LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Jaunajam matematikui

16

2013–2015 mokslo metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Vilnius, 2016

Leidinio sudarytojai:
Antanas APYNIS
Edmundas MAZĖTIS
Eugenijus STANKUS
Juozas ŠINKŪNAS

Leidinį maketavo Kristina LYNDIENĖ

TURINYS

PRATARMĖ 4
METODINĖ MEDŽIAGA IR UŽDUOTYS 5
A. Apynis, E. Mazėtis, E. Stankus, J. Šinkūnas.
STOJAMOJI UŽDUOTIS 6
I. **E. Stankus, J. Šinkūnas.** VIJETO TEOREMA IR JOS TAIKYMAS 8
PIRMOJI UŽDUOTIS 15
II. **E. Mazėtis.** STAČIŲJŲ TRIKAMPIŲ UŽDAVINIAI 17
ANTROJI UŽDUOTIS 22
III. **A. Gackienė.** IRACIONALIOSIOS LYGTYS IR NELYGYBĖS . 24
TREČIOJI UŽDUOTIS 34
IV. **R. Kašuba.** UŽDAVINIŲ SPRENDIMO STRATEGIJA „GRĮŽK ATGAL“ 36
KETVIRTOJI UŽDUOTIS 47
V. **V. Stakėnas.** GEOMETRINIAI SKAIČIAI 51
PENKTOJI UŽDUOTIS 53
VI. **A. Novikas.** PAPRASČIAUSIOS FUNKCINĖS LYGTYS 56
ŠEŠTOJI UŽDUOTIS 66
VII. **E. Mazėtis.** GEOMETRINIŲ UŽDAVINIŲ ALGEBRINIS SPRENDIMO METODAS 68
SEPTINTOJI UŽDUOTIS 74
VIII. **D. Pumputis.** BAIGTINIŲ POPULIACIJŲ STATISTIKOS UŽDAVINIAI 76
AŠTUNTOJI UŽDUOTIS 95
A. Apynis, E. Stankus, E. Mazėtis, J. Šinkūnas. BAIGIAMOJI UŽDUOTIS 99
UŽDUOČIŲ SPRENDIMAI 101
Stojamosios užduoties sprendimas 102
Pirmosios užduoties sprendimas 106
Antrosios užduoties sprendimas 111
Trečiosios užduoties sprendimas 116
Ketvirtosios užduoties sprendimas 122
Penktosios užduoties sprendimas 126
Šeštosios užduoties sprendimas 128
Septintosios užduoties sprendimas 132
Aštuntosios užduoties sprendimas 139
Baigiamosios užduoties atsakymai 143

PRATARMĖ

Šioje šešioliktoje Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos knygelėje „Jaunajam matematikui“ yra pateikta 2013–2015 mokslo metais nagrinėtų temų metodinė medžiaga, užduotys LJMM klausytojams ir jų sprendimai.

Knygelės turinį sudaro šios temos: Vijeto teorema ir jos taikymas (E. Stankus, J. Šinkūnas), stačiųjų trikampių uždaviniai (E. Mazėtis), iracionaliosios lygtys ir nelygybės (A. Gackienė), uždavinių sprendimo strategija „grįžk atgal“ (R. Kašuba), geometriniai skaičiai (V. Stakėnas), paprasčiausios funkcinės lygtys (A. Novikas), geometrinių uždavinių algebrinis sprendimo metodas (E. Mazėtis), baigtinių populiacijų statistikos uždaviniai (D. Pumputis). Skaitytojas taip pat ras 2013 metų stojamąją užduotį ir jos sprendimą bei 2015 metų baigiamosios užduoties pavyzdį.

Kad būtų lengviau naudotis knygelėmis „Jaunajam matematikui“, šio leidinio paskutiniuose puslapiuose yra įdėtas ankstesnių penkiolikos LJMM mokslo metų temų sąrašas.

Antanas Apynis
Edmundas Mazėtis
Eugenijus Stankus
Juozas Šinkūnas

Metodinė medžiaga
ir užduotys

STOJAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Edmundas Mazėtis, Juozas Šinkūnas (Lietuvos edukologijos universitetas)

1. Išskaidykite dauginamaisiais reiškinį

$$x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013.$$

2. Gamybos brokas sudarė 5 % produkcijos. Po gamybos reorganizavimo ir techninių patobulinimų, gamybos brokas sudarė tik 1 % produkcijos. Keliais procentais sumažėjo gamybos brokas?

3. Tegu x_1 ir x_2 yra lygties $x^2 - 6x + 1 = 0$ sprendiniai. Apskaičiuokite $x_1^4 + x_2^4$.

4. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 9, \\ xy + 2y^2 = 18. \end{cases}$$

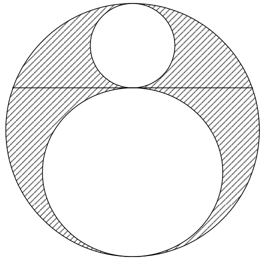
5. Raskite visas sveikųjų skaičių *x* ir *y* poras (*x*; *y*), tenkinančias lygtį $2xy + 6x - y - 17 = 0$.

6. Iš keturių skirtingų skaitmenų sudaromi visi galimi keturženkliai skaičiai. Didžiausio ir mažiausio skaičių suma lygi 10 477. Raskite tuos keturis skaitmenis.

7. Trijų natūraliųjų skaičių (tarp kurių gali būti ir lygių) suma lygi 100. Iš šių skaičių sudaryti 3 skirtumai (iš didesnio skaičiaus atimant mažesnįjį). Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti šių skirtumų suma?

8. Trikampyje *ABC* nubrėžta pusiaukraštinė *AD*. Apskaičiuokite trikampio kampus *A* ir *B*, jeigu kampas *C* lygus 30° ir kampas *ADB* lygus 45°.

9. Skritulyje nubrėžta ilgio a styga. Į gautas nuopjovas įbrėžti du skrituliai (žr. pav.). Raskite užbrūkšniuotos dalies plotą.



10. Plokštumoje nubrėžtas trikampis ABC, kurio kraštinių ilgiai yra a, b ir c. Apskaičiuokite rutulių, kurie liečia plokštumą taškuose A, B ir C ir liečiasi tarpusavyje, spindulius.

I. VIJETO TEOREMA IR JOS TAIKYMAS

Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas)
Juozas Šinkūnas (Lietuvos edukologijos universitetas)

1. Vijetas (François Viète – prancūzų matematikas, 1540–1603) yra garsus 16–17 amžiaus matematikas. Jis sudarė algebros raidinę simboliką ir sukūrė bendrą antro, trečio ir ketvirto laipsnio lygčių sprendimo metodą, surado lygties koeficientų ir sprendinių sąryšių formules, sukūrė algebrinių lygčių apytikslio sprendimo metodą ir kt. Vijeto atradimai svarbūs ir tiriant kitas matematines problemas (plokščiojo ir sferinio trikampio formulės, laipsninės eilutės, begalinės sandaugos ir t. t.), didelis jo indėlis vystant geometriją, trigonometriją, matematinę astronomiją.

Vijeto pavardė žinoma ir mokiniams. Mokyklinės matematikos kurse įrodoma Vijeto ir jai atvirkštinė teorema apie kvadratinės lygties sprendinių ir šios lygties koeficientų sąryšį.

1 teorema (Vijeto). Tarkime, kad kvadratinė lygtis

$$ax^2 + bx + c = 0\,, \quad a \neq 0$$

turi du sprendinius x_1 ir x_2 (jie gali būti ir lygūs tarpusavyje), čia, b ir c – realieji skaičiai. Tuomet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a}. \end{aligned} \tag{1}$$

Šios formulės vadinamos *Vijeto formulėmis*, o sprendiniai x_1 ir x_2 dar dažnai vadinami kvadratinio trinario $P(x) = ax^2 + bx + c$ *šaknimis*.

2 teorema (atvirkštinė Vijeto). Jei skaičių u ir v suma lygi $-p$, o jų sandauga lygi q, t. y.

$$\begin{aligned} u + v &= -p, \\ u \cdot v &= q, \end{aligned}$$

tai u ir v yra kvadratinės lygties $x^2 + px + q = 0$ sprendiniai arba kitaip – kvadratinio trinario $P(x) = x^2 + px + q$ šaknys.

Išnagrinėkime kelis pavyzdžius.

1 pavyzdys. Raskime lygties $x^2 + px + q = 0$ koeficientus p ir q, jeigu jos sprendinių skirtumas lygus 5, o sprendinių kubų skirtumas lygus 35.

Sprendimas. Tegu x_1 ir x_2 yra šios lygties sprendiniai. Pagal sąlygą $x_1 - x_2 = 5,\ x_1^3 - x_2^3 = 35.$ Sprendžiame lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 5, \\ x_1^3 - x_2^3 = 35 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 - x_2 = 5, \\ (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 35 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 - x_2 = 5, \\ x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 7 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x_1 - x_2 = 5, \\ (5 + x_2)^2 + (5 + x_2)x_2 + x_2^2 = 7 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 - x_2 = 5, \\ x_2^2 + 5x_2 + 6 = 0. \end{cases}$$

Iš antros lygties randame: $(x_2)_1 = -2;\ (x_2)_2 = -3.$

Iš pirmos lygties gauname: $(x_1)_1 = 3,\ (x_1)_2 = 2.$

Pagal Vijeto teoremą $p_1 = -(x_1 + x_2) = -1,\ \ p_2 = 1,\ \ q_1 = q_2 = -6.$

Ats.: $p_1 = -1,\ \ q_1 = -6$; $p_2 = 1,\ \ q_2 = -6.$

2 pavyzdys. Su kuriomis m reikšmėmis lygties

$(m-1)x^2 - 2(m-3)x + m - 2 = 0$ sprendiniai yra neigiami?

Sprendimas. Kai $m = 1,$ turime pirmojo laipsnio lygtį $4x - 1 = 0,$ kurios sprendinys $x = \dfrac{1}{4}$ yra teigiamas.

Nagrinėkime atvejį, kai $m \neq 1.$ Kad lygties sprendiniai būtų realieji skaičiai, jos diskriminantas D turi būti neneigiamas. Kad sprendiniai būtų neigiami, jų suma turi būti neigiama, o sandauga – teigiama. Todėl (pagal Vijeto teoremą) turi galioti nelygybės

$$\frac{2(m-3)}{m-1} < 0 \ \text{ ir } \ \frac{m-2}{m-1} > 0.$$

Sprendžiame nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} (m-3)^2 - (m-1)(m-2) \geq 0, \\ \dfrac{2(m-3)}{m-1} < 0, \\ \dfrac{m-2}{m-1} > 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 3m \leq 7, \\ 1 < m < 3, \\ m < 1,\ m > 2 \end{cases} \sim\ 2 < m \leq \frac{7}{3}.$$

Ats.: $m \in \left(2; \dfrac{7}{3}\right].$

3 pavyzdys. Tegu kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$ sprendiniai yra x_1 ir x_2. Pažymėkime $S_n = x_1^n + x_2^n$. Raskime sąryšį tarp S_{n+2}, S_{n+1} ir S_n, $n = 0, 1, 2, ...$

Sprendimas. Padauginę iš $x^n \neq 0$, $n = 0, 1, 2, ...$, gauname lygtį $ax^{n+2} + bx^{n+1} + cx^n = 0$. Kadangi x_1 ir x_2 yra lygties sprendiniai, tai

$$ax_1^{n+2} + bx_1^{n+1} + cx_1^n = 0$$

ir

$$ax_2^{n+2} + bx_2^{n+1} + cx_2^n = 0.$$

Sudėję šias lygybes, gauname formulę

$$S_{n+2} = -\frac{bS_{n+1} + cS_n}{a}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{1}$$

Kadangi $S_0 = x_1^0 + x_2^0 = 2$, kai $c \neq 0$, ir $S_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, pagal šią rekurenčiąją formulę galima apskaičiuoti bet kurią sumą

$$S_{n+2} = x_1^{n+2} + x_2^{n+2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, ...) .$$

Pavyzdžiui, kvadratinės lygties $x^2 - 6x + 1 = 0$ sprendinių $x_1 = 3 - \sqrt{8}$ ir $x_2 = 3 + \sqrt{8}$ penktųjų laipsnių sumą S_5 galima rasti taip. Kadangi $a = 1$, $b = -6$, $c = 1$, $S_0 = 2$, $S_1 = 6$, tai

$$S_2 = -(-6S_1 + 1 \cdot S_0) = -(-6 \cdot 6 + 2) = 35,$$
$$S_3 = -(-6S_2 + 1 \cdot S_1) = -(-6 \cdot 35 + 1 \cdot 6) = 204,$$
$$S_4 = -(-6S_3 + 1 \cdot S_2) = -(-6 \cdot 204 + 1 \cdot 35) = 1189,$$
$$S_5 = -(-6S_4 + 1 \cdot S_3) = -(-6 \cdot 1189 + 1 \cdot 204) = 6930.$$

Ats.: 6930.

Analogiškas Vijeto formules galima užrašyti ir n-tojo laipsnio daugianariui $(n > 2)$

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n+1} + ... + a_1 x^n + a_0, \; a_n \neq 0.$$

Tegu $P_3(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ yra trečiojo laipsnio daugianaris, kurio koeficientas prie vyriausiojo nario lygus 1. Yra įrodyta, kad kai šio daugianario šaknys yra x_1, x_2 ir x_3, jį galima užrašyti taip:

$$P_3(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=$$
$$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3=$$
$$=x^3-p_1x^2+p_2x-p_3;$$

čia $p_1=x_1+x_2+x_3$, $p_2=x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3$, $p_3=x_1x_2x_3$.

Šiuo atveju gauname tokias Vijeto formules:

$$\begin{aligned} a&=-(x_1+x_2+x_3),\\ b&=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3,\\ c&=-x_1x_2x_3. \end{aligned} \tag{2}$$

Jei trijų skaičių x_1, x_2, x_3 suma lygi p_1, jų porų sandaugų suma lygi p_2, o visų trijų sandauga lygi p_3, tai x_1, x_2 ir x_3 yra kubinio trinario $x^3-p_1x^2+p_2x-p_3$ šaknys.

Analgiškas formules galima užrašyti ir ketvirtojo laipsnio daugianariui $P_4(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$, kurio šaknys x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{aligned} a&=-(x_1+x_2+x_3+x_4)=-p_1,\\ b&=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=p_2,\\ c&=-(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_2x_3x_4)=-p_3,\\ d&=-x_1x_2x_3x_4=p_4. \end{aligned} \tag{3}$$

4 pavyzdys. Tegu x_1, x_2, x_3 yra lygties $x^3-2x^2+x+1=0$ sprendiniai. Sudarykime lygtį $x^3+ax^2+bx+c=0$, kurios sprendiniai yra $y_1=x_2x_3$, $y_2=x_1x_3$ ir $y_3=x_1x_2$.

Sprendimas. Pagal Vijeto formules (2) gauname:

$$\begin{aligned} &x_1+x_2+x_3=2,\\ &x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1,\\ &x_1x_2x_3=-1. \end{aligned}$$

Tada

$$\begin{aligned} &y_1+y_2+y_3=x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2=1,\\ &y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=-2,\\ &y_1y_2y_3=(x_1x_2x_3)^2=1. \end{aligned}$$

Vadinasi, y_1, y_2 ir y_3 yra lygties $y^3 - y^2 - 2y - 1 = 0$ sprendiniai.

Ats.: $x^3 - x^2 - 2x - 1 = 0.$

5 pavyzdys. Lygties $x^3 + 6x^2 + 5x + c = 0$ sprendiniai sudaro aritmetinę progresiją. Raskime koeficiento *c* reikšmę ir išspręskime lygtį.

Sprendimas. Tegu lygties sprendiniai yra:

$$x_1 = k - d,\ \ x_2 = k \text{ ir } x_3 = k + d$$

(*d*–aritmetinės progresijos skirtumas). Pagal (2) formules gauname:

$$\begin{cases} (k-d) + k + (k+d) = -6, \\ (k-d)k + (k-d)(k+d) + k(k+d) = 5, \\ (k-d)k(k+d) = -c. \end{cases}$$

Iš pirmos lygties išplaukia, kad $k = -2$. O tada iš antros lygties gauname, kad $d = \pm\sqrt{7}.$ Įrašę *k* ir *d* reikšmes į trečią lygtį, gauname vienintelę *c* reikšmę – skaičių –6.

Taigi $c = -6,$ o lygties sprendiniai yra $-2 - \sqrt{7},$ –2 ir $-2 + \sqrt{7}.$

Ats.: $c = -6$; sprendiniai $-2 - \sqrt{7},$ –2, $-2 + \sqrt{7}.$

6 pavyzdys. Raskime lygties $x^4 + x^3 - 18x^2 + ax + b = 0$ koeficientus *a* ir *b*, jeigu žinoma, kad trys lygties sprendiniai yra trys lygūs sveikieji skaičiai.

Sprendimas. Tegu lygties sprendiniai yra $x_1 = x_2 = x_3$ ir x_4. Pagal (3) formules sudarome lygčių sistemą

$$\begin{cases} 3x_1 + x_4 = -1, \\ 3x_1^2 + 3x_1x_4 = -18, \\ x_1^3 + 3x_1^2x_4 = -a, \\ x_1^3 \cdot x_4 = b. \end{cases}$$

Iš pirmųjų dviejų lygčių randame x_1 ir x_4:

$$x_1 = -2,\ \ x_4 = 5 \ \text{ arba } \ x_1 = \frac{3}{2},\ \ x_4 = -\frac{11}{2}.$$

Kadangi (pagal sąlygą) trys lygties sprendiniai yra lygūs sveikieji skaičiai, tai $x_1 = x_2 = x_3 = -2,$ $x_4 = 5$. Įrašę $x_1 = -2$ ir $x_4 = 5$ į paskutines dvi sistemos lygtis, gauname, kad $a=-52,\ \ b=-40$.

Ats.: $a=-52,\ \ b=-40$.

Tegu x, y, z yra trys realieji skaičiai,

$S_n=x^n+y^n+z^n,\ p_1=x+y+z,\ \ p_2=xy+xz+yz,\ \ p_3=xyz.$

Sąryšis tarp S_n, p_1, p_2 ir p_3 išreiškiamas formule

$$S_n=p_1S_{n-1}-p_2S_{n-2}+p_3S_{n-3},\ \ n\geq 3. \tag{4}$$

Jos teisingumu galima įsitikinti tiesiogiai tikrinant:

$$p_1S_{n-1}-p_2S_{n-2}+p_3S_{n-3}=$$
$$=(x+y+z)(x^{n-1}+y^{n-1}+z^{n-1})-(xy+xz+yz)(x^{n-2}+y^{n-2}+z^{n-2})+$$
$$+xyz(x^{n-3}+y^{n-3}+z^{n-3})=S_n.$$

Kadangi

$$S_0=x^0+y^0+z^0=3,\ S_1=x+y+z=p_1,$$
$$S_2=x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)=p_1^2-2p_2,$$

tai

$$S_3=p_1S_2-p_2S_1+p_3S_0=p_1(p_1^2-2p_2)-p_2\cdot p_1+3p_3=$$
$$=p_1^3-3p_1p_2+3p_3.$$

O tada

$$S_4=p_1S_3-p_2S_2+p_3S_1=p_1(p_1^3-3p_1p_2+3p_3)-p_2(p_1^2-2p_2)+p_3p_1=$$
$$=p_1^4-4p_1^2p_2+2p_2^2+4p_1p_3$$

ir t. t.

7 pavyzdys. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y+z=xyz, \\ xy+xz+yz=11, \\ x^2+y^2+z^2=14. \end{cases}$$

Sprendimas. Tegu $x+y+z=p_1$, $xy+xz+yz=p_2$, $xyz=p_3$. Pagal Vijeto teoremą skaičiai x, y, z yra kubinės lygties

$$t^3-p_1t^2+p_2t-p_3=0$$

sprendiniai. Iš lygčių sistemos rasime p_1, p_2 ir p_3. Kadangi $p_1=p_3$,

$p_2 = 11$ ir $S_2 = p_1^2 - 2p_2 = 14$, tai $p_2 = 11$, $p_1 = p_3 = 6$ arba $p_1 = p_3 = -6$. Toliau spręsime dvi kubines lygtis.

a) $t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0$. Aišku, kad $t = 1$ yra šios lygties sprendinys.

Lygties kairiąją pusę išskaidykime dauginamaisiais. Daugianarį $t^3 - 6t^2 + 11t - 6$ dalijame iš $t - 1$:

$$
\begin{array}{rl}
-\, t^3 - 6t^2 + 11t - 6 & \big|\,\underline{t - 1\quad} \\
\underline{t^3 - t^2} \qquad\qquad\qquad & \;\; t^2 - 5t + 6 \\
-\, -5t^2 + 11t \qquad\quad & \\
\underline{-5t^2 + 5t} \qquad\quad & \\
-\, -6t - 6 & \\
\underline{-6t - 6} & \\
0 \quad &
\end{array}
$$

Taigi $t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = (t-1)(t^2 - 5t + 6)$. Lygties $t^2 - 5t + 6 = 0$ sprendiniai yra $t = 2$ ir $t = 3$. Taigi skaičių rinkinys (1; 2; 3) yra lygčių sistemos sprendinys. Jos sprendiniai yra ir šie skaičių rinkiniai: (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1).

b) $t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0$. Šios lygties sprendiniai yra $t_1 = -1$, $t_2 = -2$, $t_3 = -3$.

Taigi gavome dar šešis lygčių sistemos sprendinius: (–1; –2; –3), (–1; –3; –2), (–2; –1; –3), (–2; –3; –1), (–3; –1; –2), (–3; –2; –1).

8 pavyzdys. Išspręskime lygčių sistemą

$$
\begin{cases}
x + y + z = 2, \\
x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\
x^3 + y^3 + z^3 = 8.
\end{cases}
$$

Sprendimas. Tegu $x + y + z = p_1$, $xy + xz + yz = p_2$, $xyz = p_3$. Remdamiesi (4) formule, gauname tokią lygčių sistemą:

$$
\begin{cases}
p_1 = 2, \\
p_1^2 - 2p_2 = 6, \\
p_1^3 - 3p_1p_2 + 3p_3 = 8.
\end{cases}
$$

Ji turi vienintelį sprendinį: $p_1 = 2$, $p_2 = -1$, $p_3 = -2$.

Pagal Vijeto teoremą, skaičiai x, y ir z yra kubinės lygties $t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0$ sprendiniai.

Pastebėję, kad $t = 1$ yra šios lygties sprendinys, panašiai kaip 7 pavyzdyje randame ir kitus du jos sprendinius: $t = -1$ ir $t = 2$. Taigi lygčių sistemos sprendiniai yra:
(–1; 1; 2), (–1; 2; 1), (1; –1; 2), (1; 2; –1), (2; –1; 1), (2; 1; –1).

Ats.: (–1; 1; 2), (–1; 2; 1), (1; –1; 2), (1; 2; –1), (2; –1; 1), (2; 1; –1).

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Raskite kvadratinių trinarių $x^2 + px - 2013$, kai p įgyja visas sveikąsias reikšmes nuo –50 iki 100 ($-50 \le p \le 100$, $p \in Z$), šaknų sumą.

2. Su kuriomis parametro a reikšmėmis kvadratinės lygties sprendiniai x_1 ir x_2 tenkina sąlygą $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 11$?

3. Parinkite visus pirminius skaičius p ir q, su kuriais lygties $px^2 + pqx + q = 0$ sprendiniai yra sveikieji skaičiai.

4. Su kuriomis k reikšmėmis lygties $kx^2 - 3(k+1)x + 2k + 7 = 0$ sprendiniai yra teigiami?

5. Apskaičiuokite reiškinio $(2 + \sqrt{3})^7 + (2 - \sqrt{3})^7$ reikšmę

6. Lygties $x^3 - x^2 - 1 = 0$ sprendiniai yra x_1, x_2, x_3. Sudarykite lygtį, kurios sprendiniai yra $y_1 = x_2 + x_3$, $y_2 = x_1 + x_3$, $y_3 = x_1 + x_2$.

7. Lygties sprendiniai sudaro geometrinę progresiją. Raskite koeficiento k reikšmę ir išspręskite lygtį $x^3 - 5x^2 + kx + 8 = 0$.

8. Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} xyz = 1, \\ x + y + z = xy + xz + yz, \\ x^2 - y^2 + z^2 = \dfrac{21}{4}. \end{cases}$$

9. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ xy + xz + yz = -4, \\ x^3 - y^3 + z^3 = 1. \end{cases}$$

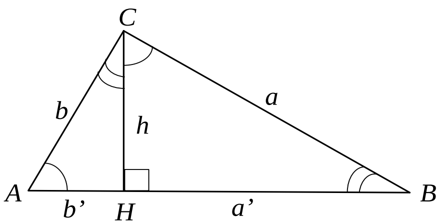
10. Raskite lygties $x^4 - 10x^3 + 37x^2 + px + q = 0$ parametrų p ir q reikšmes, jeigu šios lygties sprendiniai x_1, x_2, x_3, x_4 turi savybę $x_1 = x_2$, $x_3 = x_4$.

II. STAČIŲJŲ TRIKAMPIŲ UŽDAVINIAI

Edmundas Mazėtis (Lietuvos edukologijos universitetas)

Jei jums atrodo, kad statųjį trikampį matematikos pamokose išnagrinėjote pakankamai detaliai, tai šios užduoties atlikimas parodys, kad toli gražu taip nėra. Spręsdami pateiktus uždavinius aptiksite daug įdomių šios paprastos figūros savybių.

1. Sakykime, kad ABC – statusis trikampis ($\angle C = 90^\circ$), atkarpa CH – jo aukštinė (1 pav.). Pažymėkime $AC = b$, $CB = a$, $CH = h$, $AH = b'$, $BH = a'$. Kadangi $\angle ACH = 90^\circ - \angle A = \angle B$, tai trikampiai ACH ir CBH yra panašieji, todėl $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AH}{CH} = \dfrac{CH}{BH}$, t. y. $h^2 = a'b'$. Trikampiai ABC ir ACH taip pat panašieji, t. y. $\dfrac{AC}{AH} = \dfrac{AB}{AC}$, $b^2 = c \cdot b'$. Iš tri–kampių ABC ir CBH panašumo išplaukia, kad $a^2 = c \cdot a'$. Sudėję paskutiniąsias dvi lygybes gauname Pitagoro teoremą $a^2 + b^2 = c^2$.

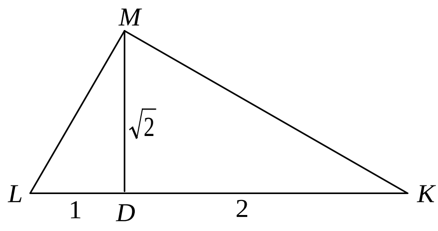


1 pav.

Teisingas ir atvirkščias teiginys: jei trikampio vienos kraštinės kvadratas lygus kitų dviejų kraštinių kvadratų sumai, tai trikampis yra statusis. Tikrai, jei trikampio ABC kraštinėms a, b ir c teisinga lygybė $c^2 = a^2 + b^2$, tai iš kosinusų teoremos $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\angle C$ seka, kad $\cos\angle C = 0$, t. y. kampas C – statusis.

Kaip žinome, stačiojo trikampio kraštines ir kampus sieja tokios trigonometrinės lygybės $\sin\angle A = \cos\angle B = \dfrac{a}{c}$, $\cos\angle A = \sin\angle B = \dfrac{b}{c}$, $\mathrm{tg}\angle A = \dfrac{a}{b}$, $\mathrm{tg}\angle B = \dfrac{b}{a}$, o trikampio plotui teisingos lygybės $S = \dfrac{1}{2}ab = \dfrac{1}{2}ch = \dfrac{r}{2}(a+b+c)$, čia r – įbrėžto į trikampį apskritimo spindulys.

1 pavyzdys. Stačiojo trikampio KML įžambinėje KL yra taškas D toks, kad $MD=\sqrt{2}$, $KD=2$, $DL=1$. Rasime kampą KMD (2 pav.).



2 pav.

Trikampiams KMD ir LMD taikome kosinusų teoremą:

$$KM^2 = DK^2 + MD^2 - 2DK\cdot MD\cdot\cos\angle KDM,$$
$$LM^2 = LD^2 + DM^2 - 2LD\cdot DM\cdot\cos\angle LDM.$$

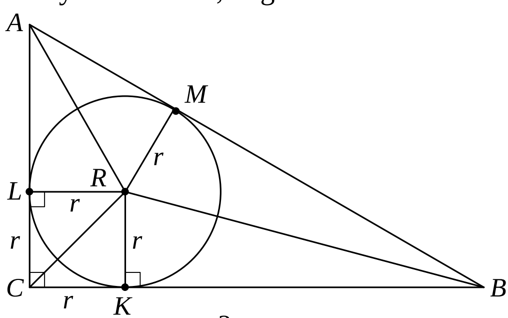
Įrašę sąlygoje duotas atkarpų ilgių reikšmes ir pastebėję, kad $\cos\angle LDM = -\cos\angle KDM$, turime

$$KM^2 = 6-4\sqrt{2}\cos\angle KDM,\quad LM^2 = 3+2\sqrt{2}\cos\angle KDM.$$

Kadangi $KM^2 + LM^2 = KL^2$, tai $9-2\sqrt{2}\cos\angle KDM = 9$, t. y. $\cos\angle KDM = 0$ ir kampas KDM – statusis. Taigi iš stačiojo trikampio KDM turime

$$\operatorname{tg}\angle DMK = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ ir } \angle KMD = \operatorname{arctg}\sqrt{2}.$$

2. Apibrėžto apie statųjį trikampį ABC apskritimo centras O yra įžambinės AB vidurio taškas, o šio apskritimo spindulio ilgis lygus įžambinės pusei. Įbrėžto į trikampį apskritimo centras R yra trikampio pusiaukampinių sankirtos taškas. Jei taškuose L, K ir M įbrėžtasis apskritimas liečia atitinkamai kraštines AC, CB ir AB (3 pav.), tai keturkampis $CKRL$ yra kvadratas, taigi



3 pav.

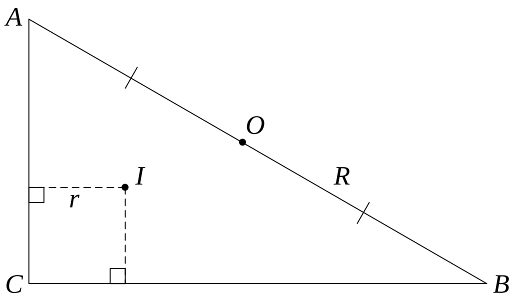
$$AL = AM = b - r, \quad BK = BM = a - r,$$

čia r – įbrėžto apskritimo spindulys. Kadangi

$AM + MB = AB = c$, tai $b - r + a - r = c$, t. y. $r = \dfrac{b + a - c}{2}$. Be to, tiesės AR ir BR yra kampų A ir B pusiaukampinės, todėl

$$\angle ARB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle B = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 135^\circ.$$

2 pavyzdys. Stačiojo trikampio apibrėžto ir įbrėžto apskritimų spindulių santykis lygus $\dfrac{13}{4}$. Rasime trikampio smailiuosius kampus.

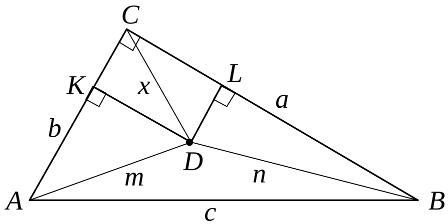


4 pav.

Apibrėžto apie statųjį trikampį ABC apskritimo centras O yra įžambinės AB vidurio taškas (4 pav.), todėl šio apskritimo spindulys $R = OB = \dfrac{c}{2}$. Kaip ką tik parodėme įbrėžto apskritimo spindulys lygus $r = \dfrac{a + b - c}{2}$. Iš uždavinio sąlygos $\dfrac{r}{R} = \dfrac{4}{13}$, t. y. $\dfrac{a + b - c}{c} = \dfrac{4}{13}$. Iš čia $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} - 1 = \dfrac{4}{13}$, t. y. $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} - 1 = \dfrac{17}{13}$. Kadangi $\dfrac{a}{c} = \sin\angle A$, $\dfrac{b}{c} = \cos\angle A$, tai $\sin\angle A + \cos\angle A = \dfrac{17}{13}$. Keldami abi puses kvadratu ir panaudoję tapatybes $\sin^2\angle A + \cos^2\angle A = 1$ bei $2\sin\angle A\cos\angle A = \sin 2\angle A$, gauname, kad $\sin 2\angle A = \dfrac{120}{169}$. Iš čia $2\angle A = \arcsin\dfrac{120}{169}$, $\angle A = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{120}{169}$ ir $\angle B = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{120}{169}$.

Šį uždavinį buvo galima spręsti ir kitu būdu. Pažymėkime $R=13x,$ $r=4x,$ tuomet $c=26x$ ir iš lygybės $r=\dfrac{a+b-c}{2}$ turime $a+b=34x.$ Kadangi $a^2+b^2=c^2=169x^2$ turime $a=10x,$ $b=24x,$ arba $a=24x,$ $b=10x.$ Tuomet abiem atvejais $c=26x$ ir trikampio smailiųjų kampų sinusai lygūs $\dfrac{5}{13}$ ir $\arcsin\dfrac{12}{13}.$ Skaitytojams paliekama įsitikinti, kad abiem būdais gauti atsakymai sutampa.

3 pavyzdys. Stačiojo trikampio *ABC* $(\angle C=90^\circ)$ viduje yra taškas *D* o trikampių *ADC* bei *BDC* plotai yra atitinkamai tris ir keturis kartus mažesni už trikampio *ABC* plotą. Rasime atkarpos *CD* ilgį, jei $AD=m,$ $BD=n$ (5 pav.).



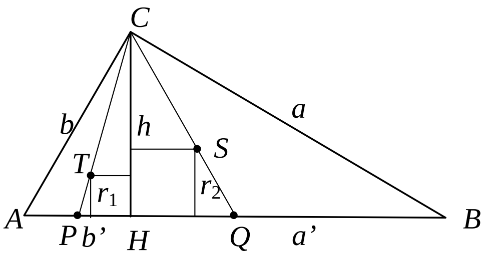
5 pav.

Pažymėkime $CD=x.$ Kadangi trikampiai *ADC* ir *ABC* turi tą pačią kraštinę *AC*, tai jų plotų santykis lygus į tą kraštinę nubrėžtų aukštinių santykiui, t. y. trikampio *ADC* aukštinė *DK* lygi statinio *CB* trečdaliui: $DK=\dfrac{1}{3}CB.$ Analogiškai trikampio *DCB* aukštinė $DL=\dfrac{1}{4}AC.$ Kadangi $DL=KC,$ tai iš stačiojo trikampio *AKD* turime $AK^2+KD^2=AD^2,$ t. y. $\left(b-\dfrac{1}{4}b\right)^2+\dfrac{1}{9}a^2=m^2,$ t. y. $\dfrac{9}{16}b^2+\dfrac{1}{9}a^2=m^2.$ Analogiškai trikampiui *DLB* turime $CL=KD=\dfrac{1}{3}a,$ $BL=\dfrac{2}{3}a$ ir $\dfrac{4}{9}a^2+\dfrac{1}{16}b^2=n^2.$ Iš trikampio *CKD* gauname lygybę $\dfrac{1}{16}b^2+\dfrac{1}{9}a^2=x^2.$ Iš lygčių

$\frac{9}{16}b^2+\frac{1}{9}a^2=m^2, \quad \frac{4}{9}a^2+\frac{1}{16}b^2=n^2$ randame $b^2=\frac{16}{35}\left(4m^2-n^2\right)$, $a^2=\frac{9}{35}\left(9n^2-m^2\right)$. Tuomet $x^2=\frac{1}{35}\left(3m^2+8n^2\right)$.

Ats.: $CD=\sqrt{\frac{3m^2+8n^2}{35}}$.

3. Grįžtame prie 1 pav. ir į trikampius ACH bei BCH įbrėžiame apskritimus (6 pav.). Tarkime, kad taškai T ir S – jų centrai, r_1 ir r_2 – spinduliai. Kadangi $r=\frac{a+b-c}{2}$, $r_1=\frac{h+b'-b}{2}$, $r_2=\frac{h+a'-a}{2}$, tai sudėję šias lygybes gauname $r+r_1+r_2=h$. Jei tiesės CT ir CS įžambinę AB kerta taškuose P ir Q, tai $AC=AQ$ ir $BC=BP$. Tikrai



6 pav.

$$\angle CQA=\angle B+\angle BCQ=\angle B+\frac{1}{2}\angle BCH= \\ =\angle B+\frac{1}{2}(90^\circ-\angle B)=\angle B+\frac{1}{2}\angle A.$$

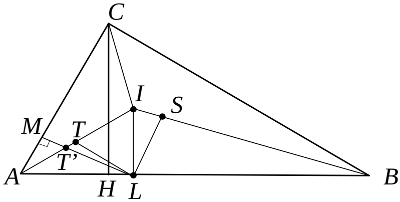
Bet kita vertus

$$\angle ACQ=\angle ACH+\angle HCQ=(90^\circ-\angle A)+\frac{1}{2}\angle HCB= \\ =\angle B+\frac{1}{2}(90^\circ-\angle B)=\angle B+\frac{1}{2}\angle A.$$

Taigi $\angle AQC=\angle ACQ$, taigi $AC=AQ$. Antroji lygybė įrodoma analogiškai.

4 pavyzdys. Stačiojo trikampio ABC aukštinė yra atkarpa CH, į trikampius ABC, ACH ir BCH įbrėžtų apskritimų centrai yra taškai I, T ir

S, taško *I* ortogonalioji projekcija tiesėje *AB* yra taškas *L*. Įrodysime, kad $LS \parallel AC$ ir $LT \parallel BC$ (7 pav.).



7 pav.

Iš taško *L* nubrėžkime statmenį *LM* į tiesę *AC*, sakykime, kad taške *T'* tiesė *LM* kerta tiesę *AT*. Įrodysime, kad taškai *T* ir T' sutampa. Trikampiai *AIL* ir *AT'M* panašieji (jie yra statieji, o $\angle IAL = \angle MAT' =$ $= \frac{1}{2}\angle A$). Todėl $\frac{T'M}{IL} = \frac{AM}{AL} = \cos\angle A$. Iš čia $T'M = IL\cos\angle A =$ $= r\cos\alpha$. Iš trikampių *ACH* ir *ABC* panašumo seka, kad į juos įbrėžtų apskritimų spindulių r_1 ir r santykis lygus trikampių atitinkamų kraštinių santykiui: $\frac{r_1}{r} = \frac{AC}{AB} = \cos\angle A$. Iš čia seka, kad $T'M = r_1$, t. y. taškas *T'* sutampa su tašku *T*, nes taškas *T'* yra kampo *A* pusiaukampinėje ir nutolęs nuo kraštinės *AC* atstumu r_1. Analogiškai įrodome, kad tiesės *LS* ir *AC* yra lygiagrečios.

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Stačiojo trikampio perimetras lygus 60, o aukštinė nubrėžta į įžambinę lygi 12. Apskaičiuokite trikampio kraštinių ilgius.

2. Stačiojo trikampio aukštinės, nubrėžtos į įžambinę, pagrindas dalija ją į dalis taip, kad mažesniosios atkarpos ir didesniosios atkarpos santykis lygus didesniosios atkarpos ir visos įžambinės santykiui. Raskite trikampio plotą, jei įžambinės ilgis lygus *c*.

3. Apie statųjį trikampį apibrėžto apskritimo spindulio ir šio trikampio perimetro santykis lygus $\frac{13}{60}$. Raskite trikampio smailiuosius kampus.

4. Stačiojo trikampio *DEF* $(\angle E = 90^\circ)$ išorėje yra taškas *A* toks, kad atkarpa *AF* kerta kraštinę *DE*. Trikampių *AED* ir *AEF* plotai yra lygūs, be to, jie keturis kartus mažesni už trikampio *DEF* plotą. Raskite atkarpos *AE* ilgį, jei $AD = m,\ \ AF = n$

5. Iš stačiojo trikampio *ABC* stačiojo kampo *C* viršūnės nuleista aukštinė *CH*, į trikampius *ACH* ir *BCH* įbrėžtų apskritimų spinduliai yra r_1 ir r_2. Raskite į trikampį *ABC* įbrėžto apskritimo spindulį.

6. Stačiojo trikampio *ABC* aukštinė yra *CH*, taškai *R* ir *S* – į trikampius *ACH* ir *BCH* įbrėžtų apskritimų centrai. Raskite kampą tarp tiesių *BS* ir *CR*.

7. Atkarpa *CH* yra stačiojo trikampio *ABC* aukštinė, taškai *I*, *T* ir *S* yra atitinkamai į trikampius *ABC*, *ACH* ir *BCH* įbrėžtų apskritimų centrai, taškas *L* yra taško *I* ortogonalioji projekcija įžambinėje *AB*. Raskite kampą *TLS*.

8. Į statųjį trikampį *ABC* įbrėžto apskritimo centras *I*. Iš jo nubrėžtas statmuo *IM* į įžambinę *AB* dalija ją į dalis $AM = 5,\ \ BM = 13.$ Raskite trikampio *ABC* plotą.

9. Stačiojo trikampio vieno statinio ilgis 4, kito statinio ortogonalioji projekcija įžambinėje lygi 1,8. Raskite atstumą nuo stačiojo kampo viršūnės iki įbrėžto į trikampį apskritimo centro.

10. Atkarpa *CH* yra stačiojo trikampio *ABC* aukštinė, į trikampius *ACH* ir *BCH* įbrėžtų apskritimų centrai yra taškai *T* ir *S*, tiesės *CT* ir *CS* įžambinę *AB* kerta taškuose *P* ir *Q*. Raskite trikampio *CPQ* plotą, jei $AC = b,\ \ BC = a.$

III. IRACIONALIOSIOS LYGTYS IR NELYGYBĖS

Aušra Gackienė (Grigiškių „Šviesos“ gimnazija)

Iracionaliosios lygtys

Iracionaliąja lygtimi vadinama lygtis, kurioje yra reiškinys su nežinomuoju po šaknies ženklu.

Iracionaliųjų lygčių pavyzdžiai:

$$\sqrt{x+2}=2x,\ \sqrt[3]{x}-8=0,\ \frac{2x}{\sqrt[3]{x+1}}=x-2,\ \sqrt{x+2}=\sqrt[4]{x^2+(x-5)^2}.$$

Išspręsti iracionaliąją lygtį reiškia rasti visas tos lygties nežinomojo reikšmes, su kuriomis lygtis tampa teisinga skaitine lygybe, arba įrodyti, kad tokių reikšmių nėra. Skaičius, kurį įrašius į lygtį vietoj nežinomojo gaunama teisinga skaitinė lygybė, vadinamas iracionaliosios *lygties sprendiniu*. Jei lygtis realiųjų sprendinių neturi, sakoma, kad jos sprendinių aibė yra tuščia. *Lygties apibrėžimo sritimi* vadinama aibė lygties nežinomojo reikšmių, su kuriomis lygties reiškiniai yra apibrėžti. Dvi lygtys vadinamos *ekvivalenčiomis*, jei jų sprendinių aibės sutampa. Jei pertvarkysime lygties reiškinius ir lygties apibrėžimo sritis nepasikeis, tai gausime ekvivalenčią lygtį. Tačiau ne visada pradinė ir pertvarkytoji lygtys yra ekvivalenčios.

Iracionaliųjų lygčių sprendimo metodai paprastai pagrįsti galimybe iracionaliąją lygtį pakeisti (ją pertvarkant) racionaliąja lygtimi taip, kad jos apibrėžimo sritis nebūtų siauresnė už iracionaliosios lygties. Dažniausiai abi lygties pusės keliamos tuo pačiu laipsniu.

Sprendžiant iracionaliąsias lygtis, būtina atkreipti dėmesį į tai, kad:

1) kai šaknies rodiklis yra lyginis, tai pošaknis turi būti neneigiamas;

2) kai šaknies rodiklis yra nelyginis, tai pošaknis gali būti bet kuris realusis skaičius.

Be to, svarbu prisiminti, kad lyginio rodiklio šaknies reikšmė yra neneigiamas skaičius.

Išnagrinėkime keletą pavyzdžių.

1 pavyzdys. Išspręskime lygtį $\sqrt{x-4}=\sqrt{2-x}$.

Sprendimas. Aišku, kad turi galioti lygybė $x-4=2-x$. Bet lygtis $x-4=2-x$ nebūtinai ekvivalenti iracionaliajai lygčiai $\sqrt{x-4}=\sqrt{2-x}$, nes jos apibrėžimo sritis yra platesnė už iracionaliosios lygties. Tik prie lygties prijungę nelygybes $x-4\geq 0$ ir $2-x\geq 0$, gausime ekvivalentų uždavinį – sistemą

$$\begin{cases} x-4=2-x, \\ x-4\geq 0. \end{cases}$$

Spręsdami ją gauname:

$$\begin{cases} x=3, \\ x\geq 4. \end{cases}$$

Ši sistema sprendinių neturi, todėl ir iracionalioji lygtis neturi sprendinių.

Ats.: $\varnothing$.

2 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\sqrt{x+5}=-2.$$

Sprendimas. Ši lygtis sprendinių neturi, nes kvadratinės šaknies reikšmė negali būti neigiama.

Ats.: $\varnothing$.

3 pavyzdys. Išspręskime lygtį $(x+1)\sqrt{x^2-4}=0.$

Sprendimas. Aišku, kad lygybė galima tik tada, kai nors vienas iš dauginamųjų $x+1$ ir $\sqrt{x^2-4}$ lygus nuliui. Bet būtina turėti mintyje, kad kartu turi galioti ir nelygybė $x^2-4\geq 0$. Lygties $x+1=0$ sprendinys $x=-1$ tos nelygybės netenkina. Vadinasi, pradinė lygtis ekvivalenti lygčiai $x^2-4=0$. Iš jos ir gauname abu lygties $(x+1)\sqrt{x^2-4}=0$ sprendinius: $x_1=-2,\ \ x_2=2.$

Ats.:–2; 2.

4 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\sqrt{x^3-5x+1}=\sqrt{1-x-3x^3}.$$

Sprendimas. Kadangi abiejų šaknų rodikliai lygūs, tai turi galioti lygybė

$$x^3-5x+1=1-x-3x^3.$$

Bet jos apibrėžimo sritis yra platesnė už iracionaliosios lygties apibrėžimo sritį, kurią nusako nelygybių $x^3-5x+1\geq 0$ ir $1-x-3x^3\geq 0$ sistema

$$\begin{cases} x^3 - 5x + 1 \geq 0, \\ 1 - x - 3x^3 \geq 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Bet šią sistemą nelengva išspręsti. Todėl išspręskime tik iracionaliąją lygtį $x^3 - 5x + 1 = 1 - x - 3x^3$ ir patikrinkime, ar jos sprendiniai tenkina abi nelygybes. Gausime:

$$x^3 - x = 0,$$

$$x(x^2 - 1) = 0,$$

$$x(x-1)(x+1) = 0,$$

$$x_1 = 0,\ \ x_2 = 1,\ \ x_3 = -1.$$

Sprendinys $x = 1$ netenkina (1) sistemos, todėl jį atmeskime. O kiti du tenkina (1) sistemos nelygybes. Vadinasi, jie yra ir pradinės iracionaliosios lygties sprendiniai.

Ats.: –1; 0.

5 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\sqrt{11 - 7x} = 4x + 3.$$

Sprendimas. Pagal šaknies apibrėžimą turi galioti lygybė

$$11 - 7x = (4x + 3)^2.$$

Gauname racionaliąją lygtį. Bet ji gali ir nebūti ekvivalenti pradinei lygčiai, nes jos sprendiniai turi tenkinti nelygybes

$$11 - 7x \geq 0 \ \text{ ir } \ 4x + 3 \geq 0\,.$$

Apibendrinant atliktą analizę galima pasakyti, kad iracionalioji lygtis

$$\sqrt{11 - 7x} = 4x + 3$$

yra ekvivalenti tokiai sistemai:

$$\begin{cases} 11 - 7x = (4x + 3)^2, \\ 4x + 3 \geq 0. \end{cases}$$

Išspręskime ją:

$$\begin{cases} 11 - 7x = 16x^2 + 24x + 9, \\ 4x \geq -3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16x^2 + 31x - 2 = 0, \\ x \geq -\dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ arba } x = \dfrac{1}{16}, \\ x \geq -\dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{16}.$$

Ats.: $\dfrac{1}{16}$.

Lygtys, sprendžiamos abi lygties puses keliant tuo pačiu laipsniu

6 pavyzdys. Išspręskime lygtį $x + \sqrt{x^2 + (x+7)^2} = 18.$

Sprendimas. Siekdami pakeisti iracionaliąją lygtį

$$x + \sqrt{x^2 + (x+7)^2} = 18$$

racionaliąja lygtimi, pertvarkykime ją taip, kad vienoje lygties pusėje liktų reiškinys su šaknimi, o kitoje – be šaknies. Tada abi lygties $\sqrt{x^2 + (x+7)^2} = 18 - x$ puses pakelkime kvadratu ir gausime:

$$\left(\sqrt{x^2 + (x+7)^2}\right)^2 = (18 - x)^2,$$

$$x^2 + (x+7)^2 = 324 - 36x + x^2,$$

$$x^2 + 50x - 275 = 0.$$

Kvadratinės lygties $x^2 + 50x - 275 = 0$ sprendiniai yra $x_1 = -55$ ir $x_2 = 5.$ Abu jie tenkina ir pradinę lygtį.

Ats.: –55; 5.

7 pavyzdys. Išspręskime lygtį $\sqrt[4]{x-2} = 2.$

Sprendimas. Lygtyje yra lyginio laipsnio šaknis, todėl lygtis turės prasmę, kai $x \geq 2.$ Lygtį $\sqrt[4]{x-2} = 2$ pakeisime racionaliąja abi lygties puses keldami ketvirtuoju laipsniu. Gausime:

$$\left(\sqrt[4]{x-2}\right)^4 = 2^4, \quad x - 2 = 16, \quad x = 18.$$

Sprendinys $x = 18$ tenkina sąlygą $x \geq 2,$ todėl yra ir iracionaliosios lygties $\sqrt[4]{x-2} = 2$ sprendinys.

Ats.: 18.

8 pavyzdys. Išspręskime lygtį
$$\sqrt{x+1}=\sqrt[3]{x+1}.$$

Sprendimas. Nustatykime lygties apibrėžimo sritį: $x+1\geq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x\geq -1.$ Viena lygties šaknis yra kvadratinė, o kita kubinė, todėl abi lygties puses kelkime šeštuoju laipsniu. Gausime:
$$\left(\sqrt{x+1}\right)^6=\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^6,$$
$$(x+1)^3=(x+1)^2,$$
$$(x+1)^2\cdot x=0.$$
Pastarosios lygties sprendiniai yra $x = 0$ ir $x = –1$. Jie priklauso lygties apibrėžimo sričiai, todėl yra ir iracionaliosios lygties $\sqrt{x+1}=\sqrt[3]{x+1}$ sprendiniai.

Ats.: –1; 0.

9 pavyzdys. Išspręskime lygtį
$$\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6.$$

Sprendimas. Abi lygties $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6$ puses iš karto kelti kvadratu netikslinga. Ją pakeiskime ekvivalenčia lygtimi $\sqrt{2x+6}=6-\sqrt{x-1}.$ Abi gautos lygties puses pakėlę kvadratu, gausime:
$$\left(\sqrt{2x+6}\right)^2=\left(6-\sqrt{x-1}\right)^2,$$
$$2x+6=36-12\sqrt{x-1}+x-1,$$
$$12\sqrt{x-1}=29-x.$$

Pastarąją iracionaliąją lygtį keliame kvadratu ir gauname racionaliąją lygtį $x^2-202x+985=0,$ kurios sprendiniai yra
$$x_1=5;\quad x_2=197.$$
Tiesiogiai tikrindami, įsitikiname, kad tik $x=5$ yra pradinės lygties sprendinys.

Ats.: 5.

10 pavyzdys. Išspręskime lygtį
$$\sqrt{3x+3}-\sqrt{x+2}=\sqrt{x-1}.$$

Sprendimas. Siekdami šią iracionaliąją lygtį pertvarkyti į racionaliąją, abi lygties $\sqrt{3x+3}-\sqrt{x+2}=\sqrt{x-1}$ puses kelkime kvadratu:

$$\left(\sqrt{3x+3}-\sqrt{x+2}\right)^2=\left(\sqrt{x-1}\right)^2,$$
$$4x+5-2\sqrt{(3x+3)(x+2)}=x-1,$$
$$2\sqrt{3x^2+9x+6}=3x+6.$$

Pastaroji lygtis yra iracionalioji, todėl abi jos puses pakelkime kvadratu ir gausime:

$$\left(2\sqrt{3x^2+9x+6}\right)^2=(3x+6)^2,$$
$$12x^2+36x+24=9x^2+36x+36,$$
$$3x^2-12=0,$$
$$x=\pm 2.$$

Tiesiogiai tikrindami, įsitikiname, kad tik $x=2$ yra pradinės lygties sprendinys.

Ats.: 2.

Lygtys, sprendžiamos taikant keitinius

Kartais sudėtingą lygtį galima supaprastinti, pakeitus nežinomąjį. Šiame skyrelyje nagrinėsime sprendimą iracionaliųjų lygčių, kurias sieksime pertvarkyti keisdami nežinomąjį.

11 pavyzdys. Išspręskime lygtį $2\sqrt[3]{x}+9\sqrt[6]{x}=5$.

Sprendimas. Pažymėkime $y=\sqrt[6]{x}$ ir gausime kvadratinę lygtį

$$2y^2+9y-5=0,$$

kurios sprendiniai yra $y_1=-5$ ir $y_2=0{,}5$. Belieka išspręsti dvi iracionaliąsias lygtis:

$$\sqrt[6]{x}=-5 \text{ ir } \sqrt[6]{x}=0{,}5.$$

Pirma lygtis sprendinių neturi, o antra turi vienintelį sprendinį $x=(0{,}5)^6=0{,}015625$, kuris tenkina ir pradinę iracionaliąją lygtį.

Ats.: 0,015625.

12 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$4\sqrt{x-1}-9=9\sqrt[4]{x-1}.$$

Sprendimas. Pažymėkime $y=\sqrt[4]{x-1}$; tada $\sqrt{x-1}=y^2$. Įrašę į iracionaliąją lygtį $4\sqrt{x-1}-9=9\sqrt[4]{x-1}$, gauname kvadratinę lygtį $4y^2-9y-9=0$, kurios sprendiniai $y_1=-\frac{3}{4}$, $y_2=3$. Grįžkime prie pažymėjimo $y=\sqrt[4]{x-1}$.

1) Kai $y=-\frac{3}{4}$, tai $\sqrt[4]{x-1}=-\frac{3}{4}$; lygtis sprendinių neturi, nes lyginio laipsnio šaknies reikšmė negali būti neigiama.

2) Kai $y=3$, tai $\sqrt[4]{x-1}=3$. Iš čia $x=3^4+1=82$.

Tiesiogiai tikrindami, įsitikiname, kad $x=82$ tenkina pradinę iracionaliąją lygtį.

Ats.: 82.

13 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\sqrt[3]{(5+x)^2}+4\sqrt[3]{(5-x)^2}=5\sqrt[3]{25-x^2}.$$

Sprendimas. Sprendžiant šią lygtį pasirinkti keitinį yra gerokai sunkiau, nes visų trijų pošaknių reiškiniai yra skirtingi. Kadangi $25-x^2=(5-x)(5+x)$, tai iš pradžių abi lygties puses padalykime iš $\sqrt[3]{25-x^2}$ (turėdami mintyje, kad $x\neq\pm5$). Gausime:

$$\frac{\sqrt[3]{(5+x)^2}}{\sqrt[3]{25-x^2}}+4\frac{\sqrt[3]{(5-x)^2}}{\sqrt[3]{25-x^2}}=5,$$

$$\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}+4\sqrt[3]{\frac{5-x}{5+x}}=5.$$

Dabar jau visiškai nesunku pasirinkti keitinį. Pažymėję

$$y=\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}},$$

gausime lygtį

$$y+\frac{4}{y}=5,$$

o iš jos – kvadratinę lygtį

$$y^2-5y+4=0,$$

turinčią du sprendinius: $y_1 = 1$ ir $y_2 = 4$.

Toliau sprendžiame dvi iracionaliąsias lygtis:

$$\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}} = 1 \text{ ir } \sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}} = 4.$$

Pirma turi vienintelį sprendinį $x = 0$, o antra – vienintelį sprendinį $x = \frac{64}{13}$. Kadangi pradinės lygties šaknys yra kubinės, tai gautų sprendinių $x = 0$ ir $x = \frac{64}{13}$ galima net netikrinti (įrašant į pradinę lygtį).

Kadangi lygtį sprendėme turėdami mintyje, kad $x \neq \pm 5$, tai būtinai reikia patikrinti, ar $x = -5$ ir $x = 5$ tenkina pradinę lygtį. Įsitikiname, kad nei $x = -5$, nei $x = 5$ nėra sprendiniai.

Ats.: 0; $x = \frac{64}{13}$.

14 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$2x^2 + 6 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 3x + 3.$$

Sprendimas. Lygtį pakeiskime ekvivalenčia lygtimi

$$(2x^2 - 3x + 2) + 1 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 0$$

ir pamatysime, kad geriausiai turėtų tikti keitinys

$$y = \sqrt{2x^2 - 3x + 2}.$$

Įrašę gausime kvadratinę lygtį $y^2 - 2y + 1 = 0$, turinčią vienintelį sprendinį $y = 1$.

Išsprendę lygtį

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 1,$$

gauname dvi x reikšmes: 0,5 ir 1. Abi tenkina ir pradinę iracionaliąją lygtį.

Ats.: 0,5; 1.

Iracionaliosios nelygybės

Iracionaliosiomis nelygybėmis vadinamos nelygybės, kuriose yra algebrinis reiškinys po šaknies ženklu. Iracionaliųjų nelygybių pavyzdžiai:

$$\sqrt{x+8} > 2, \ \sqrt[4]{x} < 4x, \ \sqrt[3]{x+5} > x.$$

Išspręsti iracionaliąją nelygybę reiškia rasti visas nežinomojo dydžio reikšmes, su kuriomis nelygybė tampa teisinga skaitine nelygybe, arba įrodyti, kad tokių reikšmių nėra. Skaičius, kurį įrašius į nelygybę vietoj nežinomojo gaunama teisinga skaitinė nelygybė, vadinamas iracionaliosios nelygybės sprendiniu. Jei nelygybė realiųjų sprendinių neturi, sakoma, kad jos sprendinių aibė yra tuščia. *Nelygybės apibrėžimo sritimi* vadinama aibė nežinomojo dydžio reikšmių, su kuriomis visi nelygybės reiškiniai yra apibrėžti. Dvi nelygybės vadinamos *ekvivalenčiomis*, jeigu jų sprendinių aibės sutampa.

Sprendžiant uždavinius iracionalioji nelygybė dažniausiai pakeičiama ekvivalenčia racionaliąja nelygybe arba racionaliųjų nelygybių sistema. Nesunku suprasti ir lengva įsiminti, kad nelygybė

$$\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}, \ n = 1, 2, 3, ...,$$

yra ekvivalenti nelygybių sistemai

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) \geq 0, \end{cases}$$

o nelygybė

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)}$$

yra ekvivalenti nelygybei

$$f(x) < g(x).$$

Išnagrinėkime kelis konkrečius uždavinius.

15 pavyzdys. Išspręskime iracionaliąją nelygybę

$$\sqrt{(x-1)(x+2)} > \sqrt{x^2 - 4}.$$

Sprendimas. Aišku, kad turi galioti tokios nelygybės:

1) $(x-1)(x+2) > x^2 - 4,$

2) $(x-1)(x+2) \geq 0,$

3) $x^2 - 4 \geq 0.$

Šių nelygybių sistema ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} (x-1)(x+2) > x^2 - 4, \\ x^2 - 4 \geq 0. \end{cases}$$

Išspręskime ją:

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 > x^2 - 4, \\ x^2 \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x \leq -2 \text{ arba } x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2.$$

Taigi iracionaliosios nelygybės sprendinių aibė yra intervalas $[2; +\infty)$.

Ats.: $[2; +\infty)$.

16 pavyzdys. Išspręskime iracionaliąją nelygybę

$$\sqrt[3]{x^2 + 3x} > \sqrt[3]{5x - 1}.$$

Sprendimas. Ši iracionalioji nelygybė yra ekvivalenti nelygybei

$$x^2 + 3x > 5x - 1.$$

Spręsdami ją, gauname:

$$x^2 - 2x + 1 > 0 \Rightarrow (x-1)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 1.$$

Taigi nelygybės sprendinių aibė yra intervalų $(-\infty; 1)$ ir $(1; +\infty)$ sąjunga $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Ats.: $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

17 pavyzdys. Išspręskime iracionaliąją nelygybę

$$\sqrt{x + 14} > x + 2.$$

Sprendimas. Jei $x + 2 < 0$, tai iracionalioji nelygybė ekvivalenti nelygybių sistemai

$$\begin{cases} x + 14 \geq 0, \\ x + 2 < 0. \end{cases}$$

Tada

$$\begin{cases} x \geq -14, \\ x < -2 \end{cases} \Rightarrow -14 \leq x < -2.$$

Jei $x + 2 \geq 0$, tai iracionalioji nelygybė ekvivalenti nelygybei

$$\sqrt{x + 14} > \sqrt{(x+2)^2},$$

o ši yra ekvivalenti nelygybių sistemai

$$\begin{cases} x + 14 > (x+2)^2, \\ x + 2 \geq 0. \end{cases}$$

Spręsdami gauname:

$$\begin{cases} x+14 > x^2+4x+4, \\ x \ge -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+3x-10<0, \\ x \ge -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5<x<2, \\ x \ge -2 \end{cases} \Rightarrow -2 \le x < 2.$$

Taigi nelygybės

$$\sqrt{x+14} > \sqrt{x+2}$$

sprendinių aibė yra intervalų [–14; –2) ir [–2; 2) sąjunga – intervalas [–14; 2).

Ats.: [–14; 2).

18 pavyzdys. Išspręskime iracionaliąją nelygybę

$$\sqrt{5x+19} < x+5.$$

Sprendimas. Ši nelygybė ekvivalenti nelygybių sistemai

$$\begin{cases} 5x+19 < (x+5)^2, \\ x+5 \ge 0, \\ 5x+19 \ge 0. \end{cases}$$

Iš jos gauname:

$$\begin{cases} 5x+19 < x^2+10x+25, \\ x > -5, \\ x \ge -3{,}8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+5x+6>0, \\ x \ge -3{,}8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+2)(x+3)>0, \\ x \ge -3{,}8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-3 \text{ arba } x>-2, \\ x \ge -3{,}8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3{,}8 \le x < -3 \text{ arba } x > -2.$$

Ats.: $[-3{,}8;\ -3) \cup (-2; +\infty)$.

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Išspręskite lygtį $\sqrt{x^2+9} - \sqrt{x^2-7} = 2$.

2. Išspręskite lygtį $\sqrt{\frac{3x+4}{x}}+\sqrt{\frac{2x-4}{x}}=3.$

3. Išspręskite lygtį $\sqrt{\frac{x^2+8x-20}{x^2+x-6}}+\sqrt{\frac{x^2+x-6}{x^2+8x-20}}=\frac{25}{12}.$

4. Išspręskite lygtį $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0.$

5. Išspręskite lygtį $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1.$

6. Išspręskite lygtį $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}.$

7. Išspręskite lygtį $\sqrt{x^2+32}-2\sqrt[4]{x^2+32}=3.$

8. Išspręskite nelygybę $\sqrt{2-x}\geq 3-2x.$

9. Išspręskite nelygybę $\frac{3-x}{\sqrt{15-x}}\leq 1.$

10. Išspręskite nelygybę $\frac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2.$

IV. UŽDAVINIŲ SPRENDIMO STRATEGIJA „GRĮŽK ATGAL“

Romualdas Kašuba
(Vilniaus universitetas)

Teko girdėti, kad alpinistai sako, jog kartais sunkiau nulipti nuo kalno, negu į jį įkopti. Nežinome, ar tikrai dažnai taip būna, tačiau matematikoje dažnai pasitaiko, kad ką nors planuodami ar labai norėdami gauti, mes dažnai teiraujamės, nuo ko reikėtų pradėti, ką reikėtų turėti ir ko imtis, kad gautume, ką planuojame, jei tik tai apskritai įmanoma.

1. Sakykime, kad mes turime kokį skaičių, sakykime 1, ir su turimu skaičiumi mokame atlikti 2 operacijas – pridėti 2 ir padauginti iš 2. Ar taip darydami kada nors galėtume gauti 100? Galėtume sakyti, kad mūsų uždavinys yra apie tai kaip mums nuo 1 „pakilti“ ligi 100.

Spręsdami šį uždavinį, mes galime bandyti tiesiogiai eidami nuo 1 kaip nors „prisikasti“ iki to „išsvajotojo“ 100. Bet galima elgtis ir kitaip. Galime „nuduoti“, kad mes tą 100 jau esame gavę ir imti žiūrėti, kaip mums „sugrįžti“ atgal arba „nusileisti“ prie 1. Taigi dabar mūsų uždavinys būtų jau ne kaip nuo 1 „pakilti“ iki 100, bet kaip nuo 100 nelyginant kokios „viršūnės“ nusileisti prie 1, kuris dabar būtų mūsų „papėdė“ ar „išeities stovykla“.

Tada, jeigu jau nutarėme leistis, tai turime daryti „atvirkštinius“ žingsnius negu tie, kuriuos darėme kildami aukštyn. Atkakliai darant analogijas su „įkopimais“ ir „parkopimais“ galima būtų sakyti, jog mums buvo nurodyta, kaip „statyti kojas“ įkopiant ir pagal tai mes turime patys susigaudyti, kaip mums reikės „statyti kojas“ parkopiant. Mūsų nagrinėjamuoju atveju būtų visai paprasta suprasti, kad „atvirkštinis“ žingsnis arba veiksmas daugybai iš 2 yra, žinoma, dalyba iš 2, o „atvirkštinis“ žingsnis arba atvirkštinis darymas veiksmui „pridėti 2“ yra, žinoma, veiksmas „atimti“ 2.

Dar dažnai yra klausiama ne tiktai to, ar galima ką nors padaryti, bet taip pat dar ir to, kaip kuo greičiau tai atlikti.

Mūsų atveju turėdami skaičių 100 ir galėdami dalyti skaičius iš 2, jeigu tik jie iš 2 dalijasi (o sveikieji skaičiai dalijasi iš 2 tada ir tiktai tada, kai jie yra lyginiai), arba iš sveikojo skaičiaus 2 atimti, mes turime rūpintis, kaip būtų galima taip darant pasiekti 1. Tai nesunku atlikti kad ir tokiu būdu: pirmiausiai 100 dalijame iš 2 ir taip gauname 50; toliau būtų galima gautuosius 50 vėl dalyti iš 2, bet mes dabar renkamės kitą kelią ir iš tų turimųjų 50 atimame 2. Po tokio antrojo žingsnio mes turime 48 ir toliau trečiuoju žingsniu tuos 48 dalijame iš 2 ir gauname 24, dar toliau, jau ketvirtuoju judesiu, 24 vėl dalijame iš 2 ir gauname 12, toliau, jau penktuoju žingsniu, 12 dalijame iš 2 ir gauname 6; toliau šeštuoju žingsniu 6 dalijame iš 2 ir gauname jau tik 3; dabar, paskutiniu septintuoju žingsniu iš 3 atėmę 2 gauname planuotąjį arba nurodytąjį mums gauti 1.

Lieka dar klausimas, ar mes tai padarėme pačiu greičiausiu galimu būdu. Bet apie tai mes, kaip sakoma, labai norėtume kada nors pakalbėti išsamiau, nes greitis ką nors darant yra labai svaiginanti ir labai patraukli tema, kuriai, progai pasitaikius, labai norėtųsi paskirti atskirą pamoką arba išsamiau parašyti kitą kartą.

Šiuo kartu mes vis dėlto norėtume įrodyti, kad greičiau kaip 7 žingsniais nuo 1 „pakilti“ iki 100 negalima ir mes tai pademonstruosime. Įrodinėsime visiems suprantamu būdu domėdamiesi tokiu klausimu: pradėdami nuo 1 kokį patį didžiausią skaičių galima pasiekti 6 veiksmais. Jeigu sugebėtume pademonstruoti, kad bet kuriais 6 veiksmais gaunamas skaičius yra mažesnis už 100, tai tas faktas ir būtų įrodymas, kad 100 šešiais veiksmais nepasiekiamas (primename, kad jau žinome kaip 100 pasiekti 7 veiksmais).

Taigi pradedame nuo 1 stengdamiesi šešiais žingsniais atsidurti kuo aukščiau. Pirmuoju žingsniu pradėdami nuo 1 turime pasirinkimą: pridėti 2 ir gauti 3 arba padauginti iš dviejų ir tada gauti „tik“ 2. Nedvejodami renkamės žingsnį pridėti 2 kaip „užkeliantį mus aukščiau“. Dabar, kai turime 3, vėl turime pasirinkimą iš dviejų veiksmų: pridėti 2 arba iš dviejų padauginti. Matome, kad dabar, kai turime 3, mus aukščiau užkelia jau nebe „2 pridėjimas“, nes jis duotų „tik“ 5, o daugyba iš 2, nes mus „pakeltų“ iki 6. Ir taip bus visada, kai tik imsime bet kuriuos sveikuosius skaičius – pradedant nuo 3. Vadinasi, mūsų antrasis „maksimaliai turimą skaičių didinantis žingsnis“ bus daugyba iš 2 ir ji „pakels mus“ iki 6. Toliau vėl daugyba iš 2 – tai trečiasis veiksmas – pakels mus iki 12. Kita daugyba – jau ketvirtasis veiksmas – nuo 12 pakels mus iki 24. Dar viena daugyba iš 2 arba jau penktasis veiksmas pakels mus iki 48 ir galiausiai dar viena daugyba iš 2 – ir tai jau šeštasis veiksmas – „pakels“ mus iki 96. Taigi mes paaiškinome, kad šešiais veiksmais „išėję iš 1“ mes daugių daugiausiai arba „aukščių aukščiausiai“ galime pakilti į

„aukštumą“ 96 – o tai dar ne 100, nors ir labai netoli.

Todėl greičiausiai pakilti nuo 1 iki 100 galima 7 žingsniais – buvo nurodyta kaip.

2. Šitas uždavinys tinka ne tik mūsų ciklui „Lapatai lapatai atgalios“, bet ir būtų geras priedas prie uždavinių grupės „Ak, jeigu taip būtume turėję dar bent vieną litą“. Skaitytojui ši tematika, kai ko nors vos vos trūksta, yra gerai žinoma ir iš jo gyvenimo džiaugsmų, ir iš realybės vingių.

Pati tradiciškiausia šio uždavinio versija dažniausiai siejama su tur–gumi bei kiaušiniais ir paprastai pateikiama maždaug tokiu būdu.

Valstietė, arba kaip dabar jau labiau sakytume, ūkininkė atvežė į turgų parduoti daug kiaušinių ir belaukdama, kol užgrius pirmieji pirkėjai, nejučia ėmė rikiuoti juos ant prekystalio eilutėmis: pirmiau po 3, toliau – jau po 4, dar toliau – ir po 5, galiausiai net po 6 ir netgi po 7. Ji labai nusistebėjo išvydusi, kad kiekvieną kartą jai vis pritrūkdavo vieno vienintelio kiaušinio iki pilnos paskutinės eilės. Kiek mažiausiai kiaušinių ji galėjo būti atsivežusi į turgų?

Sprendimas yra labai paprastas ir, kaip sakyta, iš ciklo „Ak, jei galėtume iš kur nors prasimanyti dar vieną...“. Būdama rimta prekybininkė toji ūkininkė tikrai būtų galėjusi pasiskolinti tą vieną vis pasigendamą kiekvienos eilės užbaigimui kiaušinį kad ir iš kaimynės – jei tik būtų nujautusi, kad jai taip klosis. Pasiskolinusi tą vieną vienintelį trūkstamą kiaušinį ji jau būtų turėjusi visas pilnas eiles, pilnas visada – ir kai ji dėliojo po 3, ir kai dėliojo po 4, ir kai po 5, ir po 6, ir net kai po 7. Vadinasi, mums dabar aiškinantis, kiek ten pas ją buvo kiaušinių, beliktų kaip nors surasti kokį nors, pavyzdžiui, kad ir patį mažiausią skaičių, kuris dalijasi iš tų visų minėtųjų skaičių 3, 4, 5, 6 ir 7. Be jokių problemų, truputį pamaigę skaičiuoklį tuojau pat aptinkame, kad pirmas toks skaičius yra gerai ne tik prekybininkams žinomas skaičius 420.

Belieka grąžinti pasiskolintą kiaušinį kaimynei ir bus aišku, kad pats mažiausias galimas uždavinio atsakymas yra 419. Suprantama, kad kitas galimas atsakymas, jei nieko daugiau nebūtų pasakyta apie tai, kad tas skaičius turi būti pats mažiausias iš visų tokių galimų skaičių, būtų „dukart po 420 be 1“, arba 839.

3. Kitas labai populiarus ir neblogai išnagrinėtas klausimas yra susijęs su tokios rūšies uždaviniais, kai du žaidėjai vienas po kito gali daryti (ir daro) kokius nors leidžiamus ėjimus, turėdami prieš save kokį nors absoliučiai konkretų tikslą, arba, kaip dabar mėgstama sakyti, siekiamybę. Toji siekiamybė dažnai formuluojama žodžiais: „pirmasis padaręs tą ar aną, laimi“, arba „tas, kuris nebeturi ko daryti, pralaimi“.

Kad per daug neužsikalbėtume, paimkime konkretų uždavinį.

Lentoje yra parašytas skaičius 0. Kiekvienu ėjimu du žaidėjai, tradiciniais vardais pirmasis ir antrasis, pakaitomis prie lentoje esančio skaičiaus (kuris šiuo momentu, kaip sakyta, yra 0) prideda po kokį nors natūralųjį skaičių nuo 1 iki 9 ir tą sumą užrašo lentoje (savaime aišku, be jokių kalbų nutrindami tą ankstesnį lentoje buvusį skaičių). Dabar formuluojama siekiamybė yra tokia, kad be užuolankų sakoma, jog laimi tas žaidėjas, kuris (pirmas) gauna ir lentoje užrašo 100.

Dažnai, arba beveik visada, yra klausiama ir to (o jei ir aiškiai nepaklausiama, tai vis tiek ir visada turima galvoje), ar gali kuris nors iš tų žaidėjų žaisti taip, kad jis visada laimėtų (arba, mūsų atveju, visada galėtų įgyvendinti savo siekiamybę ir gautų parašyti skaičių 100), kad ir ką bedarytų tas kitas žaidėjas?

Jeigu kuris nors iš jų gali įgyvendinti tą savo siekiamybę (šiuo atveju tos siekiamybės yra abiems vienodos, nors šiaip jos skirtingiems žaidėjams gali būti ir skirtingos), arba padaryti, kas nurodyta, nežiūrint, ką bedarytų arba ko griebtųsi jo partneris (tas kitas), tai tada dar yra sakoma, kad toks žaidėjas turi laiminčiąją strategiją.

Mūsų konkretaus uždavinio sėkmingas sprendimas (tuoj pamatysime kuriam žaidėjui) „žiūrint iš galo“ arba „lapatai lapatai atgalios“ stiliumi yra susijęs su paprastu pastebėjimu, kad tas žaidėjas, kuris ateina pridėti skaičiaus ir lentoje randa parašytą vieną iš skaičių (bet kurį) 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98 ar 99, laimi. Tačiau jeigu jis randa lentoje parašytą skaičių 90, tai jis, suprantama, jau pralaimi, nes dabar jis savo ėjimu (arba savo pridėtimi) paliks lentoje parašytą vieną kurį iš skaičių 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98 ar 99 (ir ne daugiau) ir todėl pralaimės, nes tada tas kitas žaidėjas tikrai sugebės arba prie 91 pridėti 9, arba prie 92 pridėti 8 ir taip toliau, galiausiai jis tikrai be vargo sugebės prie 99 pridėti 1. Taip darydamas dabar jau tas kitas žaidėjas visais atvejais gaus 100 ir taip laimės. Taigi skaičiai 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99 yra laimintieji skaičiai einančiajam, o skaičius 90, atvirkščiai, yra pralaimintysis skaičius tam, kuris tuo metu turi pridėti.

Toliau lygiai taip pat: jei žaidėjas, darantis ėjimą, priėjęs prie lentos randa vieną iš parašytų skaičių 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88 ar 89, tai jis savo pridėjimu gali savo partneriui „padaryti situaciją 90“ ir todėl, kaip jau išnagrinėta, laimi. Toliau, lygiai taip pat mąstant, tam, kuris daro ėjimą, kita avarinė situacija yra, kai jis atėjęs pridėti randa lentoje skaičių 80. Kiti avariniai, arba išimtinai blogi skaičiai, yra 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10 ir 0.

Matome, kad tas, kuris eina, arba prideda pirmiau, (o pirmiau, jei tik nepasakyta kitaip, visada pradeda pirmasis žaidėjas), pralaimi. Nes po pirmojo žaidėjo arba dėjėjo ėjimo jo partneris lentoje ras vieną iš skaičių 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ar 9 ir savuoju ėjimu visada galės padaryti taip, pirmasis žaidėjas, vėl atėjęs dėti skaičiaus, ras lentoje nieko gero nežadantį skaičių 10. Po to antrasis žaidėjas padarys taip, kad pirmasis žaidėjas atėjęs dėti rastų skaičių 20, toliau 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 ir galiausiai pralaimės, nes 100 rašys ne jis.

Taigi šiame žaidime antrasis žaidėjas turi aiškią laiminčiąją strategiją, kurią galima aprašyti vieninteliu sakiniu: antrasis žaidėjas turi savo ėjimu pridėti tokį skaičių, kad jo ir pirmojo žaidėjo ką tik pridėto skaičiaus suma būtų lygi 10. Kadangi antrasis žaidėjas tokią savo siekiamybę visada – kiekvienu savo ėjimu – gali realizuoti, tai jis visada laimės, kad ir ką tas pirmasis dedantysis bedarytų.

4. Toliau sužaiskime kiek kitokį žaidimą. Vėl žaidžia du žaidėjai, tik jeigu ankstesniame žaidime jie prie lentoje esančio 0 pakaitomis vis pridėdavo skaičius 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, tai dabar jie iš pradžių lentoje randa parašytą 1, o radę jį ar kokį kitą skaičių daugina lentoje rastą skaičių iš 2 arba 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Laiminčiu skelbiamas tas žaidėjas, kuris savo ėjimu, t.y., savąja daugyba iš tų leidžiamų skaičių, gauna didesnį už 1000 skaičių.

Klausiama ir vėl to paties, ar kuris nors iš jų gali garantuotai laimėti, kad ir ką bedarytų jo partneris ir ką jis turėtų daryti, kad jam būtų „taip gerai“. Vėl darome analizę „iš galo“ „lapatai lapatai atgalios“ stiliumi. Kadangi

$$111 \cdot 9 = 999 < 1000,$$

tai žaidėjas, kurio eilė eiti ir kuris randa lentoje parašytą 112, arba bet kurį kitą už jį didesnį skaičių (bet dar ne 1000), laimi.

Jeigu lentoje yra parašytas skaičius 111, tai tas žaidėjas, kurio eilė būtų eiti, suprantama, pralaimėtų. Nes savo daugyba jis dabar 1000 pasiekti negali ir savo ėjimu jis garantuotai paliks lentoje už 111 didesnį, bet už 1000 mažesnį, skaičių. Lygiai taip pat jis pralaimės ne tik radęs lentoje skaičių 111, bet ir bet kurį iš skaičių 110, 109, ..., 56. Toliau, skaičiai nuo 55 „žemyn“ iki 7 yra laimintieji skaičiai prieinančiajam dauginti, o 4, 5, 6 yra vėl pralaimintieji skaičiai priėjusiam dauginti. Bet į aibę 4, 5, 6 galima pakliūti iš 1. Todėl pradedančiajam žaidimą, arba radusiam lentoje 1, pakanka jį padauginti iš 4, 5 arba 6 ir jis galėtų laimėti ir tikrai laimės elgdamasis taip, kaip ką tik buvo nupasakota.

5. Pas močiutę Danguolę šventinių pietų atvyko visi trys jos anūkai: Aloyzas, Edmundas ir Jolanta. Kol močiutė dengė stalą, Jolantą ištiko gerumo priepuolis, nes ji, išsitraukusi iš maišelio visus savo surinktus saldainius (saldainius iš savo plačių kišenių išsitraukė ir Edmundas su Aloyzu), davė ir Edmundui, ir Aloyzui po tiek saldainių, kiek kuris turėjo. Po to tą patį pakartojo ir Edmundas. Ir jis iš savo turimų saldainių davė ir Jolantai tiek saldainių, kiek Jolanta jų tuo metu turėjo, ir Aloyzui – irgi tiek, kiek jis tuo metu turėjo. Galiausiai tą patį padarė ir Aloyzas – ir jis iš savo tuo metu turimų saldainių davė likusiems dviems po tiek saldainių, kiek kuris tuo metu turėjo. Tada jie nustebę pamatė, kad kiekvienas iš jų turi po tiek pat saldainių – kiekvienas po 8.

Kiek saldainių kiekvienas jų turėjo iš pradžių?

Šis uždavinys yra tipinis ėjimo atgal uždavinys, kai mums yra pasakoma, kas yra daroma ir kuo visa tai baigiasi ir yra prašoma nurodyti, kas buvo tada, kai visa tai dar nebuvo prasidėję, arba, vaizdžiai sakant, buvo beprasidedą.

Nesunku pasidaryti lentelę ir susirašyti, kuo viskas pasibaigė – o viskas pasibaigė absoliučia turimų saldainių lygybe:

Vardai	JOLANTA	ALOYZAS	EDMUNDAS
Saldainių skaičius	8	8	8

Dabar dar geriau įsisaviname ne tik tai, kad jie visi turi po 8 saldainius, arba iš viso per visus 24, bet dar ir tai, kad tas visų jų turimų saldainių skaičius saldainių perskirstymo laikais nesikeičia, nes juk saldainiai tik keliauja iš vieno anūko pas kitą, arba tik keičia kišenes, kaip šmaikštavo linksmuolis Aloyzas.

Svarbiausia čia yra pati ėjimo atgal pradžia, arba tas pats pirmasis žingsnis atgal. Paskutinis geradarys buvo Aloyzas, būtent jis davė kiekvienam tiek saldainių, kiek jų pas kurį tuo momentu buvo. Kitaip sakant, Aloyzas kiekvienam padvigubino jo turimų saldainių skaičių. Jeigu po jo padvigubinimo ir Jolanta, ir Edmundas turi po 8 saldainius, tai prieš padvigubinimą jie abu turėjo dvigubai mažiau, arba kiekvienas po 4 saldainius. Vadinasi, kiekvienas iš Aloyzo gavo po 4 saldainius, arba iš viso Aloyzas išdalino 4 + 4 = 8 saldainius, o kadangi jis dabar turi 8 saldainius, tai prieš imdamasis geradario vaidmens jis saldainių turėjo 8 + 8 = 16.

Taip mes su jais ne tik padarėme žingsnį atgal, bet ir jį paaiškinome. Kiti žingsniai bus tokie patys, keisis tik geradarių vardai. Taigi prieš paskutinį saldainių dvigubinimą padėtis buvo tokia:

Vardai	JOLANTA	ALOYZAS	EDMUNDAS
Saldainių skaičius	4	16	4

Dabar darome antrąjį žingsnį atgal – geradarys dabar yra Edmundas. Jis dvigubino saldainius Jolantai ir Aloyzui. Kadangi Jolanta dabar turi 4 saldainius, tai prieš dvigubinimą ji turėjo tik 2, o kitus 2 ji gavo iš Edmundo. Visai kitas reikalas yra Aloyzas – jis turi 16 saldainių, vadinasi, prieš dvigubinimą jis turėjo turėti 8 saldainius, o kitus 8 jis ką tik yra gavęs iš Edmundo. Todėl per dvigubinimus Edmundas savo noru prarado, atsiprašome, išdalijo 2 + 8 = 10 saldainių, vadinasi, prieš savo geradariavimą jis turėjo 4 + 10 = 14 saldainių. Tai ir surašykime į lentelę:

Vardai	JOLANTA	ALOYZAS	EDMUNDAS
Saldainių skaičius	4 : 2 = 2	16 : 2 = 8	4 + 2 + 8 = 14

Atkreipkime dėmesį, kad visi kartu tebeturi tuos pačius 24 saldainius, nes 2 + 8 + 14 = 24.

Paskutinis žingsnis yra visiškai toks pats, tik dabar geradariauja Jolanta – pamename, kad visa nuo jos ir prasidėjo. Todėl dabar jau daugiau nieko nebesakysime, tik surašysime lentelėje, kaip viskas buvo ikijolantiniais laikais – arba iš pat pradžių.

Vardai	JOLANTA	ALOYZAS	EDMUNDAS
Saldainių skaičius	2 + 8 : 2 + 14 : 2 = 13	8 : 2 = 4	14 : 2 = 7

Vadinasi, iš pat pradžių buvo taip:

Vardai	JOLANTA	ALOYZAS	EDMUNDAS
Saldainių skaičius	13	4	7

Atkreipkime dėmesį į saldainių balansą – kartu tai parodo Jums, kad Jūs skaičiuodami nepadarėte jokių aritmetinių netikslumų: visų jų turimų saldainių skaičius tebėra $24 = 13 + 4 + 7$.

6. Mokyklos bufete prie nemokamų bandelių išsirikiavę kantriai stovėjo vaikai. Tačiau bandelių dar nespėjo išpakuoti ir kol jas pakavo į kiekvieną tarpą tarp stojančiųjų nejučiomis įlindo po vieną vaiką. Kol išpakuotas bandelės taikėsi pradėti dalinti tuoj vėl nejučiomis į kiekvieną tarpą tarp stojančiųjų įlindo dar po vieną alkstantį bandelių būsimąjį valgytoją. Tada bandelių dalinimas prasidėjo ir kiekvienam buvo paduota po bandelę, o iš viso jų buvo išdalinta 33. Kiek vaikų iš pradžių stovėjo eilėje?

Uždavinio sprendimas yra nesunkus ir žiūrint „iš priekio“ ir žvel–giant „iš galo“. Jeigu įsivaizduotume, kad iš pradžių eilėje stovi 10 vaikų, tai aišku, kad tarp tų 10 vaikų yra 9 tarpai ir todėl po pirmojo pasipildymo eilėje laukia 19 vaikų. Jeigu dabar vaikų yra jau 19, tai tarpų tarp gretimų vaikų yra 18 (tarpų juk visada yra vienu mažiau kaip kad vaikų), tai po antrojo pasipildymo vaikų būtų jau $19 + 18 = 37$. Taigi jei jiems dabar kiekvienam turėtume duoti po bandelę, tai reikėtų 37 bandelių, o jų tėra 33. Tai per mažai, kad galėtume duoti po vieną kiekvienam. Vadinasi, iš pradžių vaikų turėjo būti kiek mažiau negu 10. Mėgindami tvarkytis su 9 vaikais gautume, kad dabar išeitų taip, kaip reikia. Nes jei vaikų yra 9, tai tarpų tarp jų yra 8 ir po pirmojo pasipildymo vaikų pasidaro $9 + 8 = 17$, o jau po antrojo pasipildymo, kai 16 tarpų tarp 17 vaikų pakeičia lauksiantieji bandelių papildomi 16 vaikų, taip jų iš viso ir „pasidaro“ $17 + 16 = 33$, arba tiek, kiek reikia.

Parodėme sprendimą spėliojant. Galima padaryti tą patį ir su „abstrakčia“ formule: jeigu vaikų yra n, tai tarpų tarp jų yra vienu mažiau, arba $n - 1$. Pakeitus tuos tarpus „gyvais“ vaikais, jų (vaikų) pasidarys $n + (n - 1) = 2n - 1$. Jeigu vaikų yra $2n - 1$, tai tarpų tarp jų yra $2n - 2$; taigi vėl pakeitus tarpus „gyvais“ vaikais, jų bus jau $2n - 1 + (2n - 2) = 4n - 3$. Todėl dabar

$$4n - 3 = 33, \quad 4n = 33 + 3 = 36 \text{ ir } n = 9.$$

Galima spręsti ir „atbulai“, arba taip, kaip ir priklausytų pagal temos pavadinimą. Tada galima pasižiūrėti taip: jeigu po paskutinio papildymo turime 33 vaikus, tai prieš antrą kartą jiems nejučia „sulendant į visus tarpus“ jų turėjo būti 17, nes 16 būtų per mažai, o 18 jau būtų per daug. Vadinasi, tada jų buvo 17. Todėl jei po pirmojo pasipildymo jų buvo 17, tai tada, dar prieš tą patį pirmąjį pasipildymą, jų turėjo būti 9 (nes 8 vaikų būtų per mažai, o 10 vaikų jau būtų per daug). Todėl jų, tų pradinių stovėtojų, ir turėjo būti 9.

7. Veliuonos velniūkštis kartą sutiko Seredžiaus tinginėlį, gastroliuojantį Jurbarke prie tilto per Nemuną ir sako jam: „Kiekvieną kartą, kai tu, energingai mojuodamas rankomis, pereisi šį tiltą, nesvarbu, į kurią pusę, tik svarbu, kad man matant, tai tavo pinigai, kuriuos tu tuo metu turėsi su savimi savo kišenėse, padvigubės, tą aš tau garantuoju. Už tą mano tau nesuvokiamą finansinį gerumą tu man kiekvieną kartą sumokėsi dėkingumo mokestį, kuris yra 40 litų“. Apsidžiaugė Seredžiaus tinginėlis, gastroliuojantis prie Jurbarko tilto, džiaugsmingai mojuodamas rankomis tris kartus perėjo tiltą ir liko be cento kišenėje – kaip stovi. Kiek pinigų Seredžiaus tinginėlis turėjo iš pradžių?

Šis klasikinis uždavinys sprendžiamas taip. Jeigu trečią kartą perlingavęs per tiltą Seredžiaus tinginėlis liko be cento kišenėje, tai prieš trečiąjį perlingavimą per tiltą jis turėjo turėti lygiai 20 litų. Tada jis pereitų tiltą, jo pinigai padvigubėtų, vadinasi, jų ir „pasidarytų“ lygiai 40 litų ir juos visus jis ir privalėtų pagal susitarimą atiduoti Veliuonos velniūkščiui kaip dėkingumo mokestį – ir liktų finansiškai plikas arba be cento kišenėje . Taigi po antrojo perėjimo jis turi 20 litų. Ką tik jis antrą kartą mokėjo dėkingumo mokestį už antrą džiaugsmingą perlingavimą per Jurbarko tiltelį ir, vadinasi, atidavė 40 litų, taigi prieš tai jis turėjo 20 + 40 = 60 litų. Taigi prieš antrąjį padvigubinimą jo kišenėse žvangėjo 60 : 2 = 30 litų. Vadinasi, prieš pirmąjį dėkingumo mokesčio mokėjimą jis turėjo 30 + 40 = 70 litų, o prieš pirmąjį dvigubinimą – arba kai ėmėsi vykdyti Veliuonos velniūkščio planą – 70 : 2 = 35 litus.

Išsprendus bet kurį tokį uždavinį „einant atgal“ – vien jau dėl aritmetinio saugumo ir sprendimo skaičių nesupainiojamumo – labai patar tina dar kartą patikrinti, ar viskas taip yra, kaip mums sprendžiant išėjo.

Tai galėtume padaryti ir šiuo atveju.

Seredžiaus tinginėlis leidžiasi per tiltą turėdamas 35 litus. Kai jis pereina tiltą pirmąjį kartą, jo pinigai padvigubėja ir taip litų pas jį pasidaro 70. Sumokėjus dėkingumo mokestį, litų pas jį lieka 30. Santūriai pastebime, kad tų litų pas jį yra, kad ir nežymiai, bet jau mažiau, negu buvo iš pat pradžių.

Tai jau nors šiek tiek spėjančius pamąstyti asmenis kreipia prie minties, kad toliau, prabylant Maironio žodžiais, bus „da gražiau“ (taigi tikriausiai litai tirps dar spėriau). Ir tikrai. Po antrojo permojavimo per tiltą 30 Seredžiaus tinginėlio kišenėse dar tebežvangančių (kone „tebežvengiančių“) litų, kad ir padvigubės, ir jų bus jau 60, bet po antrojo dėkingumo mokesčio įnašo jų tebežvangės jau tik 20. Liko trečiasis perėjimas ir su tais 20 litų galutinė baigtis absoliučiai „determinuota“: pereini su 20 litų, pinigai padvigubėja, litų pasidaro 40 ir juos čia pat visus atiduodi – ir esi laisvas bei „finansiškai“ plikas.

8. Uždavinys, į kurį dabar pasižiūrėsime, yra, matyt, iš tų uždavinių, kurie labiau paliečia ne tiek mūsų loginį mastymą, kiek vaizduotę.

Į kolbą buvo įleista bakterija, kuri ėmė labai energingai daugintis tokiu būdu, kad kas minutę esančių bakterijų skaičius vis padvigubėdavo. Po 3 valandų bakterijos užpildė visą kolbą. Kuriuo momentu bakterijos buvo užpildžiusios vieną ketvirtąją kolbos tūrio dalį.

Sprendimas „atsukant“ kadrą atgal yra visai suprantamas – pirmiausiai paklauskime, kiek tūrio buvo pripildyta per paskutinę minutę, jei bakterijų skaičius, kaip sakyta, kas minutę išaugdavo dvigubai. Laikydamiesi uždavinio sąlygos būsime priversti sakyti, kad likus vos vienai minutei iki proceso pabaigos, bakterijos dar „tevaldė“ pusę kolbos tūrio.

Kalbėdami stenografiškai turėtume sakyti, kad likus vienai minutei iki trečios „bakterijų bangos“ valandos pabaigos, arba 2 valandą 59 minutės nuo vyksmo pradžios, bakterijos užėmė pusę kolbos tūrio. Lygiai taip pat dar prieš minutę, arba 2 valandos 58 minutės nuo vyksmo pradžios, bakterijos „tevaldė“ arba buvo užėmusios pusę pusės, arba dar tik vos vieną ketvirtadalį vietos kolboje.

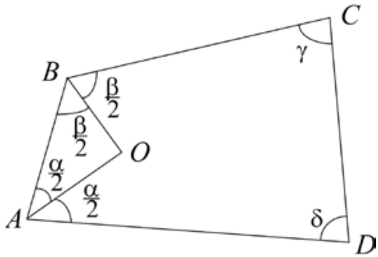
Todėl bakterijos buvo užėmusios ketvirtadalį kolbos tūrio prieš 2 minutes „iki viskam pasibaigiant“, arba kai nuo veiksmo pradžios buvo praėjusios 2 valandos 58 minutės.

9. Šitas uždavinys perkelia mus į situaciją, kai esame prašomi nustatyti, o mes pradedame samprotauti taip: jeigu tikrai būtų taip, kaip jūs kad prašote įrodyti, tai tada būtų „dar ir taip, ir taip“. O tada būtų dar ir taip, ir „dar kažkaip kitaip“. O taip „dar kažkaip kitaip“, tai tikrai yra.

Ir dabar jeigu nuo to mūsų „dar kažkaip kitaip“ vėl galima grįžti prie to, ko mūsų ir prašė nustatyti, tai tada matome, kad taip tikrai ir yra.

Kad būtų dar aiškiau pateiksime pavyzdį.

Turime iškiląjį keturkampį. Primename, kad keturkampis yra iškilasis, jei jis su bet kuriais 2 savo taškais talpina ir visą tuos du taškus jungiančią atkarpą. Esame prašomi įrodyti štai kokį faktą. Jeigu mes išvestume dviejų gretimų to iškilojo keturkampio kampų pusiaukampines, esančias prie vienos kraštinės ir pažiūrėtume į jų susikirtimo kampą, esantį prieš tą kraštinę, tai labai norėtume įrodyti, kad to pusiaukampinių sudaromo kampo, esančio prieš minėtą keturkampio kraštinę, didumas yra lygus likusių dviejų to keturkampio kampų didumų sumos pusei.



Pasidarykime brėžinį ir pažymėkime to keturkampio *ABCD* kampų didumus atitinkamai α, β, γ ir δ (žr. pav.). Nemažindami bendrumo galime sakyti, kad keturkampio kampų prie kraštinės AB didumai yra α ir β. Tada, išvedę keturkampio kampų *A* ir *B* pusiaukampines ir pažymėję jų sankirtos tašką raide *O*, turėsime trikampį *ABO*, kurio kampų didumai yra atitinkamai $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ ir $180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$.

Mūsų ką tik paminėtas trečiasis trikampio *ABO* kampas ir yra tas pradinio keturkampio kampų *A* ir *B* pusiaukampinių sudaromas priešais keturkampio kraštinę *AB* esantis kampas *AOB*, kurio lygumą likusių dviejų keturkampio kampų γ ir δ sumos pusei $\frac{\delta}{2} + \frac{\gamma}{2}$ mums ir reikėtų įrodyti.

Kitaip sakant, mums reikėtų įrodyti, kad $180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\delta}{2} + \frac{\gamma}{2}$.

Padauginę lygybę iš dviejų ir sukėlę visus kampus į vieną pusę gautume

$$360° = \alpha + \beta + \delta + \gamma.$$

Užrašytoji lygybė yra tikrai teisinga, nes ji sako, kad visų iškilojo keturkampio kampų suma yra lygi 360 laipsnių, o tai yra akivaizdus faktas.

Tai ir yra tas teisingasis „dar kažkaip kitaip“. Toliau visai aišku, kad iš to dar kažkaip kitaip „įmanoma grįžti prie to, ką mus prašė įrodyti. Todėl ir tai, ką mūsų prašė įrodyti yra irgi teisinga – nes tai yra lygiavertu tam, kad iškilojo keturkampio kampų suma yra 360 laipsnių.

Tačiau gali paaiškėti, kad taip „dar kažkaip kitaip“ tikrai negali būti. Tuomet suprantame, kad mūsų prašė padaryti tai, ko padaryti apskritai negalima.

10. Atsakykime į tokį klausimą:

Ar būtų galima ciferblato valandų skaičius 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ir 12 perstatyti taip, kad gretimi skaičiai skirtųsi arba per 3, arba per 4, arba per 5?

Tarkime, kad taip, kaip mūsų prašo, perstatyti tuos „valandų“ skaičius galima, ir pamėginkime „išeidami iš to“ gauti ką nors visai neįmanomo. Taigi tarus, kad taip, kaip mūsų prašo, valandų skaičius perstatyti galima, turėtume pripažinti, kad jokie iš šešių skaičių grupės

1, 2, 3, 10, 11 ir 12

naujame ciferblato skaičių perrikiavime tikrai nebus kaimynai. Bet tai yra lygiai pusė ant ciferblato esančių skaičių. Todėl nebūdami kaimynais jie naujoje rikiuotėje turės eiti „kas antras“, o tada ir tie kiti likę skaičiai 4, 5, 6, 7, 8 ir 9 irgi bus įsiterpę tarp jų, vadinasi, ir jie taip pat „eis kas antras“.

Bet taip negali būti, nes skaičius 4 neturi kur įsiterpti, juk jis turi tik vieną kaimyną tarp skaičių 1, 2, 3, 10, 11 ir 12.

Todėl prašomu būdu skaičiai ant ciferblato neišsirikiuos.

Baigdami norėtume pridurti, kad labai dažnai uždaviniai yra sprendžiami būtent lanksčiai derinant ir tą mums labiau įprastą „tiesioginį“ sprendimą su tuo čia mūsų kiek panagrinėtu metodu „lapatai lapatai atgalios“.

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Su skaičiumi galima atlikti 2 operacijas: galima jį padauginti iš 5 arba prie jo pridėti 3. Ar taip darant įmanoma pradėjus nuo 1 kada nors gauti 100 ir kaip tai galima būtų padaryti?

2. Pas senelį Motiejų padirbėti atvyko visi keturi jo anūkai: Aloyzas, Edmundas, Kasparas ir Leonas. Prieš darbą senelis kiekvienam iš jų davė po maišelį kriaušių. Kol senelis tikslinosi, kokius darbus reikėtų pirmiausiai nudirbti kitą kartą susiėjus, anūkai su senelio kriaušėmis surengė pokyčių kampelį. Pirmiausiai Aloyzas iš savo kriaušių maišelio davė likusiems trims po tiek kriaušių, kiek kuris iš jų tuo metu turėjo. Po to tą patį pakartojo Edmundas – ir jis iš savo turimų kriaušių davė kiekvienam tiek, kiek tas turėjo. Vėliau tą patį padarė Kasparas ir galiausiai – Leonas. Atlikus tuos perskirstymus paaiškėjo, kad dabar visi keturi senelio Motiejaus anūkai turi po lygiai kriaušių – kiekvienas po 16. Atėjusi senelė Matilda ir atnešusi kiekvienam po nemenką ledų porciją dar pasiklausė, ar ir dabar dar galima būtų atsekti, kiek kriaušių kiekvienas buvo gavęs iš senelio Motiejaus. Ką jie turi atsakyti senelei Matildai?

3. Mokyklos bufete prie nemokamų apelsinų išsirikiavę kantriai stovėjo vaikai. Tačiau apelsinų dar nespėjo išpakuoti ir į kiekvieną tarpą tarp stojančiųjų nejučiomis įlindo po vieną vaiką. Apelsinai jau buvo išpakuoti, bet dar nepradėti dalinti ir tada dar sykį į kiekvieną tarpą tarp visų dalybų belaukiančių vaikų vėl nejučiomis įlindo dar po vieną alkstantį vaisių žmogų. Tačiau kadangi apelsinų dalinimas net ir dabar dar nebuvo spėjęs prasidėti, todėl ir vėl, dabar jau trečią kartą, į kiekvieną tarpą tarp laukiančiųjų ir vėl įsitaisė po vieną vaiką. Tada apelsinų dalinimas galų gale jau prasidėjo ir kiekvienam laukiančiajam kliuvo po du apelsinus ir taip iš viso buvo išdalinta net 418 apelsinų. Kiek vaikų iš pat pradžių stovėjo eilėje?

4. Lentoje yra parašytas skaičius 2. Du žaidėjai pakaitomis – pradeda pirmasis žaidėjas – prie to lentoje esančio skaičiaus gali pridėti bet kurį natūralųjį skaičių, mažesnį už tą lentoje esantį. Pridėjus nauja–sis skaičius užrašomas lentoje vietoje lentoje buvusio skaičiaus. Laimi tas, kuris pirmas lentoje užrašo 1000. Ar gali kuris nors iš jų laimėti, kad ir ką bedarytų jo partneris ir kaip jis tada galėtų žaisti?

5. Lentoje parašytas skaičius 100. Vienu ėjimu leidžiama atimti iš jo bet kurį nedidesnį už jį natūralųjį skaičių, kuris yra skaičiaus 2 laipsnis (primintume, kad ir vienetas yra 2 laipsnis, nes $2^0 = 1$). Laimi tas žaidėjas, kuris savo ėjimu gauna 0. Ar gali kuris nors iš jų visada laimėti, kad ir ką bedarytų jo partneris?

6. Jonas nuo pirmadienio ruošiasi internetu pardavinėti apsus. Kiekvienas, atsidaręs jo puslapį, gali pasižiūrėti, kiek skirtingų apsų jis jau yra sukūręs. Jie yra rodomi ekrane eilėmis arba po 3, arba po 5, arba po 7, arba net ir po 9. Martynas, peržiūrėjęs visas galimas Jono apsų rikiuotes, nustatė, kad kiekvieną kartą paskutinėje nepilnoje eilėje iki pilnos eilės visada trūkdavo 2 apsų. Kiek apsų per savo audringą kompiuterinę karjerą jau prigamino Jonas, jeigu jo prigamintų apsų skaičius yra pats mažiausias iš visų tokių keturženklių skaičių?

7. Mokytojas Gutenbergas išdovanojo savo mokiniams savo spaustuvėje per vakarykščią dieną išspausdintas knygas. Pirmajam jis davė vieną dešimtadalį išspausdintų knygų ir dar vieną knygą. Antrajam jis davė vieną dešimtadalį likusiųjų knygų ir dar 2 knygas ir taip toliau. Galiausiai devintajam mokiniui jis davė vieną dešimtadalį likusiųjų knygų ir dar devynias knygas. Tai padarius pasimatė, kad visos knygos yra išdalintos. Kiek knygų mokytojas Gutenbergas išspausdino per vakarykščią dieną?

8. Virš ežerų skrido žąsys. Kiekviename ežere nutūpdavo pusė žąsų ir dar pusė žąsies. Visos žąsys nutūpė 7 ežeruose. Kiek žąsų buvo iš viso?

9. Vieną popietę Jonas kaip norėjo taip į eilutę surašė visus sveikuosius skaičius nuo 1 iki 10, o Andrius prie kiekvieno tokio skaičiaus, kad būtų linksmiau, dar pripliusavo jo numerį toje eilėje. Taip Andrius prie pirmosios Jono parašytosios virtinės

6, 4, 3, 2, 5, 10, 1, 9, 8, 7,

pripliusavęs kiekvieno skaičiaus eilės numerį joje gavo 10 skaičių

7, 6, 6, 6, 10, 16, 8, 17, 17, 17.

Atėjęs Justas ir pasižiūrėjęs, kas čia „gaunasi“, pagyrė juos už darbą be klaidų, tik pastebėjo, kad Andriaus skaičių virtinėje yra daug skaičių su vienodais paskutiniais skaitmenimis ir pasiteiravo, ar nepajėgtų Jonas surašyti tų 10 pirmųjų skaičių tokia eile, kad po Andriaus pridėties išeitų 10 tokių skaičių, kurių paskutinieji skaitmenys yra visi skirtingi?

Ar pajėgs Jonas išpildyti Justo pageidavimą?

10. Apie apskritimą ratuku surašinėjami bet kuria eile visi 10 skaitmenų 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir 9. Ar gali pasisekti surašyti apie apskritimą tuos 10 skaitmenų taip, kad bet kurių trijų iš eilės einančių skaičių suma būtų nedidesnė

(A) kaip 13?

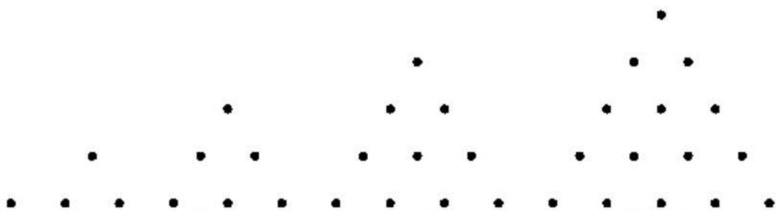
(B) kaip 14?

V. GEOMETRINIAI SKAIČIAI

Vilius Stakėnas
(Vilniaus universitetas)

Pitagoras, gyvenęs 5 a. pr. Kr. Italijoje, įkūrė mokyklą. Pavadinę ją studijų ir mokslo tyrimo centru mažai suklystume. Pitagoriečiai didelę reikšmę teikė matematikos – geometrinių formų ir skaičių – tyrimams. Geometrijos figūros ir skaičiai jų požiūriu sudarė vienovę. Pavyzdžiui, jie mėgo tyrinėti skaičių, kuriuos galima pavaizduoti geometriškai, sekas. Pavadinkime šiuos pitagoriečių skaičius geometriniais.

Štai šitaip sudaroma trikampių skaičių seka. Žymėsime trikampių skaičių seką taip: $T_1, T_2, \ldots$



$T_1 = 1$ $T_2 = 3$ $T_3 = 6$ $T_4 = 10$ $T_5 = 15$

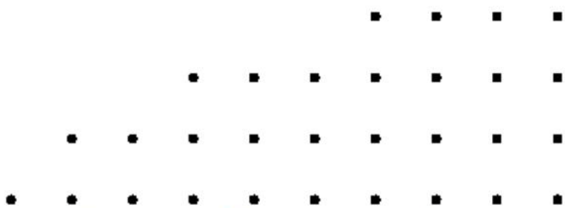
Nesunku įžvelgti, kad trikampius skaičius vieną po kito galime gauti naudodamiesi lygybe $T_n = T_{n-1} + n.$ Taigi

$$T_n = T_{n-1} + n = T_{n-2} + (n-1) + n = \ldots = 1 + 2 + \ldots + n.$$

Prisiminę, kaip sumuojami aritmetinės progresijos nariai, gausime

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

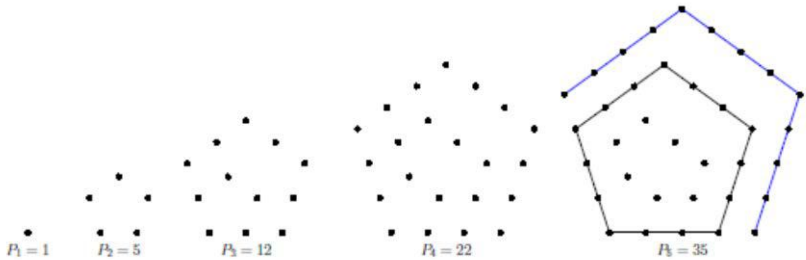
Išdėstę taškus kvadratuose gausime kvadratinius skaičius $K_1, K_2, \ldots$



$K_1 = 1$ $K_2 = 4$ $K_3 = 9$ $K_4 = 16$

Akivaizdu, kad kvadratiniai skaičiai ir yra kvadratai: $K_n = n^2$.

O dabar pasitelkime penkiakampio figūrą ir sudarykime penkiakampių skaičių seką $P_1, P_2, \ldots$



Pastebėkime, kad penkiakampis skaičius gaunamas iš mažesnės eilės penkiakampio skaičiaus padidinant jį taškų skaičiumi, kuris yra ant iš trijų atkarpų sudarytos laužtės. Pavyzdžiui, $P_5 = P_4 + 13$. Ant kiekvienos iš trijų atkarpų yra po penkis taškus, tačiau du taškai yra bendri dviems atkarpoms, todėl ir gauname $13 = 3 \cdot 5 - 2$.

Dabar jau galime parašyti bendrą sąryšį:

$$P_n = P_{n-1} + 3n - 2.$$

Pasinaudoję juo gausime penkiakampio skaičiaus bendrojo nario formulę:

$$P_n = P_{n-1} + 3n - 2 = P_{n-2} + 3(n-1) - 2 + 3n - 2 = \ldots =$$
$$= 1 + 3 \cdot 2 - 2 + \ldots + 3n - 2.$$

Pakeitę pirmąjį dėmenį $1 = 3 \cdot 1 - 2$ galėsime užrašyti:

$$P_n = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \ldots + 3 \cdot n - 2n = 3(1 + 2 + \ldots + n) - 2n,$$

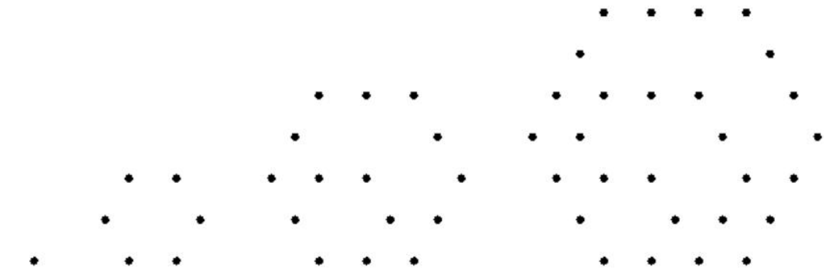
arba

$$P_n = \frac{3n(n+1)}{2} - 2n = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Pastebėkime, kad penkiakampį skaičių galime išreikšti trikampiu skaičiumi:

$$P_n = 3T_n - 2n, \quad P_n - n = 3(T_n - n).$$

Žinoma, galime nagrinėti ir kitokius geometrinius skaičius. Štai šitaip gaunami šešiakampiai skaičiai $S_1, S_2, \ldots$



$S_1 = 1$ $S_2 = 6$ $S_3 = 15$ $S_4 = 28$

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Skaičius 666 yra trikampis. Koks jo eiles numeris?

2. Brėžinyje pavaizduota eilutė iš 10 langelių.

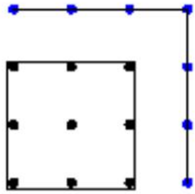
Kiek stačiakampių galima sudaryti iš gretimų šios eilutes langelių? Tarkime, langelių eilutėje yra *k*, o *N* – stačiakampių, kuriuos galima sudaryti iš gretimų langelių, skaičius. Įrodykite, kad *N* yra trikampis skaičius.

3. Skaičius $8T_{10} + 1$ yra kvadratinis. Koks jo eiles numeris? Įrodykite, kad su visomis *n* reikšmėmis skaičius $8T_n + 1$ yra kvadratinis. Koks jo eilės numeris?

4. Skaičius $9T_{10} + 1$ yra trikampis. Koks jo eiles numeris? Įrodykite, kad su visomis *n* reikšmėmis skaičius $9T_n + 1$ yra trikampis. Koks jo eiles numeris?

5. Trikampių skaičių suma gali būti kitas trikampis skaičius. Pavyzdžiui, skaičius $T_{20} + T_6$ yra trikampis. Koks jo eilės numeris? Yra be galo daug $T_a + T_b = T_c$ rūšies lygybių. Suma $T_{T_4 - 1} + T_4$ irgi trikampis skaičius. Koks jo eilės numeris?

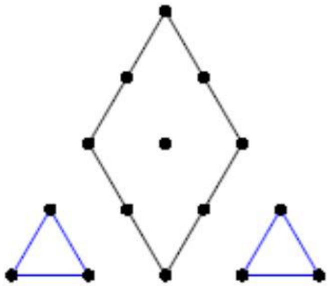
6. Brėžinys vaizduoja sąryšį $K_4 = K_3 + 7$.



Įsitikinkite, kad jį galima apibendrinti taip: $K_n = K_{n-1} + (2n-1)$. Pasinaudokite šiuo sąryšiu ir raskite du lygties $x^2 = y^2 + z^2$ sprendinius sveikaisiais skaičiais, tenkinančius sąlygą $x > y > z > 10$.

Patarimas. Skaičius $2n-1$ turi būti kvadratinis!

7. Iš brėžinio matyti, kad teisingas sąryšis $T_5 = 2T_2 + K_3$.



Įrodykite, kad lygybė $T_{2n+1} = 2T_n + K_{n+1}$ teisinga su visomis *n* reikšmėmis. Suraskite ir įrodykite panašią lygybę skaičiui T_{2n}.

8. Trikampių ir kvadratinių skaičių sekos prasideda vienetu: $T_1 = K_1$. Raskite dar du mažiausius trikampius skaičius, kurie yra ir kvadratiniai.

Patarimas. Su įvairiomis *a* reikšmėmis panagrinėkite kvadratinę lygtį

$$\frac{x(x+1)}{2} = a^2.$$

9. Skaičius $P_{10} - K_{10}$ yra trikampis. Koks jo eilės numeris? Įrodykite, kad skaičius $P_n - K_n$ su visomis n reikšmėmis yra trikampis. Koks jo eilės numeris?

10. Išveskite šešiakampio skaičiaus S_n bendrojo nario formulę. Užrašykite skaičių S_n ir T_n sąryšio lygybę.

Patarimas. Perskaitykite (ir supraskite), kaip išvesta P_n bendrojo nario formulė.

VI. PAPRASČIAUSIOS FUNKCINĖS LYGTYS

Aivaras Novikas
(Vilniaus universitetas)

Nagrinėsime tik funkcijas *f*, kurių apibrėžimo sritis *A* yra realiųjų skaičių aibė arba jos poaibis ir kurių reikšmės yra realieji skaičiai. Įvardydami tokias funkcijas, žymėsime $f : A \to R$. Prisiminkime: tai reiškia, kad bet kuriam skaičiui *x* iš aibės *A* funkcija priskiria vienintelį skaičių $f(x)$ iš aibės *R*. Pavyzdžiui, funkcija $f : [0; +\infty) \to R$, apibrėžta lygybe $f(x) = \sqrt{x}$, skaičiui 9 iš neneigiamų realiųjų skaičių aibės $[0; +\infty)$ priskiria realųjį skaičių $f(9) = 3$.

Spręsdami lygtis ieškome raidėmis pažymėtų nežinomųjų. Dažnai reikia rasti nežinomą skaičių. Tarkime, ieškome nežinomo skaičiaus *x* ir nustatome, kad jis tenkina lygtį $3x + 8 = 5x$. Nesunkiai randame, kad $x = 4$. Ši reikšmė yra lygties sprendinys, nes ją įrašę gauname teisingą lygybę $3 \cdot 4 + 8 = 5 \cdot 4$.

Funkcinėje lygtyje nežinomasis, kurį reikia rasti, yra funkcija. Tarkime, kad ieškome nežinomos funkcijos *f* ir nustatome, kad ji tenkina funkcinę lygtį $f(3x + 8) = 5x$. Lygtyje pastebėkime dvi raides: *f* ir *x*. Funkciją *f* turime rasti, jos nežinome. Suprantama, *x* žymi tam tikrą skaičių. Turi būti pasakyta, koks tas skaičius gali būti. Ar užrašytoji lygybė galioja bet kuriam realiajam skaičiui *x*? O gal tik vienam, kurį taip pat reikia rasti? Gal bet kuriai natūraliajai skaičiaus *x* reikšmei, o apie kitas mes nieko nežinome? Rašant tokią lygybę (funkcinę lygtį), būtina iš anksto žinoti, kokioms *x* (ar kitų lygtyje esančių skaitinių nežinomųjų) reikšmėms ji galioja.

Be to, prisiminkime, kad norint tiksliai įvardyti funkciją būtina nurodyti ne vien pačią funkcijos reikšmių skaičiavimo taisyklę, pavyzdžiui, $f(x) = 2x$, bet vėlgi nusakyti, kokias reikšmes gali įgyti funkcijos argumentas *x* (funkcijos apibrėžimo sritis) ir kokioje aibėje funkcija įgyja reikšmes. Tai būtina padaryti dar prieš užrašant funkciją lygybe, kitaip lygybė neturės tikslios matematinės prasmės. Pavyzdžiui, nagrinėjant reiškinį $f(3x + 8)$ ir žinant, kad funkcijos *f* apibrėžimo sritis yra tik teigiami realieji skaičiai, būtų kvaila kalbėti apie šio reiškinio reikšmes, kai $3x + 8 \le 0$. Kai $x = -3$, tai $f(3x + 8) = f(-1)$ tiesiog neegzistuotų. Spręsdami funkcines lygtis ieškomos funkcijos apibrėžimo sritį visada nurodysime iš anksto.

Taigi sukonkretinkime nekonkrečią ir todėl kol kas nekorektišką užduotį.

1 pavyzdys. Ieškome funkcijos $f : R \to R$ (taigi apibrėžtos visoje realiųjų skaičių aibėje *R*), kuriai lygybė $f(3x+8)=5x$ galioja su **bet kokiu** realiuoju skaičiumi *x*.

Funkciją *f* rasti nesunku. Pažymėkime $y=3x+8$. Tada $x=(y-8)/3$.

Pradėkime nuo kito galo: imkime **bet kokį** realųjį skaičių *y*, apibrėžkime $x=\frac{1}{3}(y-8)$ ir įrašykime šią *x* išraišką į lygtį:

$$f\left(3\cdot\frac{1}{3}(y-8)+8\right)= f(y)=5\cdot\frac{1}{3}(y-8)=\frac{5}{3}(y-8).$$

Šios lygybės galioja **bet kokiam** realiajam *y*, tad vienintelė tinkama funkcija yra $f(x)=\frac{5}{3}(x-8)$.

Įsitikinkime, kad ši funkcija išties yra sprendinys:

1) tai yra funkcija $f : R \to R$;

2) ji tenkina lygtį **su bet kokiu realiuoju skaičiumi *x***:

$$f(3x+8)=\frac{5}{3}((3x+8)-8)=\frac{5}{3}\cdot 3x=5x.$$

2 pavyzdys. Žinoma, kad funkcija $f : R \to R$ lygybę

$$f\left(\frac{2x+1}{2-x}\right)=x^2+x$$

tenkina su bet kokiu realiuoju skaičiumi $x \neq 2$ ir kad $f(-2)=0$. Raskime *f*.

Pažymėkime $y=\frac{2x+1}{2-x}$. Tada

$$2y-xy=2x+1,$$
$$xy+2x=2y-1,$$
$$x(y+2)=2y-1.$$

Pastebėkime, kad $y \neq -2$. Todėl $x = \dfrac{2y-1}{y+2}$.

Imkime bet kokį realųjį skaičių $y \neq -2$, apibrėžkime $x = \dfrac{2y-1}{y+2}$ ir įrašykime šią x išraišką į lygtį. Ją turime teisę įrašyti, tik jei $x \neq 2$. Bet jei $2 = x = \dfrac{2y-1}{y+2}$, tai $2y+4 = 2y-1$, o taip nebus niekada. Taigi bet kokiam $y \neq -2$ galioja lygybės

$$f\left(\frac{2x+1}{2-x}\right) = f(y) = \left(\frac{2y-1}{y+2}\right)^2 + \frac{2y-1}{y+2} = \frac{6y^2-y-1}{(y+2)^2}.$$

Tad $f(x) = \dfrac{6x^2-x-1}{(x+2)^2}$, kai $x \neq -2$.

Taške $x = -2$ funkcija jau apibrėžta: $f(-2) = 0$ (pastebėsime, kad jei šios reikšmės neturėtume, tai iš lygties negalėtume jos rasti, t. y. $f(-2)$ galėtų įgyti bet kokią reikšmę). Atsakymą galima užrašyti taip:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6x^2-x-1}{(x+2)^2}, & \text{kai } x \neq -2; \\ 0, & \text{kai } x = -2. \end{cases}$$

3 pavyzdys. Raskime visas tokias funkcijas $f: R \to R$, kurioms lygybė $f(x^2+4x+5) = x^2+x$ galioja su bet kokiu realiuoju skaičiumi x.

Čia vėl būtų galima bandyti žymėti $y = x^2+4x+5$, tačiau x per y vienareikšmiškai neužrašysime. To daryti ir nebūtina. Tik pastebėkime, kad įrašę į lygtį tam tikras x reikšmes gausime prieštarą:

$$f(5) = f(0^2+4\cdot 0+5) = 0^2+0 = 0,$$

tačiau tuo pat metu

$$f(5) = f(-4)^2+4\cdot(-4)+5) = (-4)^2+-4 = 12 \neq 0.$$

Vadinasi, tokių funkcijų f nėra.

Įdomesnės tos funkcinės lygtys, kuriose ieškoma funkcija paminėta daugiau nei vieną kartą.

4 pavyzdys. Raskime visas funkcijas $f: R \to R$, kurioms lygybė $f(x)+2f(1-x)=x^3$ galioja su bet kokiu realiuoju skaičiumi x.

Pasirinkime bet kokį realųjį skaičių *x*. Jam galioja lygybė $f(x)+2f(1-x)=x^3$. Tačiau ši lygybė galioja ir skaičiui $y=1-x$:

$$f(y)+2f(1-y)=y^3$$

arba

$$f(1-x)+2f(1-(1-x))=f(1-x)+2f(x)=(1-x)^3.$$

Sudarykime dviejų lygčių sistemą:

$$\begin{cases} f(x)+2f(1-x)=x^3, \\ f(1-x)+2f(x)=(1-x)^3. \end{cases}$$

Dėl patogumo (nors tai nebūtina) galima pažymėti nežinomuosius naujomis raidėmis (čia skaičiai *a* ir *b* kiekvienam *x* vis kiti):

$$\begin{cases} a+2b=x^3, \\ b+2a=(1-x)^3. \end{cases}$$

Išspręskime sistemą *a* atžvilgiu:

$$b=(1-x)^3-2a,$$

$$a+2((1-x)^3-2a)=x^3,$$

$$a=f(x)=\frac{1}{3}(2(1-x)^3-x^3)=\frac{1}{3}(2(1-3x+3x^2-x^3)-x^3)=\frac{2}{3}-2x+2x^2-x^3.$$

Pastaroji lygybė galioja bet kuriam *x*, tad jau radome reikiamą funkciją. Žinoma, dera patikrinti, ar funkcija $f(x)=\frac{2}{3}-2x+2x^2-x^3$ tenkina pradinę lygtį.

5 pavyzdys. Jei 4 pavyzdyje imsime lygtį $f(x)+f(1-x)=x^3$, tai atlikę panašius veiksmus gausime lygtis

$$f(x)+f(1-x)=x^3 \quad \text{ir} \quad f(1-x)+f(x)=(1-x)^3.$$

Taigi kiekvienam x galioja $x^3=(1-x)^3$. Tačiau tai netiesa, pavyzdžiui, kai $x=0$. Taigi tokios funkcijos nėra.

Dar pakeiskime lygtį: $f(x)+f(1-x)=1$. Šiuo atveju prieštaros negausime, bet ir ankstesnis metodas nepadės (pamąstykite, kodėl). Iš tikrųjų šią lygtį tenkina be galo daug funkcijų. Visgi tokiais atvejais kartais galima tiksliai apskaičiuoti bent jau kai kurias funkcijos reikšmes. Įrašę į lygtį reikšmę $x=\frac{1}{2}$, gauname $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ ir $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$

Tarkime, šiuo atveju žinoma, kad funkcija yra tiesinė. Tada egzistuoja tokie realieji skaičiai *k* ir *b*, kad visiems *x* galioja lygybė $f(x)=kx+b$. Raskime visas tiesines funkcijas, tenkinančias duotąją lygtį. Tam tiesinės funkcijos išraišką su nežinomais koeficientais įrašykime į lygtį. Pradinė lygtis ekvivalenti lygybėms

$$kx+b+k(1-x)+b=1 \text{ ir } k+2b=1.$$

Randame be galo daug tiesinių funkcijų, tenkinančių paskutinę lygybę, taigi ir pradinę lygtį. Pavyzdžiui,

$f(x)=x$ ($k=1, b=0$), $f(x)=\frac{1}{2}$ ($k=0, b=\frac{1}{2}$),

$f(x)=3x-1$ ($k=3,\ b=-1$), $f(x)=-x+1$ ($k=-1, b=1$) ir pan.

(Beje, ir tokios tiesinės funkcijos dar nėra visi lygties sprendiniai.)

6 pavyzdys. Žinoma, kad funkcija $f:R\to R$ lygybę

$$2xf(x)-(x-2)f(2x+1)=-4$$

tenkina su bet kokiu realiuoju skaičiumi x. Raskime $f(-1)$, $f(7)$, $f(1023)$, $f\left(-\frac{5}{8}\right)$.

Šią lygtį vėlgi tenkina be galo daug įvairių funkcijų, kurias nėra visai paprasta aprašyti. Tačiau nurodytas reikšmes galima rasti tiksliai. Pavyzdžiui, įrašę į lygtį $x=-1$, gauname $-2f(-1)+3f(-1)=-4$ ir $f(-1)=-4$. Įrašę $x=0$, gauname $0+2f(1)=-4$ ir $f(1)=-2$. Tada, įrašę $x=1$, gauname $2f(1)+f(3)=-4$ ir $f(3)=0$. Įrašę $x=3$, gauname $6f(3)-f(7)=-4$ ir $f(7)=4$.

Kaip rasti $f(1023)$? Lygtis sieja $f(x)$ ir $f(2x+1)$. Prilyginkime: $1023=2x+1$. Tada $x=511$. Taigi $f(1023)$ rastume, jei tik žinotume $f(511)$. O $f(511)$ rasime, jei tik žinosime $f(255)$. Tęskime toliau: $f(127)$, $f(63)$, $f(31)$, $f(15)$, $f(7)$. Bet $f(7)$ jau radome! Todėl iš eilės galime rasti $f(15)$, $f(31)$ ir t. t. Pavyzdžiui, įrašę $x=7$, gauname

$14f(7)-5f(15)=-4$ ir $f(15)=12$. Toliau $f(31)=28$, $f(63)=60$, $f(127)=124$, $f(255)=252$, $f(511)=508$ ir $f(1023)=1020$.

Dabar visų pirma pastebėkime, kad iš karto, jokių kitų reikšmių nežinant, galima rasti dar vieną f reikšmę. Lygtis sieja $f(2)$ ir $f(2\cdot 2+1)=f(5)$, tačiau įrašius $x=2$ narys $(x-2)f(2x+1)$ prapuola. Taigi $4f(2)-0\cdot f(5)=-4$ ir $f(2)=-1$. Kad rastume $f\left(-\frac{5}{8}\right)$, mąstykime taip. Lygtis reikšmę $f\left(-\frac{5}{8}\right)$ sieja su $f\left(2\cdot\left(-\frac{5}{8}\right)+1\right)=f\left(-\frac{1}{4}\right)$, reikšmę $f\left(-\frac{1}{4}\right)$ – su $f\left(2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+1\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$, reikšmę $f\left(\frac{1}{2}\right)$ – su $f\left(2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+1\right)=f(2)=-1$. Taigi iš eilės įrašant lygtin $x=\frac{1}{2}$, $x=-\frac{1}{4}$, $x=-\frac{5}{8}$ galima apskaičiuoti $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(-\frac{1}{4}\right)$, $f\left(-\frac{5}{8}\right)$. Gauname $f\left(-\frac{5}{8}\right)=-\frac{29}{8}$.

Nesunku įsitikinti, kad visos gautosios reikšmės tenkina lygybę $f(x)=x-3$. Tokia funkcija išties tenkina duotąją lygtį. Tačiau ši funkcija nėra vienintelė, todėl daugelio kitų reikšmių iš lygties neįmanoma gauti. Visgi $f(x)=x-3$ yra vienintelė tiesinė funkcija, tenkinanti lygtį. Įsitikinkime tuo. Kaip ir 5 pavyzdyje įrašykime $f(x)=kx+b$ į lygtį, atskliauskime ir sugrupuokime panašiuosius narius:

$$2x(kx+b)-(x-2)(k(2x+1)+b)=-4,$$

$$(2kx^2-2kx^2)+(2bx-kx-bx+4kx)+(2k+2b+4)=0,$$

$$(3k+b)x+\ (2k+2b+4)=k_1x+b_1=0.$$

Prisiminkime, kad ši lygybė turi galioti visoms x reikšmėms. Tiesinė funkcija $y=k_1x+b_1$ visoms x reikšmėms lygi 0, tik jei $k_1=b_1=0$. Taigi $3k+b=0$ ir $2k+2b+4=0$. Išsprendę šių dviejų lygčių sistemą randame $k=1, b=-3$. Todėl $f(x)=x-3$.

7 pavyzdys. 6 pavyzdyje imkime lygtį

$$2xf(x)-(x-1)f(2x+1)=-4.$$

Įrašę $x=-1$, gauname $0=-2f(-1)+2f(-1)=-4$. Vadinasi, šiuo atveju sprendinių $f:R\to R$ lygtis neturi (o juk imdami kitus skaičius negautume prieštaros ir galėtume „rasti“ neegzistuojančios funkcijos reikšmes!).

8 pavyzdys. Raskime visas tokias funkcijas

$$f:(-\infty;0)\cup(0;+\infty)\to R$$

(t. y. apibrėžtas visoje realiųjų skaičių aibėje, išskyrus 0), kad

$$f\left(\frac{1}{4}(-7\pm\sqrt{65})\right)=\frac{1}{8}\left(-7\pm\sqrt{65}\right),$$

o lygybė

$$2f(x)+(2x-1)f\left(-\frac{1}{x}\right)=x-1+\frac{1}{2x}$$

galioja su bet kokiu realiuoju skaičiumi $x\neq 0$.

Prisiminkime 4 pavyzdį. Jame turėjome lygybę su $f(x)$ ir $f(1-x)$, į kurią vietoj x įrašę $y=1-x$ vėl gavome lygybę (bet kitokią) su $f(x)$ ir $f(1-x)$. Tai leido iš dviejų lygčių sistemos išreikšti $f(x)$. Nesunku suprasti, kad dabar apsimoka į lygtį įrašyti $y=-\frac{1}{x}$:

$$2f\left(-\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{2}{x}+1\right)\cdot f(x)=-\frac{1}{x}-1-\frac{x}{2}.$$

Gavome kitokią lygtį, bet su tais pačiais reiškiniais $f(x)$ ir $f\left(-\frac{1}{x}\right)$. Vėl pradinę ir gautąją lygtis galima jungti į sistemą ir spręsti ją $a=f(x)$ atžvilgiu. Iš pradinės lygties išsireiškime $f\left(-\frac{1}{x}\right)$:

$f\left(-\frac{1}{x}\right)=\dfrac{\left(x-1+\frac{1}{2x}-2f(x)\right)}{2x-1}$. Dalijome iš $2x-1$, todėl toliau turėsime laikyti, kad ne tik $x \neq 0$, bet ir $x \neq \frac{1}{2}$. Įrašykime šią išraišką į gautąją lygtį:

$$\frac{2\left(x-1+\frac{1}{2x}-2f(x)\right)}{2x-1}-\left(\frac{2}{x}+1\right)\cdot f(x)=-\frac{1}{x}-1-\frac{x}{2}.$$

Padauginkime lygtį iš vardiklio $2x-1$, atskliauskime, o tada dar padauginkime iš x ir sutraukime panašius narius:

$$2\left(x-1+\frac{1}{2x}-2f(x)\right)-\left(\frac{2}{x}+1\right)(2x-1)\cdot f(x)=\left(-\frac{1}{x}-1-\frac{x}{2}\right)(2x-1);$$

$$2x-2+\frac{1}{x}-4f(x)-\frac{(2+x)(2x-1)}{x}\cdot f(x)=\left(-\frac{1}{x}-1-\frac{x}{2}\right)(2x-1);$$

$$2x-2+\frac{1}{x}-4f(x)-\frac{2x^2+3x-2}{x}\cdot f(x)=-x^2-\frac{3}{2}x-1+\frac{1}{x};$$

$$2x^2-2x+1-4xf(x)-(2x^2+3x-2)f(x)=-x^3-\frac{3}{2}x^2-x+1;$$

$$-(4x+2x^2+3x-2)f(x)=-x^3-\frac{3}{2}x^2-x+1-(2x^2-2x+1);$$

$$-(2x^2+7x-2)f(x)=-x^3-\frac{7}{2}x^2+x=-x(x^2+\frac{7}{2}x-1);$$

$$-2(x^2+\frac{7}{2}x-1)f(x)=-x(x^2+\frac{7}{2}x-1).$$

Jei $x^2+\frac{7}{2}x-1\neq 0$, tai $-2f(x)=-x$ ir $f(x)=\frac{1}{2}x$.

Belieka išsiaiškinti su $x=\frac{1}{2}$ ir lygties $x^2+\frac{7}{2}x-1=0$ sprendiniais

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{65}{4}}\right)=\frac{1}{4}\left(-7\pm\sqrt{65}\right).$$

Sąlygoje duota, kad $f\left(\frac{-7\pm\sqrt{65}}{4}\right)=\frac{-7\pm\sqrt{65}}{8}=\frac{1}{2}\cdot\frac{-7\pm\sqrt{65}}{4}$, taigi lygybė $f(x)=\frac{x}{2}$ galioja ir čia. Įrašykime $x=\frac{1}{2}$ į pradinę lygtį: $2f\left(\frac{1}{2}\right)+0\cdot f\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}-1+1=\frac{1}{2}$ ir $f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}=\frac{x}{2}$. Vadinasi, $f(x)=\frac{x}{2}$ su visomis leistinomis ($x\neq 0$) argumento reikšmėmis. Nesunku patikrinti, kad ši funkcija tenkina pradinę lygtį (padarykite tai patys).

Pastebėsime, kad jei nebūtų sąlygos $f\left(\frac{-7\pm\sqrt{65}}{4}\right)=\frac{-7\pm\sqrt{65}}{8}$, tai $f\left(\frac{-7\pm\sqrt{65}}{4}\right)$ nepavyktų rasti. Galima įrodyti, kad

$$2f\left(\frac{-7+\sqrt{65}}{4}\right)+\frac{-9+\sqrt{65}}{2}f\left(\frac{-7-\sqrt{65}}{4}\right)=\frac{-15+3\sqrt{65}}{8}$$

ir kad $f\left(\frac{-7\pm\sqrt{65}}{4}\right)$ gali būti bet kokie skaičiai, tenkinantys pastarąją lygybę, t. y. be papildomos sąlygos duotąją lygtį tenkina be galo daug funkcijų.

Funkcinėje lygtyje gali būti ir daugiau nežinomus dydžius žyminčių raidžių.

9 pavyzdys. Raskime visas tokias funkcijas $f : R\to R$, kad

$$f(xf(y))+f(xy)=f(x+y)$$

su bet kokiais realiaisiais skaičiais x ir y.

Turime teisę į lygtį įrašyti bet kokias x ir y reikšmes. Kad rastume $f(0)$, įrašykime $x=y=0$. Gauname $f(0)+f(0)=f(0)$ ir $f(0)=0$. Be to, galime įrašyti vieną reikšmę, o kitą palikti nežinomą. Įrašykime $x=0$:

$$f(0)+f(0)=f(0+y)=f(y).$$

Ši lygybė galioja bet kokiam realiajam skaičiui y, todėl visada

$$f(y)=f(0)+f(0)=0+0=0.$$

Vadinasi, vienintelis sprendinys yra $f(x)=0$ (funkcija yra konstanta). Nesunku patikrinti, kad ši funkcija tenkina pradinę lygtį.

10 pavyzdys. Raskime visas tokias funkcijas $f: R \to R$, kad
$$(x+1)f(x)+yf(2x+1)=f(x+y)+x+y$$
su bet kokiais realiaisiais skaičiais x ir y.

Įrašykime $x=y=0$. Gauname tapatybę $f(0)+0=f(0)$, kuri mums neteikia jokios naudingos informacijos. Bandykime įrašyti tik $y=0$: kiekvienai x reikšmei turi galioti lygybės
$(x+1)f(x)+0\cdot f(2x+1)=(x+1)f(x)=f(x+0)+x+0=f(x)+x$.
Tada $(x+1)f(x)-f(x)-x=0$ ir $xf(x)-x=0$. Užrašykime kitaip: $x(f(x)-1)=0$. Tai reiškia, kad arba $x=0$, arba $f(x)=1$. Taigi jei tik $x\neq 0$, tai $f(x)=1$. Tačiau funkcijos neradome, kol nežinome visų jos reikšmių. Dar nežinome $f(0)$. Kad rastume ir šią reikšmę, imkime $x=0$: $(0+1)f(0)+yf(0+1)=f(0)+yf(1)=f(0+y)+0+y=f(y)+y$.
Jau turime $f(1)=1$, tad $f(y)+y=f(0)+y$ ir $f(y)=f(0)$ bet kuriam y. Pavyzdžiui, kai $y=1$, tai $f(0)=f(1)=1$. Taigi visada $f(x)=1$ ir tai yra vienintelė funkcija, tenkinanti lygtį (vėlgi nesunku tai patikrinti).

11 pavyzdys. Raskime visas tokias funkcijas $f: R \to R$, kad
$$f(x+2f(y))=2x+f(4y)$$
su bet kokiais realiaisiais skaičiais x ir y.

Įrašykime $x=y=0$. Gauname lygybę $f(2f(0))=f(0)$, kuri neatrodo labai naudinga. Bandykime įrašyti tik $x=0$: $f(2f(y))=f(4y)$. Dabar įrašykime tik $y=0$: $f(x+2f(0))=2x+f(0)$. Matome konstantas $2f(0)$ ir $f(0)$, nors ir nežinomas. Būtų galima užrašyti $f(x+c_1)=2x+c_2$. Vietoj x galime įrašyti $z=x-c_1$; čia x yra bet koks skaičius. Taigi kairėje pusėje gausime
$$f((x-c_1)+c_1)=f(x),$$
o dešinėje – tiesinę funkciją
$$2z+c_2=2(x-c_1)+c_2=2x+(-2c_1+c_2)=2x+c;$$
čia c vėlgi yra konstanta. Vadinasi, su bet kuria x reikšme turime $f(x)=2x+c$. Belieka išsiaiškinti, kokia gali būti konstanta c. Tam

įrašykime gautąją *f* išraišką į pradinę lygtį:

$$f(x+2f(y)) = f(x+2(2y+c)) = f(x+4y+2c) =$$
$$= 2(x+4y+2c)+c = 2x+8y+5c;$$
$$2x + f(4y) = 2x+2\cdot 4y+c = 2x+8y+c;$$
$$2x+8y+c = 2x+8y+5c \text{ ir } c=0.$$

Taigi gauname funkciją $f(x)=2x$ (sprendinį ir vėl patikrinkite).

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Žinoma, kad funkcija $f: R \to R$ lygybę $f\left(2-\frac{1}{x+3}\right) = x^2+3x$ tenkina su bet kokiu realiuoju skaičiumi $x \neq -3$. Raskite bent vieną tokią funkciją *f*.

Pastaba. Yra viena funkcijos reikšmė, kurios iš lygties rasti neįmanoma, ją galima pasirinkti bet kaip, plg. su 2 pavyzdžiu.

2. a) Raskite visas tokias funkcijas $f: R \to R$, kad

$f(x^3+2) = x^6+4x^3+4$ su bet kokiu realiuoju skaičiumi x.

b) Įrodykite, kad lygtis $f(x^3-4x+2) = x^6+4x^3+4$ neturi sprendinių $f: R \to R$.

3. Raskite visas tokias funkcijas $f: (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) \to R$, kad $f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3x^4+4x^2+1}{x^2}$ su bet kokiu realiuoju skaičiumi $x \neq 0$.

4. Raskite visas tokias funkcijas $f: R \to R$, kad $3^x f(x) + xf(2-x) = 1$ su bet kokiu realiuoju skaičiumi x.

5. Žinoma, kad funkcija $f: R \to R$ lygybę

$$x^2 f(x+2) + (2x+1)f(3x) = 2$$

tenkina su bet kokiu realiuoju skaičiumi x. Raskite $f(3)$, $f(0)$, $f(-24)$, $f\left(\frac{5}{2}\right)$.

6. Įrodykite, kad nė viena iš lygčių $x^2 f(x+2)+(-2x+1)f(3x)=2$ ir $(1-x)f(x^2)+(2x^2+2x)f(x)=1$ neturi sprendinio $f: R \to R$. (Plg. su 7 pavyzdžiu.)

7. Žinoma, kad funkcija $f: R \to R$ lygybę $xf(x+1)-f(x^2)=2x$ tenkina su bet kokiu realiuoju skaičiumi x. Raskite $f(\sqrt{2}+1)$ ir visas tiesines funkcijas $f: R \to R$, tenkinančias lygtį.

8. Raskite visas tokias tiesines funkcijas $f: R \to R$, kad

$$2f(x^2)+x+3=x\,f(x+1)+f(x^2+1)$$

su bet kokiu realiuoju skaičiumi x.

9. Raskite visas tokias funkcijas $f: R \to R$, kad

$$(y+1)(f(x+y)-f(x))=y^2+f(y)+xf(y)-f(xy)$$

su bet kokiais realiaisiais skaičiais x ir y.

10. Raskite visas tokias funkcijas $f: R \to R$, kad

$$f(xf(y)+x+y)=f(x)f(y)+x+2y-2$$

su bet kokiais realiaisiais skaičiais x ir y.

Nurodymas. Raskite galimas $f(0)$ *reikšmes, įsitikinkite, kad funkcija yra tiesinė, patikrinkite, kuri tiesinė funkcija tenkina lygtį.*

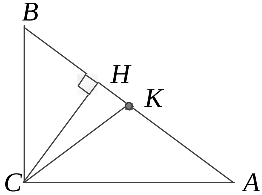
VII. GEOMETRINIŲ UŽDAVINIŲ ALGEBRINIS SPRENDIMO METODAS

Edmundas Mazėtis
(Vilniaus universitetas)

Matematikos pamokose dažna situacija, kai kintamaisiais pažymime tam tikrus nežinomus dydžius ir uždavinių sprendimą suvedame į lygčių ar lygčių sistemų sprendimą. Geometrijos uždaviniams šis metodas irgi gali būti taikomas. Pateiksime pavyzdžių.

1 pavyzdys. Stačiojo trikampio ABC kampas C yra statusis, į įžambinę nubrėžtų pusiaukraštinės ir aukštinės ilgių skirtumas lygus 7, trikampio perimetras lygus 72. Rasime trikampio plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad atkarpa CH yra stačiojo trikampio ABC aukštinė, o atkarpa CK – jo pusiaukraštinė (1 pav.). Pažymėkime $CK = x,$ tuomet $AK = KB = CK = x,$ $AB = 2x,$ o $CH = x - 7.$ Jei trikampio statinių ilgiai $AC = y,$ $BC = z,$ tai teisingos lygybės $2x + y + z = 72,$ $y^2 + z^2 = 4x^2$. Kadangi stačiojo trikampio

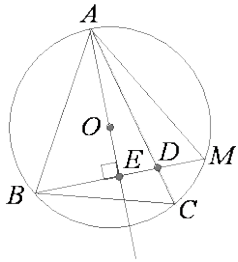


1 pav.

statinių sandauga lygi įžambinės ir į ją nubrėžtos aukštinės sandaugai (nes abi sandaugos lygios dvigubam trikampio plotui), tai turime trečiąją lygtį $yz = 2x(x - 7).$ Trims nežinomiesiems x, y ir z sudarėme tris lygtis, taigi lygčių skaičius lygus nežinomųjų skaičiui, todėl iš gautųjų lygčių randame reikiamus nežinomuosius. Pastebėkime, kad mums užtenka rasti tik kintamojo x reikšmę, nes trikampio plotas $S = \frac{1}{2} \cdot 2x(x - 7) = x(x - 7).$ Spręsdami gautųjų lygčių sistemą, lygybės $y + z = 72 - 2x$ abi puses keliame kvadratu: $y^2 + 2yz + z^2 = 5184 - 288x + 4x^2$. Įrašę į šią lygybę $y^2 + z^2$ ir yz reikšmes $y^2 + z^2 = 4x^2$ ir $yz = 2x(x - 7).$ gauname kvadratinę lygtį $x^2 + 65x - 1296 = 0,$ kurią išsprendę gauname, kad $x = 16$ arba $x = -81.$ Kadangi x yra atkarpos ilgis, tai tinka tik teigiamoji šaknis. Taigi $S = 16 \cdot (16 - 7) = 144.$

Ats.: 144

2 pavyzdys. Trikampyje ABC $AB = c$, $AC = b$ be to $b > c$. Taškas O yra apie trikampį apibrėžto apskritimo centras, kraštinėje AC yra taškas D toks, kad tiesės AO ir BD yra statmenos. Rasime atkarpos CD ilgį.



2 pav.

Sprendimas. Sakykime, kad tiesė BD kerta apibrėžtą apie trikampį ABC apskritimą taške M, o tiesę OA – taške E (2 pav.). Kadangi $OB = OM$ ir $BM \perp AO$, tai tiesė AO yra atkarpos BM vidurio statmuo, todėl $AM = AB = = c$. Žymėkime $BE = EM = d$, $CD = x$, $MD = y$. Pagal susikertančių stygų AC ir BM savybę gauname, kad $CD \cdot DA = MD \cdot DB$, t. y.

$$x(b - x) = y(2d - y). \qquad (1)$$

Trikampiams ADE ir ABE taikydami Pitagoro teoremą, gauname, kad $AE^2 = AD^2 - ED^2$ ir $AE^2 = AB^2 - BE^2$. Taigi teisinga lygybė

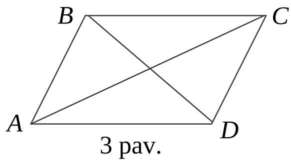
$$(b - x)^2 - (d - y)^2 = c^2 - d^2. \qquad (2)$$

Spręsdami iš (1) ir (2) lygybių gautą lygčių sistemą, iš pirmosios lygybės išreiškiame $2dy = x(b - x) + y^2$. Antrąją lygtį pertvarkome ir gauname $b^2 - 2bx + x^2 + 2dy - y^2 = c^2$. Įrašę į šią lygybę gautąją $2dy$ išraišką, randame, kad $b^2 - bx = c^2$, t. y. $x = \dfrac{b^2 - c^2}{b}$.

Ats.: $CD = \dfrac{b^2 - c^2}{b}$.

Paprastai sprendžiant algebriniu metodu geometrinius uždavinius, reikia sudaryti tiek lygčių, kiek pažymėjome nežinomųjų. Pavyzdys rodo, kad kartais užtenka ir mažesnio lygčių skaičiaus.

Sudarant lygtis ir lygčių sistemas dažnai būna tikslinga naudoti kai kurias geometrijos formules, daugelį kurių Jūs žinote. Priminsime jas.



3 pav.

Lygiagretainio kraštinių kvadratų suma yra lygi įstrižainių kvadratų sumai. Įrodymui trikampiams ABC ir ADB (3 pav.) taikome kosinusų teoremą:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\angle ABC$ ir

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos\angle DAB\,.$$

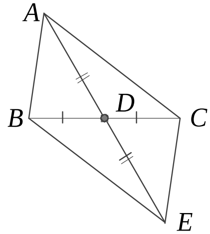
Sudėję šias lygybes ir pastebėję, kad $BC = AD$, o

$$\cos\angle ABC = \cos(\pi - \angle DAB) = -\cos\angle DAB$$

gauname lygybę

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)\,.$$

Taikydami šią formulę, gausime trikampio pusiaukraštinės ilgio išraišką jo kraštinių ilgiais. Sakykime, kad atkarpa AD yra trikampio ABC pusiaukraštinė (4 pav.). Atidėkime tiesėje AD atkarpą $DE = AD$. Kadangi keturkampio $ABEC$ įstrižainės BC ir AE kertasi taške D ir jame dalijasi pusiau, tai šis keturkampis yra lygiagretainis. Jam pritaikome ką tik gautą lygybę:



4 pav.

$$BC^2 + AE^2 = 2(AB^2 + AC^2)\,.$$

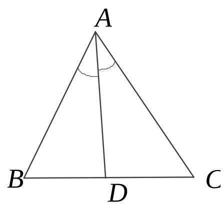
Kadangi $AE = 2AD$, tai trikampio pusiaukraštinei AD apskaičiuoti gauname tokią formulę

$$AD^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2) - \frac{1}{4}BC^2\,.$$

Analogiškas formules gauname ir kitoms trikampio pusiaukraštinėms:

$$BM^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2) - \frac{1}{4}AC^2\,,$$

$$CN^2 = \frac{1}{2}(BC^2 + AC^2) - \frac{1}{4}AB^2\,.$$



5 pav.

Sakykime, kad atkarpa AD yra trikampio ABC pusiaukampinė (5 pav.). Kadangi trikampių ACD ir ABD plotų suma lygi trikampio ABC plotui, tai yra teisinga lygybė

$$\frac{1}{2}AC \cdot AD\sin\frac{\angle A}{2} + \frac{1}{2}AB \cdot AD\sin\frac{\angle A}{2} = \frac{1}{2}AB \cdot AC\sin\angle A\,,$$

t.y.

$$AD\sin\frac{\angle A}{2}(AC + AB) = AB \cdot AC\sin\angle A\,.$$

Kadangi $\sin\angle A = 2\sin\dfrac{\angle A}{2}\cos\dfrac{\angle A}{2}$, tai iš čia seka tokia trikampio pusiaukampinės ilgio pirmoji formulė

$$AD = \frac{2AB \cdot AC \cos\frac{\angle A}{2}}{AB + AC}.$$

Analogiškai gaunamos ir kitų trikampio pusiaukampinių išraiškos.

Kaip žinome, trikampio pusiaukampinė, kirsdamasi su trikampio kraštine, dalija ją į dalis, kurių ilgių santykis lygus prie jų esančių kraštinių ilgių santykiui: $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$. Iš čia seka, kad $BD \cdot AC = AB \cdot CD$. Trikampiams ABD ir ACD taikome kosinusų teoremą ir gauname

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos\angle ADC,$$
$$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD \cdot AD \cos\angle ADB.$$

Pirmąją lygybę padauginame iš BD, antrąją – iš CD ir sudedame. Kadangi

$$\cos\angle ADC = \cos(\pi - \angle ADB) = -\cos\angle ADB,$$

tai

$$AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot CD = AD^2 \cdot BD + CD^2 \cdot BD + BD^2 \cdot CD + AD^2 \cdot CD.$$

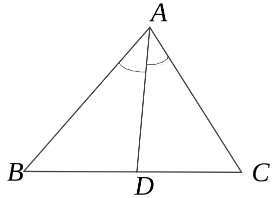
Pasinaudoję lygybe $BD \cdot AC = AB \cdot CD$, gauname, kad

$$AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot CD = AC \cdot (AB \cdot CD) + AB \cdot (BD \cdot AC) =$$
$$= AB \cdot AC(CD + BD),$$

todėl $AB \cdot AC(BD + CD) = AD^2(BD + CD) + CD \cdot BD(BD + CD)$.

Iš čia išplaukia antroji trikampio pusiaukampinės ilgio formulė $AD^2 = AB \cdot AC - CD \cdot BD$.

3 pavyzdys Trikampio ABC kraštinė $AB = 21$, pusiaukampinė $BD = 8\sqrt{7}$, atkarpa $DC = 8$ (6 pav.). Rasime trikampio ABC perimetrą.



6 pav.

Sprendimas. Pažymėkime $AD = x$, $BC = y$. Pagal pusiaukampinės savybę ir antrąją pusiaukampinės ilgio formulę užrašome lygybes $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ ir

$BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$. Iš čia gauname tokią lygčių sistemą $\frac{21}{y} = \frac{x}{8}$, $448 = 21y - 8x$. Kadangi $xy = 168,$ tai kintamojo x reikšmę rasime iš lygties $x(8x + 48) = 168 \cdot 21$. Teigiamasis šios lygties sprendinys yra $x = 7$. Todėl $y = 24, AD = 7, AC = 15,$ $BC = 24$, todėl trikampio perimetras lygus kraštinių AB, AC ir BC ilgių sumai, t. y. 60.

Ats.: 60.

Dažnai sprendžiant geometrinius uždavinius algebriniu metodu yra taikoma trigonometrija ir geometrinis uždavinys suvedamas į trigonometrinių lygčių sprendimo uždavinį.

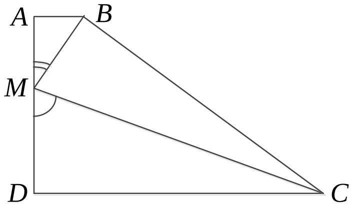
4 pavyzdys. Stačiosios trapecijos $ABCD$ pagrindų ilgiai $AB = 1,$ $CD = 4$, pagrindams statmena šoninė kraštinė $AD = 5$. Kraštinėje AD pažymėtas taškas M toks, kad $\angle CMD = 2\angle BMA.$ Rasime, į kokio ilgio atkarpas taškas M dalija kraštinę AD.

Sprendimas. Sakykime, kad $\angle BMA = \alpha$, tuomet $\angle CMD = 2\alpha$ (7 pav.). Iš stačiojo trikampio ABM randame, kad

$$AM = AB\,\text{ctg}\alpha = \text{ctg}\alpha,$$

o iš stačiojo trikampio CMD –

$$MD = DC\,\text{ctg}2\alpha = 4\text{ctg}2\alpha.$$



7 pav.

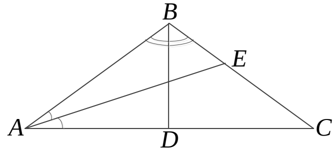
Iš uždavinio sąlygos $AM + MD = 5$ gauname trigonometrinę lygtį $\text{ctg}\alpha + 4\text{ctg}2\alpha = 5$. Kadangi $\text{tg}2\alpha = \frac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$, tai iš čia seka, kad $\frac{1}{\text{tg}\alpha} + \frac{2(1-\text{tg}^2\alpha)}{\text{tg}\alpha} = 5$, t.y. $2\text{tg}^2\alpha + 5\,\text{tg}\alpha - 3 = 0.$ Kadangi α – smailusis kampas, tai uždavinio sąlygą tenkina tik teigiamas šios lygties sprendinys $\text{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. Iš čia $AM = c\text{tg}\alpha = 2,$ $MD = AD - AM = 5 - 2 = 3.$

Ats.: $AM = 2, MD = 3.$

5 pavyzdys. Lygiašonio trikampio pusiaukampinė, nubrėžta į pagrindą, du kartus trumpesnė už pusiaukampinę, nubrėžtą į šoninę kraštinę. Rasime trikampio kampus.

Sprendimas. Sakykime, kad lygiašonio trikampio ABC pusiaukampinė BD, nubrėžta į pagrindą AC, yra du kartus trumpesnė už pusiaukampinę AE, nubrėžtą į šoninę kraštinę BC (8 pav.). Sakykime, kad

$$AD = x,\ AB = BC = y,\ \ \angle EAC = \alpha .$$



8 pav.

Kadangi lygiašonio trikampio pusiaukampinė, nubrėžta į pagrindą, yra ir trikampio aukštinė, ir pusiaukraštinė, tai $AC = 2x$, o iš stačiojo trikampio ABD randame, kad

$$BD = AB\sin\angle BAD = y\sin 2\alpha .$$

Atkarpos AE ilgiui skaičiuoti taikome pusiaukampinės ilgio pirmąją formulę:

$$AE = \frac{2AC\cdot AB\cos\alpha}{AC+AB} = \frac{4xy\cos\alpha}{2x+y}.$$

Pagal sąlygą $AE = 2BD$, t.y. $\dfrac{4xy\cos\alpha}{2x+y} = 2y\sin 2\alpha$. Iš čia seka, kad $\dfrac{x}{2x+y} = \sin\alpha$, t. y. $y = \dfrac{x(1-2\sin\alpha)}{\sin\alpha}$. Iš stačiojo trikampio ABD turime $AB^2 = BD^2 + AD^2$, t.y $y^2 = y^2\sin^2 2\alpha + x^2$, todėl

$$x^2 = y^2(1-\sin^2 2\alpha) = y^2\cos^2 2\alpha .$$

Kadangi 2α – smailusis kampas, o x ir y – teigiamieji skaičiai, tai iš čia seka, kad $y = \dfrac{x}{\cos 2\alpha}$. Sulyginę gautąsias y reikšmes, gauname trigonometrinę lygtį

$$\frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{1-2\sin\alpha}{\sin\alpha}.$$

Pertvarkome šią lygtį ir turime: $4\sin^3\alpha - 2\sin^2\alpha - 3\sin\alpha + 1 = 0$. Spręsdami šią lygtį, naudosime trigubo kampo sinuso formulę $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ (ji lengvai gaunama iš sumos sinuso lygybės:

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha =$$

$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha =$$

$$= -\sin^3\alpha + 3\cos^2\alpha\sin\alpha = -\sin^3\alpha + 3(1-\sin^2\alpha)\sin\alpha =$$

$$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\,.$$

Įrašę į lygtį $4\sin^3\alpha$ reikšmę $4\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - \sin 3\alpha$ ir suprastinę, gauname, kad $\sin 3\alpha = \cos 2\alpha$, t. y. $\sin 3\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha)$. Kadangi α – smailusis kampas, tai iš šios lygybės seka, kad $3\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$, arba $3\alpha + (\frac{\pi}{2} - 2\alpha) = \pi$. Pirmuoju atveju gauname $\alpha = \frac{\pi}{10}$, o antruoju $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Antrasis sprendinys netenkina uždavinio sąlygos, todėl trikampio kampai lygūs $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}$.

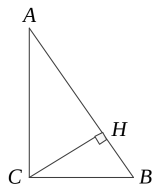
Ats.: 36°, 36°, 108°.

6 pavyzdys. Stačiojo trikampio ABC aukštinė CH, nubrėžta į įžambinę, lygi atkarpų AH ir BH skirtumui. Rasime trikampio kampus.

Sprendimas. Akivaizdu, kad (9 pav.) $AH = \dfrac{CH}{\operatorname{tg}\angle A}, BH = CH\ \operatorname{tg}\angle A$.

Kadangi $CH = AH - BH$, tai gauname lygtį

$$\operatorname{tg}\angle A - \frac{1}{\operatorname{tg}\angle A} = 1, \text{ t. y. } \operatorname{tg}^2\angle A - \operatorname{tg}\angle A - 1 = 0\,.$$



9 pav.

Išsprendę šią lygtį gauname, kad $\operatorname{tg}\angle A = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Kampas A yra smailusis, todėl $\operatorname{tg}\angle A$ yra teigiamas skaičius, taigi tinka tik teigiamas lygties sprendinys $\operatorname{tg}\angle A = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ats.: $\angle A = \operatorname{arctg}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\angle B = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1. Atkarpa CD yra trikampio ABC aukštinė, taškas D yra atkarpoje AB, $AB = 3$, $CD = \sqrt{3}$, atkarpos AD ir BC yra lygios. Raskite kraštinės AC ilgį.

2. Lygiašonio trikampio aukštinių, nubrėžtų į pagrindą ir į šoninę kraštinę, ilgiai atitinkamai lygūs *m* ir *n*. Raskite trikampio kraštinių ilgius.

3. Lygiagretainio kampas lygus 60°, o jo įstrižainių kvadratų santykis lygus $\frac{1}{3}$. Raskite jo kraštinių santykį.

4. Į statųjį trikampį įbrėžtas apskritimas vieną statinį dalija į atkarpas, kurių ilgiai 6 ir 10. Raskite trikampio kraštinių ilgius.

5. Į skritulio išpjovą, kurios centrinis kampas lygus 120°, įbrėžtas skritulys. Raskite tų skritulių spindulių santykį.

6. Apie kvadratą, kurio kraštinės ilgis a, apibrėžtas skritulys. Į vieną iš susidariusių skritulio nuopjovų įbrėžtas kvadratas. Raskite jo plotą.

7. Stačiojo trikampio plotas lygus 100. Įžambinėje pažymėtas taškas, kurio atstumai iki statinių yra 4 ir 8. Raskite trikampio statinių ilgius.

8. Raskite stačiojo trikampio plotą, jei jo vienas statinis lygus 6, o stačiojo kampo pusiaukampinė lygi 5.

9. Apie trapeciją galima apibrėžti apskritimą ir į ją galima įbrėžti apskritimą, o trapecijos aukštinės ir apibrėžto apskritimo spindulio santykis lygus $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Raskite trapecijos kampų didumus.

10. Rombo perimetro ir jo įstrižainių ilgių sumos santykis lygus 3:2. Raskite rombo kampus.

VIII. BAIGTINIŲ POPULIACIJŲ STATISTIKOS UŽDAVINIAI

Dalius Pumputis
(Lietuvos edukologijos universitetas, Mykolo Romerio universitetas)

1. Pagrindinės baigtinių populiacijų statistikos sąvokos.

Baigtinių populiacijų statistika – tai jauna statistikos mokslo šaka, kurios didžioji dalis mokslo rezultatų buvo gauti XX amžiaus antroje pusėje. Dėl Sovietų Sajungos vykdytos politikos Lietuvoje šios mokslo šakos vystymuisi sąlygos susidarė tik po nepriklausomybės atgavimo 1990 metais.

Kai kurios baigtinių populiacijų statistikoje nagrinėjamos savokos sutinkamos ir kituose matematinės statistikos skyriuose, o kitos, gi, būdingos tik šioje publikacijoje aptariamai mokslo šakai. Toliau panagrinėsime tiek vienas, tiek kitas.

1. Baigtinės populiacijos ir tikimybės imtys.

Įvairiose gyvenimo srityse prireikia įvairios informacijos apie

- mokinių pasiekimus;
- prekių kainas;
- gyventojų nuomonę vienu ar kitu klausimu;
- įmonių veiklos rezultatus ir t. t.

Siekiant tam tikros informacijos minėtose ar kitose situacijose, susiduriama su *baigtinėmis* žmonių, skaičių, prekių, gyvūnų ar kitokio tipo elementų aibėmis. Tokios aibės vadinamos *baigtinėmis populiacijomis*, jų elementai – *baigtinės populiacijos elementais*. Pavyzdžiui, ketvirtajame pavyzdyje nagrinėjamos tam tikro regiono visos įmonės atitinka įmonių baigtinę populiaciją, kiekviena iš įmonių yra tos populiacijos vienas iš elementų.

Sakykim, edukologijos doktorantas nori ištirti visų Lietuvos vidurinių mokyklų septintos klasės mokinių pasiekimus matematikoje. Šiuo atveju baigtinė populiacija – visi Lietuvos septintokai. Siekdamas tikslo ir norėdamas kuo tiksliau atskleisti mokinių žinių lygį, doktorantas tikriausiai pasidomės kontrolinių darbų, specialių testų rezultatais ar semestro pažymiais. Jis tai galės padaryti dviem būdais. Vienas iš jų – surinkti dominančią informaciją apie visus mokinius. Tokiu atveju sakoma, kad atliekamas *ištisinis tyrimas*. Antruoju būdu informacija būtų renkama tik iš pasirinktos populiacijos dalies, vadinamos *imtimi*.

1 apibrėžimas. *Imtis* – tai populiacijos dalis, naudojama statistiniam tyrimui.

Kuris iš įvardytų būdų yra geresnis? Kokie šių metodų privalumai ir trūkumai?

Taikant pirmąjį metodą, surenkama informacija apie visus populiacijos elementus. Taigi, jei duomenyse nėra klaidų, atsiradusių dėl kurių nors paklaidų šaltinių, dominančios populiacijos charakteristikos (pavyzdžio atveju – mokinių žinių lygis) bus įvertintos tiksliai, bet, iš kitos pusės, ištisiniai tyrimai dažnai daug kainuoja, jiems atlikti reikia daug laiko, o kartais jie yra ir visai neįmanomi. Įsivaizduokime, jei reikėtų įvertinti žuvies masę Atlanto vandenyne, tai reikėtų sugauti ir pasverti kiekvieną žuvį, o tam reikėtų nerealistiškų resursų. Tokiu atveju antras informacijos surinkimo būdas būtų priimtinesnis. Taikant šį metodą, gaunama tik dalis populiacijos duomenų.

2 apibrėžimas. Tokie tyrimai, kai renkami ir nagrinėjami imties elementų duomenys, siekiant padaryti išvadas apie visą populiaciją, vadinami *imčių tyrimais*.

Lyginant su ištisiniais tyrimais, imčių tyrimai mažiau kainuoja, jiems atlikti reikia mažiau įvairaus tipo resursų. Trūkumas tas, kad išvados apie populiaciją daromos tik iš dalies populiacijos duomenų. Tai sudaro sąlygas atsirasti naujoms paklaidoms. Tarkim, jei į minėto doktoranto imtį atsitiktinai patektų vien tik labai gerai arba puikiai besimokantys mokiniai, ar galėtų tyrėjas užtikrintai teigti, jog vidutinis Lietuvos septintokų (visos populiacijos) žinių lygis vertinamas 9 arba 10 balų? Matyt, kad ne. Panašių ir kitokio tipo klaidingų išvadų galima išvengti, taikant tinkamus imties sudarymo ir populiacijos charakteristikų vertinimo metodus.

Imčių tyrimuose taikomi metodai nagrinėjami ir vystomi imčių metodų teorijoje arba baigtinių populiacijų statistikoje. Čia nagrinėjami pagrindiniai uždaviniai yra šie:

- kaip optimaliai išrinkti imtį, užtikrinančią minimalias tyrimo išlaidas ir tikslesnius rezultatus;
- kaip remiantis imties duomenimis įvertinti dominančias populiacijos charakteristikas.

Šioje publikacijoje baigtinę populiaciją žymėsime simboliu U, jos elementus – u_1, u_2, . . ., u_N , čia N – populiacijos dydis (populiacijos elementų skaičius). Trumpumo dėlei, kartais vietoj populiacijos elementus žyminčių simbolių naudojami tų elementų eilės numeriai: 1, 2, ..., N. Imtį iš baigtinės populiacijos žymėsime

$$\mathbf{i} = \{u_{i_1}, u_{i_2}, ..., u_{i_n}\},\ i_k \in \{1, 2, ..., N\},\ k = 1, 2, ..., n;$$

čia skaičius n yra imties dydis (imties elementų skaičius). Kartais rašoma trumpiau:

$$\mathbf{i} = \{u_1, u_2, ..., u_n\},$$

suprantant, jog $u_1, u_2, ..., u_n$ – nebūtinai pirmieji n populiacijos U elementai.

Statistiniuose tyrimuose taikomos imtys gali būti:

- tikimybinės;
- netikimybinės.

Nesigilindami į netikimybinių imčių tipus, galime pasakyti tik tai, kad taikant jas negalima statistiškai įvertinti daromų paklaidų. Todėl toliau išsamiau nagrinėsime *tikimybines imtis*, t.y. tokias imtis, kurios gaunamos taikant tikimybinį ėmimą.

3 apibrėžimas. *Tikimybinis ėmimas* – tai imties išrinkimo būdas, kuris, tiesiogiai renkant elementus iš populiacijos, tenkina tokias sąlygas:

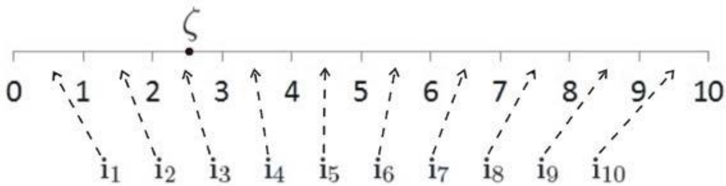
1. išvardijamos visos galimos imtys $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, ..., \mathbf{i}_v$, kurios gali būti išrinktos naudojant nagrinėjamą imčių išrinkimo procedūrą;
2. kiekvienai iš galimų imčių priskiriamos jų išrinkimo tikimybės: $p_1 = P(\mathbf{i}_1),\ p_2 = P(\mathbf{i}_2), ...,\ p_v = P(\mathbf{i}_v)$, taip, kad $p_1+p_2+...+p_v = 1$, $p_k > 0, k = 1, 2, ... v$;
3. kiekvienas baigtinės populiacijos elementas turi priklausyti bent vienai iš išvardintų imčių;
4. imtis išrenkama taikant tokią atsitiktinę procedūrą, kai kiekviena iš galimų imčių išrenkama su nurodyta tikimybe.

Tam, kad skaitytojui būtų lengviau suprasti šį apibrėžimą, toliau pateikiame du tikimybinės imties išrinkimo pavyzdžius.

1 pavyzdys. Iš baigtinės populiacijos $U=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ išrinksime tikimybinę imtį.

1. Tegu galimos imtys yra šios:
   $\mathbf{i}_1 = \{u_1, u_2\},\ \mathbf{i}_2 = \{u_1, u_3\},\ \mathbf{i}_3 = \{u_1, u_4\},\ \mathbf{i}_4 = \{u_1, u_5\},$
   $\mathbf{i}_5 = \{u_2, u_3\},\ \mathbf{i}_6 = \{u_2, u_4\},\ \mathbf{i}_7 = \{u_2, u_5\},\ \mathbf{i}_8 = \{u_3, u_4\},$
   $\mathbf{i}_9 = \{u_3, u_5\},\ \mathbf{i}_{10} = \{u_4, u_5\};$

2. Parinksime lygias šių imčių išrinkimo tikimybes: $p(\mathbf{i}_k) = 1/10$, $k = 1, 2, ..., 10$;
3. Matome, kad kiekvienas populiacijos U elementas priklauso bent vienai iš imčių;
4. Tam, kad kiekviena iš išvardintų imčių būtų išrenkama su nurodytomis tikimybėmis, galima taikyti tokį metodą: intervalą [0, 10) suskaidykime į dešimt (tiek, kiek yra imčių) lygių dalių. Pirmajai daliai priskirkime pirmąją imtį $\mathbf{i}_1$, antrajai – antrąją imtį $\mathbf{i}_2$ ir kartokime šį žingsnį tol, kol paskutiniajam intervaliukui priskirsime paskutinę imtį $\mathbf{i}_{10}$ (žr. 1 pav.).



1 pav. Atsitiktinės reikšmės generavimas

Tada intervale $[0, 10)$ bus generuojama atsitiktinė (tolygiai pasiskirsčiusio tame intervale atsitiktinio dydžio) reikšmė ζ ir po to tikrinama, į kurį iš dešimties intervaliukų ji pateko.

Tarkim, ζ =2,57. Skaičius 2,57 ∊ [2, 3). Kadangi su šiuo intervalu susieta trečioji imtis $\mathbf{i}_3$ ji ir bus naudojama statistiniame tyrime. Ši imtis yra tikimybė, nes ji yra gauta procedūros, tenkinančios tikimybinio ėmimo sąlygas, metu.

2 pavyzdys. Pasirodo, kad tikimybinės imties dydis ir kitos charakteristikos priklauso nuo to, kokia yra galimų imčių aibė ir nuo toms imtims priskirtų tikimybių. Šis pavyzdys tai iliustruoja. Vėl iš tos pačios populiacijos $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ išrinkime tikimybinę imtį.

1. Tegu galimos imtys yra tokios:
   $\mathbf{i}_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$, $\mathbf{i}_2 = \{u_2, u_5\}$, $\mathbf{i}_3 = \{u_2, u_4\}$, $\mathbf{i}_4 = \{u_4, u_5\}$;
2. Priskirkime šioms imtims tokias jų išrinkimo tikimybes:
   $p(\mathbf{i}_1) = \frac{1}{2}$, $p(\mathbf{i}_2) = p(\mathbf{i}_3) = p(\mathbf{i}_4) = \frac{1}{6}$;

3. Nesunku įsitikinti, kad kiekvienas populiacijos U elementas priklauso bent vienai iš imčių;
4. Tam, kad kiekviena iš išvardintų imčių būtų išrenkama su nurodytomis tikimybėmis, galima taikyti analogišką metodą, nagrinėtą pirmajame pavyzdyje. Tik šį kartą intervalas $[0, 10)$ būtų dalijamas į 4 intervaliukus, kurių ilgiai proporcingi atitinkamų imčių išrinkimo tikimybėms. Visi kiti taikomo metodo žingsniai išlieka tokie patys.

4 apibrėžimas. Lentelė

$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	...	$\mathbf{i}_v$
p_1	p_2	...	p_v

vadinama *imties planu*, o tikimybės $p_k = p(\mathbf{i}_k)$, $k = 1, 2, \ldots v$, vadinamos *imties plano tikimybėmis*. Du praktikoje ir teorijoje gerai žinomus imčių planų pavyzdžius pateiksime antrajame skyriuje.

Išrinkus tikimybinę imtį, vieni populiacijos elementai jai priklausys, o kiti ne. Trečia tikimybinio ėmimo sąlyga garantuoja, kad konkrečių elementų priklausymo imčiai tikimybės bus teigiamos. Pažymėkime k-ojo, $k = 1, 2, ..., N$, populiacijos elemento priklausymo atsitiktinai išrinktai imčiai tikimybę simboliu π_k. Nagrinėjant populiacijos charakteristikų vertinimo uždavinius, ne mažiau yra svarbios ir dviejų konkrečių populiacijos elementų priklausymo imčiai tikimybės. Populiacijos k-ojo ir l-ojo, $k, l = 1, 2, ..., N,\ k \neq l$, elementų priklausymo atsitiktinai išrinktai imčiai tikimybę pažymėkime π_{kl}. Elementų priklausymo imčiai tikimybės priklauso nuo imties plano. Sekantis teiginys nurodo, kaip susietos šios tikimybės su imties plano tikimybėmis.

1 teiginys. Galioja lygybės

$$\pi_k = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_s},\ \pi_{kl} = p_{j_1} + p_{j_2} + \ldots + p_{j_r},$$
$$k, l = 1, 2, ..., N,\quad k \neq l;$$

čia $i_1, i_2, ..., i_s$ - imčių, kurioms priklauso k-asis populiacijos elementas, numeriai, o s žymi tokių imčių skaičių; $j_1, j_2, ..., j_r$ – imčių, kurioms priklauso populiacijos elementų pora (k, l), numeriai, o r žymi tokių imčių skaičių.

Dešinėse lygybių pusėse sumuojamos tų imčių išrinkimo tikimybės, kurioms priklauso nagrinėjami elementai.

3 pavyzdys. Prisiminkime pirmajame pavyzdyje apibrėžtą imties planą ir apskaičiuokime ketvirtojo populiacijos elemento u_4 priklausymo atsitiktinai išrinktai imčiai tikimybę. Kadangi ketvirtasis elementas priklauso trečiai, šeštai, aštuntai ir dešimtai imtims iš galimų imčių aibės, tai sumuojame šių imčių išrinkimo tikimybes ir gauname atsakymą:

$$\pi_{4\cdot}= p_3 + p_6 + p_8 + p_{10} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{5}.$$

Panašiai skaičiuojamos ir elementų porų priklausymo imčiai tikimybės.

1.2. Populiacijos kintamieji, parametrai ir jų įvertiniai.

Kiekvieną baigtinės populiacijos elementą apibūdina kurių nors rodiklių reikšmės, pavyzdžiui,

- įmonės pajamos;
- namų ūkio išlaidos;
- stipendijos dydis ir t.t.

Matuodami kurio nors rodiklio reikšmes, gauname dydį, kuris kinta kartu su populiacijos nariais ir yra vadinamas *populiacijos kintamuoju*.

Kintamuosius žymėsime mažosiomis raidėmis: y, z ir t.t., o jų įgyjamas reikšmes – $y_1, y_2, ..., y_N$, $z_1, z_2, ..., z_N$ ir pan. Imties $\mathbf{i} = \{u_{i_1}, u_{i_2}, ..., u_{i_n}\}$ elementų kurių nors kintamųjų, pavyzdžiui, y ir z reikšmes žymėsime $y_{i_1}, y_{i_2}, ..., y_{i_n}$ ir $z_{i_1}, z_{i_2}, ..., z_{i_n}$. Kartais rašoma trumpiau: $y_1, y_2, ..., y_N$, $z_1, z_2, ..., z_N$, suprantant, kad šios reikšmės nebūtinai atitinka pirmuosius n populiacijos U elementus.

Paprastai imčių tyrimų metu siekiama įvertinti tų populiacijos kintamųjų kokybines ar kiekybines charakteristikas, kurių visos populiacijos reikšmės nėra žinomos (jei jas žinotume, tai nereikėtų ir tyrimo atlikti). Atlikus imties išrinkimą ir reikšmių matavimą, sužinomos šių kintamųjų tik imties reikšmės arba kurios nors imties skaitinės charakteristikos. Tokie kintamieji ir vadinami *tyrimo kintamaisiais*.

Kintamieji skaidomi į kokybinius ir kiekybinius. Kiekybinių kintamųjų reikšmės parodo, kiek tiriamo požymio turi populiacijos elementai, o kokybiniai kintamieji nusako dydžius, kurių neįmanoma įvertinti skaičiais.

4 pavyzdys. Šeimų išlaidų tyrimuose dažnai sutinkami šie kintamieji: šeimos narių skaičius šeimoje, šeimos narių lytis, praėjusių metų šeimos pajamos, einamųjų metų išlaidos drabužiams, maistui, baldams ir pan.

Žemės ūkio tyrimuose nagrinėjamų kintamųjų pavyzdžiai: ūkio valdomas žemės plotas, kintamasis, kurio reikšmės nurodo, kokio tipo auginamos grūdinės kultūros vyrauja ūkyje, Europos Sąjungos suteikta parama (litais) ir pan.

Pavyzdyje nagrinėti kintamieji *šeimos narių skaičius šeimoje, praėjusių metų šeimos pajamos, einamųjų metų išlaidos drabužiams, maistui, baldams, ūkio valdomas žemės plotas* ir *Europos Sąjungos suteikta parama* yra kiekybiniai, kai tuo tarpu kiti yra kokybiniai.

Imčių teorijoje domimasi įvairiomis kintamųjų funkcijomis

$$\theta = \theta(y, z, ...),$$

kurios yra vadinamos *baigtinės populiacijos parametrais*. Naudojantis imties duomenimis, siekiama šias funkcijas įvertinti. Pavyzdžiui, populiacijoje $U = \{u_1, u_2, ..., u_N\}$, kurioje apibrėžti du tyrimo kintamieji y ir z, gali būti domimasi šiais parametrais:

1. tyrimo kintamojo y reikšmių suma

$$t_y = y_1 + y_2 + ... + y_N;$$

2. tyrimo kintamojo z reikšmių vidurkiu

$$\mu_z = \frac{1}{N}(z_1 + z_2 + ... + z_N);$$

3. kintamųjų y ir z reikšmių sumų santykiu

$$R = \frac{y_1 + y_2 + ... + y_N}{z_1 + z_2 + ... + z_N}.$$

Norėtume pastebėti, kad kartais kalbos lakoniškumo dėlei, kai iš konteksto yra aišku, kurie kintamieji nagrinėjami, žodžiai „kintamojo“, „kintamųjų“ yra praleidžiami ir tiesiog sakoma: populiacijos suma, populiacijos vidurkis, populiacijos dviejų sumų santykis ir t.t.

Didžiojoje dalyje mokslo darbų, kuriuose sprendžiamas parametrų vertinimo klausimas, nagrinėjamos populiacijos kintamųjų sumos ir vidurkiai. Mokėdami vertinti šiuos parametrus, galime nesunkiai įvertinti ir kitus, kurie yra šių sumų ar vidurkių funkcijos.

Tarkime, kad statistikas Robertas atlieka tyrimą, kuriuo siekiama įvertinti kuriuos nors tam tikros populiacijos parametrus. Robertas pasirinko informacijos surinkimo metodą, sudarė klausimyną, išrinko tikimybinę imtį, apklausė imties elementus, gavo imties duomenis, bet vis dar negali įvertinti pasirinktų parametrų, nes vien tik imties duomenų šiam uždaviniui spręsti nepakanka. Tam papildomai reikia tam tikro „įrankio“, vadinamo įvertiniu.

5 apibrėžimas. Parametro $\theta = \theta(y)$ *įvertiniu* vadinama taisyklė arba formulė, kuri nurodo, kaip, turint imtį, įvertinti parametrą; žymima $\hat{\theta} = \hat{\theta}(y_{i_1}, y_{i_2}, ..., y_{i_n})$. Skaitinė įvertinio reikšmė, apskaičiuota konkrečiai imčiai, vadinama *įverčiu*.

Pastebėsime, kad apibrėžimas pateiktas tam atvejui, kai populiacijos parametras yra vieno kintamojo y funkcija, bet nesudėtinga šį apibrėžimą ir apibendrinti. Pabandykite tai padaryti savarankiškai.

Aukščiau pristatytų parametrų t_y, μ_z ir R įvertiniai gali būti tokio pavidalo:

$$\hat{t}_y = w_{i_1} y_{i_1} + w_{i_2} y_{i_2} + ... + w_{i_n} y_{i_n}, \quad \hat{\mu}_z = \hat{t}_z / N,$$

$$\hat{R} = \hat{t}_y / \hat{t}_z, \quad \hat{t}_z = w_{i_1} z_{i_1} + w_{i_2} z_{i_2} + ... + w_{i_n} z_{i_n},$$

čia $w_{i_1}, w_{i_2}, ..., w_{i_n}$, vadinami imties elementų svoriais. Imties i_k-ojo elemento svorio reikšmė parodo, kiek populiacijos elementų reprezentuoja elementas u_{i_k}, būdamas imtyje.

5 pavyzdys. Baigtinėje populiacijoje $U = \{u_1, u_2, ..., u_N\}$ yra apibrėžtas kintamasis y, įgyjantis reikšmes y_1, y_2, ... , y_N. Reikia įvertinti šių reikšmių sumą t_y. Siekdami tikslo, pirmiausia išrinktume n dydžio tikimybinę imtį $\mathrm{i} = \{u_{i_1}, u_{i_2}, ..., u_{i_n}\}$ ir išmatuotume imties elementų reikšmes $y_{i_1}, y_{i_2}, ..., y_{i_n}$. Tada imties elementų svorius parinkę pagal taisyklę $w_k = N / n,\ k \in \mathrm{i}$, gautume paprasčiausią kintamojo y sumos įvertinio pavyzdį:

$$\hat{t}_y = \frac{N}{n}(y_{i_1} + y_{i_2} + ... + y_{i_n}).$$

Baigtinių populiacijų statistikos studijose nagrinėjamas svorių parinkimas priklausomai nuo imties plano, nuo tam tikrų papildomų kintamųjų ir kitų dydžių.

1.3. Įvertinių tikslumo matai

Vertinant kurį nors populiacijos parametrą θ, galima susidurti su įvertinio parinkimo problema. Juk, pastudijavus vieną baigtinių populiacijų statistikos knygą, galima rasti joje vieną įvertinį $\hat{\theta}_1$, pastudijavus kitą, – antrą įvertinį $\hat{\theta}_2$, panaršius internete, – dar du įvertinius: $\hat{\theta}_3$, $\hat{\theta}_4$, dėstytojas per paskaitą pateikė dar ir penktą įvertinį $\hat{\theta}_5$. Tai kaip nuspręsti, kuris iš jų geriausias (tiksliausias)? Kaip tai išmatuoti? Čia gelbsti šie įvertinių tikslumo matai:

- *Įvertinio $\hat{\theta}$ poslinkis:*

$$POSL(\hat{\theta}) = \mathbf{E}\hat{\theta} - \theta, \tag{1}$$

$$\mathbf{E}\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathrm{i}_1)p(\mathrm{i}_1) + \hat{\theta}(\mathrm{i}_2)p(\mathrm{i}_2) + \ldots + \hat{\theta}(\mathrm{i}_v)p(\mathrm{i}_v), \tag{2}$$

yra *įvertinio $\hat{\theta}$ vidurkis*, v – visų galimų imčių, apibrėžiamų nagrinėjamu imties planu, skaičius, $\hat{\theta}(\mathrm{i}_k)$ – įvertinio $\hat{\theta}$ reikšmė (įvertis), gauta iš imties $\mathbf{i}_k$ duomenų; $p(\mathbf{i}_k)$, $k \in \mathbf{i}$, – imties plano tikimybės. Sakoma, kad įvertinys $\hat{\theta}$ yra *nepaslinktasis*, jeigu $\mathbf{E}\hat{\theta} = \theta$ (poslinkis $POSL(\hat{\theta})$ yra lygus nuliui). Tai pageidaujama įvertinio savybė. Įdomu tai, kad įvertinys gali būti nepaslinktasis, nors nei viena jo realizacija nesutampa su tikrąja vertinamo parametro reikšme. Be to, yra tokių situacijų, kai įverčiai yra simetriškai išsibarstę tikrosios parametro reikšmės atžvilgiu ir santykinai toli nutolę nuo jos. Aišku, kad tai rodo prastą įvertinio kokybę, nors tokiu atveju įvertinys yra nepaslinktasis arba turi mažą poslinkį. Taigi, norint išsamiau išnagrinėti įvertinio kokybę, prireikia ir įvertinio sklaidos matų.

- *Įvertinio $\hat{\theta}$ dispersija:*

$$\mathbf{D}\hat{\theta} = (\hat{\theta}(\mathrm{i}_1) - \mathbf{E}\hat{\theta})^2 p(\mathrm{i}_1) + (\hat{\theta}(\mathrm{i}_2) - \mathbf{E}\hat{\theta})^2 p(\mathrm{i}_2) + \ldots + (\hat{\theta}(\mathrm{i}_v) - \mathbf{E}\hat{\theta})^2 p(\mathrm{i}_v) \tag{3}$$

apibūdina įverčių sklaidos lygį apie įvertinio vidurkį.

- *Įvertinio $\hat{\theta}$ standartinis nuokrypis:*

$$S(\hat{\theta}) = \sqrt{\mathbf{D}\hat{\theta}} \tag{4}$$

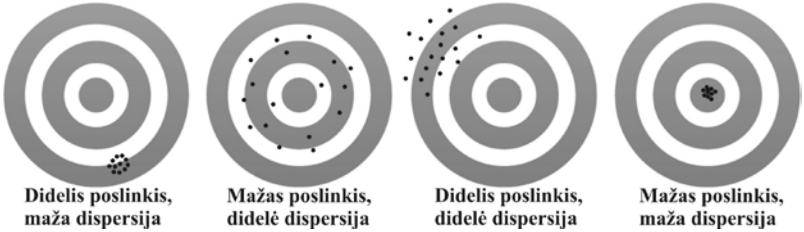
taip pat apibūdina įverčių sklaidos lygį apie įvertinio vidurkį, bet jis matuojamas tais pačiais vienetais, kaip ir įverčiai, o tai yra naudinga kai kuriuose uždaviniuose.

- *Įvertinio $\widehat{\theta}$ vidutinė kvadratinė paklaida:*

$$VKP(\hat{\theta}) = (\hat{\theta}(i_1) - \theta)^2 \, p(i_1) + (\hat{\theta}(i_2) - \theta)^2 \, p(i_2) + \ldots + (\hat{\theta}(i_v) - \theta)^2 \, p(i_v) \qquad (5)$$

apibūdina įverčių sklaidos lygį apie tikrąją parametro reikšmę.

Siekiama tokių įvertinių, kurių vidurkis lygus arba nedaug skiriasi nuo tikslios parametro θ reikšmės ir kurių sklaidos charakteristikos yra kuo mažesnės. Tai atitinka 2 paveiksle vaizduojamą ketvirtą situa–ciją. Šiame paveiksle populiacijos parametro vertinimas sugretinamas su strėlytės metimu į taikinį, žaidžiant smiginį. Taikinio centras atitinka vertinamą parametrą. Kiekviena strėlyte padaryta skylutė taikinyje vaizduoja parametro įvertį. Skylučių skaičius lygus imties planu apibrėžiamų visų galimų imčių skaičiui. Kuo arčiau taikinio centro įsminga strėlytė, tuo įvertis mažiau skiriasi nuo tikrosios parametro reikšmės.



2 pav. Galimos įvertinio poslinkio ir dispersijos kombinacijos

Sprendžiant baigtinių populiacijų statistikos uždavinius, kartais reikia ištirti to paties įvertinio, taikomo skirtingais matavimo vienetais matuojamiems kintamiesiems, savybes. Tada vien įvertinio dispersija ar vidutinė kvadratinė paklaida gali atrodyti didele vien dėl to, kad atitinkamo kintamojo reikšmės yra daug didesnės nei kito, pavyzdžiui, kai vienas kintamasis yra Europos sostinių gyventojų skaičius, o kitas – vandens telkinių skaičius tose sostinėse. Tokiais atvejais patogu taikyti *santykinę standartinę paklaidą* (variacijos koeficientą):

$$cv(\hat{\theta}) = \sqrt{\mathbf{D}\hat{\theta}} \big/ \mathbf{E}\hat{\theta}, \qquad (6)$$

kadangi šis matas nepriklauso nuo matavimo vienetų, bet jis nėra taikytinas neigiamas reikšmes įgyjantiems kintamiesiems.

6 pavyzdys. Šešiose mokyklose mokosi atitinkamai 350, 400, 300, 350, 500 ir 450 mokinių. Siekiant įvertinti vidutinį mokinių skaičių šiose mokyklose, apibrėžiamas imties planas taip, kad galimos imtys yra visi šios populiacijos dviejų elementų poaibiai, o jų išrinkimo tikimybės $p(\mathbf{i}_k) = 1/15$, $k = 1, 2, ..., 15$. Mokinių skaičiaus vidurkį (pažymėkime jį raide μ) galima vertinti šiuo įvertiniu:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N}\left(\frac{y_{i_1}}{\pi_{i_1}} + \frac{y_{i_2}}{\pi_{i_2}} + ... + \frac{y_{i_n}}{\pi_{i_n}}\right).$$

Apskaičiuokime šio įvertinio tikslumo charakteristikas.

Sprendimas. Pirmiausia pastebėsime, kad populiaciją sudaro šešios mokyklos. Taigi populiacijos dydis $N = 6$. Šioje populiacijoje apibrėžtas vienas kintamasis, kurio konkreti reikšmė rodo, kiek mokinių mokosi atitinkamoje mokykloje. Pavyzdžiui, trečioje mokykloje mokosi 300 mokinių, o šeštoje – 450. Pažymėkime šį kintamąjį raide y. Matome, kad užduotyje nagrinėjamas fiksuoto dydžio imties planas ir imties dydis $n = 2$.

Toliau sudarykime pagalbinę lentelę, kurioje išvardijamos visos sąlygoje minimos imtys ir jų duomenys:

Imtis	y	Imtis	y	Imtis	y
$\mathrm{i}_1 = \{u_1, u_2\}$	350, 400	$\mathrm{i}_6 = \{u_2, u_3\}$	400, 300	$\mathrm{i}_{11} = \{u_3, u_5\}$	300, 500
$\mathrm{i}_2 = \{u_1, u_3\}$	350, 300	$\mathrm{i}_7 = \{u_2, u_4\}$	400, 350	$\mathrm{i}_{12} = \{u_3, u_6\}$	300, 450
$\mathrm{i}_3 = \{u_1, u_4\}$	350, 350	$\mathrm{i}_8 = \{u_2, u_5\}$	400, 500	$\mathrm{i}_{13} = \{u_4, u_5\}$	350, 500
$\mathrm{i}_4 = \{u_1, u_5\}$	350, 500	$\mathrm{i}_9 = \{u_2, u_6\}$	400, 450	$\mathrm{i}_{14} = \{u_4, u_6\}$	350, 450
$\mathrm{i}_5 = \{u_1, u_6\}$	350, 450	$\mathrm{i}_{10} = \{u_3, u_4\}$	300, 350	$\mathrm{i}_{15} = \{u_5, u_6\}$	500, 450

Įverčių skaičiavimas reikalauja elementų priklausymo imčiai tikimybių žinojimo. Jas suskaičiuojame remdamiesi 1 teiginiu ir 3 pavyzdžiu:

$$\pi_1 = \pi_2 = ... = \pi_6 = \frac{1}{3}.$$

Žinomų dydžių reikšmes įrašome į įvertinį $\hat{\mu}$ ir gauname:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{6}(3y_{i_1} + 3y_{i_2}) = \frac{1}{2}(y_{i_1} + y_{i_2}).$$

Pagal gautą formulę visoms imtims suskaičiuojame vidurkio įverčius:

$\hat{\mu}(i_1) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{1}{2}(300 + 400) = 375,\ \ \hat{\mu}(i_2) = \frac{1}{2}(350 + 300) = 325,$
$\hat{\mu}(i_3) = 350,\ \ \hat{\mu}(i_4) = 425,\ \ \hat{\mu}(i_5) = 400,\ \ \hat{\mu}(i_6) = 350,\ \ \hat{\mu}(i_7) = 375,$
$\hat{\mu}(i_8) = 450,\ \ \hat{\mu}(i_9) = 425,\ \ \hat{\mu}(i_{10}) = 325,\ \ \hat{\mu}(i_{11}) = 400,\ \ \hat{\mu}(i_3) = 375,$
$\hat{\mu}(i_{13}) = 425,\ \ \hat{\mu}(i_{14}) = 400,\ \ \hat{\mu}(i_5) = 475.$

Įvertinio $\hat{\mu}$ tikslumo charakteristikos apskaičiuojamos pagal (1)–(6) formules:

$$\mathbf{E}\hat{\mu} = \hat{\mu}(i_1)p(i_1) + \hat{\mu}(i_2)p(i_2) + \ldots + \hat{\mu}(i_{15})p(i_{15}) = \frac{1}{15}(\hat{\mu}(i_1) + \hat{\mu}(i_2) + \ldots + \hat{\mu}(i_{15})) =$$
$$= \frac{1}{15}(375 + 325 + \ldots + 475) = \frac{1175}{3}.$$
$$POSL(\hat{\mu}) = \mathbf{E}\hat{\mu} - \mu = \frac{1175}{3} - \frac{1}{6}(350 + 400 + 300 + 350 + 500 + 450) = 0,$$
$$\mathbf{D}\hat{\mu} = (\hat{\mu}(i_1) - \mathbf{E}\hat{\mu})^2 p(i_1) + (\hat{\mu}(i_2) - \mathbf{E}\hat{\mu})^2 p(i_2) + \ldots + (\hat{\mu}(i_{15}) - \mathbf{E}\hat{\mu})^2 p(i_{15}) =$$
$$= \frac{1}{15}\left[\left(\hat{\mu}(i_1) - \frac{1175}{3}\right)^2 + \left(\hat{\mu}(i_2) - \frac{1175}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\hat{\mu}(i_{15}) - -\frac{1175}{3}\right)^2\right] =$$
$$= \frac{1}{15}\left[\left(375 - \frac{1175}{3}\right)^2 + \left(325 - \frac{1175}{3}\right)^2 + \ldots + \left(475 - -\frac{1175}{3}\right)^2\right] = \frac{16\,250}{9}.$$
$$S(\hat{\mu}) = \sqrt{\mathbf{D}\hat{\mu}} = \sqrt{\frac{16\,250}{9}} = \frac{25\sqrt{26}}{3}.$$

Kadangi $POSL(\hat{\mu}) = 0$, tai įvertinys $\hat{\mu}$ yra nepaslinktasis ir tokiu atveju

$$VKP(\hat{\mu}) = \mathbf{D}\hat{\mu} = \frac{16\,250}{9}.$$

Įvertinio variacijos koeficientas

$$cv(\hat{\mu}) = \sqrt{\mathbf{D}\hat{\mu}}\big/\mathbf{E}\hat{\mu} = \frac{\sqrt{26}}{47} \approx 0{,}11.$$

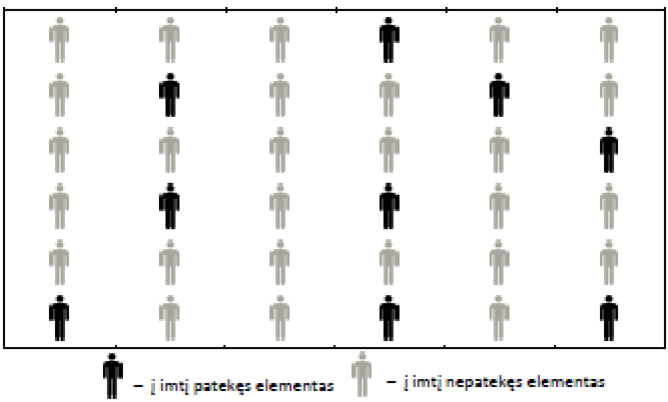
2. Paprastoji atsitiktinė imtis

Šiame skyriuje trumpai apžvelgsime du bene geriausiai žinomus imties planus, kuriems būdinga tai, kad tai – fiksuoto dydžio imčių planai, visų imčių išrinkimo tikimybės yra vienodos. Vienodos yra ir elementų priklausymo imčiai tikimybės. Tik vienu atveju jos lygios vienam skaičiui, o kitu – kitam. Pirmoje schemoje elementai negali kartotis, o antroje – gali.

2.1. Paprastasis atsitiktinis negrąžintinis ėmimas

Pats paprasčiausias imties plano pavyzdys gaunamas, renkant fiksuoto n dydžio imtį su vienodomis išrinkimo tikimybėmis, t.y. $p(\mathrm{i}) = \frac{1}{C_N^n}$, jei $v(\mathrm{i}) = n$; $p(\mathrm{i}) = 0$ – priešingu atveju. Čia $v(\mathrm{i})$ – imties **i** dydis.

6 apibrėžimas. Fiksuoto n skirtingų elementų dydžio imtis vadinama *paprastąja atsitiktine (negrąžintine) imtimi* (PAI), jei ji yra renkama iš N dydžio populiacijos, galiojant sąlygai, kad kiekvienas n skirtingų elementų rinkinys turi tą pačią tikimybę būti išrinktam [6].



Paprastosios atsitiktinės imties išrinkimą galima realizuoti, vadovaujantis PAI ir tikimybinio ėmimo apibrėžimais, bet šis būdas nėra patogus dėl didelio skaičiaus galimų imčių, esant pakankamai didelėms dydžio N reikšmėms. Tačiau literatūroje yra aprašyta kitų paprastesnių PAI išrinkimo schemų. Pagal vieną iš jų \cite{geltona} intervale (0, 1) generuojamos atsitiktinės (tolygiai pasiskirsčiusio tame intervale atsitiktinio dydžio) reikšmės ε_1, ε_2, ... Jei $\varepsilon_1 < \frac{n}{N}$, tai pirmasis populiacijos elementas u_1 yra įtraukiamas į imtį, priešingu atveju – neįtraukiamas. Sprendžiant, ar kiti populiacijos elementai $(u_2, u_3, ...)$ pateks į imtį, nagrinėjama nelygybė

$$\varepsilon_k < \frac{n - n_k}{N - k + 1}, \tag{7}$$

čia n_k žymi elementų, jau patekusių į imtį ir esančių tarp pirmųjų $k-1$ populiacijos elementų, skaičių. Jei nelygybė (7) yra teisinga, *k*-asis populiacijos elementas įtraukiamas į imtį, priešingu atveju – ne. Nelygybės tikrinimas stabdomas, kai $n_k = n$ (sudaromas *n* skirtingų elementų rinkinys).

7 pavyzdys. Sakykime, kad iš populiacijos, turinčios $N = 150$ elementų, reikia išrinkti $n = 30$ elementų dydžio paprastąją atsitiktinę imtį be grąžinimo. Nustatykime, kuriuo iš toliau aprašomų metodų tai bus padaryta.

1. Populiaciją $U = \{u_1, u_2, ..., u_{150}\}$ padalijame į dvi lygias dalis: $U_1 = \{u_1, u_2, ..., u_{75}\}$ ir $U_2 = \{u_{76}, u_{77}, ..., u_{150}\}$. Imtį išrenkame taip: du elementus atsitiktinai (pavyzdžiui, naudodamiesi atsitiktinių skaičių lentele) renkame iš U_1 ir vieną – iš U_2, paskui vėl du elementus atsitiktinai renkame iš U_1 ir vieną – iš U_2. Procesą kartojame, kol sudaroma 30 elementų imtis.

2. Į lošimo mašiną sudedami rutuliukai, sunumeruoti nuo 1 iki 150. Mašiną įjungus, atliekamas rutuliukų išmaišymas. Po tam tikro laiko mašina išridena pirmąjį rutuliuką, po to vėl rutuliukus išmaišo ir išridena antrąjį. Ši procedūra kartojama, kol išridenama 30 rutuliukų. Kiekvieną kartą išridenus vis naują rutuliuką, jis nėra grąžinamas į mašiną. Atsitiktinę imtį sudaro tie populiacijos elementai, kurių numeriai sutampa su išridentų rutuliukų numeriais.

Sprendimas. Imtį sudarant pirmuoju metodu, populiacijos elementai, esantys poaibyje U_1, turi didesnę tikimybę patekti į imtį, nei tie, kurie yra iš U_2, nes net 20 elementų imtyje bus iš pirmosios populiacijos dalies ir tik 10 – iš antrosios. Populiacijos dalių dydžiai U_1 ir U_2 yra vienodi. Taigi, elementų priklausymo imčiai tikimybės bus skirtingos, o tai prieštarauja PAI apibrėžimui. Taip pat galima įžvelgti prieštaravimų ir tai sąlygai, kuria reikalaujama, kad visi elementai imtyje turi būti skirtingi. Vadinasi, tokiu metodu pageidaujamo tipo imties nesudarysime.

Toliau nagrinėsime baigtinės populiacijos $U = \{u_1, u_2, ..., u_N\}$, kurioje apibrėžtas (tyrimo) kintamasis *y*: $y_1, y_2, ..., y_N$, parametrų vertinimo klausimą. Pirmiausia tegu vertinamu parametru bus kintamojo *y* reikšmių vidurkis:

$$\mu_y = \frac{1}{N}(y_1 + y_2 + ... + y_N).$$

Siekdami įvertinti vidurkį μ_y, iš populiacijos *U* išrinksime *n* dydžio paprastąją atsitiktinę imtį $i = \{i_1, i_2, ..., i_n\}$ ir išmatavę kintamojo *y* *imties* elementų reikšmes: $y_{i_1}, y_{i_2}, ..., y_{i_n}$, vidurkį μ_y vertinsime *imties* vidurkiu:

$$\hat{\mu}_y = \bar{y} = \frac{1}{n}(y_{i_1} + y_{i_2} + ... + y_{i_n}). \tag{8}$$

Reikia pažymėti, kad aprašėme tik vieną iš būdų, kaip galima būtų įvertinti populiacijos vidurkį. Derinant įvairius imties planus ir skirtingus įvertinius, gali būti nagrinėjamos kitos populiacijos vidurkio vertinimo schemos. Daug kitų schemų yra aptariama literatūros sąraše esančiuose šaltiniuose.

2 teiginys. *Paprastojo atsitiktinio negrąžintinio ėmimo atveju*

1. $\mathrm{E}\hat{\mu}_y := \mu_y$;

2. $\mathrm{D}\hat{\mu}_y = (1 - f)\dfrac{s^2}{n}$, 1. $f = \dfrac{n}{N}$,

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\Big((y_1 - \mu_y)^2 + (y_2 - \mu_y)^2 + ... + (y_N - \mu_y)^2\Big),$$

3. *Dispersijos įvertinys*

$$\hat{\mathrm{D}}\hat{\mu}_y = (1 - f)\frac{\hat{s}^2}{n}, \text{ 1.}$$

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1}\Big((y_{i_1} - \bar{y})^2 + (y_{i_2} - \bar{y})^2 + \ldots + (y_{i_n} - \bar{y})^2\Big),$$

yra nepaslinktasis.

Paaiškinsime kai kurių simbolių reikšmes. Teiginio formuluotėje dydis $f = \frac{n}{N}$ žymi *ėmimo lygį*, kuris rodo, kokia populiacijos dalis patenka į imtį, s^2 – *kintamojo y populiacijos dispersiją*, $\hat{s}^2$ – *kintamojo y imties dispersiją*. Be to, PAI atveju $\hat{s}^2$ yra nepaslinktasis dispersijos s^2 įvertinys, t.y. $\mathbf{E}\hat{s}^2 = s^2$.

Skirtumą $1-f$ vadinsime *baigtinės populiacijos pataisos daugikliu*. Lengva pastebėti, kad didėjant imties dydžiui, abu daugikliai $1-f$ ir $\frac{s^2}{n}$ mažėja, taigi ir įvertinio $\hat{\mu}_y$ dispersija mažėja. Praktika ir teorija rodo, kad kuo daugiau surinksime informacijos (kuo daugiau apklausime populiacijos elementų), tuo bus tikslesnės statistinės išvados, bet nereikia pamiršti, jog kiekviena apklausa turi savo kainą.

Verta įsidėmėti, kad:

- μ_y yra populiacijos parametras, nežinoma konstanta;
- $\hat{\mu}_y$ yra statistika (atsitiktinis dydis). Jos reikšmė priklauso nuo išrinktos imties duomenų;
- $\mathbf{D}\hat{\mu}_y = (1-f)\frac{s^2}{n}$ yra taip pat nežinoma konstanta, nes s^2 yra nežinoma populiacijos dispersija;
- dispersija $\mathbf{D}\hat{\mu}_y$ gali būti įvertinta, pakeičiant šios dispersijos išraiškoje s^2 į $\hat{s}^2$;

Pastebėjus, kad $\mu_y = \frac{t_y}{N}$, nesunku sukonstruoti ir populiacijos sumos

$$t_y = y_1 + y_2 + \ldots + y_N$$

standartinį įvertinį:

$$\hat{t}_y = \frac{N}{n}(y_{i_1} + y_{i_2} + \ldots + y_{i_n}), \tag{9}$$

taikomą PAI atveju.

Nesunku įsitikinti, kad jis yra taip pat nepaslinktasis sumos t_y įvertinys. Jo dispersija ir nepaslinktasis dispersijos įvertinys gaunamas pasinaudojus 2 teiginiu, lygybe $\hat{t}_y = N\hat{\mu}_y$ bei dispersijos savybe

$$\mathbf{D}(C\xi) = C^2\mathbf{D}(\xi)\,;$$

čia C – konstanta, ξ – atsitiktinis dydis.

8 pavyzdys. Vertinamas septynių įmonių vidutinis metinis pelnas. Tuo tikslu išrinkta paprastoji atsitiktinė negrąžintinė trijų elementų (įmonių) imtis. Apklausus šias įmones, paaiškėjo, kad jų pelnas (tūkstančiais litų) yra lygus atitinkamai 500, 780, 100.

a) Įvertinkime vidutinį metinį įmonių pelną, gauto įverčio dispersiją ir variacijos koeficientą;

b) Tarę, kad visos populiacijos duomenys yra tokie: 100, 500, 150, 230, 780, 950, 50, apskaičiuokime tikrąją įverčio dispersiją ir tikrąjį variacijos koeficientą.

Sprendimas.

a) Sąlygoje duota, kad populiacijos dydis $N = 7$, imties dydis $n = 3$. Įmonių pelną pažymėkime raide y. Vidutinis pelnas – tai šio kintamojo vidurkis. Jį vertinkime standartiniu įvertiniu (7):

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{n}(y_{i_1} + y_{i_2} + y_{i_3}) = \frac{1}{3}(500 + 780 + 100) = 460.$$

Pagal 2 teiginį šio įverčio dispersijos įvertis yra:

$$\hat{\mathbf{D}}\hat{\mu}_y = \left(1 - \frac{3}{7}\right)\frac{\hat{s}^2}{3}, \quad \hat{s}^2 = \frac{1}{3-1}(y_{i_1} - \bar{y})^2 + (y_{i_2} - \bar{y})^2 + (y_{i_3} - \bar{y})^2.$$

Dispersijos įvertinio formulėje apskaičiuokime nežinomų dydžių reikšmes:

$$\bar{y} = \hat{\mu}_y = 460, \quad \hat{s}^2 = \frac{1}{2}((500-460)^2 + (780-460)^2 + (100-460)^2) = 116800.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$\hat{\mathbf{D}}\hat{\mu}_y = \left(1 - \frac{3}{7}\right)\frac{116800}{3} = 22247{,}62.$$

Jei $\hat{\theta}$ yra parametro θ įvertinys, tai šio įvertinio variacijos koeficientas

$cv(\hat{\theta}) = \dfrac{\sqrt{\mathbf{D}\hat{\theta}}}{\mathbf{E}\hat{\theta}}$ vertinamas pagal formulę:

$$c\hat{v}(\hat{\theta}) = \frac{\sqrt{\hat{\mathbf{D}}\hat{\theta}}}{\hat{\theta}}, \quad \hat{\theta} \neq 0.$$

Šio uždavinio atveju:

$$c\hat{v}(\hat{\mu}_y) = \frac{\sqrt{\hat{\mathbf{D}}\hat{\mu}_y}}{\hat{\mu}_y} = \frac{\sqrt{22247,62}}{460} = 0,32.$$

b) Populiacijos kintamojo y reikšmės yra: $y_1 = 100$, $y_2 = 500$, $y_3 = 150$, $y_4 = 230$, $y_5 = 780$, $y_6 = 950$, $y_7 = 50$. Remiantis antruoju teiginiu, ivertinio $\hat{\mu}_y$ tikroji dispersija yra

$$\hat{\mathbf{D}}\hat{\mu}_y = \left(1 - \frac{3}{7}\right)\frac{s^2}{3}, \quad s^2 = \frac{1}{7-1}\left((y_1 - \mu_y)^2 + (y_2 - \mu_y)^2 + \ldots + (y_7 - \mu_y)^2\right).$$

Apskaičiuokime tikrąjį vidurkį μ_y ir tikrąją kintamojo y dispersiją s^2:

$$\mu_y = \frac{1}{N}(y_1 + y_2 + \ldots + y_7) = \frac{1}{7}(100 + 500 + 150 + 23 + 780 + 950 + 50) = 394,29;$$

$$s^2 = \frac{1}{6}\left((100 - 394,29)^2 + (500 - 394,29)^2 + \ldots + (50 - 394,29)^2\right) = 126\,761,90.$$

Tikroji įvertinio $\hat{\mu}_y$ dispersija yra lygi

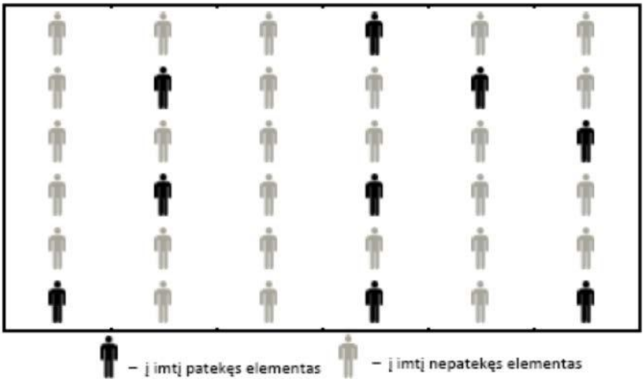
$$\hat{\mathbf{D}}\hat{\mu}_y = \left(1 - \frac{3}{7}\right)\frac{126761,90}{3} = 24\,145,12.$$

Įvertinys $\hat{\mu}_y$ PAI atveju yra nepaslinktasis. Todėl $\mathbf{E}\hat{\mu}_y = \mu_y$ ir variacijos koeficientas

$$c\hat{v}(\hat{\mu}_y) = \frac{\sqrt{\hat{\mathbf{D}}\hat{\mu}_y}}{\mathbf{E}\hat{\mu}_y} = \frac{\sqrt{24\,145,12}}{394,29} = 0,39.$$

2.2. Paprastasis atsitiktinis grąžintinis ėmimas

7 apibrėžimas. *Grąžintinis ėmimas* – tai ėmimas, kai kiekvienas paimtas ir užregistruotas ėmimo vienetas grąžinamas į populiaciją prieš imant kitą ėmimo vienetą [2]. Jei ėmimo vienetų (elementų) išrinkimo tikimybės yra vienodos, ėmimas vadinamas *paprastuoju atsitiktiniu grąžintiniu*, o šio ėmimo metu gauta imtis – *paprastąja atsitiktine grąžintine* (PAGI).



4 pav.: Paprastasis atsitiktinis grąžintinis ėmimas

Pagal vieną iš PAGI išrinkimo schemų pirmiausia iš *N* dydžio populiacijos U = $\{u_1, u_2, ..., u_N\}$ atsitiktinai su tikimybėmis, lygiomis $1/N$, išrenkamas vienas populiacijos elementas, bet nepašalinamas iš populiacijos (pažymėjus jį, jis grąžinamas atgal į populiaciją). Po to vėl iš tos pačios populiacijos su lygiomis elementų tikimybėmis atsitiktinai išrenkkamas antras elementas ir jį pažymėjus, jis grąžinamas į populiaciją. Ši procedūra kartojama *n* kartų, kol sudaroma *n* dydžio imtis. Paprastojoje atsitiktinėje grąžintinėje imtyje kurie nors populiacijos elementai gali pasikartoti kelis kartus (žr. 4 pav.).

Tegu $y_{i_1}, y_{i_2}, ..., y_{i_n}$ yra kintamojo *y* reikšmes, atitinkancios patekusius i PAGI populiacijos U elementus. Kintamojo *y* reikšmių vidurkį vėl vertinsime imties vidurkiu

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{n}(y_{i_1}, y_{i_2}, ..., y_{i_n}) . \tag{10}$$

Toliau pateiksime jo pagrindines savybes PAGI atveju.

3 teiginys. *Paprastojo atsitiktinio grąžintinio ėmimo atveju*

1. $E\hat{\mu}_y = \mu_y$;

2. $\mathbf{D}\hat{\mu}_y = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\frac{s^2}{n}$,

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\left((y_1 - \mu_y)^2 + (y_2 - \mu_y)^2 + \ldots + (y_N - \mu_y)^2\right);$$

3. Dispersijos įvertinys

$$\mathbf{D}\hat{\mu}_y = \frac{s^2}{n}, \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\left((y_{i_1} - \bar{y})^2 + (y_{i_2} - \bar{y})^2 + \ldots + (y_{i_n} - \bar{y})^2\right),$$

yra *nepaslinktasis*.

Teisingoje lygybėje $t_y = N\mu_y$ populiacijos vidurkį μ_y pakeitus jo standartiniu įvertiniu $\hat{\mu}_y$, gaunamas tradicinis populiacijos sumos įvertinys:

$$\hat{t}_y = \frac{N}{n}(y_{i_1} + y_{i_2} + \ldots + y_{i_n})\,. \tag{11}$$

Šis įvertinys yra nepaslinktasis, t. y. $\mathbf{E}\hat{\mu}_y = \mu_y$. Jo dispersija ir nepaslinktasis dispersijos įvertinys gaunamas panašiai, kaip ir PAI atveju.

Reikia pastebėti, kad:

- paprastasis atsitiktinis ėmimas be grąžinimo yra efektyvesnis nei paprastasis atsitiktinis grąžintinis ėmimas, t.y. PAI atveju (kai $n \geq 2$) standartinių vidurkio ir sumos įvertinių dispersijos yra mažesnės.

- kai populiacijos dydis *N* yra didelis, o imties dydis *n* – mažas, standartiniu įvertiniu (10) ir (11) dispersija abiem atvejais (PAI ir PAGI) yra panaši.

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Nagrinėjama 30 studentų populiacija. Nustatykite, ar bus sugeneruota paprastoji atsitiktine *negrąžintine* imtis, jei imties sudarymui taikysime toliau aprašomus metodus. Atsakymą pagriskite.

a) Imtis sudaroma, parenkant pirmus 6 studentus iš sąrašo;

b) Atsitiktinai parinkus skaitmenį, į imtį itraukiami tie studentai, kurių telefonų numeriai baigiasi šiuo skaitmeniu.

2. Nagrinėjama 50 studentų populiacija. Nustatykite, ar bus sugeneruota paprastoji atsitiktinė *grąžintine* imtis, jei imties sudarymui taikysime toliau aprašomus metodus. Atsakymą pagriskite.

a) Tarkime, kad studentų grupė sudaro 25 vaikinai ir 25 merginos. Vaikinams priskirkime skaičius nuo 1 iki 25, o merginoms – skaičius nuo 26 iki 50. Atsitiktinai parinkime keturis skaičius nuo 1 iki 25 ir keturis skaičius nuo 26 iki 50. Imtį sudarys šiuos aštuonis skaičius atitinkantys studentai.

b) Studentų sąrašo eilės numeriai užrašomi ant rutuliukų, kurie po to dedami į dėžę ir išmaišomi. Pirmiausia ištraukiamas pirmas pasitaikęs rutuliukas ir studentas, atitinkantis ant rutuliuko užrašytą numerį, įtraukiamas į imtį. Ištrauktas rutuliukas grąžinamas į dėžę ir vėl išmaišius ištraukiamas antras rutuliukas. Studentas, atitinkantis ant šio rutuliuko užrašytą numerį, taip pat įtraukiamas į imtį. Rutuliukų išrinkimo procedūra taikoma tol, kol sudaromas 8 elementų rinkinys (išrenkama imtis).

3. Nagrinėjamas imties planas, apibrėžtas 2-ame pavyzdyje. Apskaičiuokite visų šiame pavyzdyje tiriamos populiacijos elementų priklausymo imčiai tikimybes.

4. $N = 10$ elementų dydžio populiacijoje U = $\{u_1, u_2, ..., u_{10}\}$ apibrėžtas kintamasis y, kurio populiacijos reikšmės yra: 5, 10, 2, 2, 7, 15, 21, 12, 1, 2. Imties planas apibrėžtas taip, kad galimos imtys yra: $\mathbf{i}_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, $\mathbf{i}_2 = \{u_2, u_3, u_7, u_8, u_9\}$, $\mathbf{i}_3 = \{u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}\}$, $\mathbf{i}_4 = \{u_1, u_5, u_{10}\}$, $\mathbf{i}_5 = \{u_2, u_9, u_{10}\}$, o jų išrinkimo tikimybės: $p(\mathbf{i}_1) = p(\mathbf{i}_2) = p(\mathbf{i}_3) = 1/4$, $p(\mathbf{i}_4) = p(\mathbf{i}_5) = 1/8$. Vertinamas parametras yra kintamojo y reikšmių suma:

$$t_y = y_1 + y_2 + \ldots + y_{10}.$$

Sumą t_y galima vertinti šiuo įvertiniu:

$$\hat{t}_y = \frac{y_{i_1}}{\pi_{i_1}} + \frac{y_{i_2}}{\pi_{i_2}} + \ldots + \frac{y_{i_n}}{\pi_{i_n}},$$

čia $\pi_{i_k} - i_k$ -ojo elemento priklausymo imčiai tikimybė. Patikrinkite, ar ivertinys $\hat{t}_y$ yra nepaslinktasis (užuomina: reikės pagal (2) formulę apskaičiuoti įvertinio vidurkį ir palyginti jį su tikrąja sumos t_y reikšme).

5. Naudodami 4-os užduoties duomenis ir imties planą bei remdamiesi šeštu pavyzdžiu apskaičiuokite pagal (5) formulę čia nagrinejamo sumos t_y įvertinio $\hat{t}_y$ vidutinę kvadratinę paklaidą.

6. Dėžėje yra 60 bandelių su razinomis. Išrinkus 7 bandelių paprastąją atsitiktinę įmtį, suskaičiuota, kad bandelėse yra atitinkamai 19, 25, 27, 30, 25, 35, 35 razinos. Naudodami (8) ivertinį įvertinkite vidutinį razinų skaičių bandelėje.

7. Šešių studentų svoriai (*kg*) yra tokie: $y_1 = 85$, $y_2 = 60$, $y_3 = 91$, $y_4 = 77$, $y_5 = 79$, $y_6 = 80$. Vertinamas parametras – studentų vidutinis svoris

$$\mu_y = \frac{1}{6}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6).$$

Sudarykite visas įmanomas dviejų elementų paprastąsias atsitiktines negrąžintines imtis (kurių yra C_N^m) ir kiekvienai iš jų standartiniu įvertiniu (8) įvertinkite vidurki μ_y. Naudodami gautus iverčius, apskaičiuokite įvertinio dispersiją.

8. Apskaičiuokite 7-oje užduotyje nagrinėjamo vidurkio įvertinio $\hat{\mu}_y$ dispersiją remdamiesi 2-uoju teiginiu.

9. Penkių skirtingos konfigūracijos kompiuterių kainos (€) yra tokios: 500, 1000, 700, 1100, 650. Palyginkite vidutinės kainos įvertinio (8) dispersiją PAI ir PAGI atvejais, kai imties dydis $n = 3$ (užuomina: naudokitės antru ir trečiu teiginiais).

10. Statistiniame tyrime taikomas imties dydis *n* gali būti apibrėžtas, pareikalavus, kad naudojamo įvertinio tikslumo matai (pavyzdžiui, variacijos koeficientas) tenkintų tam tikras sąlygas. Raskite paprastosios atsitiktinės negrąžintinės imties dydį, kuriam esant standartinio vidurkio μ įvertinio (8) variacijos koeficientas tenkina lygybę: $cv(\hat{\mu}) = 0{,}05$ (nurodymai: 1) pasinaudokite įvertinio variacijos koeficiento apibrėžimu; 2) pritaikykite faktą, kad $\mathbf{E}\hat{\mu} = \mu$; 3) lygtį $cv(\hat{\mu}) = 0{,}05$ išspręskite n atžvilgiu).

Literatūra

[1] V. Čekanavičius, G. Murauskas. *Statistika ir jos taikymai I*. Vilnius: TEV, 2003.
[2] R. Januškevičius, O. Januškevičiene. *Tikimybės*. Vilnius: VPU leidykla, 2010.
[3] D. Krapavickaitė, A. Plikusas. *Imčių teorijos pagrindai*. Vilnius: Technika, 2005.
[4] D. Pumputis. *Papildomos informacijos taikymai imčiu tyrimuose*. Vilnius: Žara, 2014.
[5] C.E. Särndal, B. Swensson, J. Wretman. *Model Assisted Survey Sampling*. NewYork: Springer- Verlag, 1992.
[6] R.L. Scheaffer et al. *Elementary survey sampling*. Cengage Learning, 2011.

BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

**Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Edmundas Mazėtis, Juozas Šinkūnas (Lietuvos edukologijos universitetas)**

1. Su kuriomis parametro *m* reikšmėmis lygties $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ sprendiniai x_1 ir x_2 tenkina sąlygą $x_1 = 3x_2$?

2. Išspręskite nelygybę

$$\sqrt{x+14} > x + 2.$$

3. Raskite funkciją $f: R \to R,$ kuriai lygybė $2f(x) + 3f(2-x) = x^2$ galioja su bet kokiu realiuoju skaičiumi *x*.

4. Stačiojo trikampio perimetras lygus 24 cm, o įžambinė – 10 cm. Apskaičiuokite į trikampį įbrėžto apskritimo spindulį.

Užduočių sprendimai

STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Reiškinį $x^4+2013x^2+2012x+2013$ pertvarkome taip:

$$x^4+2013x^2+2012x+2013=x^4+x^3+x^2+2012(x^2+x+1)-x^3+1=$$

$$=x^2+(x^2+x+1)+2012(x^2+x+1)-(x-1)(x^2+x+1)=$$

$$=(x^2+x+1)(x^2-x+2013).$$

Ats.: $(x^2+x+1)(x^2-x+2013)$.

2. Tegu buvo pagaminta a vienetų produkcijos. Prieš gamybos patobul?bos patobulinimo iš a vienetų pagamintos produkcijos tik $0{,}01a$ vienetų yra brokuota. Taigi gamybos brokas sumažėjo $\frac{0{,}05a-0{,}01a}{0{,}05a}\cdot 100=80$ procentų.

Ats.: 80 %.

3. Pagal Vijeto teoremą, $x_1+x_2=6$, $x_1\cdot x_2=1$. Todėl:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=34,$$

$$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2\cdot x_2^2=1154.$$

Ats.: 1154.

4. $$\begin{cases} x^2-4y^2=9, \\ xy+2y^2=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-4y^2=9, \\ 2x^2-8y^2=xy+2y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-4y^2=9, \\ 2x^2-xy-10y^2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-4y^2=9, \\ 2\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}-10=0 \end{cases} (y\neq 0!). \qquad (*)$$

Sprendžiame lygtį $2\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}-10=0$:

$$\left(\frac{x}{y}\right)_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{81}}{4}=\frac{1\pm 9}{4};\quad \left(\frac{x}{y}\right)_1=\frac{5}{2},\ \left(\frac{x}{y}\right)_2=-2.$$

Toliau sprendžiame dvi lygčių sistemas:

$$\begin{cases}x^2-4y^2=9,\\ x=\dfrac{5}{2}y\end{cases}\quad \text{ir}\quad \begin{cases}x^2-4y^2=9,\\ x=-2y.\end{cases}$$

Pirmos sistemos sprendiniai yra (5; 2) ir (–5; –2), o antra sistema sprendinių neturi.

Ats.: (5; 2), (–5; –2).

5. $2xy+6x-y-17=0 \Rightarrow (2x-1)y+3(2x-1)-14=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (2x-1)(y+3)=14 \;\Rightarrow \text{arba } \begin{cases}2x-1=1,\\ y+3=14,\end{cases} \text{arba } \begin{cases}2x-1=14,\\ y+3=1,\end{cases}$$

$$\text{arba } \begin{cases}2x-1=-1,\\ y+3=-14,\end{cases} \text{arba } \begin{cases}2x-1=-14,\\ y+3=-1,\end{cases} \text{arba } \begin{cases}2x-1=2,\\ y+3=7,\end{cases}$$

$$\text{arba } \begin{cases}2x-1=7,\\ y+3=2,\end{cases} \text{arba } \begin{cases}2x-1=-2,\\ y+3=-7,\end{cases} \text{arba } \begin{cases}2x-1=-7,\\ y+3=-2.\end{cases}$$

Antra, ketvirta, penkta ir septinta lygčių sistemos sveikųjų sprendinių neturi. Pirmos, trečios, šeštos ir aštuntos lygčių sistemos sprendiniai yra atitinkamai (1; 11), (0; –17), (4; –1) ir (–3; –5).

Ats.: (1; 11), (0; –17), (4; –1) ir (–3; –5).

6. Tegu *a*, *b*, *c* ir *d* yra keturi skaitmenys ir $a>b>c>d$. Jeigu $d\neq 0$, tai

$$10477=\overline{abcd}+\overline{dcba}=1000a+100b+10c+d+1000d+100c+$$
$$+10b+a=11(91a+10c+10b+91d).$$

Tačiau 10477 nesidalija iš 11. Vadinasi, turi būti $d=0$. Toliau:

$$10477=\overline{abc0}+\overline{c0ba}=1000a+10b+10c+1000c+10b+a=$$
$$=1001a+110b+1010c=10\,(100a+11b+101c)+a.$$

Iš čia išplaukia, kad $a=7$ ir $11b+101c=347$. Taigi $c=3$, $b=4$.

Ats.: 7, 4, 3, 0.

7. Tegu m, n ir p yra natūralieji skaičiai ir $m \ge n \ge p$. Tada $(m-n)+(m-p)+(n-p)=2(m-p)$. Kadangi $n \ge 1$, $p \ge 1$ ir $m+n+p=100$, tai $m \le 98$. Vadinasi, $2(m-p) \le 2\,(98-1)=194$. Lygybė galima tik tada, kai $m=98$, $n=1$, $p=1$.

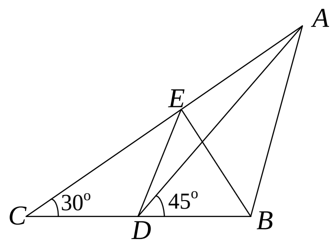
Ats.: 194.

8. Iš viršūnės B nubrėžkime aukštinę BE (1 pav.). Kadangi $\angle C = 30^\circ$, kad $\angle EBD = 60^\circ$ ir $EB = \frac{1}{2}BC = DB$. Taigi trikampis EBD yra lygiakraštis. Tuomet $\angle EBA = \angle EBB - \angle ADB = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$, $\angle CAD = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$.

Vadinasi, ΔDEA – lygiašonis trikampis ir $ED = EA = EB$. Taigi $\Delta\,BEA$ yra statusis lygiašonis trikampis. Todėl

$$\angle EBA = 45^\circ,\ \ \angle A = 45^\circ,$$

$$\angle\, B = \angle EBC + \angle EBA = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ.$$



1 pav.

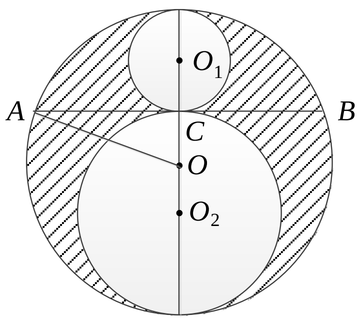
Ats.: 45°, 105°.

9. Tegu didžiojo skritulio spindulys R, o mažesniųjų r_1 ir r_2 $(r_2 \ge r_1)$. Aišku, kad $2r = 2r_1 + 2r_2$. Iš čia $r_1 + r_2 = R$. Ieškomą plotą pažymėkime S ir skaičiuokime taip:

$$S = \pi R^2 - \pi r_1^2 - \pi r_2^2 =$$

$$= \pi(r_1 + r_2)^2 - \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = 2\pi r_1 r_2.$$

Kadangi $OC = R - 2r_1 = r_2 - r_1$, tai iš stačiojo trikampio ACO gausime:



2 pav

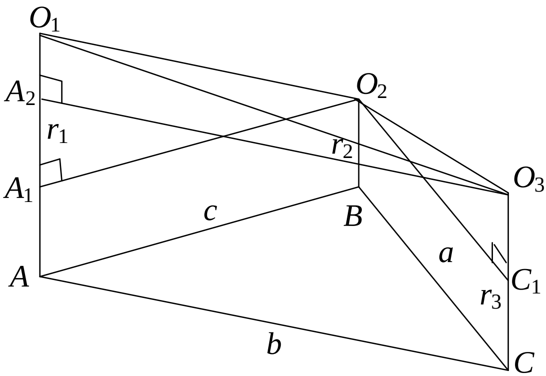
$$(r_1 + r_2)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (r_2 - r_1)^2, \ \Rightarrow\ r_1 r_2 = \frac{a^2}{16}.$$

Taigi

$$S = 2\pi \cdot \frac{a^2}{16} = \frac{\pi a^2}{8}.$$

Ats.: $\frac{\pi a^2}{8}$.

10. Tegu O_1, O_2, O_3 – rutulių centrai, o $O_1A = r_1$, $O_2B = r_2$, $O_3C = r_3$ – jų spinduliai, $r_1 \geq r_3 \geq r_2$. Pagal uždavinio sąlygą $O_1O_2 = r_1 + r_2$, $O_2O_3 = r_2 + r_3$, $O_1O_3 = r_1 + r_3$.



3 pav.

Iš taško O_2 nubrėžkime statmenį į AO_1 ir CO_3: $O_2A_1 \perp AO_1$ ir $O_3C_1 \perp CO_3$, o iš taško O_3 – statmenį O_3A_2 į AO_1. Aišku, kad $O_2A_1 = c$, $O_2C_1 = a$ ir $O_3A_2 = b$; be to, $O_1A_1 = r_1 - r_2$, $O_3C_1 = r_3 - r_2$ ir $O_1A_2 = r_1 - r_3$. Tada (pagal Pitagoro teoremą) iš stačiojo trikampio $O_1A_1O_2$ gauname lygybę $(r_1 + r_2)^2 = (r_1 - r_2)^2 + c^2$, iš stačiojo trikampio $O_3C_1O_2$ – lygybę $(r_2 + r_3)^2 = (r_3 - r_2)^2 + a^2$, o iš stačiojo trikampio $O_3A_2O_1$ – lygybę $(r_1 + r_3)^2 = (r_1 - r_3)^2 + b^2$.

Atlikę veiksmus, iš jų gauname trijų lygčių sistemą

$$4r_1r_2 = c^2, \ 4r_2r_3 = a^2, \ 4r_1r_3 = b^2.$$

Sprendžiant ją tikslinga visas lygtis sudauginti ir apskaičiuoti sandaugą $r_1r_2r_3$. Gautume, kad $r_1r_2r_3 = \frac{abc}{8}$. Tada lengva rasti visų trijų rutulių spindulius:

$$r_1 = \frac{bc}{2a}, \; r_2 = \frac{ac}{2b}, \; r_3 = \frac{ab}{2c}.$$

Ats.: $r_1 = \frac{bc}{2a}, \; r_2 = \frac{ac}{2b}, \; r_3 = \frac{ab}{2c}.$

Pastaba. Kai trikampis ABC yra lygiakraštis, t. y. $a = b = c$, rutulių spindulių ilgiai yra lygūs pusei trikampio kraštinės ilgio.

PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Kadangi $D = p^2 + 4 \cdot 2013 > 0$, tai visų kvadratinių trinarių šaknys yra realios. Tegul trinario $y = x^2 + px - 2013$ šaknys yra x_1 ir x_2. Pagal Vijeto teoremą, $x_1 + x_2 = -p$. Taigi visų trinarių šaknų suma lygi

$$50 + 49 + ... + 2 + 1 + 0 + (-1) + (-2) + ... + (-50) + (-51) + ... + (-100) =$$

$$= -(51 + 52 + ... + 100) = -\frac{51 + 100}{2} \cdot 50 = -3775.$$

Ats.: –3775.

2. Tegu kvadratinės lygties $2x^2 - 3ax - 2 = 0$ sprendiniai yra x_1 ir x_2 (jie realieji, nes $D = 9a^2 + 16 > 0$). Pagal Vijeto teoremą, $x_1 + x_2 = \frac{3a}{2}$, $x_1 \cdot x_2 = -1.$ Kadangi

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1 \cdot x_2)^2} = \frac{\frac{9a^2}{4} - 2 \cdot (-1)}{(-1)^2} = \frac{9a^2 + 8}{4},$$

tai (pagal sąlygą) $\frac{9a^2 + 8}{4} = 11.$ Iš čia randame a: $a = -2$ arba $a = 2.$

Ats.: –2; 2.

3. Kvadratinės lygties $px^2 + pqx - +q = 0$ sprendiniai yra realieji skaičiai, kai $p^2q^2 - 4pq \geq 0,$ t. y. kai $pq \geq 4.$ Tegu sveikieji skaičiai x_1 ir x_2 yra šios lygties sprendiniai. Pagal Vijeto teoremą, $x_1 + x_2 = -q,\ \ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{q}{p}.$ Kadangi skaičiai p ir q yra pirminiai, o $x_1 \cdot x_2$ – sveikasis skaičius, tai $p = q.$ Taigi $x_1 \cdot x_2 = 1.$ Iš čia išplaukia, kad $x_1 = x_2 = -1,$ nes $x_1 + x_2 = -q < 0.$ Taigi $q = -(x_1 + x_2) = 2$ ir $p = 2.$

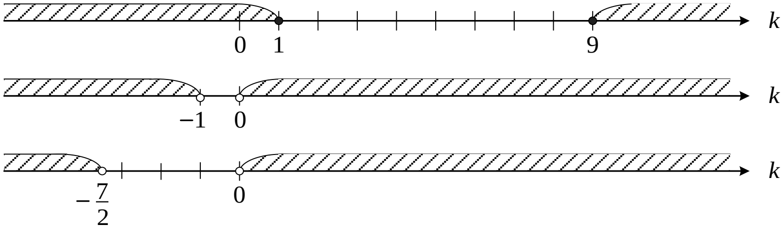
Ats.: $p = 2,\ \ q = 2.$

4. Kvadratinės lygties $kx^2 - 3(k+1)x + 2k + 7 = 0,\ k \neq 0,$ sprendiniai yra teigiami, kai:

$$\begin{cases} D = 9(k+1)^2 - 4 \cdot k(2k+7) \geq 0, \\ x_1 + x_2 = \dfrac{3(k+1)}{k} > 0, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{2k+7}{k} > 0 \end{cases} \sim \begin{cases} k^2 - 10k + 9 \geq 0, \\ \dfrac{3(k+1)}{k} > 0, \\ \dfrac{2k+7}{k} > 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} (k-1)(k-9) \geq 0, \\ \dfrac{k+1}{k} > 0, \\ \dfrac{2k+7}{k} > 0 \end{cases} \sim \begin{cases} k \leq 1 \text{ arba } k \geq 9, \\ k < -1 \text{ arba } k > 0, \\ k < -\dfrac{7}{2} \text{ arba } k > 0. \end{cases}$$

Kiekvienos nelygybės sprendinius pavaizduojame grafiškai:



Remdamiesi grafikais, nustatome, kad

$$k \in \left(-\infty; -\frac{7}{2}\right) \cup [0;1] \cup [9;+\infty).$$

Kai $k = 0$, turime lygtį $-3x + 7 = 0$, kurios sprendinys yra teigiamas.

Ats.: $k \in \left(-\infty; -\frac{7}{2}\right) \cup [0;1] \cup [9;+\infty).$

5. Tegu $x_1 = 2 + \sqrt{3}$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}$. Kadangi

$$x_1 + x_2 = 4, \quad x_1 \cdot x_2 = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1,$$

tai (pagal atvirkštinę Vijeto teoremą) x_1 ir x_2 yra kvadratinės lygties $x^2 - 4x + 1 = 0$ sprendiniai. Reikia apskaičiuoti $S_7 = x_1^7 + x_2^7$ reikšmę. Remsimės (3) formule. Šiuo atveju turime: $a = 1$, $b = -4$, $c = 1$, $S_0 = 2$, $S_1 = 4$. Todėl

$$S_2 = -(-4 \cdot S_1 + 1 \cdot S_0) = -(-4 \cdot 4 + 2) = 14,$$
$$S_3 = -(-4 \cdot S_2 + 1 \cdot S_1) = -(-4 \cdot 14 + 1 \cdot 4) = 52,$$
$$S_4 = -(-4 \cdot S_3 + 1 \cdot S_2) = -(-4 \cdot 52 + 1 \cdot 14) = 194,$$
$$S_5 = -(-4 \cdot 194 + 1 \cdot 52) = 724,$$
$$S_6 = -(-4 \cdot 724 + 1 \cdot 194) = 2702,$$
$$S_7 = -(-4 \cdot 2702 + 1 \cdot 724) = 10084.$$

Ats.: 10084.

6. Pagal Vijeto teoremą, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = 0$, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1$. Kadangi $y_1 = 1 - x_1$, $y_2 = 1 - x_2$, $y_3 = 1 - x_3$, tai

$$y_1 + y_2 + y_3 = 3 - (x_1 + x_2 + x_3) = 3 - 1 = 2,$$

$$y_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot y_3 + y_2 \cdot y_3 = (1 - x_1)(1 - x_2) + (1 - x_1)(1 - x_3) +$$
$$+ (1 - x_2)(1 - x_3) = 3 - 2(x_1 + x_2 + x_3) + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 =$$
$$= 3 - 2 \cdot 1 + 0 = 1,$$

$$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 = (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) =$$
$$= 1 - \left(x_1 + x_2 + x_3\right) + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - x_1x_2x_3 = 1 - 1 + 0 - 1 = -1.$$

Pagal atvirkštinę Vijeto teoremą, y_1, y_2 ir y_3 yra lygties $y^3-2y^2+y+1=0$ sprendiniai.

Ats.: $y^3-2y^2+y+1=0.$

7. Tegu x_1, x_2, x_3 – lygties sprendiniai. Pagal sąlygą, $x_2=qx_1$, $x_3=q^2x_1$ (q – geometrinės progresijos vardiklis).

Pagal Vijeto teoremą, gauname:

$$\begin{cases} x_1+x_1q+x_1q^2=\dfrac{3}{2}, \\ x_1\cdot x_1q+x_1\cdot x_1q^2+x_1^2q^3=\dfrac{k}{2}, \\ x_1\cdot x_1q\cdot x_1q^2=-1 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1(1+q+q^2)=\dfrac{3}{2}, \\ x_1^2q\,(1+q+q^2)=\dfrac{k}{2}, \\ (x_1q)^3=-1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x_1(1+q+q^2)=\dfrac{3}{2}, \\ -x_1(1+q+q^2)=\dfrac{k}{2}, \\ x_1q=-1. \end{cases}$$

Iš pirmos ir antros lygčių randame $k=-3$.

Sprendžiame lygtį $2x^3-3x^2-3x+2=0.$ Nesunku pastebėti, kad $x=-1$ yra šios lygties sprendinys. Daugianarį $2x^3-3x^2-3x+2$ dalijame iš $x+1$:

$$\begin{array}{r|l}
2x^3-3x^2-3x+2 & x+1 \\ \cline{2-2}
-\;\underline{2x^3+2x^2} & 2x^2-5x+2 \\
-5x^2-3x & \\
-\;\underline{-5x^2-5x} & \\
2x+2 & \\
-\;\underline{2x+2} & \\
0 &
\end{array}$$

Taigi lygtį $2x^3-3x^2-3x+2=0$ galima užrašyti taip:

$$(x+1)(2x^2-5x+2)=0.$$

Lygties $2x^2-5x+2=0$ sprendiniai yra $x=\frac{1}{2}$ ir $x=2.$

Vadinasi, lygties $2x^3-3x^2-3x+2=0$ sprendiniai yra: –1; $\frac{1}{2}$; 2.

Ats.: $k=-3$; sprendiniai: –1; $\frac{1}{2}$; 2.

8. Tegu $x+y+z=p_1$, $xy+xz+yz=p_2$, $xyz=p_3$. Pagal atvirkštinę Vijeto teoremą, skaičiai x, y, z yra kubinės lygties $t^3-p_1t^2+p_2t-p_3=0$ sprendiniai. Spręsdami lygčių sistemą gauname: $p_1=p_3$, $p_1=11$. Tuomet

$$S_2=p_1^2-2p_2=p_1^2-22\Rightarrow p_1^2-22=14.$$
$$(p_1)_1=6;\ (p_1)_2=-6\Rightarrow (p_3)_1=6; (p_3)_2=-6.$$

Taigi $p_3=6$ arba $p_3=-6.$

Spręsime dvi kubines lygtis:

a) $t^3-6t^2+11t-6=0\Rightarrow t_1=1; t_2=2; t_3=3.$

b) $t^3+6t^2+11t+6=0\Rightarrow t_1=-1; t_2=-2; t_3=-3.$

Taigi lygčių sistemos sprendinių (x; y; z) aibę sudaro visi šeši galimi trejeto (1; 2; 3) perstatiniai ir šeši trejeto (–1; –2; –3) perstatiniai.

Ats.: (1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1), (–1; –2; –3), (–1; –3; –2), (–2; –1; –3), (–2; –3; –1), (–3; –1; –2), (–3; –2; –1).

9. Tegu $x+y+z=p_1$, $xy+xz+yz=p_2$, $xyz=p_3$. Apskaičiuosime p_1, p_2 ir p_3 reikšmes.

Kadangi $p_1=1$, $p_2=-4$, tai taikydami sąryšį $S_3=p_1^3-3p_1p_2+3p_3$ gauname, kad

$$p_3=\frac{S_3-p_1^3+3p_1p_2}{3}=\frac{1-1+3(-4)}{3}=-4.$$

Vadinasi, x, y, z yra lygties $t^3 - t^2 - 4t + 4 = 0$ sprendiniai.

Pastebėję, kad $t = 1$ yra šios lygties sprendinys, panašiai kaip 8 uždavinyje randame ir kitus du jos sprendinius: $t = -2$ ir $t = 2$. Taigi lygčių sistemos sprendiniai yra: (1; –2; 2), (1; 2; –2), (–2; 1; 2), (–2; 2; 1), (2; –2; 1), (2; 1; –2).

10. Tegu lygties sprendiniai yra $x_1 = x_2$ ir $x_3 = x_4$. Pagal Vijeto teoremą, (žr. (3) formules) gauname:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = 10, \\ x_1^2 + 4x_1x_3 + x_3^2 = 37, \\ 2x_1^2x_3 + 2x_1x_3^2 = -p, \\ x_1^2x_3^2 = q. \end{cases}$$

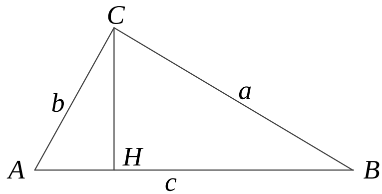
Iš pirmųjų dviejų sistemos lygčių randame: $x_1 = 2$, $x_3 = 3$ arba $x_1 = 3$, $x_3 = 2$. Įrašę šias reikšmes į paskutiniąsias dvi sistemos lygtis gauname, kad $p = -60$; $q = 36$.

Ats.: $p = -60$; $q = 36$.

ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Stačiojo trikampio ABC plotui S turime lygybes (1 pav.)

$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}c \cdot CH$, t. y. $ab = 12c$.



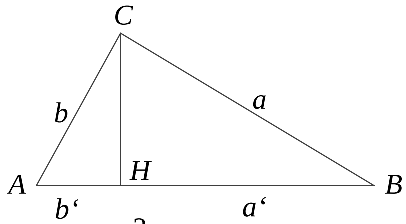
1 pav.

Kadangi $a^2 + b^2 = c^2$, o $a + b + c = 60$, tai turime lygčių sistemą $ab = 12c$, $a^2 + b^2 = c^2$, $a + b + c = 60$.

Lygybės $a + b = 60 - c$ abi puses pakeliame kvadratu. Gauname $a^2 + b^2 + 2ab = 3600 - 120c + c^2$, t. y. $c^2 + 24c = 3600 - 120c + c^2$. Iš čia $c = 25$. Tuomet $a + b = 35$ ir $ab = 300$. Iš šių lygčių randame $a = 20$, $b = 15$ arba $a = 15$, $b = 20$.

Ats.: 15, 20, 25.

2. Tarkime, kad stačiojo trikampio *ABC* aukštinė *CH* dalija įžambinę į dalis $AH = b'$, $HB = a'$ ir $a' > b'$ (2 pav.). Kaip seka iš uždavinio sąlygos $\frac{b'}{a'} = \frac{a'}{c}$, t. y. $(a')^2 = b' \cdot c$.



2 pav.

Bet kaip žinome $b' \cdot c = b^2$. Iš čia seka $(a')^2 = b^2$**,** t. y. $a' = b$. Kadangi $b^2 = b' \cdot c = (c - a')c = (c - b)c$, tai $b^2 + bc - c^2 = 0$.

Šios lygties teigiamoji šaknis $b = \frac{c}{2}(-1 + \sqrt{5})$. Kadangi

$$a^2 = a'c = bc = \; = \frac{c^2}{2}\left(-1 + \sqrt{5}\right), \text{ tai } a = \frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{5} - 1} \text{ ir}$$

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\frac{c^2}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{5} - 1\right)\sqrt{\sqrt{5} - 1} = \frac{c^2}{4\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^3} = \frac{c^2}{4\sqrt{2}}\sqrt{8\sqrt{5} - 16} =$$

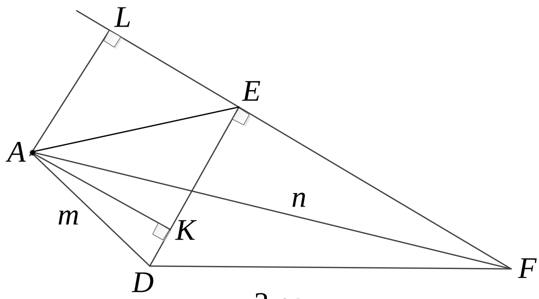
$$= \frac{c^2}{2}\sqrt{\sqrt{5} - 2}.$$

Ats.: $S = \frac{c^2}{2}\sqrt{\sqrt{5} - 2}.$

3. Tarkime, kad stačiojo trikampio perimetras $a + b + c = 60x$, o apibrėžtojo apskritimo spindulys $R = 13x$. Tuomet $c = 2R = 26x$ ir $a + b = 60x - c = 34x$. Keldami šią lygybę kvadratu turime $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab = 34^2 x^2$. Iš čia $2ab = 34^2 x^2 - 26^2 x^2$ ir $ab = 360x^2$. Spręsdami lygčių sistemą $a + b = 34x$, $ab = 360x^2$, turime $a = 10x$, $b = 24x$, arba $a = 24x$, $b = 10x$. Tuomet $c = 26x$ ir smailiųjų kampų sinusai lygūs $\frac{5}{13}$ bei $\frac{12}{13}$.

Ats.: $\arcsin\frac{5}{13}$, $\arcsin\frac{12}{13}$.

4. Sakykime, kad atkarpos AL ir AK yra trikampių AEF ir AED aukštines, nubrežtos į kraštines EF ir ED (3 pav.). Kadangi trikampio AEF plotas lygus ketvirtadaliui trikampio DEF ploto, o jų kraštinės EF sutampa, tai aukštinė AL lygi ketvirtadaliui trikampio DEF aukštines, t. y. $AL = \frac{1}{4}DE = \frac{1}{4}f$.



3 pav.

Analogiškai $AK = \frac{1}{4}EF = \frac{1}{4}d$. Tuomet

$DE - KE = DE - AL = DK$, t. y.

$DK = \frac{3}{4}f$, $FL = EF + EL = EF + AK = \frac{5}{4}d$.

Iš stačiųjų trikampių KAD ir AFL turime $\frac{1}{16}d^2 + \frac{9}{16}f^2 = m^2$, $\frac{25}{16}d^2 + \frac{1}{16}f^2 = n^2$. Iš čia randame

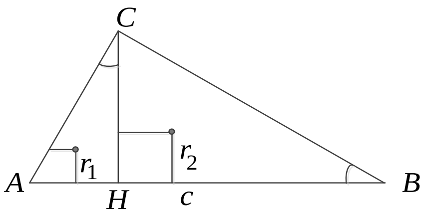
$$d^2 = \frac{9n^2 - m^2}{14}, \quad f^2 = \frac{25m^2 - n^2}{14}.$$

Iš stačiojo trikampio ALE gauname:

$$AE^2 = AL^2 + LE^2 = \frac{1}{16}(d^2 + f^2), \quad AE = \sqrt{\frac{n^2 + 3m^2}{28}}.$$

Ats.: $\sqrt{\frac{n^2 + 3m^2}{28}}$.

5. Iš trikampių *ACH* ir *ABC* panašumo (4 pav.) išplaukia, kad į juos įbrėžtų apskritimų spindulių santykis lygus jų kraštinių santykiui, t. y. $\frac{r_1}{r}=\frac{b}{c}=\cos\angle A.$



4 pav.

Analogiškai iš trikampių *BCH* ir *ABC* panašumo gauname

$$\frac{r_2}{r}=\frac{a}{c}=\sin\angle A.$$

Kadangi

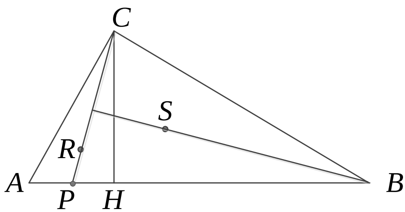
$$\sin^2\angle A+\cos^2\angle A=1,$$

tai $\frac{r_1^2}{r^2}=\frac{r_2^2}{r^2}=1,$ t. y. $r=\sqrt{r_1^2+r_2^2}.$

Ats.: $\sqrt{r_1^2+r_2^2}.$

6. Sakykime, kad tiesė *CR* kerta kraštinę *AB* taške *P* (5 pav.). Kaip įrodyta atkarpos *BC* ir *BP* yra lygios, t. y. trikampis *PBC* lygiašonis. Tiesė *BS* yra jo kampo *B* pusiaukampinė, taigi ji yra jo aukštinė, t. y. tiesės *BS* ir *CR* yra statmenos.

Ats.: 90°.

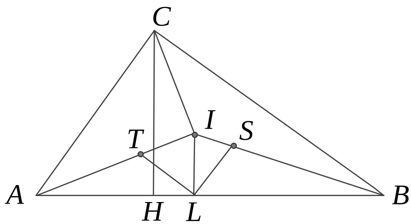


5 pav

7. Kaip įrodyta 4 pavyzdyje tiesės *LT* ir *BC* lygiagrečios, tiesės *LS* ir *AC* lygiagrečios. Iš čia (6 pav.)

$$\angle SLB=\angle A,\quad \angle ALT=\angle B,$$

o

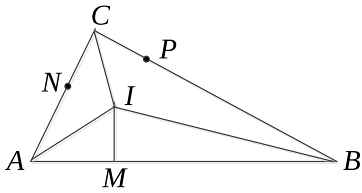


6 pav

$$\angle TLS=180^\circ-\angle ALT-\angle BLS=$$
$$180^\circ-(\angle A+\angle B)=90^\circ.$$

Ats.: 90°.

8. Jei $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, kai trikampio ABC plotui S yra teisinga lygybe $S = rp$, čia $r = IM$ – įbrežto į trikampį ABC apskritimo spindulys. Jei taškuose N ir P įbrežtas į trikampį apskritimas liečia statinius AC ir BC (7 pav.), tai $CN = CP = r$, $AM = AN = b - r$, $MB = BP = a - r$, ir iš lygybės $S = rp$ turime



7 pav.

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c) = \frac{1}{2}r(BM + r + AM + r + AM + BM) = r(BM + AM + r).$$

Kita vertus iš Pitagoro teoremos $AB^2 = AC^2 + BC^2$ seka $(AM + MB)^2 = (AM + r)^2 + (BM + r)^2$. Pertvarkome ir gauname:

$$2AM \cdot BM = 2r^2 + 2r(AM + BM),$$

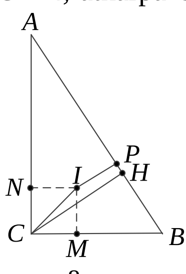
t. y.

$$AM \cdot BM = r(r + AM + BM) = S.$$

Todėl $S = AM \cdot BM = 65$.

Ats.: 65.

9. Sakykime, kad stačiojo trikampio ABC statinis $AC = 4$, atkarpa CH – aukštine, statinio CB projekcija įžambinėje $BH = 1{,}8$ (8 pav.) taškas I – įbrėžto į trikampį apskritimo centras, taškuose M, N ir P šis apskritimas liečia kraštines BC, AC ir AB. Pažymėję $AH = x$, iš trikampių ABC ir ACH panašumo turime



8 pav.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AH}, \text{ t. y. } AC^2 = AB \cdot AH,$$

arba $16 = (x + 1{,}8) \cdot x$. Kvadratinės lygties $x^2 + 1{,}8x + 16 = 0$ teigiamoji šaknis yra $x = 3{,}2$. Tuomet

$$AB = x + 1{,}8 = 4, \quad BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 3,$$

ir įbrėžto į trikampį ABC apskritimo spindulys

$$r = IM = \frac{AC + BC - AB}{2} = 1.$$

Kadangi keturkampis *CMIN* – kvadratas, tai ieškomasis atstumas *CI* yra jo įstrižainės ilgis, t. y. $\sqrt{2}$.

Ats.: $\sqrt{2}$.

10. Kaip irodyta teorinėje medžiagoje, jei taškai *T* ir *S* yra į trikampius *ACH* ir *BCH* įbrėžtų apskritimą centrai, tai tieses *CT* ir *CS* įžambinę *AB* kerta taškuose *P* ir *Q*, be to *AQ* = *AC*, o *BP* = *BC*. Tuomet (9 pav.)

$$PQ = AQ - AP = AC - (AB - BP) = AC - (AB - CB) =$$

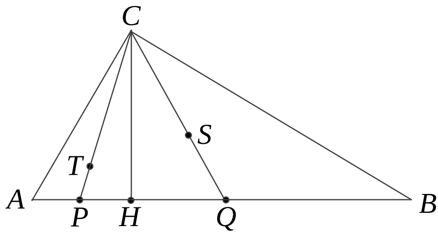
$$= AC + CB - AB = b + a - \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Kadangi trikampio *SPQ* aukštinė $CH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, tai trikampio *SPQ* plotas lygus

$$\frac{ab\left(a + b - \sqrt{a^2 + b^2}\right)}{2\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ats.:

$$\frac{ab\left(a + b - \sqrt{a^2 + b^2}\right)}{2\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



9 pav.

TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Lygtį $\sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{x^2 - 7} = 2$ pertvarkykime taip:

$$\sqrt{x^2 + 9} = \sqrt{x^2 - 7} + 2.$$

Abi gautos lygties puses pakelkime kvadratu. Gausime:

$$x^2 + 9 + x^2 - 7 - 2\sqrt{(x^2+9)(x^2-7)} = 4,$$

$$2x^2 - 2 = 2\sqrt{x^4 + 2x^2 - 63}\,,$$

$$(x^2-1)^2 = x^4 + 2x^2 - 63,$$

$$4x^2 - 64 = 0,$$

$$x^2 = 16,$$

$$x = \pm 4.$$

Abu šie sprendiniai priklauso lygties apibrėžimo sričiai.

Ats.: –4; 4.

2. Lygtį $\sqrt{\dfrac{3x+4}{x}} + \sqrt{\dfrac{2x-4}{x}} = 3$ pertvarkome taip:

$$\sqrt{3+\frac{4}{x}} + \sqrt{2-\frac{4}{x}} = 3.$$

Pažymėkime: $y = \dfrac{1}{x}$. Gauname lygtį $\sqrt{3+4y} + \sqrt{2-4y} = 3.$ Pertvarkome taip: $\sqrt{2-4y} = 3 - \sqrt{3+4y}$. Abi šios lygties puses keliame kvadratu ir gauname: $(\sqrt{2-4y}\,)^2 = (3-\sqrt{3+4y}\,)^2$,

$$2-4y = 9 + 3 + 4y - 6\sqrt{3+4y}\,,$$

$$6\sqrt{3+4y} = 10 + 8y \quad \Big|:2$$

$$3\sqrt{3+4y} = 5 + 4y,$$

$$9\sqrt{3+4y} = 25 + 40y + 16y^2,$$

$$16y^2 + 4y - 2 = 0,$$

$$8y^2 + 2y - 1 = 0,$$

$$y_1 = -\frac{1}{2},\ y_2 = \frac{1}{4}.$$

Grįžtame prie pažymėjimo $y = \dfrac{1}{x}$ ir gauname, kad $x_1 = -2$, $x_2 = 4$. Abu šie sprendiniai tenkina nelygybę

$$\frac{3x+4}{x} \ge 0 \quad \text{ir} \quad \frac{2x-4}{x} \ge 0.$$

Ats.: –2; 4.

3. Lygties $\sqrt{\dfrac{x^2+8x-20}{x^2+x-6}} + \sqrt{\dfrac{x^2+x-6}{x^2+8x-20}} = \dfrac{25}{12}$ kvadratinius trinarius išskaidykime dauginamaisiais. Gausime lygtį

$$\sqrt{\frac{(x-2)(x+10)}{(x-2)(x+3)}} + \sqrt{\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+10)}} = \frac{25}{12},$$

o iš jos (turėdami mintyje, kad $x \ne 2$) – lygtį

$$\sqrt{\frac{x+10}{x+3}} + \sqrt{\frac{x+3}{x+10}} = \frac{25}{12}.$$

Pažymėję $\sqrt{\dfrac{x+10}{x+3}} = t$, gauname:

$$t + \frac{1}{t} = \frac{25}{12} \Rightarrow 12t^2 - 25t + 12 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{4} \text{ arba } t = \frac{4}{3}.$$

Grįžtame prie pažymėjimo $t = \sqrt{\dfrac{x+10}{x+3}}$ ir gauname, kad $x = 6$ arba $x = -19$. Abu sprendiniai tenkina pradinę lygtį.

Ats.: –19; 6.

4. Lygtį $\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{3x+2} = 0$ užrašykime pavidalu $\sqrt{x+2} = \sqrt[3]{3x+2}$, tada abi jos puses pakelkime šeštuoju laipsniu. Gausime:

$$(\sqrt{x+2})^6 = (\sqrt[3]{3x+2})^6,$$

$$(x+2)^3 = (3x+2)^2,$$

$$x^3 + x^2 + 12x + 8 = 9x^2 + 12x + 4,$$

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0,$$

$$x^3 + x^2 - 4x^2 + 4 = 0,$$

$$x^2(x + 1) - (4x^2 - 4) = 0,$$

$$x^2(x + 1) - 4(x - 1)(x + 1) = 0,$$

$$(x + 1)(x^2 - 4x + 4) = 0,$$
$$(x + 1)(x - 2)^2 = 0.$$

Matome, kad $x_1 = -1$ arba $x_2 = 2$. Šiuos sprendinius įrašę į pradinę lygtį, gauname teisingas lygybes.

Ats.: -1; 5.

5. Abi lygties $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1$ puses keliame kvadratu ir gauname:

$$x+2\sqrt{x-1}+x-2\sqrt{x-1}+2\sqrt{x^2-4(x-1)} = x^2 - 2x + 1,$$
$$2x+2\sqrt{x^2-4x+4} = x^2 - 2x + 1,$$
$$2\sqrt{x^2-4x+4} = x^2 - 4x + 1,$$
$$2\sqrt{(x-2)^2} = x^2 - 4x + 1,$$
$$x-2 \geq 0,\ \ x \geq 2,$$
$$2(x - 2) = x^2 - 4x + 1,$$
$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Šios lygties sprendiniai yra 1 ir 5, bet pradinę lygtį tenkina tik 5.

Ats.: 5.

6. Abi lygties $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$ puses keliame kvadratu ir gauname:

$$(\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13})^2=(\sqrt{3x+12})^2,$$
$$x + 1 + 4x + 13 + 2\sqrt{(x+1)(4x+13)} = 3x + 12,$$
$$2\sqrt{4x^2+17x+13} = -2x - 2,$$
$$\sqrt{4x^2+17x+13} = -x - 1.$$

Abi pastarosios lygties puses taip pat keliame kvadratu ir gauname:

$$\left(\sqrt{4x^2+17x+13}\right)^2=(-x-1)^2,$$
$$4x^2+17x+13=x^2+2x+1,$$

$$x^2+5x+4=0.$$

Gautos kvadratinės lygties sprendiniai yra –1 ir –4, bet tik –1 yra pradinės lygties sprendinys.

Ats.: –1.

7. Pažymėję $t=\sqrt[4]{x^2+32}$, gauname kvadratinę lygtį $t^2-2t-3=0$, kurios sprendiniai yra –1 ir 3. Kai $t=-1$, tai lygtis $\sqrt[4]{x^2+32}=-1$ sprendinių neturi. Kai $t=3$, tai

$$\sqrt[4]{x^2+32}=3 \Rightarrow x^2+32=81 \Rightarrow x^2=49 \Rightarrow x=-7 \text{ arba } x=7.$$

Abu sprendiniai tenkina pradinę lygtį.

Ats.: –7; 7.

8. *Pirmas atvejis.* Jei $3-2x<0$, tai pradinė nelygybė ekvivalenti nelygybių sistemai

$$\begin{cases} 3-2x<0, \\ \sqrt{2-x}>0, \end{cases}$$

kurios sprendiniai sudaro intervalą (1,5; 2].

Antras atvejis. Jei $3-2x\ge 0$, tai pradinė nelygybė ekvivalenti nelygybių sistemai

$$\begin{cases} 3-2x\ge 0, \\ \sqrt{2-x}\ge 3-2x. \end{cases}$$

Ją sprendžiame taip:

$$\begin{cases} 3\ge 2x, \\ (\sqrt{2-x})^2\ge(3-2x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 1{,}5, \\ 2-x\ge 9-12x+4x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\le 1{,}5, \\ 4x^2-11x+7\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 1{,}5, \\ (x-1)(x-1{,}75)\le 0. \end{cases} \Rightarrow x\in[1;1{,}5].$$

Taigi pradinės nelygybės sprendinių aibė yra

$$(1{,}5;\,2]\cup[1;\,1{,}5]=[1;\,2].$$

Ats.: [1; 2].

9. Kai $x \neq 15$, nelygybė $\dfrac{3-x}{\sqrt{15-x}} \leq 1$ ekvivalenti nelygybei

$$3-x \leq \sqrt{15-x}\,.$$

Jei $3 - x < 0$, tai ši nelygybė ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} 3-x<0, \\ 3-x \leq \sqrt{15-x}, \end{cases}$$

o jei $3-x \geq 0$, tai ji ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} 3-x \geq 0, \\ 15-x>0, \\ 3-x \leq \sqrt{15-x}, \end{cases}$$

Jas sprendžiame taip:

1) $\begin{cases} 3-x<0, \\ 3-x \leq \sqrt{15-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3-x>0, \\ 3-x \leq \sqrt{15-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>3, \\ 15-x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>3, \\ x<15 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (3; 15)$;

2) $\begin{cases} 3-x \geq 0, \\ 15-x>0, \\ 3-x \leq \sqrt{15-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ x<15, \\ (3-x)^2 \leq (\sqrt{15-x})^2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ x<15, \\ 9-6x-x^2 \leq 15-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ x<15, \\ x^2-5x-6 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ x<15, \\ (x+1)(x-6) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-1; 3].$

Taigi pradinės nelygybės sprendinių aibė yra

$$[-1; 3] \cup (3; 15) = [-1; 15).$$

Ats.: $[-1; 15)$.

10. Pažymėję $t=\sqrt{2-x}$, gauname nelygybę $\frac{4}{t}-t<2$. Tada sprendžiame sistemą

$$\begin{cases}\frac{4}{t}-t<2,\\ t>0\end{cases}$$

ir gauname:

$$\begin{cases}t^2+2t-4>0,\\ t>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t<-1-\sqrt{5},\\ t>0\end{cases} \text{ arba } t>-1+\sqrt{5} \Rightarrow t>\sqrt{5}-1.$$

Toliau sprendžiame nelygybę $\sqrt{2-x}>\sqrt{5}-1$, pakeisdami ją ekvivalenčia nelygybių sistema:

$$\begin{cases}2-x>0,\\ (\sqrt{2-x})^2>(\sqrt{5}-1)^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x<2,\\ 2-x>6-2\sqrt{5}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x<2,\\ x<2\sqrt{5}-4\end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x\in(-\infty;\, 2\sqrt{5}-4)$.

Ats.: $(-\infty;\, 2\sqrt{5}-4)$.

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. *Ats.* Tai padaryti galima, pavyzdžiui, tokiu būdu: imame 1 ir padauginę jį iš 5 gauname 5, toliau 5 dar kartą padauginę iš 5 gauname jau 25, o tada, kadangi skirtumas tarp tikslo skaičiaus 100 ir turimo skaičius 25 yra 75 ir jis dalijasi iš 3, nuosekliai pridėdami po 3 anksčiau ar vėliau gausime skaičių 100.

2. Nuosekliai pildome lentelę „brisdami atgal“. Pirmiausiai į lentelę įrašome galutinio pasiektojo „idealios lygiavos būsenos“ duomenis:

Aloyzas	Edmundas	Kasparas	Leonas
16	16	16	16

Paskutiniuoju geradariu buvo Leonas: jis ką tik padvigubino kiekvienam jo prieš tai turėtų kriaušių skaičių, vadinasi, Leonas iš savų išteklių davė Aloyzui, Edmundui ir Kasparui po 8 kriaušes.

Todėl jis išdalijo 8 + 8 + 8 = 24 kriaušes iš savo prieš tai turėtų 16 + 8 + 8 + 8 = 40 vaisių. Todėl prieš paskutinį kriaušių padauginimą, kurio vardas „aš tave padvigubinsiu“ padėtis buvo buvusi tokia:

Aloyzas	Edmundas	Kasparas	Leonas
16: 2 = 8	16: 2 = 8	16: 2 = 8	16 + 8 + 8 + 8 = 40

Toliau lygiai taip pat tęsiame lentelės retrospektyvą: priešpaskutinis geradarys buvo Kasparas – jis davė kiekvienam po tiek pat, kiek pas jį matė, arba Leonui 20, o Aloyzui su Edmundu – po 4 kriaušės. Todėl jis išdalijo 20 + 4 + 4 = 28 kriaušes, prieš tai turėdamas jų 8 + 28 = 36. Todėl prieš priešpaskutinį veiksmų „kriaušių būsena“ buvo tokia:

Aloyzas	Edmundas	Kasparas	Leonas
8: 2 = 4	8 : 2 = 4	8 + 28 = 36	40 : 2 = 20

Belieka baigti pildyti lentelę iš karto surašant abiejų pirmųjų veiksmų rezultatus, suprantama, atvirkščia eile:

Aloyzas	Edmundas	Kasparas	Leonas
4: 2 = 2	4 + 4 : 2 + 36 : 2 + + 20:2 = 34	36: 2 = 18	20 : 2 = 10
2+34:2+18:2+ +10:2=33	34 : 2 = 17	18: 2 = 9	10 : 2 = 5

Ats. Pačioje pradžioje Aloyzas turėjo 33, Edmundas – 17, Kasparas – 9, o Leonas – tik 5 kriaušes.

3. Kadangi buvo išdalytos 418 kriaušių kiekvienam duodant po 2, tai tris kartus ilgėjusioje eilėje galiausiai buvo 418 : 2 = 209 vaikai. Todėl prieš paskutinį: „visų tarpų užpildymą žmonėmis“ vaikų turėjo būti 105, prieš priešpaskutinį tarpų užpildymą – 53, o iš pat pradžių – 27 vaikai.

Ats. Eilėje iš pradžių stovėjo 27 vaikai.

Formulė ta pati – jei iš pradžių eilėje stovi $n + 1$ vaikas, tai po pirmojo visų tarpų užpildymo vaikų bus $2n + 1$, po antrojo – $4n + 1$, o po trečiojo – jau $8n + 1$. Kadangi kiekvienam davė po 2, o išdalijo 418, tai $2(8n + 1) = 418$, $16n + 2 = 418$, $16n = 416$, $n = 26$ ir $n + 1 = 27$.

4. Pirmasis pirmojo žaidėjo ėjimas, laikantis žaidimo taisyklių, yra vienintelis – jis privalo pridėti 1 palikdamas lentoje 3. Tada, kad ir ką bedarytų antrasis žaidėjas, pirmasis žaidėjas savo antruoju ėjimus jam visada galės palikti lentoje 7, vėliau 15, dar toliau 31, 62, 125, 250 ir 500. Radęs 500 antrasis žaidėjas gali daryti, ką tinkamas, bet po jo ėjimo pirmasis žaidėjas tikrai galės lentoje parašyti išsvajotąjį 1000.

Uždavinio esmė, kaip regime, glūdi paprastame pastebėjime: jei žaidėjas vienu savo ėjimu palieka kitam skaičių N, tai sekančiu savo ėjimu jis savo varžovui gali palikti arba skaičių $2N$, arba skaičių $2N + 1$ – žiūrint kaip parankiau.

5. Laimi pirmasis žaidėjas, o jo strategija gali būti tokia: iš lentoje esančio skaičiaus jis turi atimti tokį 2 laipsnį, kad sumažėjęs skaičius būtų skaičiaus 3 kartotinis. Taip pirmuoju žingsniu jis gali atimti 1, 4, 16 arba 64. Kadangi joks skaičiaus 3 kartotinis nėra dvejeto laipsnis, tai antrasis žaidėjas savo pirmuoju ėjimu atimdamas dvejeto laipsnį tą paliekamo skaičiaus dalumą iš 3 vėl „pažeis“ tada pirmais vėl jį atstatys ir taip elgdamasis jis visada laimės, kad ir ką bedarytų antrasis žaidėjas.

Ats. Pirmasis žaidėjas laimi laikydamasis strategijos po savo ėjimo palikti lentoje skaičiaus 3 kartotinį..

6. Skaičiaus 3, 5, 7 ir 9 bendras mažiausias kartotinis yra $5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$, todėl jeigu nebūtų atsakymo keturženklumo sąlygos, tai atsakymu būtų triženklis skaičius $315 - 2 = 313$. Dėl keturženklumo sąlygos atsakymas bus skaičius $315 + 315 + 315 + 315 - 2 = 1258$. Jonas mažiausiai galėjo būti pagaminęs $4 \cdot 315 - 2 = 1258$ apsus.

Ats.: 1258 apsus.

7. Jeigu mokytojas Gutenbergas duodamas vieną dešimtadalį likusių knygų ir dar devynias knygas sugeba, kaip nurodyta, išdalinti viską, kas buvo likę, tai tada tos 9 knygos ir yra kiti devyni dešimtadaliai to, kas dar buvo likę. Tai jei devyni dešimtadaliai likučio yra devynios knygos, tai dešimt dešimtadalių arba visas likutis yra lygiai 10 knygų. Kadangi aštuntajam mokiniui jis davė dešimtadalį likučio ir dar 8 knygas, vadinasi ir antrajam jis davė taip pat 10 knygų ir taip jiems visiems. Taigi iš viso buvo 90 knygų.

Tikrai, jei iš viso yra 90 knygų, o pirmajam mokytojas duoda dešimtadalį ir dar vieną knygą, tai pirmajam jis tikrai duoda 9 + 1 arba 10 knygų, antrajam jis duoda dešimtadalį nuo likusių 90 – 10, arba jau 80 knygų ir dar 2, o tai vėl yra 10, nes tai juk tikrai 8 + 2, panašiai trečiajam kliūna 7 + 3, ketvirtajam 6 + 4, penktajam 5 + 5, šeštajam 4 + 6, septintajam 3 + 7, aštuntajam, kaip jau nurodyta, 2 + 8 ir galiausiai devintajam 1 + 9 = 10.

Ats. Mokytojas Gutenbergas per vakarykščią dieną išspausdino 90 knygų.

8. Jeigu septintame ežere sutūpė pusė dar tebeskrendančių žąsų ir dar pusė žąsies ir jau nieko nebeliko, tai iki 7-o ežero priskrido lygiai 1 žąsis. Tada iki šeštojo ežero turėjo sugebėti priskristi 3 žąsys, nes tik taip jame gali nutūpti pusė žąsų, dar pusė žąsies ir dar pasilikti viena skristi link 7-to ežero. Lygiai taip pat iki 5-to ežero turėjo priskristi 7 žąsys, iki 4-to ežero – 15, iki 3-io ežero – 31, iki 2-o – 63 ir, galiausiai iki pirmojo ežero jų turėjo būti 127.

Ats.: Iš viso buvo 127 žąsys.

9. Jonas niekaip negalės sugebėti įvykdyti Justo pageidavimo, nes jeigu jis galėtų įvykdyti Justo pageidavimą, tai jų visų paskutiniai skaitmenys būtų skirtingi ir todėl visų 10 skaičių suma baigtųsi skaitmeniu 5, nes tokiu skaitmeniu baigiasi visų skaitmenų suma 0 + 1 + 2 +3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9, kuri yra 45.

Tačiau, kita vertus, dviguba visų skaičių nuo 1 iki 10 suma yra 110 ir jokiu 5-tu baigtis negali.

Ats. Jonas negali įvykdyti Justo pageidavimo.

10. Įrodysime, kad bet kurių trijų ratuku apie apskritimą surašytų skai–čių suma negali būti nedidesnė už 14. Tada, suprantama, jis negalės būti nedidesnė ir už 13.

Tarkime, kad galima 10 skaitmenų 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 surašyti ratuku taip, kad bet kurių trijų iš eilės einančių skaičių suma yra nedidesnė už 14. Tada taip surašius kažkur yra parašytas 0. Atmetus 0, lieka dar 9 skaičiai, kurie sudaro 3 trejetus, kurių kiekvieno suma pagal sąlygą nedidesnė už 14. Todėl likusių 9 nenulinių skaitmenų, o tuo pačių ir visų 10 skaitmenų su 0 suma būtų nedidesnė kaip 3 kartus po 14, o tai yra 42. Tačiau visų skaitmenų suma 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 yra 45.

Gautasis prieštaravimas įrodo, kad taip surašyti negalima – nei taip, kaip prašo sąlyga (A), nei taip, kaip prašo sąlyga (B) .

Ats.: (A) negalima, (B) negalima.

PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Trikampių skaičių sekos bendrojo nario formulė tokia: $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, taigi $2T_n = n(n+1)$. Jei 666 yra n-tasis trikampis skaičius, tai $2 \cdot 666 = n(n+1)$. Išskaidę skaičių $2 \cdot 666$ daugikliais randame n:

$$2 \cdot 666 = 2 \cdot 6 \cdot 111 = 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 37 = 36 \cdot 37, \ n = 36.$$

Ats.: 36.

2. Jei eilutėje yra k langelių, tai galima sudaryti k stačiakampių, prasidedančių pirmuoju langeliu, $(k-1)$ -ą stačiakampį, prasidedantį antruoju langeliu, ..., vieną stačiakampį, prasidedantį k-tuoju langeliu (ir juo pasibaigiantį). Taigi visas stačiakampių skaičius

$$N = k + (k-1) + ... + 1 = T_k.$$

Jei $k = 10$, tai $T_k = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55.$

3. Pasinaudoję trikampių skaičių išraiška gauname:

$$8T_n + 1 = 8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 1 = 4n(n+1) + 1 = (2n+1)^2 = K_{2n+1}.$$

Taigi $8T_{10} + 1 = K_{21}.$

Ats.: $8T_{10} + 1 = K_{21}.$

4. Vėl pasinaudosime trikampių skaičių sekos bendrojo nario formule:

$$9T_n + 1 = 9 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{9n(n+1) + 2}{2}.$$

Kvadratinė lygtis $9x(x+1)+2=0$ turi du sprendinius: $x_1=-\frac{1}{3}$ ir $x_1=-\frac{2}{3}$, todėl

$$9x(x+1)+2=9\left(x+\frac{1}{3}\right)+\left(x+\frac{2}{3}\right)=(3x+1)(3x+2).$$

Taigi

$$9T_n+1=\frac{9n(n+1)+2}{2}=\frac{(3n+1)(3n+2)}{2}=T_{3n+1}.$$

Tada $9T_{10}+1=T_{31}$.

Ats.: $9T_{10}+1=T_{31}$.

5. Pasinaudoję trikampių skaičių išraiška gausime

$$T_{20}+T_6=\frac{20\cdot 21}{2}+\frac{6\cdot 7}{2}=\frac{462}{2}=\frac{21\cdot 22}{2}=T_{21}.$$

Kadangi $T_{k-1}+k=T_k$, tai $T_{T_4-1}+T_4=T_{T_4}=T_{10}$.

Ats.: $T_{T_4-1}+T_4=T_{10}$.

6. Imdami $2n-1=11^2$, rasime $n=61$. Tada lygybę $K_n=K_{n-1}+(2n-1)$ galėsime užrašyti taip: $61^2=60^2+11^2$, taigi $x=61$, $y=60$, $z=11$. Imdami $2n-1=13^2$, gausime dar vieną sprendinį: $n=85$, $x=85$, $y=84$, $z=13$.

7. Pakanka pasinaudoti trikampių ir keturkampių skaičių išraiškomis:

$$2T_n+K_{n+1}=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)^2=\frac{2n(n+1)+2(n+1)^2}{2}=$$
$$=\frac{(2n+1)(2n+2)}{2}=T_{2n+1}.$$

Lyginio eilės numerio trikampiams skaičiams teisinga lygybė $T_{2n}=2T_n+K_n$:

$$2T_n+K_n=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n^2=\frac{2n(n+1)+2n^2}{2}=\frac{2n(2n+1)}{2}=T_{2n}.$$

8. Jeigu $T_n = K_m$, tai

$$\frac{n(n+1)}{2} = m^2, \quad n^2 + n - 2m^2 = 0.$$

Raskime, su kokiomis sveikomis reikšmėmis lygtis $x^2 + x - 2m^2 = 0$ turi sveikus sprendinius. Tam būtina, kad jos diskriminantas $D = 1 + 8m^2$ būtų kvadratas. Pirmoji tinkama sveika reikšmė yra $m = 1$, ji duoda jau minėtą lygybę $T_1 = K_1$. Patyrinėję rasime, kad kita mažiausia reikšmė $m = 6$. Ji duoda lygybę $T_8 = K_6$. Kitos m reikšmės tenka ilgiau ieškoti: $m = 35$. Ji duoda lygybę $T_{49} = K_{35}$.

9. Pasinaudoję išvesta penkiakampių skaičių bendrojo nario formule $P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$ gausime:

$$P_n - K_n = \frac{n(3n-1)}{2} - n^2 = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{(n-1)n}{2} = T_{n-1}.$$

Taigi $P_{10} - K_{10} = T_9$.

10. Skaičius S_n gaunamas iš S_{n-1} pridedant taškų, esančių ant keturių grandžių laužtės, skaičių. Kiekvienoje grandyje yra po n taškų, tačiau trys taškai yra bendri dviems grandims. Taigi

$$S_n = S_{n-1} + 4n - 3 = 1 + 4\cdot 2 + 4\cdot 3 + ... + 4\cdot n - 3(n-1) =$$
$$= 4(1 + 2 + ... + n) - 3n = 4T_n - 3n = 2n(n+1) - 3n = n(2n-1).$$

Iš lygybės $S_n = 4T_n - 3n$ taip pat gauname $S_n - n = 4(T_n - n)$.

ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Pažymėkime $y = 2 - 1/(x+3)$, $x \neq -3$, tada $x = 1/(2-y) - 3$ ir $y \neq 2$. Imkime bet kokį $y \neq 2$ ir pažymėkime

$$x = 1/(2-y) - 3 \neq -3.$$

Tada

$$f(y) = (1/(2-y) - 3)^2 + 3(1/(2-y) - 3) =$$

$$=1/(2-y)^2-3/(2-y)=(3y-5)/(2-y)^2,$$

kai $y\neq 2$. Likusi reikšmė $f(2)$ ir yra toji, kurios neįmanoma rasti. Taigi tinka, pvz., $f(2)=0$.

Ats.:

$$f(x)=\begin{cases}(3x-5)/(2-x)^2, & \text{kai } x\neq 2,\\ 0, & \text{kai } x=2.\end{cases}$$

2. a) Pažymėkime $y=x^3+2$, tada $x=\sqrt[3]{y-2}$. Imkime bet kokį realųjį y ir pažymėkime $x=\sqrt[3]{y-2}$. Tada

$$f(y)=(x^3+2)^2=y^2.$$

b) Tarkime, kad lygtis turi sprendinį. Imkime, pvz., $x=0$ ir $x=2$. Tada $f(2)=4$ ir tuo pat metu $f(2)=4^6+4^4+4>4$. Gavome prieštarą.

Ats.: a) $f(x)=x^2$, $x\in R$.

3. Imkime bet kokį $x\neq 0$ ir įstatykime į lygtį $y=1/x$:

$f(1/x)+3f(x)=(3y^4+4y^2+1)/y^2=3y^2+4+1/y^2=3/x^2+4+x^2$;

$f(1/x)=3/x^2+4+x^2-3f(x)$.

Įsistatykime gautąją išraišką į pradinę lygtį:

$f(x)+3(3/x^2+4+x^2-3f(x))=(3x^4+4x^2+1)/x^2=3x^2+4+1/x^2$;

$-8f(x)+9/x^2+12+3x^2=3x^2+4+1/x^2$; $-8f(x)=-8-8/x^2$;

$f(x)=1+1/x^2$ bet kokiam $x\neq 0$.

Ats.: $f(x)=1+1/x^2$, $x\in R, x\neq 0$.

4. Imkime bet kokį realųjį x ir įstatykime į lygtį $y=2-x$:

$3^{2-x}f(2-x)+(2-x)f(x)=1$; $f(2-x)=(1-(2-x)f(x))3^{x-2}$.

Įsistatykime gautąją išraišką į pradinę lygtį:

$3^x f(x)+x(1-(2-x)f(x))3^{x-2}=1$;

$3^x f(x)+x3^{x-2}-x(2-x)3^{x-2}f(x)=1$;

$(3^x-x(2-x)3^{x-2})f(x)=1-x3^{x-2}$;

$f(x)=(1-x3^{x-2})/(3^x-x(2-x)3^{x-2})$.

Negalime gautos išraiškos laikyti galutine, kol neišsiaiškinome, kada vardiklis virsta nuliu (tokioms x reikšmėms funkcijos reikšmes turėtume ieškoti kitaip) . Tam padauginkime skaitiklį ir vardiklį iš $3^{2-x}\neq 0$:

$$f(x)=(3^{2-x}-x)/(3^{x+2-x}-x(2-x))=(3^{2-x}-x)/(9-2x+x^2).$$

Nesunku įsitikinti, kad funkcija $9-2x+x^2$ neįgyja reikšmės 0 (nes jos diskriminantas neigiamas). Taigi gautoji formulė galioja visoms x reikšmėms.

Ats.: $f(x)=(3^{2-x}-x)/(9-2x+x^2)$, $x\in R$.

5. Įsistatykime $x=1$: $f(3)+3f(3)=2$ ir $f(3)=1/2$. Įsistatykime $x=0$: $f(0)=2$.

Kad rastume $f(-24)$, mąstykime taip: lygtis sieja $f(-24)=$ $=f(3\cdot(-8))$ su $f(-8+2)=f(-6)$, reikšmę $f(-6)=f(3\cdot(-2))$ su $f(-2+2)=f(0)$. Taigi įsistatykime $x=-2$: $4f(0)-3f(-6)=$ $=8-3f(-6)=2$ ir $f(-6)=-2$. Įsistatykime $x=-8$:

$$64f(-6)-15f(-24)=-128-15f(-24)=2 \text{ ir } f(-24)=-26/3.$$

Kad rastume $f(5/2)$, mąstykime taip: lygtis sieja $f(5/2)=$ $=f(2+1/2)$ su $f(3\cdot 1/2)=f(3/2)$. O $f(3/2)$ galima rasti įsistatant $x=-1/2$: $f(3/2)/4=2$ ir $f(3/2)=8$. Įsistatykime $x=1/2$:

$$f(5/2)/4+2f(3/2)=f(5/2)/4+16=2 \text{ ir } f(5/2)=-56.$$

Ats.: $f(3)=1/2$, $f(0)=2$, $f(-24)=-26/3$, $f(5/2)=-56$.

6. Tarkime, kad pirmoji lygtis turi sprendinį. Įsistatykime $x=1$: $0=f(3)-f(3)=2$, gavome prieštarą.

Tarkime, kad antroji lygtis turi sprendinį. Įsistatykime $x=1$: $4f(1)=1$ ir $f(1)=1/4$. Įsistatykime $x=-1$: $2f(1)=0$ ir $f(1)=1/2\neq 1/4$, gavome prieštarą.

7. Įsistatę $x=0$, gaunime $f(0)=0$. Įsistatę $x=-1$, gauname $f(1)=2$. Įsistatę $x=1$, gauname $f(2)=4$. Įsistatę $x=\sqrt{2}$, gauname

$$\sqrt{2}f(\sqrt{2}+1)-f(2)=\sqrt{2}f(\sqrt{2}+1)-4=2\sqrt{2}$$

ir $f(\sqrt{2}+1)=2\sqrt{2}+2$.

Raskime visas tiesines funkcijas $f(x)=kx+b$. Skaičiai k ir b turi su visomis x reikšmėmis tenkinti lygybes

$$x(k(x+1)+b)-(kx^2+b)=2x,\ kx^2+kx+bx-kx^2-b-2x=0 \text{ ir}$$

$$(k+b-2)x-b=0.$$

Tiesinė funkcija $g(x)=(k+b-2)x-b$ tapati nuliui, todėl $k+b-2=0$ ir $-b=0$. Taigi $b=0$, $k=2-b=2$, $f(x)=2x$. Pastaroji funkcija tenkina pradinę lygtį.

Ats.: $f(\sqrt{2}+1)=2\sqrt{2}+2$, $f(x)=2x$, $x\in R$.

8. Raskime visas tiesines funkcijas $f(x)=kx+b$. Skaičiai k ir b turi su visomis x reikšmėmis tenkinti lygybes

$$2(kx^2+b)+x+3=x(k(x+1)+b)+(k(x^2+1)+b),$$

$$2kx^2+2b+x+3=kx^2+kx+bx+kx^2+k+b$$

ir

$$x(1-k-b)+(b+3-k)=0.$$

Tiesinė funkcija $g(x)=x(1-k-b)+(b+3-k)$ tapati nuliui, todėl $1-k-b=0$ ir $b+3-k=0$. Išsprendę šių dviejų lygčių sistemą, gauname $k=2$, $b=-1$, $f(x)=2x-1$. Pastaroji funkcija tenkina pradinę lygtį.

Ats.: $f(x)=2x-1$, $x\in R$.

9. Įsistatę realųjį skaičių $x\neq 0$, pvz., $x=1$, ir $y=0$, gauname:

$$0=f(x)-f(x)=f(0)+xf(0)-f(0)=xf(0)=f(0),$$

taigi $f(0)=0$. Įsistatę $x=0$ ir bet kokį realųjį skaičių y gauname:

$$(y+1)(f(y)-0)=y^2+f(y)+0-0;$$

$$yf(y)+f(y)=y^2+f(y);\ yf(y)=y^2.$$

Vadinasi, $f(y)=y$, jei $y\neq 0$. Bet jei $y=0$, jau žinome, kad

$f(0)=0$. Todėl $f(y)=y$ bet kokiam y.

Kitas sprendimas. Įsistatę $y=-1$ ir bet kokį realųjį skaičių x gauname:

$0=1+f(-1)+xf(-1)-f(-x)$; $f(-x)=xf(-1)+f(-1)+1$.

Į pastarąją lygtį įstatę $x=1$, gauname $f(-1)=f(-1)+f(-1)+1$ ir $f(-1)=-1$. Todėl bet kuriam x galioja lygybė

$$f(-x)=xf(-1)+f(-1)+1=-x.$$

Pakeitę x į $-x$ gauname $f(x)=x$.

Ats.: $f(x)=x$, $x\in R$.

10. Įsistatykime $x=y=0$: $f(0)=f^2(0)-2$ ir $f^2(0)-f(0)-2=0$. Todėl $f(0)=-1$ arba $f(0)=2$. Įsistatykime $x=0$: bet kokiam y galioja $f(y)=f(0)f(y)+2y-2$ ir $f(y)=(2y-2)/(1-f(0))$ (dalinti galime, nes žinome, kad $f(0)\neq 1$). Jei $f(0)=-1$, tai $f(y)=y-1$. Jei $f(0)=2$, tai $f(y)=2-2y$.

Belieka patikrinti galimus sprendinius. Gauname:

$f(xf(y)+x+y)=(x(y-1)+x+y)-1=xy+y-1$ ir

$f(x)f(y)+x+2y-2=(x-1)(y-1)+x+2y-2=xy+y-1$,

todėl pirmasis sprendinys tinka. Antrasis sprendinys netinka:

$f(xf(y)+x+y)=2-(x(2-2y)+x+y)=2xy-3x-y+2$,

tačiau

$$f(x)f(y)+x+2y-2=(2-2x)(2-2y)+x+2y-2=$$
$$=4xy-3x-2y+2.$$

Dvi lygybės pusės nesutampa, pvz., kai $x=0$ ir $y=1$ ($1\neq 0$).

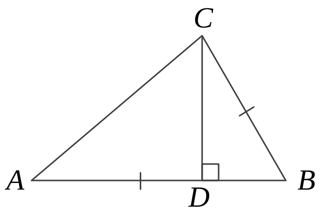
Ats.: $f(x)=x-1$, $x\in R$.

SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

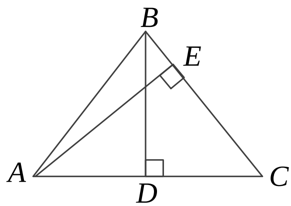
1. Sakykime, kad trikampio ABC aukštinė $CD=\sqrt{3}$ (1 pav.). Žymime $AD=BC=x$, tuomet $DB=3-x$. Trikampiui BCD taikome Pitagoro teoremą: $CB^2=BD^2+DC^2$, t. y., $x^2=(3-x)^2+3$.

Išsprendę šią lygtį, randame $x = 2$. Tuomet iš stačiojo trikampio ACD gauname, kad $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 7$.

Ats.: $\sqrt{7}$.



1 pav.



2 pav.

2. Nagrinėkime lygiašonį trikampį ABC, $AB = BC$, kurio aukštinė, nubrėžta į pagrindą $BD = m$, o aukštinė, nubrėžta į šoninę kraštinę $AE = n$ (2 pav.). Sakykime, kad $AD = x$, $AB = BC = y$. Trikampiui ABD taikydami Pitagoro teoremą, gauname $y^2 = x^2 + m^2$. Dviem būdais skaičiuodami trikampio ABC plotą S, gauname $S = \frac{1}{2} BC \cdot AE = \frac{yn}{2}$ ir $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = xm$. Iš čia $y = \frac{2xm}{n}$, todėl turime lygtį $\frac{4x^2m^2}{n^2} = x^2 + m^2$. Iš čia randame, kad $x = \frac{mn}{\sqrt{4m^2 - n^2}}$.

Taigi $AC = 2x = \frac{2mn}{\sqrt{4m^2 - n^2}}$, o $AB = BC = y = \frac{2m^2}{\sqrt{4m^2 - n^2}}$.

Ats.: pagrindo ilgis $\frac{2mn}{\sqrt{4m^2 - n^2}}$, o šoninės kraštinės ilgis $\frac{2m^2}{\sqrt{4m^2 - n^2}}$

3. Sakykime, kad lygiagretainio $ABCD$ kampas A lygus 60° (3 pav.). Kadangi prieš mažesnįjį kampą yra trumpesnė įstrižainė, todėl $\frac{BD^2}{AC^2} = \frac{1}{3}$, t. y., $AC^2 = 3BD^2$. Trikampiams ABD ir ACD taikome kosinusų teoremą ir gauname lygybes

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos\angle BAD$$

ir

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\angle ABC .$$

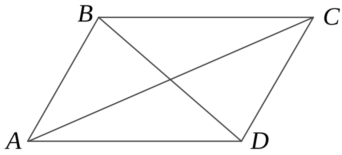
Kadangi $BC = AD$, $\cos\angle BAD = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, o

$$\cos\angle ABC = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2},$$

tai

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - AB \cdot AD,$$

$$AC^2 = AB^2 + AD^2 + AB \cdot AD$$



3 pav.

Tuomet pagal uždavinio sąlygą gauname lygybę

$$AB^2 + AD^2 + AB \cdot AD = 3(AB^2 + AD^2 - AB \cdot AD),$$

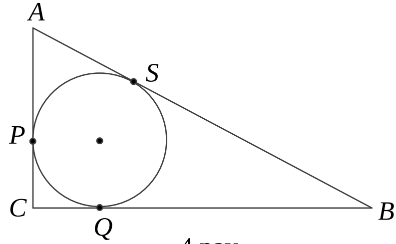
iš kurios seka, kad

$$AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD = 0, \text{ t. y. } (AB - AD)^2 = 0.$$

Taigi $AB = AD$ ir ieškomasis santykis lygus 1.

Ats.: 1.

4. Sakykime, kad įbrėžtas į statųjį trikampį ABC apskritimas statinį AC liečia taške P. Akivaizdu, kad atkarpa CP yra trumpesnė už atkarpą AP, todėl $CP = 6$, $PA = 10$ (4 pav.). Jei taškuose Q ir S apskritimas liečia trikampio statinį BC ir įžambinę AB, tai pagal apskritimo liestinių, nubrėžtų iš vieno taško savybę $CP = CQ = 6$, $AP = AS = 10$, $BQ = BS$. Žymime $BQ = BS = x$



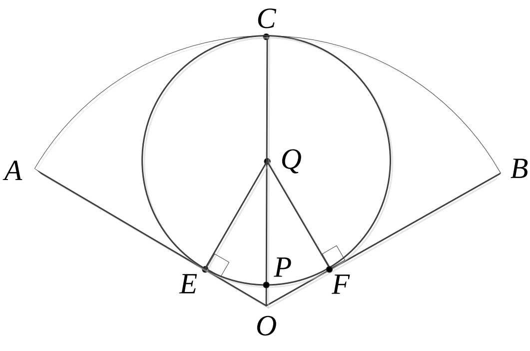
4 pav.

ir iš Pitagoro teoremos turime lygtį $(x+10)^2 = (x+6)^2 + 16^2$. Išsprendę šią lygtį randame $x = 24$. Taigi trikampio kraštinių ilgiai $AB = 34$, $AC = 16$, $BC = 30$.

Ats.: 34, 16 ir 30.

5. Nagrinėkime skritulio išpjovą, kurios kampas $\angle AOB = 120°$, o skritulio spindulys $OA = OB = R$. Sakykime, kad įbrėžto į šią išpjovą skritulio centras – taškas Q, spindulys – r skritulys liečia duotosios išpjovos spindulius OA ir OB atitinkamai taškuose E ir F, o lanką AB – taške C, kuris yra to lanko vidurio taškas (5 pav.). Kadangi $QE \perp OA$, $\angle AOB = 120°$, o $\angle AOC = \frac{1}{2}\angle AOB = 60°$, todėl $\angle OQE = 30°$, taigi $OE = \frac{1}{2}OQ = \frac{1}{2}(R - r)$. Kita vertus, iš Pitagoro teoremos trikampiui OEQ seka, kad $OQ^2 = QE^2 + OE^2$, t.y., $(R-r)^2 = \frac{1}{4}(R-r)^2 + r^2$. Pertvarkome šią lygtį ir gauname $3R^2 - 6Rr - r^2 = 0$. Padaliję abi lygties puses iš r^2 ir ieškomąjį santykį pažymėję $\frac{R}{r} = t$, gauname kvadratinę lygtį $3t^2 - 6t - 1 = 0$, kurios teigiamas sprendinys yra lygus $t = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$.

Ats.: $\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$.



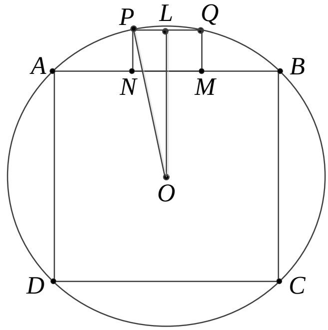
5 pav.

6. Sakykime, kad apie kvadratą $ABCD$, apibrėžtas apskritimas, $AB = a$, tai apskritimo spindulys lygus $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. Jei $PQMN$ –

kvadratas, įbrėžtas į skritulio nuopjovą, kurios pagrindas yra kvadrato kraštinė AB, taškas O – kvadrato $ABCD$ centras, taškas L – atkarpos PQ vidurio taškas (6 pav.), tai $OP^2 = PL^2 + OL^2$. Jei kvadrato $PQMN$ kraštinės ilgį pažymėsime x, tai $PL = \frac{x}{2}$, $OL = x + \frac{a}{2}$, $OP = \frac{\sqrt{2}a}{2}$, tuomet yra teisinga lygybė

$$\frac{a^2}{2} = \frac{x^2}{4} + x^2 + ax + \frac{a^2}{4},$$

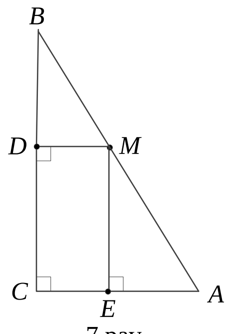
t. y. $5x^2 + 4ax - a^2 = 0$. Teigiamas šios lygties sprendinys yra $x = \frac{a}{5}$. Taigi kvadrato $PQMN$ plotas lygus $\frac{a^2}{25}$.



6 pav.

Ats.: $\frac{a^2}{25}$.

7. Sakykime, kad stačiojo trikampio ABC įžambinėje AB yra taškas M, nuo statinio BC nutolęs atstumu $MD = 4$, o nuo statinio AC – atstumu $ME = 8$ (7 pav.). Jei $AC = x$, $BC = y$, tai pagal sąlygą $x > 4$, $y > 8$, o $xy = 200$. Iš trikampių ABC ir AME panašumo seka, kad $\frac{BC}{ME} = \frac{AC}{AE}$, t. y., $\frac{y}{8} = \frac{x}{x-4}$. Kadangi $xy = 200$, tai iš čia gauname, kad $200 - 4y = 8x$, t. y., $y = 50 - 2x$, todėl $x(50 - 2x) = 200$. Išsprendę šią lygtį, gauname du jos sprendinius $x_1 = 5$, $x_2 = 20$. Tada $y_1 = 40$, $y_2 = 10$. Kadangi abiem atvejais nelygybės $x > 4$ ir $y > 8$ yra teisingos, tai yra du trikampiai, tenkinantys uždavinio sąlygą.

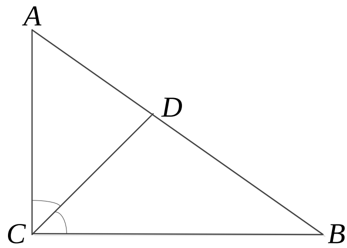


7 pav.

Ats.: 5 ir 40; 20 ir 10.

8. Sakykime, kad stačiojo trikampio ABC statinis $CB = 6$, o stačiojo kampo pusiaukampinė $CD = 5$ (8 pav.). Žymėkime $CA = x$. Pagal trikampio pusiaukampinės ilgio pirmąją formulę yra teisinga lygybė

$$CD = \frac{2CB \cdot CA \cos\angle BCD}{CB + CA}.$$



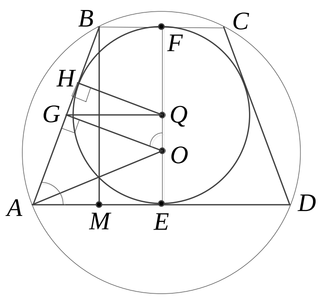
8 pav.

Kadangi $\angle BCD = \frac{\pi}{4}$, tai gauname lygtį $5(6 + x) = 6\sqrt{2}x$, iš kurios randame $x = \frac{30}{6\sqrt{2} - 5}$. Todėl trikampio plotas $S = \frac{1}{2} CA \cdot CB = \frac{90}{6\sqrt{2} - 5}$.

Ats.: $\frac{90}{6\sqrt{2} - 5}$.

9. Sakykime, kad įbrėžto į trapeciją $ABCD$, $AD \parallel BC$ apskritimo centras yra taškas Q, jo spindulys QH lygus r, apibrėžto apie trapeciją apskritimo centras yra taškas O, o jo spindulys $OA = R$ (9 pav.). Jei taškai E ir F yra pagrindų vidurio taškai, tai $EF = 2r$. Jei taškas G yra šoninės kraštinės AB vidurio taškas, tai apibrėžto apie trapeciją apskritimo styga AB yra statmena tiesei OG. Pažymėkime $\angle BAD = \alpha$, tuomet ir $\angle QGH = \alpha$ (nes $AD \parallel QG$), todėl iš stačiojo trikampio QGH turime

$$QG = \frac{QH}{\sin\angle HGQ} = \frac{r}{\sin\alpha}.$$



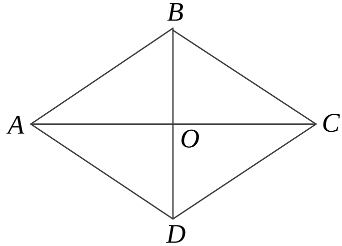
9 pav.

Kadangi tiesės QH ir OG yra lygiagrečios, tai $\angle GOQ = \alpha$, todėl iš stačiojo trikampio QOG gauname, kad $OG = \frac{GQ}{\sin\alpha} = \frac{r}{\sin^2\alpha}$.

Nubrėžę $BM \parallel EF$, iš stačiojo trikampio ABM randame, kad $AG = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\frac{EF}{\sin\alpha} = \frac{r}{\sin\alpha}$. Trikampiui AOG taikome Pitagoro teoremą: $OG^2 + AG^2 = AO^2$, t. y., $\frac{r^2}{\sin^4\alpha} + \frac{r^2}{\sin^2\alpha} = R^2$. Pagal uždavinio sąlygą $EF = \sqrt{\frac{2}{3}}OG$, taigi $2r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$, o $r^2 = \frac{1}{6}R^2$. Taigi gauname tokią trigonometrinę lygtį $\frac{1}{\sin^4\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha} = 6$. Žymėdami $y = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, gauname kvadratinę lygtį $y^2 + y - 6 = 0$, Jos teigiamas sprendinys yra $y = 2$, todėl $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 2$. Kadangi kampas α – smailusis, tai iš čia seka, kad $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, t. y., $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Ats.: 45°ir 135°.

10. Sakykime, kad rombo $ABCD$ kraštinės ilgis lygus $AB = a$, įstrižainės AC ir BD susikerta taške O o jų ilgiai $AC = 2m$, $BD = 2n$ (10 pav.). Pagal sąlygą yra teisinga lygybė $\frac{4a}{2m+2n} = \frac{3}{2}$. Žymėkime $\angle BAD = x$, tuomet iš stačiojo trikampio AOB seka, kad $m = a\sin\frac{x}{2}$, $n = a\cos\frac{x}{2}$. Iš čia gauname trigonometrinę lygtį



10 pav.

$\frac{2}{\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}} = \frac{3}{2}$, t. y. $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = \frac{4}{3}$. Pakėlę abi lygties puses kvadratu, gauname, kad $1 + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{16}{9}$, t. y., $\sin x = \frac{7}{9}$.

Kadangi x – smailusis kampas, tai $x = \arcsin\frac{7}{9}$.

Ats.: $\arcsin\frac{7}{9}$ ir $\pi - \arcsin\frac{7}{9}$.

Pastaba: sprendžiant lygtį kitu būdu, galimi ir tokie atsakymai: $4\operatorname{arctg}\frac{3+2\sqrt{2}}{7}$ ir $\pi - 4\operatorname{arctg}\frac{3+2\sqrt{2}}{7}$.

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. a) Ne, nes toks imties sudarymas prieštarauja PAI apibrėžimui
b) Ne, nes tokiu būdu renkamos imtys nėra fiksuoto dydžio. Vėlgi prieštaravimas PAI apibrėžimui.

2. a) Ne, nes sudarant imtį tokiu būdu, niekada nebus išrinkta imtis, kurią sudaro vien tik vaikinai, ar vien tik merginos, arba 2 vaikinai ir 6 merginos ir pan. Tokios imtys turi nulinę tikimybę, o tai yra prieštaravimas tikimybinės imties apibrėžimui.
b) Taip, nes atitinka PAGI apibrėžimą.

3. $$\pi_1 = \sum_{\mathbf{i}:u_1 \in \mathbf{i}} p(\mathbf{i}) = \frac{1}{2};$$

$$\pi_2 = \sum_{\mathbf{i}:u_2 \in \mathbf{i}} p(\mathbf{i}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6};$$

$$\pi_3 = \frac{1}{2};$$

$$\pi_4 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3};$$

$$\pi_5 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

4. Apskaičiuojame visų elementų priklausymo imčiai tikimybes:

$$\pi_1 = \sum_{\mathbf{i}:u_1 \in \mathbf{i}} p(\mathbf{i}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}; \qquad \pi_2 = \frac{5}{8};$$

$$\pi_3 = \frac{1}{2}; \qquad \pi_4 = \frac{1}{4}; \qquad \pi_5 = \frac{3}{8};$$

$$\pi_6 = \frac{1}{4}; \qquad \pi_7 = \frac{1}{2}; \qquad \pi_8 = \frac{1}{2};$$

$$\pi_9 = \frac{5}{8}; \qquad \pi_{10} = \frac{1}{2}.$$

Randame visus įverčius:

Imtis	$\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$	$\{u_2, u_3, u_7, u_8, u_9\}$	$\{u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}\}$	$\{u_1, u_5, u_{10}\}$	$\{u_2, u_9, u_{10}\}$
Imties duomenys	{5, 10, 2, 2, 7}	{10, 2, 21 12, 1}	{15, 21, 12, 1, 2}	{5, 7, 2}	{10, 1, 2}
Sumos įvertis $\hat{t}_y$	60	87,6	131,6	36	21,6

Įvertinio $\hat{t}_y$ vidurkis:

$$\mathbf{E}\hat{t}_y = \sum_{k=1}^{5} \hat{t}_y(\mathbf{i}_k) p_k = 60 \cdot \frac{1}{4} + \ldots + 21{,}6 \cdot \frac{1}{8} = 77.$$

Tikroji y suma:

$$t_y = 77.$$

Kadangi įvertinio vidurkis sutampa su tikra *y* suma, įvertinys $\hat{t}_y$ yra **nepaslinktas**.

5. Įvertinio $\hat{t}_y$ vidutinė kvadratinė paklaida:

$$VKP(\hat{t}_y) = (\hat{t}_y(\mathbf{i}_1) - t_y)^2\, p(\mathbf{i}_1) + (\hat{t}_y(\mathbf{i}_2) - t_y)^2\, p(\mathbf{i}_2) + \ldots +$$

$$+ (\hat{t}_y(\mathbf{i}_5) - t_y)^2\, p(\mathbf{i}_5) = (60 - 77)^2 \cdot \frac{1}{4} + \ldots + (21{,}6 - 77)^2 \cdot \frac{1}{8} =$$

$$= 1439{,}4.$$

6. Imties duomenys:

y: 19, 25, 27, 30, 25, 35, 35.

Vidutinio razinų skaičiaus bandelėse įvertis:

$$\hat{\mu}_y = \frac{1}{7}(19 + 25 + ... + 35) = 28.$$

7. Dviejų elementų paprastųjų atsitiktinių negrąžintinių imčių yra $C_6^2 = 15$. Užrašykime jas ir kiekvienai iš jų įvertinkime kintamojo y vidurkį μ_y.

Imtis	Imties duomenys	Vidurkio įvertis $\hat{\mu}_y$
$\{u_1, u_2\}$	85 60	$\hat{\mu}_y = \frac{1}{2}(85 + 60) = 72{,}5$
$\{u_1, u_3\}$	85 91	88
$\{u_1, u_4\}$	85 77	81
$\{u_1, u_5\}$	85 79	82
$\{u_1, u_6\}$	85 80	82,5
$\{u_2, u_3\}$	60 91	75,5
$\{u_2, u_4\}$	60 77	68,5
$\{u_2, u_5\}$	60 79	69,5
$\{u_2, u_6\}$	60 80	70
$\{u_3, u_4\}$	91 77	84
$\{u_3, u_5\}$	91 79	85
$\{u_3, u_6\}$	91 80	85,5
$\{u_4, u_5\}$	77 79	78
$\{u_4, u_6\}$	77 80	78,5
$\{u_5, u_6\}$	79 80	79,5

Imties plano tikimybės PAI atveju yra

$$p_k = \frac{1}{C_6^2} = \frac{1}{15}, \quad k = 1, 2, ..., 15.$$

Skaičiuojant įvertinio $\hat{\mu}_y$ dispersiją, reikia žinoti jo vidurkį:

$$\mathbf{E}\hat{\mu}_y = \sum_{k=1}^{15} \hat{\mu}_y(\mathbf{i}_k)p_k = \frac{1}{15}(72{,}5 + 88 + \ldots + 79{,}5) \approx 78{,}67.$$

Įvertinio $\hat{\mu}_y$ dispersija:

$$\mathbf{D}\hat{\mu}_y = (\hat{\mu}_y(\mathbf{i}_1) - \mathbf{E}\hat{\mu}_y)^2 p(\mathbf{i}_1) + (\hat{\mu}_y(\mathbf{i}_2) - \mathbf{E}\hat{\mu}_y)^2 p(\mathbf{i}_2) + \ldots +$$
$$+ (\hat{\mu}_y(\mathbf{i}_{15}) - \mathbf{E}\hat{\mu}_y)^2 p(\mathbf{i}_{15}) \approx$$
$$\approx (72{,}5 - 78{,}67)^2 \cdot \frac{1}{15} + \ldots + (79{,}5 - 78{,}67)^2 \cdot \frac{1}{15} \approx 36{,}36.$$

8. Septintoje užduotyje nagrinėto įvertinio dispersiją galima apskaičiuoti, remiantis antruoju teiginiu:

$$\mathbf{D}\hat{\mu}_y = \left(1 - \frac{n}{N}\right)\frac{s^2}{n} \approx [\text{populiacijos dispersija } s^2 \approx 109{,}067] \approx$$
$$\approx \left(1 - \frac{1}{3}\right)\frac{109{,}067}{2} = 36{,}36.$$

9. Vidutinės kainos įvertinio $\hat{\mu}_y$ dispersija PAI atveju yra

$$\mathbf{D}\hat{\mu}_y = \left(1 - \frac{n}{N}\right)\frac{s^2}{n} \approx [\text{populiacijos dispersija } s^2 \approx 63\,000] \approx$$
$$\approx \left(1 - \frac{3}{5}\right)\frac{63\,000}{3} = 8400.$$

Vidutinės kainos įvertinio $\hat{\mu}_y$ dispersija PAGI atveju yra

$$\mathbf{D}\hat{\mu}_y = \left(1 - \frac{n}{N}\right)\frac{s^2}{n} \approx [\text{populiacijos dispersija } s^2 \approx 63\,000] \approx$$
$$\approx \left(1 - \frac{1}{5}\right)\frac{63\,000}{3} = 16\,800.$$

To paties įvertinio dispersija PAGI (ir nagrinėjamos populiacijos) atveju yra dvigubai didesnė.

10. Remiantis įvertinio variacijos koeficiento apibrėžimu, lygtis

$$cv(\hat{\mu}) = 0{,}05$$

virsta tokia:

$$\frac{\sqrt{\mathbf{D}\hat{\mu}}}{\mathbf{E}\hat{\mu}} = 0{,}05. \qquad (*)$$

PAI atveju įvertinio $\hat{\mu}$ dispersija lygi

$$\mathbf{D}\hat{\mu}_y = \left(1 - \frac{n}{N}\right)\frac{s^2}{n};$$

vidurkis

$$\mathbf{E}\hat{\mu} = \mu.$$

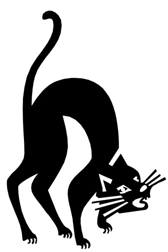
Remdamiesi užrašytais teiginiais, lygtį $(*)$ perrašome taip:

$$\frac{\sqrt{\left(1 - \frac{n}{N}\right)\frac{s^2}{n}}}{\mu} = 0{,}05.$$

Belieka šią lygtelę išspręsti n atžvilgiu...

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

1	**2**	**3**	**4**
–2; 2	[–14; 2)	$f(x) = \frac{x^2 - 12x + 12}{5}$	2



Išleistose LJMM knygelėse buvo nagrinėtos tokios temos:

I KNYGA

I. J. Šinkūnas. *Kvadratinis trinaris.*
II. G. Stepanauskas. *Rekurenčiosios sekos.*
III. R. Kašuba. *Elementarinės matematikos uždavinių sprendimo metodai.*
IV. A.Skūpas. *Funkcija*.
V. V. Pekarskas. *Sveikoji ir trupmeninė skaičiaus dalis. Jų savybės.*
VI. P. Survila. *Kombinatorikos ir tikimybių skaičiavimo pradmenys.*
VII. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. *Grafai.*

II KNYGA

I. J. Šinkūnas, A. Urbonas. *Funkcija.*
II. E. Mazėtis. *Apskritimų geometrija. Įbrėžtiniai ir apibrėžtiniai daugiakampiai. Taisyklingieji daugiakampiai.*
III. B. Vasylienė. *Skaičiaus modulis algebros uždaviniuose.*
IV. J. Šinkūnas. *Figūrų panašumas. Talio teorema ir jos taikymai.*
V. D. Jurgaitis. *Matematinės indukcijos metodas.*
VI. A. Urbonas. *Lygčių, nelygybių bei jų sistemų ekvivalentumas.*
VII. B. Grigelionis. *Urnų schemos ir baigtinės Markovo grandinės.*
VIII. A. Juozapavičius, J. Šinkūnas. *Koordinačių sistemos. Žemėlapiai.*

III KNYGA

I. E. Stankus. *Skaičių dalumas.*
II. R. Skrabutėnas. *Grandininės trupmenos.*
III. V. Vitkus. *Vidurkiai.*
IV. E. Mazėtis. *Vektoriai.*
V. J. Šinkūnas. *Plokščių figūrų plotai.*
VI. S. Staknienė. *Iracionaliosios lygtys ir nelygybės.*
VII. A. Apynis, E. Stankus. *Trigonometrinės lygtys ir nelygybės.*
VIII. G. Stepanauskas. *Sekos.*

IV KNYGA

I. G. Stepanauskas. *Skaičiavimo sistemos.*
II. P. Vaškas. *Antrosios eilės kreivės.*
III. L. Maliaukienė. Įdomioji logika.
IV. A. Urbonas. *Atvirkštinės funkcijos.*
V. A. Apynis. *Optimizavimo uždaviniai.*
VI. P. Survila. *Kombinatorikos pradmenys.*
VII. P. Survila. *Tikimybių teorijos pradmenys.*
VIII. A. Nagelė. *Kompleksiniai skaičiai.*

V KNYGA

I. O. Jablonskienė. *Planimetrijos uždaviniai.*
II. V. Pekarskas. *Antrosios eilės kreivės.*
III. G. Stepanauskas. *Skaičių dalikliai.*
IV. V. Stakėnas. *Šifrai ir skaičiai.*
V. A. Apynis. *Tiesinių lygčių sistemos.*
VI. R. Skrabutėnas. *Algebrinės lygtys.*
VII. V. Vitkus. *Brėžimo uždaviniai.*
VIII. R. Kašuba. *Sudėtis, atimtis ir daugyba stulpeliu bei dalyba kampu.*

VI KNYGA

I. A. Bakštys. *Finansų matematika.*
II. E. Mazėtis. *Geometrinės transformacijos.*
III. B. Galbogienė. *Funkcijos reikšmių sritis.*
IV. V. Stakėnas. *Paskalio trikampis.*
V. A. Apynis. *Tiesinių lygčių sistemų taikymo uždaviniai.*
VI. L. Narkevičius. *Invariantų metodas.*
VII. J. Šinkūnas. *Tiesinės rekurenčiosios sekos.*
VIII. A. Apynis. *Uždaviniai su parametru.*

VII KNYGA

I. E. Stankus. *Skaičių dalumas, dalumo požymiai.*
II. E. Mazėtis. *Nelygybės geometrijoje.*
III. J. Šinkūnas. *Kraštinio elemento principas.*
IV. A. Apynis, E. Stankus. *Indukcijos principas.*
V. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. *Grafai. Oilerio formulė.*
VI. J. Vainavičienė. *Geometrinės vietos.*
VII. A. Apynis. *Aibės, taikymo uždaviniai.*
VIII. A. Skūpas. *Išvestinės ir integralai.*

VIII KNYGA

I. J. Šinkūnas. *Vidurkiai ir jų taikymai.*
II. I. Bagdonienė. *Dirichlė principas.*
III. E. Stankus. *Diofantinės lygtys.*
IV. L.Papreckienė. *Daugianarių dalumas.*
V. A. Apynis, J. Šinkūnas. *Niutono binomas.*
VI. E. Tumėnaitė. *Logaritminės ir rodiklinės lygtys, nelygybės irtapatybės.*
VII. E. Mazėtis. *Stereometrijos uždaviniai.*
VIII. A. Apynis. *Trigonometriniai uždaviniai.*

IX KNYGA

I. A. Urbonas. *Dirichlė principas.*
II. A. Apynis. *Neapibrėžtųjų koeficientų metodas.*
III. A. Apynis. *Sumavimas.*
IV. E. Tumėnaitė. *Logaritminės lygtys ir nelygybės.*
V. E. Mazėtis. *Geometrijos uždavinių sprendimo analiziniai metodai.*
VI. E. Stankus, J. Šinkūnas. *Pilnosios tikimybės formulė.*
VII. E. Mazėtis. *Vektoriai erdvėje.*
VIII. E. Stankus, J. Šinkūnas. *Progresijos.*

X KNYGA

I. A. Apynis, E. Stankus. *Racionaliosios lygtys.*
II. A. Urbonas. *Nestandartiniai uždaviniai.*
III. V. Pekarskas. *Trigonometrinių keitinių taikymas sprendžiant uždavinius.*
IV. A. Apynis. *Nelygybės tekstiniuose uždaviniuose.*
V. J. Šinkūnas. *Kompleksiniai skaičiai ir jų taikymas.*
VI. E. Mazėtis. *Kai kurios planimetrijos teoremos ir jų taikymai.*
VII. E. Stankus. *Bernulio formulė ir jos taikymas.*
VIII. E. Mazėtis. *Briaunainiai.*

XI KNYGA

I. E. Tumėnaitė. *Kvadratinės lygtys tekstiniuose uždaviniuose.*
II. A. Apynis. *Bezu teorema.*
III. J. Šinkūnas. *Masių centras ir jo taikymas.*
IV. E. Stankus. *Lyginiai ir jų taikymas*
V. A. Apynis. *Funkcinės lygtys.*
VI. E. Mazėtis. *Trigonometrijos taikymas g*eometrijoje.
VII. J. Šinkūnas. *Iškilosios funkcijos ir nelygybės*.
VIII. E. Stankus. *Priklausomi ir nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.*

XII KNYGA

I. R. Skrabutėnas. *Euklido algoritmas ir jo taikymas.*
II. J. Šinkūnas. *Lygčių ir nelygybių sprendimas taikant funkcijų savybes.*
III. A. Apynis. *Simetrinių lygčių sistemos.*
IV. R. Kašuba. *Svėrimo ir pilstymo uždaviniai*.
V. E. Stankus. *Pitagoro ir Herono skaičių trejetai*.
VI. J. Šinkūnas. *Sąlyginės tapatybės ir nelygybės*.
VII. E. Mazėtis. *Keturkampiai*.
VIII. A. Apynis. *Geriausio varianto pasirinkimo uždaviniai.*

XIII KNYGA

I. A. Apynis. *Kvadratinio trinario savybių taikymo uždaviniai*.
II. E. Mazėtis. *Apskritimų geometrija.*
III. G. Stepanauskas. *Pirminiai skaičiai*.
IV. R. Kašuba. *Kaip spręsti, kai nelabai žinai kaip?*
V. J. Šinkūnas. *Simetrinės tapatybės, lygtys ir nelygybės*.
VI. V. Pekarskas. *Nelygybės su parametrais*.
VII. E. Stankus. *Atsitiktiniai dydžiai*.
VIII. E. Mazėtis. *Sukiniai*.

XIV KNYGA

I. A. Apynis, J. Šinkūnas. *Procentų uždaviniai*.
II. J. Jankauskas. *Kaip spręsti lygtis sveikaisiais skaičiais?*
III. E. Mazėtis. *Ekstremumai geometrijoje.*
IV. A. Novikas. *Homotetija.*
V. R. Kašuba. *Turnyrai ir lentelės.*
VI. E. Stankus. *Sekos ir jų ribos.*
VII. E. Mazėtis. *Trigonometrijos taikymas stereometrijoje.*
VIII. G. Stepanauskas. *Monte Karlo metodas.*

XV KNYGA

I. A. Apynis, J. Šinkūnas. *Lygtys ir jų sistemos tekstiniuose uždaviniuose.* .
II. E. Mazėtis. *Trikampių uždaviniai.*
III. A. Apynis, J. Šinkūnas. *Variantų perrankos metodas.*
IV. A. Apynis, J. Šinkūnas. *Kombinatorikos uždaviniai*.
V. E. Stankus. *Fibonačio skaičiai*.
VI. L. Maliaukienė. *Įdomioji logika*.
VII. E. Mazėtis. *Plokštumos figūrų kombinacijos*.
VIII. E. Stankus, J. Šinkūnas. *Lygčių ir nelygybių sprendimas taikant funkcijų savybes.*