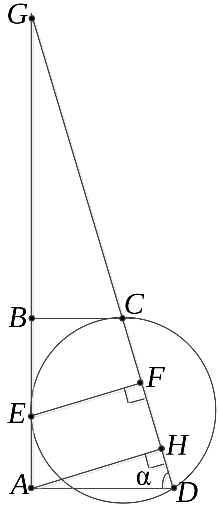
8. Sakykime, kad trikampio *ABC* aukštinės kertasi taške *H*, o atkarpa *BD* yra apibrėžto apie trikampį apskritimo skersmuo (8 pav.). Kampas *BCD* yra statusis, todėl $CD^2 = BD^2 - BC^2$, t. y. $CD = 12$. Kadangi tiesės *DC* ir *AH* yra statmenos tiesei *BC*, tai $DC \parallel AH$. Kadangi kampas *DAB* irgi statusis, o tiesė *CH* – trikampio aukštinė, tai tiesės *DA* ir *CH* yra statmenos tiesei *AB*, t. y. $DA \parallel CH$. Taigi keturkampis *ADCH* yra lygiagretainis, todėl $AH = DC = 12$.

Ats.: 12.

9. Kadangi tiesė *PC* – apskritimo kirstinė, tai $PT^2 = PB \cdot PC$ (9 pav.), arba $\frac{PC}{PT} = \frac{PT}{PB}$. Kadangi $PT = PA$, tai $\frac{PC}{AP} = \frac{AP}{PB}$. Iš čia seka, kad trikampiai *APC* ir *BPA* panašieji, taigi $\angle BAP = \angle ACP$. Bet $\angle ACP = \angle DEB$, todėl $\angle BAP = \angle DEB$, t. y. tiesės *ED* ir *AP* – lygiagrečios.



9 pav.



10 pav.

10. Sakykime, kad trapecijos *ABCD* šoninių kraštinių *AB* ir *CD* tęsiniai kertasi taške *G* (10 pav.). Iš taškų *A* ir *E* nuleiskime statmenis *AH* ir *EF* į tiesę *CD*, pažymėkime $\angle CDA = \alpha$. Iš stačiųjų trikampių *AGD*, *AHD* ir *BGC* randame

$$GD = \frac{AD}{\cos\alpha} = \frac{4}{\cos\alpha},$$

$$AG = AD\,\mathrm{tg}\alpha = 4\mathrm{tg}\alpha,$$
$$GC = \frac{BC}{\cos\alpha} = \frac{3}{\cos\alpha},$$
$$AH = AG\cos\alpha = 4\sin\alpha.$$

Pagal apskritimo liestinių ir kirstinių, nubrėžtų iš vieno taško, savybę gauname, kad $GE^2 = GC \cdot GD = \frac{12}{\cos^2\alpha}$, t. y. $GE = \frac{2\sqrt{3}}{\cos\alpha}$.
Iš trikampių *AHG* ir *EFG* panašumo išplaukia lygybė $\frac{AH}{EF} = \frac{AG}{EG}$, t. y. $EF = \frac{AH \cdot EG}{AG}$. Įrašę surastas *AH*, *EF* ir *AG* reikšmes gauname $EF = 2\sqrt{3}$.

Ats.: $2\sqrt{3}$.

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Randame lygties apibrėžimo sritį:

$$Df:\ \begin{cases} -x^2 + 3x - 2 \ge 0, \\ x^2 - 4x + 3 \ge 0, \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2) \le 0, \\ (x-1)(x-3) \ge 0, \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 2, \\ x \le 1 \text{ arba } x \ge 3, \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Taigi $Df = \{1\}$. Patikrinę įsitikiname, kad $x = 1$ yra lygties sprendinys.

Ats.: 1.

2. Randame nelygybės apibrėžimo sritį:

$$DN: \quad \begin{cases} \sqrt{2}-\sqrt{x} \geq 0, \\ x^2 - x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ x \leq 1 \text{ arba } x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Taigi $DN = \{2\}$. Į duotąją nelygybę įrašę $x = 2$, turime $0 < 1$. Vadinasi $x = 2$ yra nelygybės sprendinys.

Ats.: 2.

3. Kadangi kairėje lygties pusėje esanti funkcija apibrėžimo srityje $DL = [0; 4]$ yra nei mažėjanti, nei didėjanti, todėl negalima taikyti monotoninių funkcijų savybių. Tirsime, kokia didžiausią ar mažiausią reikšmes gali įgyti abiejose lygties pusėse esančios funkcijos.

Tegul $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x} > 0$. Tada

$$f^2(x) = 4 + 2\sqrt{4x - x^2} = 4 + 2\sqrt{4-(x-2)^2} \leq 4 + 2 \cdot 2 = 8.$$

Iš čia: $f(x) \leq \sqrt{8}$. Lygybė galima tik tada, kai $x = 2$.

Kadangi $g(x) = x^2 - 4x + 4 + 2\sqrt{2} = (x-2)^2 + \sqrt{8} \geq \sqrt{8}$; lygybė galima tik tada, kai $x = 2$.

Taigi $f(2) = g(2)$; t. y. $x = 2$ yra lygties sprendinys.

Ats.: 2.

4. Kadangi $f(x) = \dfrac{32x^2}{x^4+16} = \dfrac{32}{x^2 + \dfrac{16}{x^2}} \leq \dfrac{32}{2\sqrt{x^2 \cdot \dfrac{16}{x^2}}} = 4,$

o $g(x) = x^2 - 6x + 13 = (x-3)^2 + 4 \geq 4$, tai lygtis ekvivalenti lygčių sistemai:

$$\begin{cases} \dfrac{32x^2}{x^4+16} = 4, \\ (x-3)^2 + 4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4, \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2; x = 2, \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$$

Kadangi ši sistema neturi sprendinių, tai sprendinių neturi ir duotoji lygtis.

Ats.: $\varnothing$.

5. Lygties apibrėžimo sritis yra visa realiųjų skaičių aibė. Kairiąją lygties pusę pažymėkime $f(x)$, o dešinę – $g(x)$. Pasinaudoję dviejų skaičių aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybe, gauname:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 9} + \frac{9}{\sqrt{x^2 + 2x + 9}} \geq$$

$$\geq 2\sqrt{\sqrt{x^2 + 2x + 9} \cdot \frac{9}{\sqrt{x^2 + 2x + 9}}} = 6;$$

lygybė galima tik tada, kai $\sqrt{x^2 + 2x + 9} = \frac{9}{\sqrt{x^2 + 2x + 9}}$, t. y. kai $x = 0$ arba $x = -2$.

Aišku, kad $g(x) = 2 - 4x - x^2 = -(x+2)^2 + 6 \leq 6;$ lygybė galima tik tada, kai $x = -2$.

Taigi lygties kairiosios pusės mažiausia reikšmė lygi 6, o dešiniosios pusės didžiausia reikšmė lygi 6; šios reikšmės įgyjamos taške $x = -2$. Vadinasi, $x = -2$ yra vienintelis sprendinys.

Ats.: –2.

6. Nelygybės apibrėžimo sritis $D(N) = \left[-\frac{4}{3}; 16\right]$. kai $x \in \left[-\frac{4}{3}; 0\right]$, tai $\sqrt{3x+4} \geq 0$, $\sqrt[4]{16-x} \geq 2$. Kai $x \in [0; 16]$, tai $\sqrt{3x+4} \geq 2$, $\sqrt[4]{16-x} \geq 0$. Taigi, kai $x \in \left[-\frac{4}{3}; 16\right]$, $\sqrt{3x+4} + \sqrt[4]{16-x} \geq 2$.

Kadangi
$4x - x^2 - 3 = -(x^2 - 4x + 4 - 4) - 3 = -(x-2)^2 + 1 \leq 1,$ tai nelygybė sprendinių neturi.

Ats.: $\varnothing$.

7. Lygties apibrėžimo sritis yra $D(L) = [-2; 6]$. Kadangi funkcijos $f_1(x) = \sqrt{x+2}$ ir $f_2(x) = -\sqrt{6-x}$ apibrėžimo srityje yra didėjančios, tai funkcija

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}$$

šioje srityje yra didėjanti. Funkcija $g(x) = x^2 - 14x + 24$ intervale [–2; 6] yra mažėjanti funkcija. Taigi lygtis gali turėti daugiausia vieną sprendinį. Nesunku įsitikinti, kad $x = 2$ yra šios lygties sprendinys.

Ats.: 2.

8. Nelygybės apibrėžimo sritis yra $D(N) = [-2; 8]$. Kadangi funkcija $f(x) = \sqrt{8-x} - \sqrt{x+2}$ apibrėžimo srityje yra mažėjanti, o funkcija $g(x) = x^2 + 4x + 5$ yra didėjanti ir $f(-1) = g(-1)$, tai nelygybė teisinga su visomis $x \in [-1; 8]$ reikšmėmis.

Ats.: [–1; 8].

9. Nubrėžiame funkcijos

$$f(x) = |\,2x^2 - 5x - 7\,| = \left|2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{81}{8}\right| \text{ grafiką.}$$

Iš brėžinio matome, kad:

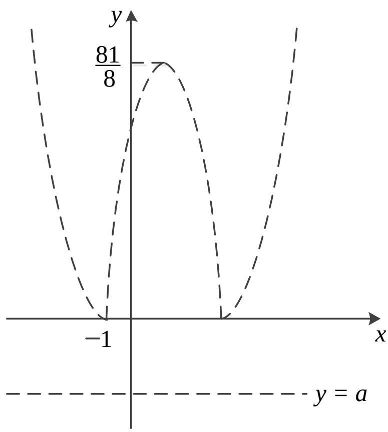
1) kai $a < 0$, lygtis sprendinių neturi;

2) kai $a = 0$, lygtis turi 2 sprendinius;

3) kai $0 < a < \frac{81}{8}$, lygtis turi 4 sprendinius;

4) kai $a = \frac{81}{8}$, lygtis turi 3 sprendinius;

5) kai $a > \frac{81}{8}$, lygtis turi 2 sprendinius.



10. Jeigu $x_0 \neq 0$ yra šios lygties sprendinys, tai $(-x_0)$ taip pat yra sprendinys. Kad lygtis turėtų tik 3 skirtingus sprendinius, vienas sprendinys turi būti 0. Nulis yra lygties sprendinys, kai $a^2 = 4$, t. y. $a = -2$ arba $a = 2$.

Tada lygtis yra tokia: $x^2 - 5|x| = 0$. Kai $x > 0$, jos sprendinys yra $x = 5$; kai $x < 0$, jos sprendinys yra $x = -5$.

Ats.: $a = -2$, $a = 2$; –5; 0; 5.

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

1	2	3	4
10 %	(7; 42), (42; 7), (18; 24), (24; 8), (9; 18), (18; 9), (10; 15), (15; 10), (12; 12)	(–∞; –1)	12 cm, 6 cm

Išleistose LJMM knygelėse buvo nagrinėtos tokios temos:

I KNYGA

I. J. Šinkūnas. *Kvadratinis trinaris.*
II. G. Stepanauskas. *Rekurenčiosios sekos.*
III. R. Kašuba. *Elementarinės matematikos uždavinių sprendimo metodai.*
IV. A.Skūpas. *Funkcija*.
V. V. Pekarskas. *Sveikoji ir trupmeninė skaičiaus dalis. Jų savybės.*
VI. P. Survila. *Kombinatorikos ir tikimybių skaičiavimo pradmenys.*
VII. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. *Grafai.*

II KNYGA

I. J. Šinkūnas, A. Urbonas. *Funkcija.*
II. E. Mazėtis. *Apskritimų geometrija. Įbrėžtiniai ir apibrėžtiniai daugiakampiai. Taisyklingieji daugiakampiai.*
III. B. Vasylienė. *Skaičiaus modulis algebros uždaviniuose.*
IV. J. Šinkūnas. *Figūrų panašumas. Talio teorema ir jos taikymai.*
V. D. Jurgaitis. *Matematinės indukcijos metodas.*
VI. A. Urbonas. *Lygčių, nelygybių bei jų sistemų ekvivalentumas.*
VII. B. Grigelionis. *Urnų schemos ir baigtinės Markovo grandinės.*
VIII. A. Juozapavičius, J. Šinkūnas. *Koordinačių sistemos. Žemėlapiai.*

III KNYGA

I. E. Stankus. *Skaičių dalumas.*
II. R. Skrabutėnas. *Grandininės trupmenos.*
III. V. Vitkus. *Vidurkiai.*
IV. E. Mazėtis. *Vektoriai.*
V. J. Šinkūnas. *Plokščių figūrų plotai.*
VI. S. Staknienė. *Iracionaliosios lygtys ir nelygybės*.
VII. A. Apynis, E. Stankus. *Trigonometrinės lygtys ir nelygybės.*
VIII. G. Stepanauskas. *Sekos.*

IV KNYGA

I. G. Stepanauskas. *Skaičiavimo sistemos.*
II. P. Vaškas. *Antrosios eilės kreivės.*
III. L. Maliaukienė. Įdomioji logika.
IV. A. Urbonas. *Atvirkštinės funkcijos.*
V. A. Apynis. *Optimizavimo uždaviniai.*
VI. P. Survila. *Kombinatorikos pradmenys.*
VII. P. Survila. *Tikimybių teorijos pradmenys.*
VIII. A. Nagelė. *Kompleksiniai skaičiai.*

V KNYGA

I. O. Jablonskienė. *Planimetrijos uždaviniai.*
II. V. Pekarskas. *Antrosios eilės kreivės.*
III. G. Stepanauskas. *Skaičių dalikliai.*
IV. V. Stakėnas. *Šifrai ir skaičiai.*
V. A. Apynis. *Tiesinių lygčių sistemos.*
VI. R. Skrabutėnas. *Algebrinės lygtys.*
VII. V. Vitkus. *Brėžimo uždaviniai.*
VIII. R. Kašuba. *Sudėtis, atimtis ir daugyba stulpeliu bei dalyba kampu.*

VI KNYGA

I. A. Bakštys. *Finansų matematika.*
II. E. Mazėtis. *Geometrinės transformacijos.*
III. B. Galbogienė. *Funkcijos reikšmių sritis.*
IV. V. Stakėnas. *Paskalio trikampis.*
V. A. Apynis. *Tiesinių lygčių sistemų taikymo uždaviniai.*
VI. L. Narkevičius. *Invariantų metodas.*
VII. J. Šinkūnas. *Tiesinės rekurenčiosios sekos.*
VIII. A. Apynis. *Uždaviniai su parametru.*

VII KNYGA

I. E. Stankus. *Skaičių dalumas, dalumo požymiai.*
II. E. Mazėtis. *Nelygybės geometrijoje.*
III. J. Šinkūnas. *Kraštinio elemento principas.*
IV. A. Apynis, E. Stankus. *Indukcijos principas.*
V. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. *Grafai. Oilerio formulė.*
VI. J. Vainavičienė. *Geometrinės vietos.*
VII. A. Apynis. *Aibės, taikymo uždaviniai.*
VIII. A. Skūpas. *Išvestinės ir integralai.*

VIII KNYGA

I. J. Šinkūnas. *Vidurkiai ir jų taikymai.*
II. I. Bagdonienė. *Dirichlė principas.*
III. E. Stankus. *Diofantinės lygtys.*
IV. L.Papreckienė. *Daugianarių dalumas.*
V. A. Apynis, J. Šinkūnas. *Niutono binomas.*
VI. E. Tumėnaitė. *Logaritminės ir rodiklinės lygtys, nelygybės ir tapatybės.*
VII. E. Mazėtis. *Stereometrijos uždaviniai.*
VIII. A. Apynis. *Trigonometriniai uždaviniai.*

IX KNYGA

I. A. Urbonas. *Dirichlė principas.*
II. A. Apynis. *Neapibrėžtųjų koeficientų metodas.*
III. A. Apynis. *Sumavimas.*
IV. E. Tumėnaitė. *Logaritminės lygtys ir nelygybės.*
V. E. Mazėtis. *Geometrijos uždavinių sprendimo analiziniai metodai.*
VI. E. Stankus, J. Šinkūnas. *Pilnosios tikimybės formulė.*
VII. E. Mazėtis. *Vektoriai erdvėje.*
VIII. E. Stankus, J. Šinkūnas. *Progresijos.*

X KNYGA

I. A. Apynis, E. Stankus. *Racionaliosios lygtys*.
II. A. Urbonas. *Nestandartiniai uždaviniai.*
III. V. Pekarskas. *Trigonometrinių keitinių taikymas sprendžiant uždavinius.*
IV. A. Apynis. *Nelygybės tekstiniuose uždaviniuose.*
V. J. Šinkūnas. *Kompleksiniai skaičiai ir jų taikymas.*
VI. E. Mazėtis. *Kai kurios planimetrijos teoremos ir jų taikymai.*
VII. E. Stankus. *Bernulio formulė ir jos taikymas.*
VIII. E. Mazėtis. *Briaunainiai.*

XI KNYGA

I. E. Tumėnaitė. *Kvadratinės lygtys tekstiniuose uždaviniuose.*
II. A. Apynis. *Bezu teorema*.
III. J. Šinkūnas. *Masių centras ir jo taikymas*.
IV. E. Stankus. *Lyginiai ir jų taikymas*
V. A. Apynis. *Funkcinės lygtys.*
VI. E. Mazėtis. *Trigonometrijos taikymas g*eometrijoje.
VII. J. Šinkūnas. *Iškilosios funkcijos ir nelygybės*.
VIII. E. Stankus. *Priklausomi ir nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.*

XII KNYGA

I. R. Skrabutėnas. *Euklido algoritmas ir jo taikymas*.
II. J. Šinkūnas. *Lygčių ir nelygybių sprendimas taikant funkcijų savybes.*
III. A. Apynis. *Simetrinių lygčių sistemos.*
IV. R. Kašuba. *Svėrimo ir pilstymo uždaviniai*.
V. E. Stankus. *Pitagoro ir herono skaičių trejetai*.
VI. J. Šinkūnas. *Sąlyginės tapatybės ir nelygybės*.
VII. E. Mazėtis. *Keturkampiai*.
VIII. A. Apynis. *Geriausio varianto pasirinkimo uždaviniai.*

XIII KNYGA

I. A. Apynis. *Kvadratinio trinario savybių taikymo uždaviniai*.
II. E. Mazėtis. *Apskritimų geometrija.*
III. G. Stepanauskas. *Pirminiai skaičiai*.
IV. R. Kašuba. *Kaip spręsti, kai nelabai žinai kaip?*
V. J. Šinkūnas. *Simetrinės tapatybės, lygtys ir nelygybės*.
VI. V. Pekarskas. *Nelygybės su parametrais*.
VII. E. Stankus. *Atsitiktiniai dydžiai*.
VIII. E. Mazėtis. *Sukiniai*.

XIV KNYGA

I. A. Apynis, J. Šinkūnas. *Procentų uždaviniai*.
II. J. Jankauskas. *Kaip spręsti lygtis sveikaisiais skaičiais?*
III. E. Mazėtis. *Ekstremumai geometrijoje.*
IV. A. Novikas. *Homotetija.*
V. R. Kašuba. *Turnyrai ir lentelės.*
VI. E. Stankus. *Sekos ir jų ribos.*
VII. E. Mazėtis. *Trigonometrijos taikymas stereometrijoje.*
VIII. G. Stepanauskas. *Monte Karlo metodas.*