LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Jaunajam matematikui

17

2014–2016 mokslo metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Vilnius, 2016

Leidinio sudarytojai:
Antanas APYNIS
Edmundas MAZĖTIS
Eugenijus STANKUS
Juozas ŠINKŪNAS

Leidinį maketavo Kristina LYNDIENĖ

TURINYS

PRATARMĖ 4
METODINĖ MEDŽIAGA IR UŽDUOTYS 5
A. Apynis, E. Mazėtis, E. Stankus, J. Šinkūnas. STOJAMOJI UŽDUOTIS 6
I. **E. Stankus.** SVEIKŲJŲ SKAIČIŲ SAVYBĖS 8
PIRMOJI UŽDUOTIS 14
II. **A. Apynis, J. Šinkūnas.** FUNKCIJOS IR JŲ GRAFIKAI 16
ANTROJI UŽDUOTIS 25
III. **A. Apynis.** LYGČIŲ IR NELYGYBIŲ SUDARYMO UŽDAVINIAI 27
TREČIOJI UŽDUOTIS 33
IV. **E. Mazėtis.** POSŪKIAI, AŠINĖS IR CENTRINĖS SIMETRIJOS.. 35
KETVIRTOJI UŽDUOTIS 43
V. **E. Mazėtis.** METRINĖS PRIKLAUSOMYBĖS TRIKAMPYJE 46
PENKTOJI UŽDUOTIS 54
VI. **A. Apynis.** RODIKLINĖS IR LOGARITMINĖS NELYGYBĖS 56
ŠEŠTOJI UŽDUOTIS 66
VII. **V. Gesevičienė.** VEKTORIAI 67
SEPTINTOJI UŽDUOTIS 81
VIII. **A. Apynis.** MATEMATIKOS TAIKYMAS EKONOMIKOJE 83
AŠTUNTOJI UŽDUOTIS 98
A. Apynis, E. Stankus, E. Mazėtis, J. Šinkūnas. BAIGIAMOJI UŽDUOTIS 102

UŽDUOČIŲ SPRENDIMAI 103
Stojamosios užduoties sprendimas 104
Pirmosios užduoties sprendimas 108
Antrosios užduoties sprendimas 111
Trečiosios užduoties sprendimas 117
Ketvirtosios užduoties sprendimas 123
Penktosios užduoties sprendimas 129
Šeštosios užduoties sprendimas 135
Septintosios užduoties sprendimas 141
Aštuntosios užduoties sprendimas 151
Baigiamosios užduoties atsakymai 158

PRATARMĖ

Šioje septynioliktoje Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos knygelėje ,,Jaunajam matematikui" yra pateikta 2014–2016 mokslo metais nagrinėtų temų metodinė medžiaga, užduotys LJMM klausytojams ir jų sprendimai.

Knygelės turinį sudaro šios temos: sveikųjų skaičių savybės (E. Stankus), funkcijos ir jų grafikai (A. Apynis, J. Šinkūnas), lygčių ir nelygybių sudarymo uždaviniai (A. Apynis), posūkiai, ašinės ir centrinės simetrijos (E. Mazėtis), metrinės priklausomybės trikampyje (E. Mazėtis), rodiklinės ir logaritminės nelygybės (A. Apynis), vektoriai (V. Gesevičienė), matematikos taikymas ekonomikoje (A. Apynis). Skaitytojas taip pat ras 2014 metų stojamąją užduotį ir jos sprendimą bei 2016 metų baigiamosios užduoties pavyzdį.

Kad būtų lengviau naudotis knygelėmis ,,Jaunajam matematikui", šio leidinio paskutiniuose puslapiuose yra įdėtas ankstesnių šešiolikos LJMM mokslo metų temų sąrašas.

Antanas Apynis
Edmundas Mazėtis
Eugenijus Stankus
Juozas Šinkūnas

Metodinė medžiaga
ir užduotys

STOJAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Edmundas Mazėtis,
Eugenijus Stankus, Juozas Šinkūnas

1. Kokius du skaitmenis reikia prirašyti iš dešinės prie skaičiaus 2014, kad gautas skaičius dalytųsi iš 101?

2. Į eilę surašyti visi natūralieji skaičiai nuo 1 iki 999. Apskaičiuokite gautojo skaičiaus skaitmenų sumą.

3. Kiek yra keturženklių skaičių, kurie nubraukus pirmąjį skaitmenį sumažėja 9 kartus?

4. Kiek yra dešimtženklių skaičių, dalių iš 9, kurie užrašyti tik skaitmenimis 0 ir 5?

5. Kino teatro salėje 15 % žiūrovų yra vaikai, 144 žiūrovai – jaunuoliai, o kiti žiūrovai – suaugusieji. Suaugusiųjų skaičiaus ir vaikų skaičiaus santykis yra 5:3. Kiek žiūrovų yra salėje?

6. Žuvų parduotuvėje prekiaujama lydekomis, karšiais ir ešeriais. Viena lydeka kainuoja 5, karšis – 3 ir ešerys – 1 eurą. Jonaitis ir Petraitis pirko žuvų už tą pačią pinigų sumą. Jonaitis pirko po vienodą lydekų ir karšių skaičių, o Petraitis – lydekų pirko 2 kartus mažiau negu karšių. Jonaitis pardavėjui padavė 100 eurų kupiūrą, o Petraitis keletą dešimties eurų kupiūrų (mažiausią reikiamų kupiūrų skaičių). Pardavėjas neturėjo smulkių pinigų, todėl Jonaičiui grąžą atidavė karšiais, o Petraičiui – ešeriais. Kiek žuvų iš parduotuvės išsinešė Jonaitis ir kiek Petraitis?

7. Kokią mažiausią reikšmę įgyja kvadratinis trinaris

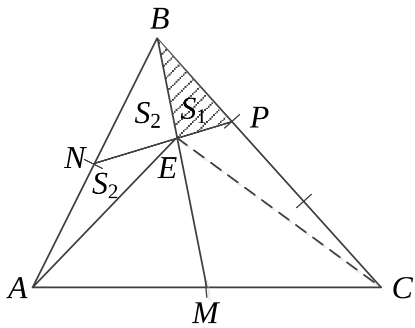
$$P(x) = x^2 + px + q,$$

jeigu jo šaknys x_1 ir x_2 susietos lygybe $x_1 - x_2 = 6$?

8. Skritulio skersmenys AB ir CD yra tarpusavyje statmeni. Styga DF kerta skersmenį AB taške E. Apskaičiuokite skritulio plotą, jei $DE = 4$, $EF = 3$.

9. Stačiakampio gretasienio trijų sienų plotai yra 6, 8 ir 27. Koks yra jo tūris?

10. Taškai M ir N yra trikampio ABC kraštinių AC ir AB vidurio taškai, o taškas P yra kraštinėje BC ir $BP = \frac{1}{3}BC$ (žr. pav.). Atkarpos BM ir PN susikerta taške E. Apskaičiuokite trikampio ABC plotą, jei trikampio BEP plotas lygus 2 cm^2.



I. SVEIKŲJŲ SKAIČIŲ SAVYBĖS

Eugenijus Stankus
(Vilniaus universitetas)

Skaičiai 1, 2, 3, ... vadinami natūraliaisiais. Juos žmonės sukūrė norėdami išreikšti įvairių tikrovės daiktų aibių dydžius ir lyginti juos. Jau prieš kelias dešimtis tūkstančių metų žmonės skaičiavo ir žymėjo skaičius brūkšnelių (vienetų) eilutėmis. Taip patogu reikšti tik nedidelius skaičius. Kad būtų galima užrašyti didelius skaičius, įvairios tautos sugalvojo savo vienetų grupavimo būdus ir sukūrė ženklus šioms grupėms žymėti. Pavyzdžiui, senovės egiptiečiai vieną ženklą naudojo dešimčiai, kitą šimtui, trečią tūkstančiui ir t.t. žymėti. Babiloniečiai grupavo vienetus po šešiasdešimt, o senovės majai – po dvidešimt.

Labiausiai paplito dabar naudojama dešimtainė pozicinė skaičiavimo sistema su pagrindu 10 ir skaitmenimis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 – Indijos matematikos palikimas (VI a.). Per šimtmečius senieji indų skaitmenys keitėsi kol įgavo šiuolaikinį pavidalą. Iš indų skaitmenis ir pozicinę dešimtainę sistemą perėmė arabai, o vėliau – europiečiai. Todėl mūsų naudojami skaitmenys dažnai vadinami arabiškais. Sveikieji neigiami skaičiai buvo pradėti naudoti Kinijoje ir Indijoje apie VII a., o Europoje tai įvyko tūkstantmečiu vėliau. Visais laikais skaičius buvo viena iš abstrakčiausių sąvokų, kuriomis naudojosi žmonija.

Su skaičiaus sąvoka susiduriame nuo pat vaikystės, vėliau veiksmų su skaičiais mokomės pradinėse vidurinės mokyklos klasėse, vyresnėse sužinome ir įdomesnių skaičių savybių. O jeigu pasirinktumėte universitetines matematikos studijas, tai šiai sričiai skirta matematikos šaka Skaičių teorija leistų Jums įsigilinti į įvairiausias skaičių problemas, tarp kurių dar daug yra ir neišspręstų.

Norintys giliau susipažinti su skaičių atsiradimo istorija galėtų paskaityti prancūzų matematikos mokytojo Žoržo Ifraho (Georges Ifrah, g. 1947 m.) knygą „Universalioji skaičių istorija“, išleistą 1994 m. Ši knyga yra išversta į daugiau kaip 20 pasaulio kalbų, tarp jų 2013 m. – ir į lietuvių (Georges Ifrah, Universalioji skaičių istorija, leidykla „Žara“, 2013).

Sveikųjų skaičių aibę $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ sudaro natūralieji skaičiai 1, 2, 3,... , sveikieji neigiami skaičiai –1, –2, –3,... ir skaičius 0.

1. Pozicinė skaičiavimo sistema. Užrašydami natūralųjį ar sveikąjį skaičių, pavyzdžiui, 2593 ar -746, naudojamės dešimtaine pozicine skaičiavimo sistema, t. y. turime omenyje, kad

$$2593 = 2\cdot 10^3 + 5\cdot 10^2 + 9\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0, -746 = -(7\cdot 10^2 + 4\cdot 10^1 + 6\cdot 10^0).$$

(Prisiminkime: $a^0 = 1$, kai $a > 0$.)

Skaičius 10 yra šios skaičiavimo sistemos pagrindas, todėl ji vadinama *dešimtaine pozicine skaičiavimo sistema*. Skaičiavimo sistemos pagrindu galima pasirinkti ir bet kurį, ne mažesnį už 2, natūralųjį skaičių g. Kad būtų patogiau laikykime, kad $2 \le g \le 10$. Tuomet, analogiškai kaip ir dešimtaine pozicine sistema, natūralųjį skaičių n galima užrašyti g-taine pozicine sistema, t. y. pavidalu

$$n = a_k \cdot g^k + a_{k-1} \cdot g^{k-1} + \ldots + a_2 \cdot g^2 + a_1 \cdot g^1 + a_0 \cdot g^0 ;$$

čia a_i yra skaitmenys, $0 \le a_i < g,\ i = 0, 1, 2, \ldots, k$.

Susitarkime: jeigu skaičius n užrašytas g-taine pozicine sistema, tai šią išraišką žymėsime n_g (šio žymens nenaudosime, kai skaičius užrašytas įprastine dešimtaine sistema). Pavyzdžiui, $457_8 = 4\cdot 8^2 + 5\cdot 8^1 + 7\cdot 8^0$, $11010_2 = 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0$. Nesunku apskaičiuoti kokie tai skaičiai dešimtaine sistema: $457_8 = 303$, $11010_2 = 26$.

Dešimtaine pozicine sistema užrašytą skaičių visada galima užrašyti bet kurio kito pagrindo pozicine sistema. Pavyzdžiui,

$$\begin{aligned} 2014 &= 8\cdot 251 + 6 = 8\cdot(8\cdot 31 + 3) + 6 = \\ &= 8\cdot(8\cdot(8\cdot 3 + 7) + 3) + 6 = \\ &= 3\cdot 8^3 + 7\cdot 8^2 + 3\cdot 8^1 + 6\cdot 8^0 = 3736_8, \end{aligned}$$

$$37 = 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^0 = 100101_2 .$$

Puikiai mokame sudėti ir sudauginti stulpeliu skaičius, užrašytus dešimtaine sistema. Su sveikaisiais skaičiais, kurie užrašyti kito pagrindo g sistema, šie veiksmai atliekami analogiškai – tik reikia nepamiršti, kad sistemos pagrindas yra ne 10, o g. Pavyzdžiui, sudėkime ir sudauginkime šešetainius skaičius:

$$\begin{array}{r} 235_6 \\ +\,42_6 \\ \hline 321_6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 235_6 \\ \times\,42_6 \\ \hline 514_6 \\ +1432_6 \\ \hline 15234_6 \end{array}$$

2. Sveikųjų skaičių dalumas.

Apibrėžimas. *Sakoma, jog skaičius a dalijasi iš skaičiaus b* (*žymima* $b \mid a$; *skaitoma b dalija a*)*, jeigu yra toks skaičius c, su kuriuo galioja lygybė* $a = b \cdot c$ ($a \in Z$, $b \in Z$, $b \neq 0$).

Skaičiai *b* ir *c* vadinami skaičiaus *a dalikliais*. Pavyzdžiui, skaičius 6 dalijasi iš 3 ($3 \mid 6$), taip pat jis dalijasi iš 2, 6 ir iš 1. Atkreipkime dėmesį, kad *nulis dalijasi iš bet kurio nelygaus nuliui sveikojo skaičiaus*.

Natūralieji skaičiai, kurie dalijasi tik iš savęs ir iš vieneto, vadinami *pirminiais skaičiais*. (Skaičius 1 nelaikomas pirminiu skaičiumi.) Tokie skaičiai yra 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ir t . t. Dar Euklidas IV a. pr. Kr. įrodė, kad pirminių skaičių yra be galo daug. Tačiau iki šiol nežinoma, ar *pirminių dvynių* porų, tokių kaip (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19) ir t. t., yra be galo daug. Tai – garsioji *pirminių dvynių problema*.

Suformuluosime pagrindines sveikųjų skaičių dalumo savybes, kurios nesunkiai išplaukia iš pateiktojo apibrėžimo:

1) jei $a \neq 0$, tai $a \mid a$;

2) jeigu $a \mid b$ ir $b \mid c$, tai $a \mid c$;

3) jei $a \mid b$ ir $b \mid a$, tai $a = b$;

4) jeigu $a \mid b$ ir $a \mid c$, tai $a \mid (b + c)$; ši savybė įrodoma ir su bet kuriuo dėmenų skaičiumi *m*: jei $a \mid b_1$, $a \mid b_2$, ..., $a \mid b_m$, tai $a \mid (b_1 + b_2 + \ldots + b_m)$.

Nustatyti ar vienas skaičius dalija kitą skaičių, kai skaičiai nedideli, pasitelkus skaičiuotuvą ar kompiuterį yra nesudėtinga. Galima pasinaudoti ir žinomais dalumo požymiais. Keletą iš jų prisiminkime.

1. Jeigu skaičiaus paskutinysis skaitmuo yra lyginis, t. y. 0, 2, 4, 6 arba 8, tuomet šis skaičius dalijasi iš 2.

2. Jei skaičiaus paskutinis skaitmuo yra 0 arba 5, tai jis dalijasi iš 5.

3. Jeigu skaičiaus skaitmenų suma dalijasi iš 3, tuomet ir šis skaičius dalijasi iš 3.

4. Jeigu skaičiaus skaitmenų suma dalijasi iš 9, tuomet ir šis skaičius dalijasi iš 9.

Sudėtingiau atsakyti į klausimą, ar pasirinktasis skaičius yra pirminis. Pavyzdžiui, galbūt ir pavyktų nustatyti, kad 997 yra didžiausias triženklis pirminis skaičius. Tačiau vienam kompiuteriui neįveikiama būtų įrodyti, kad skaičius $2^{57885161}-1$ (jis turi 17425170 skaitmenų) yra pirminis. Tai pats didžiausias šiuo metu žinomas pirminis skaičius, surastas apjungus daugybės kompiuterių resursus ir naudojant specialias kompiuterines programas.

Šioje temoje spręsime paprastesnius uždavinius – patyrinėsime kai kurių pavidalų sveikųjų skaičių dalumo bei kitokias savybes.

3. Sveikųjų skaičių dalyba su liekana. Tegu $m \geq 2$ – natūralusis skaičius. Tuomet kiekvieną sveikąjį skaičių a vieninteliu būdu galima užrašyti pavidalu $a = mq + r$; čia $q \in \mathrm{Z},\ 0 \leq r < m$. Šis teiginys vadinamas *dalybos su liekana teorema*. Jeigu $r = 0$, gauname $a = mq$, t. y. skaičius a dalijasi iš m.

Kai $m = 2$, tai kiekvienas sveikasis skaičius a turi pavidalą $a = 2q$ (yra lyginis) arba $a = 2q + 1$ (yra nelyginis). Vadinasi, *dviejų iš eilės einančių sveikųjų skaičių sandauga* $a \cdot (a+1)$ *visuomet dalijasi iš* 2.

Kai $m = 3$, tai kiekvienas sveikasis skaičius a turi pavidalą $a = 3q$, arba $a = 3q + 1$, arba $a = 3q + 2$. Vadinasi, *trijų iš eilės einančių sveikųjų skaičių sandauga* $b = a \cdot (a+1) \cdot (a+2)$ *visuomet dalijasi iš* 3, o kadangi tokia sandauga dalijasi ir iš 2, *tai skaičius b dalijasi iš* 6.

1 pavyzdys. Įrodykime, kad skaičius $b = a \cdot (a^2 - 7)$ su visais $a \in \mathrm{Z}$ dalijasi iš 6 (naudojant dalumo žymenį: $6 \mid (a \cdot (a^2 - 7))$).

Įrodymas. Kad skaičius dalytųsi iš 6, jis turi dalytis ir iš 2, ir iš 3.

Skaičius b dalijasi iš 2, nes jis bet kuriuo atveju yra lyginio ir nelyginio skaičių sandauga, t. y. lyginis skaičius: jei $a = 2q$, tai $b = 2q(4q^2 - 7)$; jei $a = 2q + 1$, tai

$$b = (2q+1) \cdot ((2q+1)^2 - 7) = (2q+1) \cdot (4q^2 + 4q + 1 - 7) = 2(2q+1) \cdot (2q^2 + 2q - 3).$$

Skaičius b dalijasi ir iš 3. Tuo įsitikinsime panagrinėję visas galimas skaičiaus a išraiškas: $a = 3q$, $a = 3q + 1$ ir $a = 3q + 2$. Jeigu $a = 3q$, tai $b = 3q(9q^2 - 7)$. Jei $a = 3q + 1$, tuomet

$$b = (3q+1)\cdot((3q+1)^2 - 7) = (3q+1)\cdot(9q^2 + 6q + 1 - 7) =$$
$$= 3(3q+1)(3q^2 + 2q - 2).$$

Jei $a = 3q + 2$, tai

$$b = (3q+2)\cdot((3q+2)^2 - 7) = (3q+2)\cdot(9q^2 + 12q + 4 - 7) =$$
$$= 3(3q+2)(3q^2 + 4q - 1).$$

Vadinasi, skaičius $b = a\cdot(a^2 - 7)$ su visais $a \in Z$ dalijasi iš 6.

4. Matematinės indukcijos metodas ir dalumas. Matematikoje egzistuoja daug teiginių, kurie formuluojami priklausomai nuo natūraliojo skaičiaus n (juos žymėsime $T(n)$). Tokių teiginių pavyzdžiai:

1) per plokštumos tašką išvestos n nesutampančių tiesių dalina plokštumą į $2n$ dalių;
2) skaičius $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ yra natūralusis;
3) kai $0 < a < 1$, galioja nelygybė $(1-a)^n < \frac{1}{1+na}$;
4) skaičius $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ dalijasi iš 133;
5) skaičiai $n^2 + n + 5$ yra pirminiai;
6) skaičiai $2^{2^{n-1}} + 1$ yra pirminiai.

Kaip nustatyti, ar teiginys $T(n)$ teisingas su visais natūraliaisiais skaičiais n, jeigu pavyko įsitikinti, kad atskirais atvejais jis teisingas? Atsakyti į šį klausimą kartais pavyksta tam tikra samprotavimų seka – vadinamuoju *matematinės indukcijos metodu*:

jeigu

1. *teiginys* $T(n)$ *teisingas su* $n = 1$ (t. y. $T(1)$ teisingas),

2. *iš to, kad teiginys teisingas su* $n = k$ (t. y. $T(k)$ teisingas), *išplaukia, jog jis teisingas ir su* $n = k + 1$ (t. y. $T(k+1)$ teisingas),

tuomet teiginys $T(n)$ ***teisingas su visais natūraliaisiais skaičiais*** n.

Naudojantis šiuo metodu galima įrodyti, kad pirmųjų keturių pavyzdžių atvejais teiginys $T(n)$ teisingas su visais natūraliaisiais skaičiais. Penkto ir šešto pavyzdžio teiginiai negalioja su visais natūraliaisiais skaičiais *n*, nors, $T(1)$, ir ne tik, yra teisingi.

Matematinės indukcijos metodas dažnai sėkmingai taikomas skaičių dalumo uždaviniuose.

2 pavyzdys. Įrodykime, kad bet kurių trijų iš eilės einančių sveikųjų skaičių kubų suma $S(a) = a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3$, $a \in \mathrm{Z}$, dalijasi iš 9.

Įrodymas. Pirmiausia tiesiogiai naudodamiesi matematinės indukcijos metodu įrodysime, kad suma $S(n) = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ su visais natūraliaisiais skaičiais *n* dalijasi iš 9.

1. Suma $S(1) = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$ dalijasi iš 9.

2. Tarkime, kad suma $S(k) = k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ dalijasi iš 9. Turime įrodyti, kad suma $S(k+1)$ taip pat dalijasi iš 9:

$$\begin{aligned}
S(k+1) &= (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = \\
&= (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27 = \\
&= (k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3) + 9(k^2 + 3k + 3) = \\
&= S(k) + 9(k^2 + 3k + 3).
\end{aligned}$$

Kadangi abu dėmenys dalijasi iš 9, tai iš 9 dalijasi ir suma $S(k+1)$ (žr. 4 dalumo savybę).

Taigi teiginys „$S(n) = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ dalijasi iš 9“ teisingas su visais natūraliaisiais *n*.

Atkreipkime dėmesį, kad $S(0) = 0^3 + (0+1)^3 + (0+2)^3 = 9$.

Norėdami įrodyti, kad teiginys galioja ir su visais sveikaisiais neigiamais skaičiais, vietoje *a* įrašykime $-n$, t. y. nagrinėkime sumą $S(-n) = (-n)^3 + (-n+1)^3 + (-n+2)^3$ ir vėl įrodymui taikykime matematinės indukcijos metodą.

1. Su $n = 1$ $S(-1) = (-1)^3 + (-1+1)^3 + (-1+2)^3 = 0$ dalijasi iš 9.

2. Tarkime, kad su $n = k$ suma $S(-k) = (-k)^3 + (-k+1)^3 + (-k+2)^3$

dalijasi iš 9. Turime įrodyti, kad suma $S(-(k+1))$ taip pat dalijasi iš 9:

$$S(-(k+1)) = (-(k+1))^3 + (-k)^3 + (-k+1)^3 =$$
$$=((-k+2)-3)^3 + (-k)^3 + (-k+1)^3 =$$
$$=(-k)^3 + (-k+1)^3 + (-k+2)^3) - 3\cdot 3(-k+2)^2 + 3\cdot 9(-k+2) - 27 =$$
$$= S(-k) + 9\cdot(-(-k+2)^2 + 3(-k+2) - 3).$$

Kadangi abu dėmenys dalijasi iš 9, tai iš 9 dalijasi ir suma $S(-(k+1))$. Vadinasi, teiginys „suma

$$S(-n) = (-n)^3 + (-n+1)^3 + (-n+2)^3$$

dalijasi iš 9“ teisingas su visais natūraliaisiais n.

Taigi $S(a) = a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3$ dalijasi iš 9 su visais sveikaisiais skaičiais a.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Dešimtainės sistemos skaičių 1999 užrašykite septintainės sistemos skaičiumi, o skaičių 127 – dvejetainės sistemos skaičiumi.

2. Skaičius 10101010_2 ir 1234321_5 užrašykite dešimtainės sistemos skaičiais.

3. Apskaičiuokite sumą $327_8 + 732_8$ ir sandaugą $1357_8 \times 72_8$.

4. Ar skaičiai $a^3 + 11a$, $a \in Z$, dalijasi iš 6? Atsakymą pagrįskite.

5. Įrodykite, kad jokio sveikojo skaičiaus kvadratas negali būti pavidalo $3q+2$, $q \in Z$.

6. Įrodykite, kad $6 \mid (14a^3 + 9a^2 + a)$ su visais $a \in Z$.

7. Įrodykite, kad $9 \mid (7^n + 3n - 1)$ su visais natūraliaisiais skaičiais n.

8. Įrodykite, kad $7 \mid (4^{2n+1} + 3^{2n+1})$ su visais natūraliaisiais skaičiais n.

9. Įrodykite, kad $11 \mid (6^{2n} + 3^{n+2} + 3^{n})$ su visais natūraliaisiais skaičiais n.

10. Kiek iš viso skaitmenų reikės abiem skaičiams 2^{2014} ir 5^{2014} užrašyti dešimtaine pozicine skaičiavimo sistema?

II. FUNKCIJOS IR JŲ GRAFIKAI

Antanas Apynis (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Lietuvos edukologijos universitetas)

1. Funkcijos sąvoka yra viena iš svarbiausių matematikos sąvokų. Tiek mokykliniuose vadovėliuose, tiek studentams skirtose knygose funkcija apibrėžiama ne vienodai. Taip pat skiriasi ir žymėjimai. Nežiūrint to, visų apibrėžimų esmė ta pati.

Sakykim, X ir Y yra dvi aibės. Taisyklė f, pagal kurią kiekvienam aibės X elementui (taškui) x priskiriamas vienintelis aibės Y elementas (taškas) y, vadinama *funkcija*. Aibė X vadinama funkcijos *apibrėžimo sritimi* (paprastai žymima $D(f)$). Funkcijos f reikšmė taške x, $x \in X$, žymima $f(x)$. Taigi $f(x) = y$. Aibė

$$E(f) = \{y \in Y : y = f(x), x \in X\}$$

vadinama funkcijos f *reikšmių sritimi*.

Funkcija f simboliškai užrašoma taip:

$$f: X \to Y, \text{ arba } X \xrightarrow{f} Y, \text{ arba } y = f(x), x \in X,$$
$$\text{arba tiesiog } f(x), x \in X.$$

Mokykliniame matematikos kurse paprastai aibės X ir Y yra realiųjų skaičių aibės, o funkcijos apibrėžiamos formulėmis.

Kai nenurodoma funkcijos apibrėžimo sritis, apibrėžimo sritimi laikoma skaičių, kuriems esant formulė turi prasmę, aibė.

Išnagrinėkime porą pavyzdžių.

1 pavyzdys. Raskime funkcijos

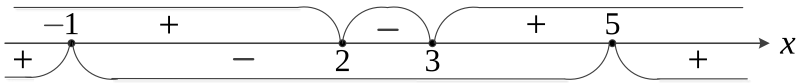
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}$$

apibrėžimo sritį.

Sprendimas. Funkcijos apibrėžimo sričiai $D(f)$ rasti reikia išspręsti nelygybių $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ ir $5 - 4x - x^2 > 0$ sistemą:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0, \\ 5 + 4x - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3) \geq 0, \\ (x-5)(x+1) < 0. \end{cases}$$

Taikydami intervalų metodą (*žr.* 1 pav.) gauname, kad pirmos nelygybės sprendinių aibė yra $(-\infty;\, 2] \cup [3;\, +\infty)$, o antros nelygybės sprendinių aibė yra intervalas (–1; 5). Vadinasi, sistemos sprendinių aibė yra $(-1;\, 2] \cup [3;\, 5)$.



1 pav.

Ats.: $D(f) = (-1;\, 2] \cup [3;\, 5)$.

2 pavyzdys. Raskime funkcijos $f(x) = \sqrt{\dfrac{9x^2+1}{x}}$ reikšmių sritį.

Sprendimas. Funkcijos apibrėžimo sritis yra intervalas $(0;\, +\infty)$. Jos reikšmių sritis $E(f)$ yra aibė dydžio a, $a \geq 0$, reikšmių, kurioms esant lygtis $\sqrt{\dfrac{9x^2+1}{x}} = a$ turi bent vieną sprendinį. Šią lygtį pakėlę kvadratu ir abi jos puses padauginę iš $x \neq 0$, gauname lygtį $9x^2 - a^2x + 1 = 0$. Ji turi sprendinių, jei $D = a^4 - 36 \geq 0$, t. y. $(a - \sqrt{6})(a + \sqrt{6})(a^2 + 6) \geq 0$. Iš čia gauname, kad $a \geq \sqrt{6}$ (atsižvelgėme, kad $a \geq 0$).

Ats.: $E(f) = [\sqrt{6};\, +\infty)$.

2. Funkcijos *f*, kurios apibrėžimo sritis yra *X*, *grafiku* vadinama porų $(x;\, f(x))$, $x \in X$, aibė ir žymima $G(f)$. Taigi

$$G(f) = \{(x;\, f(x) : x \in X\}.$$

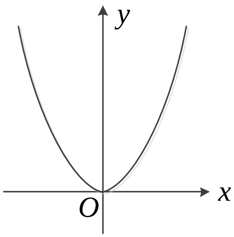
Išnagrinėkime porą funkcijos grafiko vaizdavimo pavyzdžių.

3 pavyzdys. Funkcijos $f(x) = x^2$, $x \in R$, grafiko

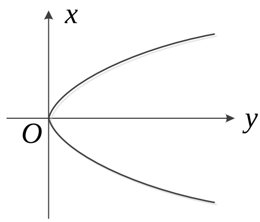
$$G(f) = \{(x;\, x^2) : x \in R\}$$

vaizdas Dekarto koordinačių sistemoje *xOy* yra parabolė (*žr.* 2 pav.). Lygybė $y = x^2$ vadiname parabolės lygtimi.

Jeigu *Ox* ašimi laikytume vertikaliąją ašį, o *Oy* ašimi – horizontaliąją ašį, tai gautume grafiko $G(f)$ vaizdą, parodytą 3 paveiksle.



2 pav.

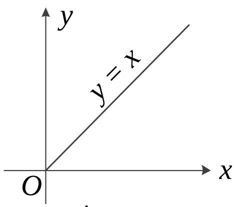


3 pav.

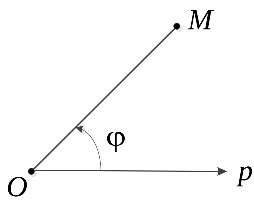
4 pavyzdys. Funkcijos $f(x) = x, \quad x \in [0; +\infty)$ grafiko,

$$G(f) = \{(x; x) : x \in [0; +\infty)\}$$

vaizdas stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje yra spindulys (*žr.* 4 pav.), kurio lygtis yra $y = x, \quad x \in [0; +\infty)$. Dabar susipažinkime su grafiko $G(f)$ pavaizdavimu polinėje koordinačių sistemoje.



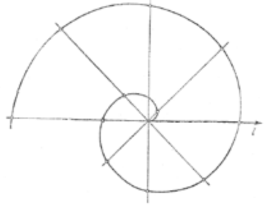
4 pav.



5 pav.

Tegu *Op* – plokštumos spindulys (5 pav.). Tada bet kurio plokštumos taško *M* padėtį galima nusakyti skaičių pora $(\varphi; r)$; čia r – taško *M* atstumas iki taško *O*, o φ – spindulio *Op* posūkio prieš laikrodžio rodyklę kampas (matuojamas radianais). Skaičių pora $(\varphi; r)$ vadinama taško *M polinėmis koordinatėmis*. Taško *O* polinės koordinatės yra $(\varphi; 0)$, $\varphi \in [0; +\infty)$. Atkreipkime dėmesį, kad skaičių pora $(\varphi + 2n\pi, r)$, $n \in N$, taip pat yra taško *M* polinės koordinatės.

Grafiko $G(f) = \{(\varphi; \varphi) : \varphi \in [0; +\infty)\}$ vaizdas polinėje koordinačių sistemoje yra Archimedo spiralė (6 pav.). Jos lygtis yra $r = \varphi, \quad \varphi \ge 0$.



6 pav.

Aiškų, kad

$$G(f) = \{(x; x) : x \in [0; +\infty)\} \quad \text{ir} \quad G(f) = \{(\varphi; \varphi) : \varphi \in [0; +\infty)\}$$

yra ta pati aibė. Matome, kad tos aibės vaizdas polinėje koordinačių sistemoje yra kitoks negu stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje.

Mokyklinėje matematikoje naudojama tik stačiakampė Dekarto koordinačių sistema, todėl funkcijos f grafiko $G(f)$ vaizdas vadinamas tiesiog funkcijos f *grafiku*.

3. Funkcija f vadinama *lygine* funkcija, jeigu:

1) $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$

ir

2) $f(-x) = f(x),\ x \in D(f).$

Pirma sąlyga $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$ reiškia, kad funkcijos apibrėžimo sritis $D(f)$ yra simetrinė nulio atžvilgiu.

Jeigu funkcijos f apibrėžimo sritis $D(f)$ yra simetrinė nulio atžvilgiu ir galioja sąlyga

$$f(-x) = -f(x),\ x \in D(f),$$

tai funkcija vadinama *nelygine* funkcija.

Pavyzdžiui, funkcija $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$ yra lyginė, nes jos apibrėžimo sritis $(-\infty; +\infty)$ yra simetrinė nulio atžvilgiu ir

$$f(-x) = \sqrt[3]{(1-(-x))^2} + \sqrt[3]{(1+(-x))^2} = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} = f(x),$$

kai $x \in (-\infty; +\infty)$.

Funkcija $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$, kurios apibrėžimo sritis $(-\infty; +\infty)$ taip pat simetrinė nulio atžvilgiu, yra nelyginė, nes

$$f(-x) = \sqrt{1+(-x)+(-x)^2} - \sqrt{1-(-x)+(-x)^2} =$$

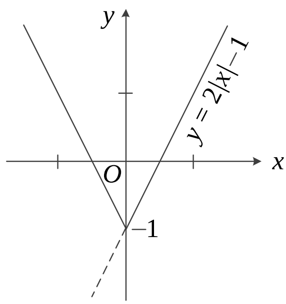
$$= \sqrt{1-x+x^2} - \sqrt{1+x+x^2} = -f(x),$$

kai $x \in (-\infty; +\infty)$.

Funkcija $f(x) = x^2,\ x \in [-2; 5]$, yra nei lyginė, nei nelyginė, nes jos apibrėžimo sritis [–2; 5] nėra simetrinė nulio atžvilgiu.

Nesunku įsitikinti, kad funkcija $f(x) = x^3 + x + 1$ taip pat yra nei lyginė, nei nelyginė.

Kadangi lyginė funkcija tenkina lygybę $f(-x) = f(x)$, kai $x \in D(f)$, tai jos grafikas yra simetrinė kreivė *Oy* ašies atžvilgiu. Nelyginės funkcijos grafikas yra simetriškas koordinačių pradžios taško atžvilgiu.



7 pav.

5 pavyzdys. Nubrėžkime funkcijos $f(x) = 2|x| - 1$ grafiką.

Sprendimas. Kadangi funkcija yra lyginė, užtenka nubrėžti funkcijos $f(x) = 2x - 1,\quad x \geq 0,$ grafiką ir atlikti jo simetriją *Oy* ašies atžvilgiu. Šios funkcijos grafikas pavaizduotas 7 paveiksle.

4. Funkcija $h: X \to Z$ vadinama funkcijų $f: X \to Y$ ir $g: Y \to Z$ *kompozicija*, jeigu $h(x) = g(f(x)),$ kai $x \in X$. Funkcijų *f* ir *g* kompozicija paprastai žymima $g \circ f$, t. y. $h = g \circ f$.

Esminė sąlyga apibrėžiant funkcijų *f* ir *g* kompoziciją $g \circ f,$ kai nenurodytos funkcijų *f* ir *g* apibrėžimo sritys, yra $E(f) \subset D(g)$. Apibrėžiant kompoziciją $f \circ g$ turi galioti sąlyga $E(g) \subset D(f)$.

Funkcijų kompozicija taip pat vadinama *sudėtine funkcija*.

6 pavyzdys. Raskime funkcijų $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ir $g(x) = \sqrt{x - 1}$ kompozicijas $f \circ g$ ir $g \circ f$ bei jų apibrėžimo sritis.

Sprendimas. Kadangi funkcijos *g* apibrėžimo sritis yra $D(g) = [1; +\infty),$ ir

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{4 - (g(x))^2} = \sqrt{4 - (\sqrt{x - 1})^2},$$

tai funkcijos $f \circ g$ apibrėžimo sričiai $D(f \circ g)$ priklausys tik tie srities $D(g)$ taškai, kuriuose reiškinys $\sqrt{4 - (\sqrt{x-1})^2}$ turi prasmę. Taigi $D(f \circ g)$ yra nelygybių sistemos $\begin{cases} 4 - (\sqrt{x-1})^2 \geq 0, \\ x \geq 1 \end{cases}$ sprendinių aibė.

Spręsdami šią sistemą, gauname:

$$\begin{cases} 4 - (\sqrt{x-1})^2 \geq 0, \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x + 1 \geq 0, \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5, \\ x \geq 1. \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; 5] \subset D(g).$$

Vadinasi, $D(f \circ g) = [1;\,5]$, ir $(f \circ g)(x) = \sqrt{5-x}$.

Funkcijos f apibrėžimo sritis $D(f)$ yra nelygybės $4 - x^2 \geq 0$ sprendinių aibė [–2; 2]. Kadangi

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x) - 1} = \sqrt{\sqrt{4-x^2} - 1},$$

tai funkcijos $g \circ f$ apibrėžimo sritis $D(g \circ f)$ yra nelygybių sistemos $\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0, \\ \sqrt{4-x^2} - 1 \geq 0 \end{cases}$ sprendinių aibė. Spręsdami šią sistemą, gauname:

$$\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0, \\ \sqrt{4-x^2} - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2;\,2], \\ 4 - x^2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2;\,2], \\ (\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2;\,2], \\ x \in [-\sqrt{3};\,\sqrt{3}] \end{cases} \Leftrightarrow \; x \in [-\sqrt{3};\,\sqrt{3}] \subset D(f).$$

Vadinasi, $D(g \circ f) = [-\sqrt{3};\,\sqrt{3}]$, $(g \circ f)(x) = \sqrt{\sqrt{4-x^2} - 1}$.

Ats.: $(f \circ g)(x) = \sqrt{5-x}$, $(g \circ f)(x) = \sqrt{\sqrt{4-x^2} - 1}$,

$D(f \circ g) = [1;\,5]$, $D(g \circ f) = [-\sqrt{3};\,\sqrt{3}]$.

Kartais funkcijų kompozicijos operaciją tenka taikyti keletą kartų. Pavyzdžiui, trijų funkcijų *f*, *g* ir *h* kompozicija $h \circ g \circ f$ suprantama kaip funkcijų $g \circ f$ ir *h* kompozicija $h \circ (g \circ f)$.

7 pavyzdys. Tegu $f(x) = \dfrac{x}{2x+1}$, $x \neq -\dfrac{1}{2}$. Raskime kompozicijos $f \circ f \circ f$ išraišką $(f \circ f \circ f)(x)$.

Sprendimas. Pažymėkime $f_1 = f \circ f$. Tada

$$f_1(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{2f(x)+1} = \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{2\dfrac{x}{2x+1} + 1} = \frac{x}{4x+1},$$

$$x \neq -\frac{1}{2},\; x \neq -\frac{1}{4};$$

$$(f\circ f\circ f)(x)=(f\circ f_1)(x)=f(f_1(x))=\frac{f_1(x)}{2f_1(x)+1}=\frac{\dfrac{x}{4x+1}}{2\dfrac{x}{4x+1}+1}=\frac{x}{6x+1},$$

$$x\neq-\frac{1}{2},\ x\neq-\frac{1}{4},\ x\neq-\frac{1}{6}.$$

Ats.: $(f\circ f\circ f)(x)=\dfrac{x}{6x+1},\ x\neq-\dfrac{1}{2},\ x\neq-\dfrac{1}{4},\ x\neq-\dfrac{1}{6}.$

Tegu funkcijos *f* apibrėžimo sritis yra $D(f)$, o reikšmių sritis yra $E(f)$. Funkcija f^{-1} vadinama funkcijos *f atvirkštine funkcija*, jeigu jos apibrėžimo sritis yra $E(f)$, reikšmių sritis yra $D(f)$ ir galioja sąlygos;

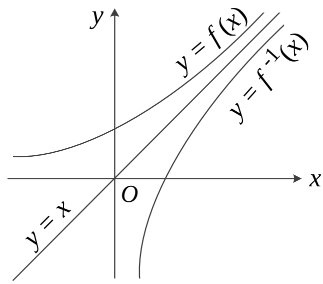
1) $f^{-1}(f(x))=x$, kai $x\in D(f)$; 2) $f(f^{-1}(y))=y$, kai $y\in E(f)$.

Atkreipkime dėmesį, kad funkcijos f^{-1} atvirkštinė funkcija yra *f*. Taigi funkcijos *f* ir f^{-1} yra *viena kitai atvirkštinė*.

8 paveiksle *xOy* koordinačių sistemoje pavaizduotas funkcijos *f* grafikas, kurio lygtis $y=f(x)$. Ta kreivė kartu yra ir atvirkštinės funkcijos f^{-1} grafikas, kurio lygtis koordinačių sistemoje *yOx* yra

$$x=f^{-1}(y),\ \ y\in E(f).$$

Tačiau įprasta abiejų funkcijų (f ir f^{-1}) grafikus vaizduoti toje pačioje koordinačių sistemoje *xOy*. Joje atvirkštinės funkcijos f^{-1} grafiko lygtis yra $y=f^{-1}(x)$. Šioje sistemoje atvirkštinės funkcijos grafikas yra kreivė, simetriška funkcijos f grafikui tiesės $y=x$ atžvilgiu.



8 pav.

8 pavyzdys. Patikrinkime, ar funkcijos:
a) $f(x)=1-\sqrt[3]{x}$ ir $g(x)=(1-x)^3$; b) $f(x)=1+\sqrt{x}$ ir $g(x)=(x-1)^2$;
yra viena kitai atvirkštinė funkcijos.

Sprendimas. a) Kadangi

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=(1-f(x))^3=(1-1+\sqrt[3]{x})^3=x,\quad x\in R$$

ir

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=1-\sqrt[3]{(1-x)^3}=1-1+x=x,\quad x\in R,$$

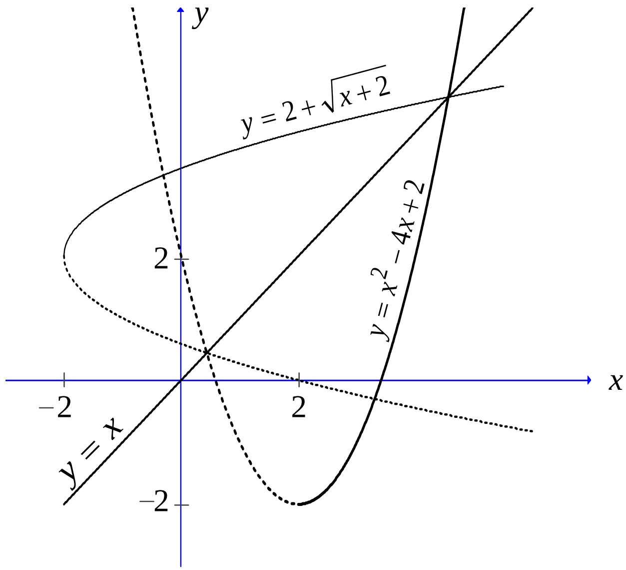
tai *f* ir *g* yra viena kitai atvirkštinės funkcijos.

b) Funkcijos f ir g nėra viena kitai atvirkštinės, nes $D(g)=(-\infty;+\infty)$, $E(f)=[1;+\infty)$. Taigi $D(g)\neq E(f)$.

9 pavyzdys. Ištirkime, ar funkcija $f(x)=x^2-4x+2$ turi atvirkštinę funkciją.

Sprendimas. Šios funkcijos apibrėžimo sritis yra $D(f)=R$, o reikšmių sritis yra $E(f)=[-2;+\infty)$.

Pasirinkime bet kurį y iš funkcijos f reikšmių srities $E(f)$ ir sudarykime lygtį $x^2-4x+2=y$. Jos sprendiniai yra du: $2+\sqrt{y+2}$ ir $2-\sqrt{y+2}$. Vadinasi, srityje $D(f)$ funkcija f atvirkštinės funkcijos neturi. Tačiau apibrėžimo srities $D(f)$ poaibyje [2; +∞) atvirkštinė



9 pav.

funkcija f^{-1} egzistuoja, nes lygtis $x^2-4x+2=y$ turi tik vieną sprendinį $x = 2 + \sqrt{y+2}$. Atvirkštinės funkcijos f^{-1} išraiška yra

$$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+2}, \quad x \geq -2.$$

Funkcijų $f(x) = x^2 - 4x + 2$ ir $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+2}$ grafikai pavaizduoti 9 paveiksle.

Apibrėžimo srities $D(f)$ poaibyje (–∞; 2] atvirkštinė funkcija f^{-1} taip pat egzistuoja. Jos išraiška yra

$$f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+2}, \quad x \geq -2.$$

Ne kiekviena funkcija turi atvirkštinę funkciją. Jeigu funkcija yra griežtai monotoninė (tik didėjanti arba tik mažėjanti), tai ji turi atvirkštinę.

10 pavyzdys. Įrodykime, kad funkcija $f(x) = \dfrac{3x+5}{4x-3}$ $x \neq \dfrac{3}{4}$, yra pati sau atvirkštinė.

Sprendimas. Kadangi

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) =$$

$$= \frac{3f(x)+5}{4f(x)-3} = \frac{3\dfrac{3x+5}{4x-3}+5}{4\dfrac{3x+5}{4x-3}-3} = \frac{9x+15+20x-15}{12x+20-12x+9} = \frac{29x}{29} = x, \quad x \neq \frac{3}{4},$$

tai $f^{-1}(x) = f(x), \quad x \neq \dfrac{3}{4}.$

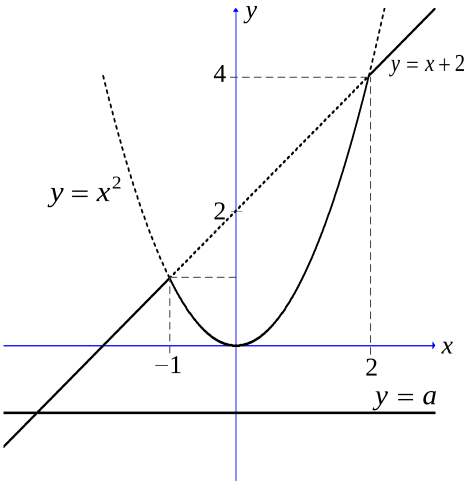
5. Kartais lygtis ar nelygybes būna patogiau spręsti remiantis funkcijų grafikais. Išnagrinėkime vieną pavyzdį.

11 pavyzdys. Didžiausią iš skaičių *u* ir *v* pažymėkime $\max(u; v)$, o mažiausią iš šių skaičių $\min(u; v)$. Raskime lygties $\min(x^2; x+2) = a,$ $a \in R$, sprendinių skaičių priklausomai nuo parametro *a* reikšmių.

Sprendimas. Nubrėžkime funkcijos $f(x) = \min(x^2, x+2)$ grafiką.

Vienoje koordinačių sistemoje nubrėžkime funkcijų $f_1(x) = x^2$ ir $f_2(x) = x + 2$ grafikus (*žr.* 10 pav.). Funkcijų grafikai susikerta taškuose (–1; 1) ir (2; 4). Remdamiesi šių funkcijų grafikais, gauname, kad

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{kai } -\infty < x \le -1, \\ x^2, & \text{kai } -1 < x \le 2, \\ x+2, & \text{kai } x > 2. \end{cases}$$



10 pav.

Šios funkcijos grafikas pavaizduotas ištisine linija (10 pav.). Nesunku nustatyti keliuose taškuose jis susikerta su tiese $y=a,\ \ a\in R.$ Vieną tašką gausime, kai $a<0$ arba $a>1$; du taškus, kai $a=0$ arba $a=1$, ir tris susikirtimo taškus gausime, kai $0<a<1$. Kiekvienas susikirtimo taškas atitinka vieną lygties $\min(x^2;\, x+2)=a,\quad a\in R$, sprendinį.

Ats.: 1 sprendinys, kai $a<0$ arba $a>1$;
2 sprendiniai, kai $a=0$ arba $a=1$;
3 sprendiniai, kai $0<a<1$.

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Raskite funkcijos $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-3}{1-3x+2x^2}}$ apibrėžimo sritį.

2. Raskite funkcijos $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x^2+2x-1}$ reikšmių aibę.

3. Ištirkite funkcijos $f(x)=x\cdot\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ lyginumą.

4. Nubrėžkite funkcijos $f(x)=x^2-4|x|+3$ grafiką.

5. Funkcija *f* apibrėžta formule $f(x)=\begin{cases}3-\dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \text{kai } x>0,\\ g(x), & \text{kai } x<0.\end{cases}$

Raskite tokią funkciją *g*, kad funkcija *f* būtų nelyginė. Išspręskite lygtį $f(x)=1$.

6. Raskite funkcijų $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$ ir $g(x)=\sqrt{2-x}$ kompozicijas $f\circ g$ ir $g\circ f$ bei jų apibrėžimo sritis.

7. Raskite kompozicijos $f\circ f\circ f$ išraišką $(f\circ f\circ f)(x)$, kai $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

8. Raskite funkcijos $f(x)=\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+1}}+\sqrt[3]{x^3-\sqrt{x^2+1}}$ atvirkštinę funkciją.

9. Su kuriomis parametrų a ir b reikšmėmis funkcija $f(x)=\dfrac{ax+1}{2x+b}$ pati sau atvirkštinė.

10. Raskite lygties $\max(x^2-2x+2;\,2+4x-x^2)=a$, $a\in R$, sprendinių skaičių priklausomai nuo parametro a reikšmių.

III. LYGČIŲ IR NELYGYBIŲ SUDARYMO UŽDAVINIAI

Antanas Apynis
(Vilniaus universitetas)

Išmokus spręsti įvairių lygčių, nelygybių ir jų sistemų, natūralu užsiimti įgytų žinių ir gebėjimų taikymu įvairioms problemoms nagrinėti ir spręsti.

Šioje jauniesiems matematikams pateikiamoje temoje siūloma sugrįžti prie tekstinių uždavinių. Iš kitų uždavinių jie išsiskiria tuo, kad visos sąsajos tarp žinomų ir ieškomų dydžių yra nusakomos žodžiais. Tokie uždaviniai reikalauja gebėjimo įsigilinti į sąlygą ir tam tikro sumanumo sudarant problemos matematinį modelį.

Atsisakyta minties kaip nors suklasifikuoti tekstinius uždavinius bei pateikti kokių nors standartinių sprendimo schemų. Nagrinėjami konkretūs pavyzdžiai, tikimės, padės savarankiškai išspręsti visą užduotį.

1 pavyzdys. Dviejų skaičių suma lygi 1244. Jeigu pirmo skaičiaus gale prirašytume skaitmenį 3, o antro skaičiaus gale nubrauktume skaitmenį 2, tai gautume du lygius skaičius. Raskime šiuos du skaičius.

Sprendimas. Tegu a yra pirmas skaičius, o $\overline{b2} = 10b + 2$ – antras skaičius. Pagal uždavinio sąlygą, $a + \overline{b2} = a + 10b + 2 = 1244$ ir $\overline{a3} = b.$ Kadangi $\overline{a3} = 10a + 3,$ gauname lygybę $10a + 3 = b.$

Skaičiams a ir b rasti išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} a + 10b + 2 = 1244, \\ 10a + 3 = b. \end{cases}$$

Gausime:

$$\begin{cases} a + 10b = 1242, \\ b = 10a + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 10(10a + 3) = 1242, \\ b = 10a + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 12, \\ b = 123. \end{cases}$$

Taigi pirmas skaičius yra 12, o antras skaičius yra 1232.

Ats.: 12 ir 1232.

2 pavyzdys. Pirmas skaičius didesnis už antrą tiek pat kartų, kiek kartų antras didesnis už trečią. Jeigu iš pirmo skaičiaus atimtume kitų dviejų sumą, tai gautume 2, o jeigu prie pirmo skaičiaus pridėtume pusę antro ir trečio skaičiaus skirtumo, gautume 9. Raskime šiuos tris skaičius.

Sprendimas. Tegu x, y ir z yra atitinkamai pirmas, antras ir trečias skaičius. Pirmame sakinyje pateiktą sąlygą galima išreikšti lygybe

$$\frac{x}{y}=\frac{y}{z},$$

o remiantis tolesnėmis sąlygomis galima sudaryti dvi lygtis:

$$x-(y+z)=2 \quad \text{ir} \quad x+\frac{1}{2}(y-z)=9.$$

Dabar spręskime trijų lygčių su nežinomaisiais x, y ir z sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{z}, \\ x-(y+z)=2, \\ x+\dfrac{1}{2}(y-z)=9. \end{cases} \tag{1}$$

Iš antros lygties gauname, kad $y+z=x-2$, o iš trečios gauname, kad $y-z=18-2x$. Tada:

$$\begin{cases} y+z=x-2, \\ y-z=18-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y=16-x, \\ 2z=3x-20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=8-\dfrac{1}{2}x, \\ z=\dfrac{3}{2}x-10. \end{cases}$$

Įrašę y ir z išraiškas į (1) sistemos pirmą lygtį, gausime:

$$\frac{x}{8-\frac{1}{2}x}=\frac{8-\frac{1}{2}x}{\frac{3}{2}x-10},$$

$$\frac{2x}{16-x}=\frac{16-x}{3x-20},$$

$$2x(3x-20)=(16-x)^2,$$

$$6x^2-40x=256-32x+x^2,$$

$$6x^2-40x=256-32x+x^2,$$

$$x=\frac{8\pm\sqrt{5184}}{10}=\frac{8\pm 72}{10}.$$

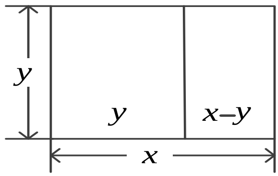
Taigi $x = 8$ arba $x = -6{,}4$. Įrašę į formules $y = 8 - \frac{1}{3}x$ ir $z = \frac{3}{2}x - 10$, gauname du skaičių trejetus:

$$x = 8,\ y = 4,\ z = 2 \quad \text{ir} \quad x = -6{,}4,\ y = 11{,}2,\ z = -19{,}6.$$

Ats.: 8, 4, 2; –6,4, 11,2, –19,6.

3 pavyzdys. Aptvertas stačiakampis sklypas, atrėžus jo dalį, pasidarė kvadratinis. Jo plotas sumažėjo 400 m^2, o tvora sutrumpėjo 20 m. Raskime pradinius sklypo matmenis.

Sprendimas. Tegu x yra pradinio sklypo ilgis, o y – jo plotis (*žr.* pav.).



Remiantis uždavinio sąlyga galima sudaryti dvi lygtis:

$$(x - y)y = 400 \quad \text{ir} \quad 2(x - y) = 20.$$

Spręsdami sistemą, gauname:

$$\begin{cases} 2(x-y) = 20, \\ (x-y)y = 400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 10, \\ 10y = 400 \end{cases} \Rightarrow y = 40,\ x = 50.$$

Taigi pradinio sklypo ilgis buvo 50 m, o plotis – 40 m.

Ats.: 50 m ir 40 m.

4 pavyzdys. Dviratininkas 96 kilometrų atstumą nuvažiavo 2 valandomis greičiau negu planavo, nes kas valandą jis nuvažiuodavo 1 kilometru daugiau negu tikėjosi nuvažiuoti per 1 valandą ir 15 minučių. Kokiu greičiu važiavo dviratininkas?

Sprendimas. Tegu v yra planuotas dviratininko greitis (km/h). Tada $(1{,}25v + 1)$ km/h yra greitis, kokiu jis važiavo. Pagal uždavinio sąlygą, turi galioti lygybė

$$\frac{96}{v} - \frac{96}{1{,}25v + 1} = 2.$$

Iš čia gauname kvadratinę lygtį

$$2{,}5v^2 - 22v - 96 = 0,$$

turinčią tik vieną teigiamą sprendinį $v = 12$. Todėl $1{,}25 \cdot v + 1 = 16$.

Vadinasi, dviratininkas važiavo 16 km/h greičiu.

Ats.: 16 km/h.

5 pavyzdys. Penki žmonės atlieka tam tikrą darbą. Pirmas, antras ir trečias, dirbdami kartu, gali visą užduotį įvykdyti per 15 valandų; pirmas, trečias ir penktas – per 10 valandų; pirmas, trečias ir ketvirtas – per 12 valandų, o antras, ketvirtas ir penktas kartu – per 8 valandas. Per kiek laiko visą užduotį, dirbdami kartu, galėtų įvykdyti visi 5 žmonės,?

Sprendimas. Visą darbo apimtį (tam tikrais matavimo vienetais) pažymėkime a; paprastai daroma prielaida, kad $a=1$.

Tegu a_i, $i=1,2,3,4,5,$ yra darbo apimties a dalis, kurią i-tasis žmogus gali atlikti per 1 valandą. Ieškomą laiką (valandomis), per kurį visą darbą atliktų (dirbdami kartu) visi 5 žmonės, pažymėkime t.

Pagal uždavinio sąlygą, turi galioti tokios lygybės:

$$15(a_1+a_2+a_3)=a,$$
$$10(a_1+a_3+a_5)=a,$$
$$12(a_1+a_3+a_4)=a,$$
$$8(a_2+a_4+a_5)=a,$$
$$t(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)=a.$$

Dydžiams a_1, a_2, a_3, a_4 ir a_5 rasti reikėtų išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3 = \dfrac{1}{15}a, \\ a_1+a_3+a_5=\dfrac{1}{10}a, \\ a_1+a_3+a_4=\dfrac{1}{12}a, \\ a_2+a_4+a_5=\dfrac{1}{8}a, \\ a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\dfrac{1}{t}a. \end{cases}$$

Tačiau turime rasti tik t. Tam pakanka sužinoti sumą $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$. Jai rasti ketvirtą lygtį padauginkime iš 2 ir sudėkime su pirmomis trimis lygtimis. Gausime:

$$3a_1+3a_2+3a_3+3a_4+3a_5=\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)a,$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{1}{6}a.$$

Įrašę šį rezultatą į ketvirtą lygtį, gauname, kad $t = 6$. Taigi visi 5 žmonės visą užduotį įvykdytų per 6 valandas.

Ats.: 6 h.

6 pavyzdys. Atstumas nuo miesto A iki miesto B yra 1320 kilometrų. Automobilis visą kelią nuo A iki B važiavo pastoviu greičiu v (km/h), o grįždamas – 10 km/h mažesniu greičiu. Koks turėtų būti greitis v, kad kelionė atgal būtų ilgesnė ne daugiau kaip viena valanda?

Sprendimas. Pagal uždavinio sąlygą,

$\frac{1320}{v}$ yra kelionės iš A į B trukmė, $\frac{1320}{v-10}$ yra kelionės iš B į A trukmė.

Be to, turi galioti nelygybė

$$\frac{1320}{v-10} - \frac{1320}{v} \le 1.$$

Spręsdami šią nelygybę, gauname:

$$1320v - 1320(v-10) \le v(v-10),$$
$$13200 \le v^2 - 10v,$$
$$v^2 - 10v - 13200 \ge 0,$$
$$(v-5)^2 - 13225 \ge 0,$$
$$(v-5)^2 - 115^2 \ge 0,$$
$$(v-120)(v+110) \ge 0.$$

Iš čia (kadangi $v + 110 > 0$) gauname, kad turi būti $v \ge 120$ km/h.

Ats.: $v \ge 120$ km/h.

7 pavyzdys. Trupmenos vardiklis yra natūralusis skaičius; jis trigubai didesnis už skaitiklį. Pridėję 2 prie vardiklio, gautume trupmeną, kurios reikšmė yra didesnė už $\frac{2}{9}$, o pridėję 2 prie skaitiklio, gautume trupmeną, kurios reikšmė yra tarp $\frac{4}{7}$ ir $\frac{5}{3}$. Raskime šią trupmeną.

Sprendimas. Tegu $\frac{m}{n}$ yra ieškoma trupmena. Remdamiesi sąlyga, gauname nelygybes

$$\frac{m}{n+2} > \frac{2}{9} \quad \text{ir} \quad \frac{4}{7} \le \frac{m+2}{n} \le \frac{5}{3}.$$

Pagal sąlygą, šiose nelygybėse $n = 3m$.

Vadinasi, reikia išspręsti dviejų nelygybių su vienu nežinomuoju sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{m}{3m+2} > \dfrac{2}{9}, \\ \dfrac{4}{7} \le \dfrac{m+2}{3m} \le \dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

Spręskime taip:

$$\begin{cases} \dfrac{3m+2}{m} < \dfrac{9}{2}, \\ \dfrac{4}{7} \le \dfrac{m+2}{3m} \le \dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + \dfrac{2}{m} < \dfrac{9}{2}, \\ \dfrac{4}{7} \le \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3m} \le \dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{m} < \dfrac{9}{2} - 3, \\ \dfrac{4}{7} - \dfrac{1}{3} \le \dfrac{2}{3m} \le \dfrac{5}{3} - \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{m} < \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{5}{21} \le \dfrac{2}{3m} \le \dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{m} < \dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{5}{14} \le \dfrac{1}{m} \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > \dfrac{4}{3}, \\ \dfrac{1}{2} \le m \le \dfrac{14}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{3} < m \le \frac{14}{5}.$$

Iš čia gauname tik $m = 2$. Tada $n = 3 \cdot 2 = 6$.

Vadinasi, ieškoma trupmena yra $\dfrac{2}{6}$.

Atkreipkime dėmesį į tikrai suprantamą ketinimą (rašant atsakymą) trupmeną $\dfrac{2}{6}$ pakeisti jai lygia trupmena $\dfrac{1}{3}$.

Siekdami išsiaiškinti, ar trupmenos $\dfrac{2}{6}$ pakeitimas trupmena $\dfrac{1}{3}$ būtų korektiškas, patikrinkime, ar trupmena $\dfrac{1}{3}$ tenkina uždavinio sąlygas. Aišku, kad $\dfrac{1}{3+2} = \dfrac{1}{5} < \dfrac{2}{9}$. Taigi pridėję 2 prie trupmenos $\dfrac{1}{3}$ vardiklio, negautume trupmenos, didesnės už $\dfrac{2}{9}$. Vien to pakanka išvadai, kad rašant atsakymą trupmeną $\frac{2}{6}$ reikia palikti nesuprastintą.

Ats.: $\frac{2}{6}$.

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Dviženklį skaičių padalijus iš jo skaitmenų sumos, gaunamas dalmuo 3 ir liekana 7. Iš šio dviženklio skaičiaus skaitmenų kvadratų sumos atėmus jo skaitmenų sandaugą, gaunamas pradinis skaičius. Raskite jį.

2. Stebint dviejų kristalų augimą, nustatyta, kad pirmo kristalo masė per 3 mėnesius padidėjo tiek pat, kiek antro kristalo – per 7 mėnesius. Metų pabaigoje paaiškėjo, kad pirmo kristalo pradinė masė padidėjo 4 procentais, o antro – 5 procentais. Raskite kristalų pradinių masių santykį.

3. Sudauginęs du natūraliuosius skaičius, mokinys suabejojo gauto rezultato teisingumu. Tikrindamas jis gautą rezultatą padalijo iš didesniojo skaičiaus. Gavo dalmenį 17 ir liekaną 8. Tada mokiniui paaiškėjo, kad gautos sandaugos dešimčių skaitmuo 6 vienetais didesnis už tikrą dešimčių skaitmenį. Raskite mokinio daugintus skaičius, jeigu žinoma, kad jų skirtumas yra 36.

4. Iš vietovių *A* ir *C* į vietovę *B* tuo pačiu metu išjojo du raiteliai. Nors atstumas nuo *C* iki *B* yra 20 kilometrų didesnis už atstumą nuo *A* iki *B,* bet abu raiteliai po 5 valandų kartu atjojo į vietovę *B*. Raskite atstumą tarp vietovių *A* ir *B*, jeigu žinoma, kad iš vietovės *C* išvykęs raitelis kiekvieną kilometrą nujodavo 1 minute ir 15 sekundžių greičiau už raitelį, kuris išvyko iš vietovės *A*.

5. Iš vietovių *M* ir *N* vienas priešais kitą išvažiavo du motociklininkai; atstumas tarp *M* ir *N* lygus 600 kilometrų. Per tą patį laiką pirmas motociklininkas nuvažiavo 250 kilometrų, o antras – 200 kilometrų. Pirmas motociklininkas atvyko į *N* trimis valandomis anksčiau negu antras į *M*. Raskite kiekvieno motociklininko greitį.

6. Dėžėje yra tam tikras skaičius kamuoliukų – raudonų, geltonų ir žalių. Tarp bet kurių 11 kamuoliukų yra ne mažiau kaip du raudoni ir bent vienas žalias kamuoliukas, o tarp bet kurių 12 kamuoliukų yra bent vienas geltonas. Kiek kamuoliukų galėtų būti iš viso?

7. Keliautojas važiuoja greičiu v (km/h) iš vietovės A į vietovę B, esančią už 300 kilometrų nuo A. Jeigu jis važiuotų 20 km/h didesniu greičiu, sutaupytų ne daugiau kaip 45 minutes, o jeigu važiuotų 10 km/h lėčiau, kelionės tikslą pasiektų ne mažiau kaip 20 minučių vėliau. Koks galėtų būti greitis v?

8. Dviratininkas iš M į N važiavo tam tikru greičiu v (km/h). Grįždamas atgal vieną valandą jis važiavo tuo pačiu greičiu v, o pailsėjęs 30 minučių, kelionę tęsė 5 km/h didesniu greičiu. Koks turėtų būti dviratininko greitis v, kad kelionė iš N į M užtruktų ne ilgiau kaip iš M į N, jeigu atstumas tarp M ir N būtų: a) 45 km; b) 70 km?

9. Trupmenos skaitiklis yra natūralusis skaičius, o vardiklis – vienetu didesnis už skaitiklio kvadratą. Skaičių 3 pridėjus prie skaitiklio gaunama trupmena, mažesnė už $\frac{1}{4}$, o pridėjus prie vardiklio – trupmena, didesnė už $\frac{1}{8}$. Raskite visas tokias trupmenas.

10. Grupė darbininkų per 14 dienų atliko jiems pavestą darbą. Jeigu jų būtų buvę 4 žmonėmis daugiau ir kiekvienas būtų dirbęs 1 valanda ilgiau, tai tą patį darbą būtų atlikę per 10 dienų. O jeigu žmonių būtų buvę dar 6 daugiau ir kiekvienas būtų dirbęs dar 1 valanda ilgiau, tai tą darbą būtų atlikę per 7 dienas. Kiek buvo darbininkų ir kiek valandų per dieną jie dirbo?

IV. POSŪKIAI, AŠINĖS IR CENTRINĖS SIMETRIJOS

Edmundas Mazėtis
(Vilniaus universitetas)

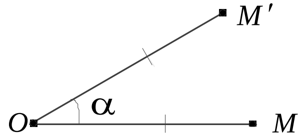
Matematikos ir kitų dalykų pamokose Jūs susidūrėte su geometrinėmis figūromis, pasižyminčiomis simetriškumo savybėmis. Tai figūros, kurias sulenkus per kurią nors tiesę, viena figūros dalis sutampa su kita (pvz., lygiašonį trikampį sulenkus per tiesę, kurioje yra į pagrindą nuleista aukštinė, viena trikampio pusė sutampa su kita puse). Simetriškų figūrų yra gamtoje (pvz., didžioji dalis gyvųjų organizmų, kai kurių medžių lapai), taip pat daug žmonių sukurtų daiktų, statinių pasižymi vienokia ar kitokia simetrija. Matematikoje simetrija yra atskiras taip vadinamų plokštumos (ar erdvės) transformacijų atvejis.

Transformacijos sąvoka yra viena iš svarbiausių sąvokų ne tik matematikoje, bet ir kituose gamtos moksluose. Gamtoje nuolat viskas juda, keičiasi, iš vienos padėties pereina į kitą, iš vienos būsenos – į kitą, t. y., vienaip ar kitaip transformuojasi. Transformacijos sąvoka matematikoje – tai funkcijos sąvokos sinonimas. Kai nagrinėjama funkcija $y = f(x)$, tai suprantama, kad kintamojo x reikšmei iš vienos skaičių aibės – funkcijos apibrėžimo srities – priskiriamas kitas skaičius y iš kitos aibės – funkcijos reikšmių srities. *Geometrinės transformacijos* – tai funkcijos, kurių apibrėžimo ir reikšmių sritys yra plokštumos (ar erdvės) taškų aibės. Nagrinėjant geometrines transformacijas, užrašas $Y = f(X)$ tai suprantamas, kad vienam plokštumos (ar erdvės) taškui X yra tam tikru būdu priskiriamas vienintelis plokštumos (ar erdvės) taškas Y. Taškas Y tada vadinamas *taško X vaizdu transformacijos f atžvilgiu,* o taškas X – taško *Y pirmavaizdžiu*. Atlikdami šią užduotį, nagrinėsime tik plokštumos transformacijas. Jei F – plokštumos figūra (t. y., plokštumos taškų aibė), tai visų jos taškų $X \in F$ vaizdų aibė $Y = f(X)$ yra vadinama *figūros F vaizdu*. Plokštumos transformacija, kurios atžvilgiu kiekvieno taško M vaizdas yra taškas M, vadinama *tapatingąja transformacija.*

Plokštumos taškas M, kurio vaizdas duotosios transformacijos f atžvilgiu sutampa su tašku M, yra vadinamas transformacijos f *invariantiniu tašku*. Geometrinė figūra F, kurios vaidas sutampa su figūra F, yra vadinama *invariantine figūra* transformacijos f atžvilgiu.

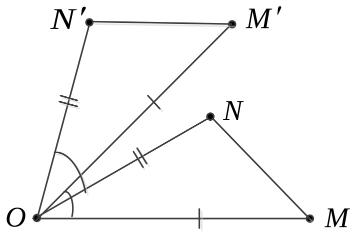
Atlikdami šią užduotį, Jūs susipažinsite su trimis plokštumos transformacijomis – plokštumos posūkiu apie tašką, simetrija tiesės atžvilgiu (ašine simetrija) ir simetrija taško atžvilgiu (centrine simetrija). Šios transformacijos pasižymi viena bendra savybe: jei X ir Y – bet kurie plokštumos taškai, o X' ir Y' – jų vaizdai, tai atstumas tarp taškų X' ir Y' lygus atstumui tarp taškų X ir Y. Tokios plokštumos transformacijos vadinamos plokštumos *judesiais* (arba *poslinkiais*). Iš judesio apibrėžimo seka, kad bet kurios atkarpos AB vaizdas to judesio atžvilgiu yra atkarpa, lygi atkarpai AB, o bet kurios geometrinės figūros F vaizdas yra geometrinė figūra F', lygi figūrai F.

1. Apibrėšime plokštumos *posūkio apie tašką O* sąvoką. Tarkime, kad plokštumoje pažymėtas taškas O. Sakoma, kad taškas M' yra gaunamas taško M posūkiu apie tašką O kampu α, jei atkarpos OM ir OM' yra lygios, o kampas MOM' lygus kampui α, t. y., trikampis MOM' yra lygiašonis, o jo kampas prie viršūnės lygus α (1 pav.). Sakykime, kad M ir N – bet kurie du plokštumos taškai, o taškai M' ir N' yra jų vaizdai, gauti plokštumos posūkiu apie tašką O kampu α (2 pav.). Kadangi



1 pav.

$\angle MON = \angle MOM' + \angle M'ON =$
$= \angle N'ON' + \angle M'ON = \angle M'ON'$,
o $OM = OM'$, $ON = ON'$, tai trikampiai OMN ir $OM'N'$ yra lygūs. Taigi $MN = M'N'$, t. y., plokštumos posūkis apie tašką yra judesys. Akivaizdu, kad taškas O yra vienintelis plokštumos posūkio apie tašką O invariantinis taškas. Invariantinių posūkio atžvilgiu tiesių nėra, nes kiekvienos tiesės l vaizdas su tiese l sudaro kampą lygų posūkio kampui α.

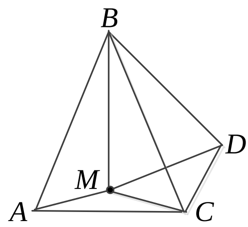


2 pav.

Atliekant plokštumos posūkį kampu α, nuo spindulio OM galima atidėti du kampus lygius kampui α: vieną kampą atidedame į vieną pusę nuo spindulio OM, o kitą – į kitą. Taigi gauname du taško M vaizdus. Todėl paprastai, taikant posūkį uždavinių sprendimui, reikia nurodyti, į kurią pusę atliekamas posūkis.

1 pavyzdys. Lygiakraščio trikampio *ABC* viduje yra toks taškas *M*, kad $AM = 1$, $BM = \sqrt{2}$, o $\angle AMB = 105^\circ$. Rasime atkarpos *CM* ilgį ir kampą *BMC*.

Sprendimas. Kadangi $\angle AMB = 105^\circ > 60^\circ$, t. y., kampas *AMB* didesnis už trikampio kampą *ACB*, tai trikampio *ABC* viduje tikrai yra taškas *M*, pasižymintis sąlygoje nurodytomis savybėmis. Pasukime plokštumą apie tašką *B* 60° kampu taip, kad taško *A* vaizdas būtų taškas *C* (3 pav.). Sakykime, kad taško *M* vaizdas yra taškas *D*. Kadangi posūkis yra judesys, o atkarpos *AM* vaizdas yra atkarpa *CD*, tai $CD = AM = 1$.

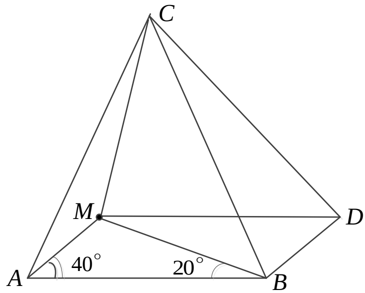


3 pav.

Analogiškai atkarpos *BM* vaizdas yra atkarpa *BD*, todėl $BD = BM = \sqrt{2}$. Kadangi taškas *B* yra invariantinis šio posūkio atžvilgiu taškas, tai kampo *AMB* vaizdas yra kampas *CDB*, taigi $\angle CDB = 105^\circ$. Kadangi pagal posūkio apibrėžimą $BM = BD$, o $\angle MBD = 60^\circ$, tai trikampis *BMD* yra lygiakraštis, jo kraštinės ilgis lygus $\sqrt{2}$. Tada

$$\angle MDC = \angle BDC - \angle BDM = 105^\circ - 60^\circ = 45^\circ.$$

Trikampiui *MDC* taikome kosinusų teoremą ir gauname, kad $MC^2 =$
$= MD^2 + CD^2 - 2MC \cdot CD \cos\angle MDC =$
$= 2 + 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1.$ Kadangi $MC = CD = 1,$ tai trikampis *CMD* lygiašonis, todėl
$\angle DMC = \angle MDC = 45^\circ.$
Taigi
$\angle BMC = \angle BMD + \angle DMC = 105^\circ.$



4 pav.

Ats.: $MC = 1,\ \angle BMC = 105^\circ.$

2 pavyzdys. Lygiašonio trikampio *ABC* ($AC = BC$) kampas $\angle C = 40^\circ$. Trikampio viduje yra taškas *M* toks, kad $\angle ABM = 20^\circ$, o

$\angle BAM = 40^\circ$. Rasime kampą *ACM*.

Sprendimas. Akivaizdu, kad $\angle CAB = \angle CBA = 70°$, taigi $\angle CAM = 30°$, o $\angle CBM = 50°$. Pasukime plokštumą apie tašką *C* 40° kampu taip, kad taško *A* vaizdas būtų taškas *B* (4 pav.). Sakykime, kad taško *M* yra taškas D. Kadangi $CM = CD$, tai trikampis *CMD* yra lygiašonis. Kadangi atkarpos *AM* vaizdas yra atkarpa *BD*, tai $AM = BD$, taigi trikampiai *AMC* ir *BDC* lygūs (nes $AC = BC$, $AM = BD$ ir $MC = DC$). Iš čia seka, kad. $\angle CBD = \angle CAM = 30^\circ$. Tuomet $\angle MBD = \angle MBC + \angle CBD = 80°$. Iš sinusų teoremos trikampiui *AMB* turime, kad $\frac{AM}{MB} = \frac{\sin \angle ABM}{\sin \angle BAM} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1}{2\cos 20^\circ}$. Iš čia seka lygybė

$$\frac{BD}{MB} = \frac{AM}{MB} = \frac{1}{2\cos 20^\circ} = = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 70^\circ}.$$

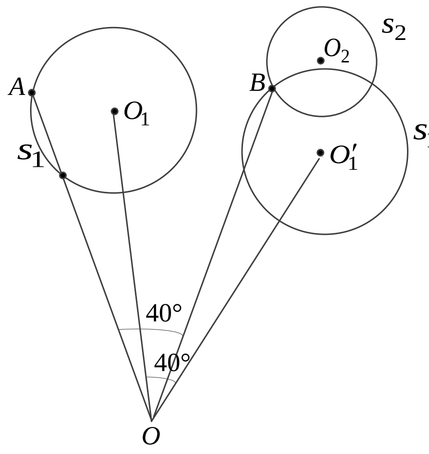
Kita vertus, taikydami sinusų teoremą trikampiui *BDM* gauname, kad

$$\frac{BD}{MB} = \frac{\sin \angle BMD}{\sin \angle MDB}, \text{ t. y., } \frac{\sin \angle BMD}{\sin \angle MDB} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 70^\circ}.$$

Kadangi $\angle BMD + \angle BDM = 100°$, tai trikampis *DMB* panašus į trikampį, kurio kampai lygūs 80°, 30° ir 70°. Iš čia gauname, kad $\angle MDB = 70°$, todėl $\angle CDB = \angle CMA = 140°$, taigi $\angle ACM = 10^\circ$.

Ats.: 10°.

3 pavyzdys. Duoti du apskritimai s_1 ir s_2 o taip pat taškas *O*. Parodysime, kad egzistuoja du taškai *A* ir *B*, vienas viename apskritime, kitas – kitame apskritime, kad atkarpos *AO* ir *BO* būtų lygios, o $\angle AOB = 40^\circ$.



5 pav.

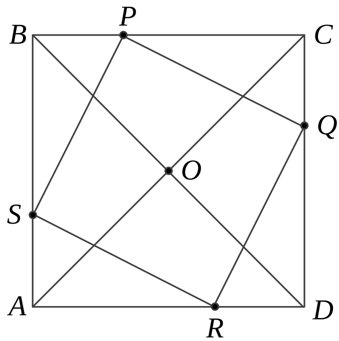
Sprendimas. Nagrinėkime plokštumos posūkį apie tašką *O* 40° kampu. Sakykime, kad apskritimo s_1 vaizdas yra apskritimas s_1' (5 pav.).

Kadangi $AO = BO,$ o $\angle AOB = 40^\circ,$ tai taško *A* vaizdas yra taškas *B*. Kadangi taškas *A* yra apskritime s_1, tai taškas *B* yra apskritime s_1'. Kita vertus, taškas *B* yra ir apskritime s_2, taigi taškas *B* yra vienas apskritimų s_1' ir s_2 sankirtos taškų. Suradę tašką *B*, lengvai randame tašką *A*: tam reikia atidėti kampą $\angle BOM = 40^\circ,$ ir jo kraštinės *OM* sankirtoje su apskritimu s_1 rasti tašką *A*. Aišku, jei apskritimai s_1' ir s_2 nesikerta, uždavinio sąlygą tenkinančių taškų *A* ir *B* nėra.

4 pavyzdys. Kvadrato *ABCD* kraštinėse *AB*, *BC*, *CD* ir *DA* pažymėti taškai *S*, *P*, *Q* ir *R*, be to

$$AS:SB=BP:PC=CQ:QD=DR:RA=k$$

(6 pav.). Įrodysime, kad keturkampis *SPQR* yra kvadratas ir rasime jo kraštinės ilgį, jei *AB* = *a*.



6 pav.

Sprendimas. Nagrinėkime plokštumos posūkį apie kvadrato centrą *O* 90° kampu taip, kad taško *A* vaizdas būtų taškas *B*. Akivaizdu, kad kvadratas *ABCD* yra invariantinis šio posūkio atžvilgiu. Kadangi atkarpos *AS* ir *BP* yra lygios, o kraštinės *AB* vaizdas yra kraštinė *BC*, tai taško *S* vaizdas yra taškas *P*. Analogiškai gauname, kad taškų *P*, *Q* ir *R* vaizdai yra atitinkamai taškai *Q*, *R* ir *S*. Iš čia seka, kad *SP* = *PQ* = *QR* = *RS*, o

$$\angle SOP = \angle POQ = \angle QOR = \angle ROS = 90^\circ.$$

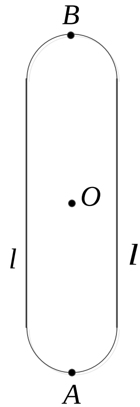
Taigi keturkampis *SPQR* yra kvadratas. Pagal sąlygą *AS*: *SB* = k, o *AS* + *SB* = *a*. Iš čia seka, kad $SB = \dfrac{a}{1+k},$ $AS = BP = \dfrac{ka}{1+k}$. Taikydami Pitagoro teoremą trikampiui *SBP* gauname, kad $PS^2 = BS^2 + BP^2$, t. y.,

$$PS = \frac{\sqrt{1+k^2}}{1+k}a\,.$$

2. Taškai *A* ir *B* yra vadinami *simetriškais taško O atžvilgiu*, jei taškas *O* yra atkarpos *AB* vidurys. Plokštumos transformacija, kurios atžvilgiu bet kurio taško *M* vaizdas M', yra simetriškas taškui *M* taško *O* atžvilgiu, vadinama plokštumos *simetrija taško O atžvilgiu* (arba *centrine simetrija*). Iš posūkio ir centrinės simetrijos apibrėžimų išplaukia, kad simetrija taško *O* atžvilgiu yra plokštumos posūkis apie tašką *O* 180° kampu. Kaip atskiras posūkio atvejis, simetrija taško atžvilgiu yra judesys, tik taškas *O* (*simetrijos centras*) yra invariantinis šios transformacijos atžvilgiu. Bet kuri tiesė, einanti per simetrijos centrą *O*, yra invariantinė šios transformacijos atžvilgiu. Be to, iš apibrėžimo seka, kad jei figūra *F* yra simetriška figūrai F' taško *O* atžvilgiu, tai ir figūra F' yra simetriška figūrai *F* taško *O* atžvilgiu.

Taškas *O* yra vadinamas figūros *F* simetrijos centru, jei figūros *F* vaizdas, atliekant simetriją taško *O* atžvilgiu, yra figūra *F*. Tuomet figūra *F* yra vadinama simetriška taško *O* atžvilgiu. Akivaizdu, kad lygiagretainis yra figūra, simetriška jo įstrižainių sankirtos taško atžvilgiu, apskritimas yra simetriškas jo centro atžvilgiu.

Jei tiesė *l* neina per tašką *O*, tai jos vaizdas yra su ja lygiagreti tiesė l'. Įrodysime šį teiginį prieštaros būdu. Tiesės *l* ir l' nesutampa, nes tiesė sutampa su jai simetriška tiese tik tada, kai ji eina per simetrijos centrą *O*. Tarkime, kad tiesės *l* ir l' yra simetriškos taško *O* atžvilgiu, bet jos nėra lygiagrečios, o susikerta taške *A* (7 pav.). Kadangi tiesė *l* neina per tašką *O*, tai taškai *O* ir *A* yra skirtingi. Sakykime, kad taškas *B* yra simetriškas taškui *A* taško *O* atžvilgiu. Kadangi taškas *A* priklauso ir tiesei l, ir tiesei l', tai jam simetriškas taškas *B* priklauso tiesei l' (kuri yra simetriška tiesei *l*) ir tiesei *l*, kuri yra simetriška tiesei l'. Taigi tiesės *l* ir l' susikerta dviejuose skirtinguose taškuose *A* ir *B*, o to būti negali. Taigi tiesės *l* ir yra lygiagrečios.

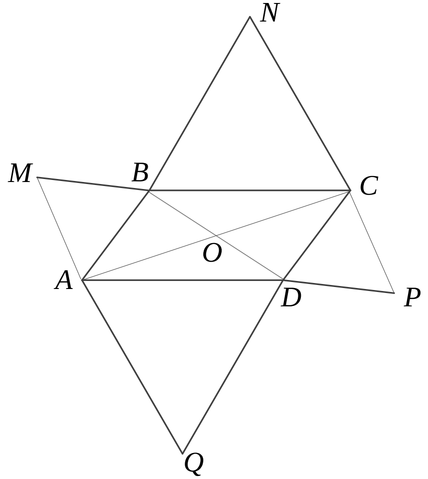


7 pav.

5 pavyzdys. Lygiagretainio *ABCD* išorėje nubrėžti lygiakraščiai trikampiai *ABM*, *BCN*, *CDP* ir *ADQ*. Įrodysime, kad taškai *M*, *N*, *P* ir *Q* yra lygiagretainio viršūnės.

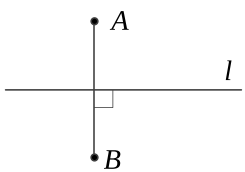
Sprendimas. Sakykime, kad taškas *O* yra lygiagretainio *ABCD* įstrižainių susikirtimo taškas (8 pav.). Nagrinėkime simetriją taško *O* atžvilgiu. Kadangi kraštinės *AB* ir *CD* yra simetriškos taško *O* atžvilgiu, o $\angle ABM = \angle CDP = 60°$, tai tiesės *BM* vaizdas yra tiesė *DP*. Analogiškai, tiesės *AM* vaizdas yra tiesė *CP*. Taigi tiesių *AM* ir *BM* sankirtos taško *M* vaizdas yra tiesių *DP* ir *CP* sankirtos taškas *P*. Taigi taškai *M* ir *P* yra simetriški taško *O* atžvilgiu, todėl taškas *O* yra atkarpos

MP vidurys. Analogiškai įrodome, kad taškas *O* yra atkarpos *NQ* vidurio taškas. Taigi keturkampis *MNPQ* yra lygiagretainis.



8 pav.

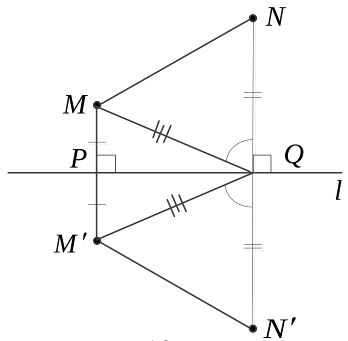
3. Taškai *A* ir *B* yra *simetriški tiesės l atžvilgiu*, jei tiesė *l* yra atkarpos *AB* vidurio statmuo (9 pav.). Plokštumos transformacija, kurios atžvilgiu bet kurio plokštumos taško *M* vaizdas M' yra simetriškas taškui *M* tiesės *l* atžvilgiu, vadinama *simetrija tiesės atžvilgiu*, arba *ašine simetrija*. Nesunkiai įrodoma, kad simetrija tiesės atžvilgiu yra judesys. Jei taškai M' ir N' yra simetriški taškams *M* ir *N* tiesės *l* atžvilgiu (10 pav.), tai pagal apibrėžimą atkarpos MM' ir NN' yra statmenos tiesei *l* o jų vidurio taškai *P* ir *Q* yra tiesėje *l*. Iš stačiųjų trikampių *PQM* ir PQM' lygumo seka, kad $MQ = M'Q$ ir $\angle MQP = \angle M'QP$. Iš čia seka, kad $\angle MQN = \angle M'QN'$. Todėl trikampiai *MQN* ir $M'QN'$ yra lygūs, t. y. $MN = M'N'$.



9 pav.

Akivaizdu, kad tik tiesės *l* taškai yra invariantiniai ašinės simetrijos atžvilgiu, o tiesė *l* ir visos tiesės, statmenos tiesei *l*, yra invariantinės tiesės.

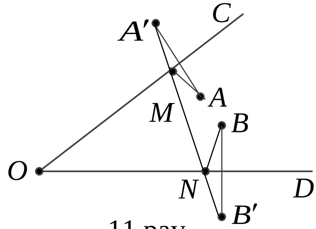
Tiesė *l* yra vadinama geometrinės figūros *F simetrijos ašimi*, jei figūra, simetriška figūrai *F* tiesės *l* atžvilgiu, sutampa su *F*. Tuomet sakoma, kad figūra *F* yra simetriška tiesės *l* atžvilgiu. Akivaizdu, kad tiesė, kurioje yra kampo pusiaukampinė yra jo simetrijos ašis, tiesė, kurioje yra lygiašonio trikampio



10 pav.

aukštinė, nubrėžta iš jo viršūnės, yra šio trikampio simetrijos ašis, bet kuri tiesė, kurioje yra apskritimo skersmuo, yra apskritimo simetrijos ašis.

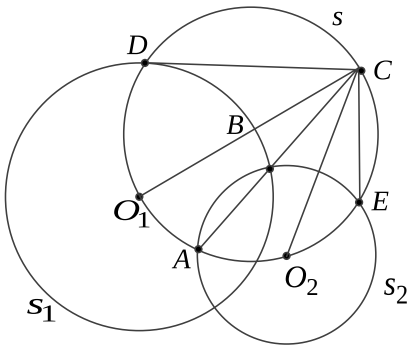
6 pavyzdys. Kampo *COD* viduje pažymėti taškai *A* ir *B* (11 pav.). Rasime kampo kraštinėje *OC* esantį tašką *M* ir kraštinėje *OD* esantį tašką *N*, kad atstumų *AM*, *MN* ir *NB* suma būtų mažiausia.



11 pav.

Sprendimas. Sakykime, kad taškas A' yra simetriškas taškui *A* tiesės *OC* atžvilgiu, o taškas B' – simetriškas taškui *B* tiesės *OD* atžvilgiu. Tuomet tiesė $A'B'$ kampo kraštinę *OC* kerta ieškomajame taške *M*, o kraštinę *DO* – kitame ieškomajame taške *N*. Tikrai, atstumai $A'M$ ir *AM* yra lygūs, koks bebūtų tiesės OC taškas *M*, nes atkarpos *AM* ir $A'M$ yra simetriškos tiesės *OC* atžvilgiu, t. y., jos yra lygios. Analogiškai ir atkarpos *NB* ir $B'N$ yra lygios bet kuriam tiesės *OD* taškui *N*. Taigi suma $AM + MN + NB$ yra lygi sumai $A'M + MN + NB'$, o ši suma yra mažiausia tada, kai taškai A', *M*, *N* ir B' yra vienoje tiesėje.

7 pavyzdys. Apskritimai s_1 ir s_2, kurių centrai yra taškai O_1 ir O_2, susikerta taškuose *A* ir *B*. Apskritimas *s*, einantis per taškus *A*, O_1 ir O_2, kerta apskritimus s_1 ir s_2 atitinkamai taškuose *D* ir *E*, o tiesę *AB* – taške *C* (12 pav.). Įrodysime, kad atkarpos *CE* ir *CD* yra lygios.

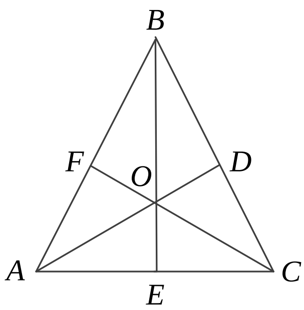


12 pav.

Sprendimas. Atkarpos DO_1 ir AO_1.yra lygios kaip apskritimo s_1 spinduliai. Todėl apskritimo *s* stygos DO_1 ir AO_1 yra lygios, taigi lygūs ir to apskritimo lankai DO_1 ir AO_1, t. y. $\angle DCO_1 = \angle ACO_1$. Taigi tiesė CO_1 yra kampo *ACD* pusiaukampinė, todėl tiesės *CA* ir *CD* yra simetriškos tiesės. CO_1 atžvilgiu. Kadangi ši tiesė eina per apskritimo s_1 centrą, tai apskritimas s_1 yra simetriškas jos atžvilgiu. Iš čia seka, kad taškai *D* ir *B* yra simetriški tiesės CO_1 atžvilgiu, todėl atkarpos *CD* ir *CB* yra lygios. Analogiškai nagrinėdami apskritimą s_2 parodome, kad lygios atkarpos *CB* ir *CE*. Taigi *CD* = *CE*, ką ir reikėjo įrodyti.

4. Transformacija *f* yra vadinama geometrinės *figūros F simetrija*, jei figūros *F* vaizdas, atliekant transformaciją *f*, sutampa su figūra *F*. Aišku, kad tapatingoji transformacija yra bet kurios geometrinės figūros simetrija. Kai kurios figūros neturi daugiau simetrijų išskyrus tapatingąją transformaciją, pvz., bet kuris nelygiašonis trikampis.

8 pavyzdys. Lygiašonis trikampis turi vieną netapatingąją simetriją – tai simetrija tiesės, kurioje yra trikampio aukštinė, nubrėžta į pagrindą, atžvilgiu. Lygiagretainis turi vieną netapatingąją simetriją – tai simetrija jo įstrižainių susikirtimo taško atžvilgiu. Stačiakampis turi tris netapatingąsias simetrijos: simetriją įstrižainių susikirtimo taško atžvilgiu ir dvi simetrijos tiesių, einančių per įstrižainių susikirtimo tašką ir lygiagrečių su stačiakampio kraštinėmis, atžvilgiu. Lygiakraštis trikampis turi 6 simetrijas. Jei taškas *O* yra apie lygiakraštį trikampį *ABC* apibrėžto (ir į jį įbrėžto) apskritimo centras, o tiesės *AD, BE* ir *CF* yra trikampio aukštinės (13 pav.), tai trikampio *ABC* simetrijos yra šios transformacijos: posūkis apie tašką *O* 120° kampu, posūkis apie tašką *O* 240° kampu, ašinė simetrija tiesės *AD* atžvilgiu, ašinė simetrija tiesės *BE* atžvilgiu, ašinė simetrija tiesės *CF* atžvilgiu ir tapatingoji transformacija. Apskritai, bet kuris taisyklingasis *n*-kampis turi 2*n* simetrijų, įskaitant ir tapatingąją transformaciją. Apskritimas turi be galo daug simetrijų: tai posūkiai apie jo centrą bet kuriuo kampu ir visos simetrijos tiesių, einančių per apskritimo centrą, atžvilgiu.



13 pav.

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Duotas kvadratas *ABCD*. Nubraižykite jo vaizdą, gautą posūkiu apie kraštinės AB vidurio tašką *E* 135° kampu (posūkio kryptį pasirinkite patys).

2. Lygiakraščio trikampio ABC viduje yra taškas M toks, kad $AM = 1$, $BM = \sqrt{3}$, $CM = 2$. Raskite atkarpos AB ilgį ir kampų AMB bei BMC didumus.

3. Stačiojo lygiašonio trikampio ABC kampas C yra statusis. Trikampio viduje yra taškas M toks, kad $AM = 2$, $\angle AMB = 120^\circ$, $\angle AMC = 105^\circ$. Raskite atkarpų BM ir CM ilgius.

4. Duotos dvi tiesės a ir b ir joms nepriklausantis taškas O. Nurodykite, kaip tiesėse a ir b rasti tokius taškus A ir B, kad atkarpos OA ir OB būtų lygios, o kampas AOB būtų lygus 30°. Nustatykite, kada uždavinys turi sprendinį.

5. Lygiakraščio trikampio ABC, kurio kraštinės ilgis lygus a, kraštinėse AB, BC ir CA yra taškai M, N ir P tokie, kad $AM : MB = BN : NC = CP : PA = 3$. Raskite trikampio MNP kampų didumus ir kraštinių ilgius.

6. Per atkarpos AB galus nubrėžtos dvi lygiagrečios tiesės. Per atkarpos AB vidurio tašką O nubrėžta tiesė, kertanti jas taškuose C ir D. Raskite trikampio AOB perimetrą, jei $AB = 24$, $CD = 28$, $BD = 16$.

7. Duotos dvi lygios atkarpos AB ir CD. Nurodykite, kada šios dvi atkarpos yra a) simetriškos taško atžvilgiu; b) simetriškos tiesės atžvilgiu. Paaiškinkite, kaip rasti jų simetrijos centrą ir simetrijos ašį.

8. Duotos dvi lygiagrečios tiesės a ir b. Tarp jų pažymėti taškai A ir B, be to taškas A yra arčiau tiesės a, nei taškas B. Kaip reikia rasti tiesėje a tašką M, o tiesėje b – tašką N, kad suma $AM + MN + NB$ būtų mažiausia?

9. Apskritimo spindulys lygus R. Jo skersmenyje AB pažymėtas taškas M, per jį nubrėžta styga CD, sudaranti su skersmeniu AB 45° kampą. Raskite sumą $CM^2 + DM^2$.

10. Kiek simetrijų turi a) kvadratas; b) rombas; c) taisyklingasis šešiakampis? Išvardykite jas.

V. METRINĖS PRIKLAUSOMYBĖS TRIKAMPYJE

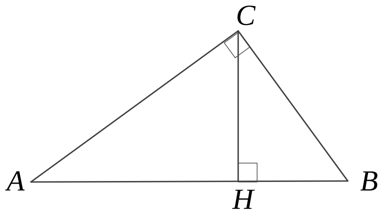
Edmundas Mazėtis
(Lietuvos edukologijos universitetas)

Sprendžiant geometrijos uždavinius dažnai tenka taikyti įvairias tapatybes, siejančias trikampio kraštines, kampus, jo plotą, bei kitus trikampio elementus. Visų pirma tai trikampio ploto formulės, stačiojo trikampio Pitagoro teorema, sinusų ir kosinusų teoremos bet kuriam trikampiui, aukštinių, pusiaukraštinių bei pusiaukampinių ilgio formulės ir kitos formulės. Atlikdami šią užduotį, Jūs pakartosite minėtas tapatybes, o taip pat susipažinsite su kitomis formulėmis, kartais palengvinančiomis geometrinių uždavinių sprendimą.

1. Sakykime, kad ABC – statusis trikampis, $\angle C = 90°$, jo statiniai $BC = a$, $AC = b$, įžambinė $AB = c$, trikampio plotas lygus S. Kaip gerai žinome, jo kraštinėms ir kampams yra teisingos tokios lygybės:

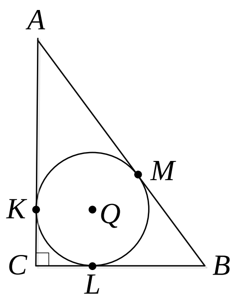
$c^2 = a^2 + b^2$ (Pitagoro teorema),

$S = \frac{1}{2}ab = pr$, čia $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ – trikampio pusperimetris, r – į jį įbrėžto apskritimo spindulys. Be to iš trigonometrinių funkcijų apibrėžimo seka, kad $\frac{a}{c} = \sin\angle A = \cos\angle B$, $\frac{b}{c} = \sin\angle B = \cos\angle A$, $\frac{a}{b} = \mathrm{tg}\angle A$, $\frac{b}{a} = \mathrm{tg}\angle B$.



1 pav.

Sakykime, kad atkarpa CH yra stačiojo trikampio ABC aukštinė, nubrėžta į įžambinę (1 pav.). Iš trikampių ACH ir CBH panašumo išplaukia, kad $\frac{CH}{HB} = \frac{AH}{CH}$, t. y., $CH^2 = AH \cdot HB$. Iš trikampių ABC ir CBH panašumo ir trikampių ABC ir CAH panašumo seka dar dvi lygybės $AC^2 = AB \cdot AH$, $BC^2 = BC \cdot BH$.

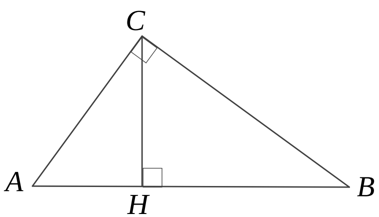


2 pav.

Sakykime, kad taškas Q yra į statųjį trikampį ABC įbrėžto apskritimo centras, o taškuose K, L ir M šis apskritimas liečia statinius AC ir BC bei įžambinę AB (2 pav.). Tuomet $QK = QL = CK = CL = r$, $KA = AM = b - r$, $LB = BM = a - r$, todėl $AB = AM + BM = = a + b - 2r$. Iš čia gauname tokią į statųjį trikampį įbrėžto apskritimo spindulio formulę $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$.

1 pavyzdys. Stačiojo trikampio statinio ilgis lygus 12, o kito statinio projekcija įžambinėje lygi 12,8. Rasime į trikampį įbrėžto apskritimų spindulį.

Sprendimas. Sakykime, kad stačiojo trikampio ABC statinis $AC = 12$, atkarpa CH yra jo aukštinė, nubrėžta į įžambinę AB (3 pav.). Tuomet atkarpa BH yra statinio BC projekcija į įžambinę, t. y., $BH = 12{,}8$. Žymėkime $AH = x$ ir iš lygybės $AC^2 = AB \cdot AH$ gauname, kad $12^2 = (x + 12{,}8)x$, t.y. $x^2 + 12{,}8x - 144 = 0$. Šios lygties teigiamoji šaknis yra $x = 7{,}2$, todėl $AB = x + 12{,}8 = 20$. Tuomet $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 16$, taigi, įbrėžto į trikampį apskritimo spindulys lygus



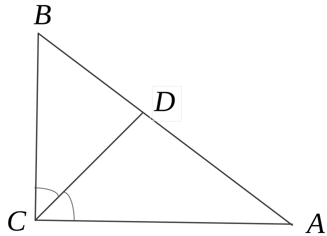
3 pav.

$$r = \frac{1}{2}(AC + BC - AB) = \frac{1}{2}(12 + 16 - 20) = 4.$$

Ats.: $r = 4$.

2 pavyzdys. Stačiojo trikampio statinis lygus a o į įžambinę nubrėžtos pusiaukampinės ilgis lygus l. Rasime kito statinio ilgį ir nustatysime, kada uždavinys turi sprendinį.

Sprendimas. Sakykime, kad stačiojo trikampio ABC statinis $BC = a$, stačiojo kampo pusiaukampinė $CD = l$ (4 pav.). Trikampio ABC, plotas yra lygus trikam-



4 pav.

pių ACD ir BCD plotų sumai, todėl teisinga lygybė

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}AC \cdot CD \cdot \sin\angle ACD + \frac{1}{2}BC \cdot CD \cdot \sin\angle BCD.$$

Kadangi $\angle ACD = \angle BCD = 45°$, tai paskutinė lygybė tampa tokia: $ab = \frac{\sqrt{2}}{2}l(a+b)$. Iš čia gauname, kad $b = \frac{al}{\sqrt{2}a - l}$. Kadangi b – teigiamas skaičius, tai ši lygybė turi prasmę tik kai $\sqrt{2}a > l$.

Ats.: $b = \frac{al}{\sqrt{2}a - l}$, kai $\sqrt{2}a > l$.

2. Sakykime, kad ABC – bet kuris trikampis, jo kraštinių ilgius žymėsime $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, plotą – S, apie jį apibrėžto ir į jį įbrėžto apskritimų spindulius – atitinkamai R ir r, pusperimetrį – p. Gerai žinomos tokios trikampio kraštinių ir kampų priklausomybės:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$$

(kosinusų teorema);

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R$$

(sinusų teorema);

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\angle C = \frac{1}{2}bc\sin\angle A = \frac{1}{2}ac\sin\angle B = pr$$

(trikampio ploto formulės);

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

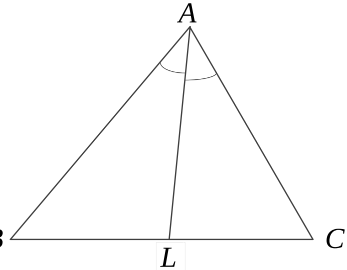
(Herono formulė).

3 pavyzdys. Įrodysime, kad trikampio plotui yra teisinga lygybė

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

Sprendimas. Iš trikampio ploto formulės turime $S = \frac{1}{2} ab \sin \angle C.$ Iš sinusų teoremos seka, kad $\sin \angle C = \frac{c}{2R}.$ Iš šių formulių ir gauname įrodomąją lygybę.

Trikampio ABC pusiaukampinė AL dalija kraštinę BC santykiu $\frac{BL}{CL} = \frac{AB}{AC}$ (5 pav.). Kad tuo įsitikintume, trikampiams ABL ir ACL pritaikome sinusų teoremą:



5 pav.

$$\frac{BL}{\sin \angle BAL} = \frac{AB}{\sin \angle ALB},$$

$$\frac{CL}{\sin \angle CAL} = \frac{AC}{\sin \angle ALC}.$$

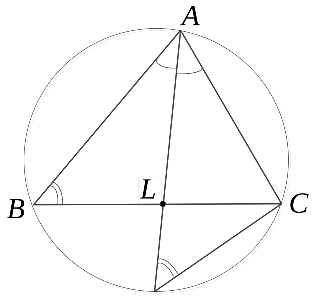
Kadangi $\angle BAL = \angle CAL,$ o

$$\angle ALB + \angle ALC = 180°,$$

tai $\sin \angle BAL = \sin \angle CAL,$ o $\sin \angle ALB = \sin \angle ALC.$ Iš čia ir seka įrodomoji lygybė.

Iš šios lygybės lengvai randame atkarpų, BL ir CL, į kurias trikampio pusiaukampinė AL dalija kraštinę BC, ilgius. Jei $BL = x,$ tai $CL\ a - x,$ ir turime lygybę $\frac{x}{a - x} = \frac{c}{b}.$ Iš čia seka, kad $x = \frac{ac}{b + c}.$ Taigi $BL = \frac{ac}{b + c},$ o $CL = \frac{ab}{b + c}.$

Jei taške D pusiaukampinė AL kerta apie trikampį ABC apibrėžtą apskritimą (6 pav.), tai pagal apskritimo stygų, susikertančių viename taške, savybę teisinga lygybė $AL \cdot LD = BL \cdot CL.$ Kampai ADC ir ABC yra įbrėžtiniai kampai, kurie remiasi į tą patį lanką, todėl jie yra lygūs. Kadangi kampai BAL ir CAL irgi yra lygūs, tai trikampiai DAC ir BAL yra panašieji, todėl teisinga lygybė



6 pav.

$$\frac{AL+LD}{AC}=\frac{AB}{AL}.$$

Iš šios lygybės išplaukia, kad

$$AL^2+AL\cdot LD=AB\cdot AC,\quad AL^2+BL\cdot CL=AB\cdot AC.$$

Taigi gauname tokią pusiaukampinės ilgio formulę

$$AL^2=AB\cdot AC-BL\cdot LC.$$

4 pavyzdys. Trikampio kraštinių ilgiai lygūs $BC=a,\quad AC=b,$ $AB=c.$ Rasime jo pusiaukampinės AL ilgį.

Sprendimas. Į gautąją pusiaukampinės ilgio formulę įrašę atkarpų BL ir CL išraiškas, gauname:

$$AL^2=AB\cdot AC-BL\cdot LC.=cb-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}=\frac{bc}{(b+c)^2}((b+c)^2-a^2)=$$

$$=\frac{bc(b+c-a)(b+c+a)}{(b+c)^2}=\frac{4bc(p-a)p}{(b+c)^2}.$$

Taigi gavome dar vieną trikampio pusiaukampinės ilgio formulę:

$$AL=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}.$$

Ats.: $AL=\dfrac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}.$

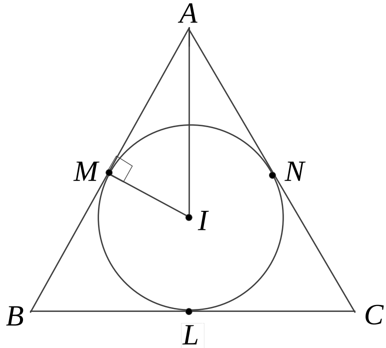
Analogiškai gaunamos ir kitų trikampio pusiaukampinių ilgių formulės:

$$BK=\frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)},\quad CN=\frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}.$$

5 pavyzdys. Jei taškas I – įbrėžto į trikampį ABC apskritimo centras, tai teisinga lygybė

$$AI=\sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}.$$

Sprendimas. Sakykime, kad į trikampį ABC įbrėžtas apskritimas liečia kraštines AB, BC ir AC atitinkamai taškuose M, L ir N (7 pav.). Sakykime, kad



7 pav.

$$AM = AN = x,$$
$$BM = BL = y,$$
$$CN = CL = z.$$

Akivaizdu, kad $x + y + z = p,$ o $y + z = a.$ Iš čia seka, kad $AM = AN = p - a.$ Analogiškai gauname, kad $BM = BL = p - b,$ $CN = CL = p - c.$ Stačiajam trikampiui AIM taikome Pitagoro teoremą: $AI^2 = IM^2 + AM^2.$ Įrašę į šią lygybę

$$AM = p - a,$$
$$IM = r = \frac{s}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$

ir atlikę veiksmus, gauname:

$$AI^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} + (p-a)^2 = \frac{p-a}{p}((p-b)(p-c) + p(p-a)) =$$
$$= \frac{p-a}{4p}((a+c-b)(a+b-c) + (a+b+c)(b+c-a) = \frac{(p-a)\cdot 4bc}{4p} =$$
$$= \frac{bc(p-a)}{p},$$

ką ir reikėjo įrodyti.

Analogiškai gauname, kad $BI = \sqrt{\frac{ac(p-b)}{p}}$ ir $CI = \sqrt{\frac{ab(p-c)}{p}}$.

6 pavyzdys. Trikampio kraštinių ilgiai lygūs $BC = a,$ $AC = b,$ $AB = c.$ Rasime jo pusiaukraštinės AD ilgį (8 pav.).

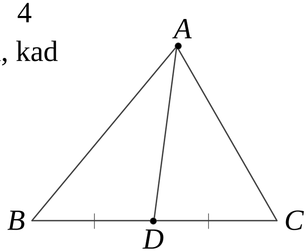
Sprendimas. Trikampiui ABD taikome kosinusų teoremą:

$$AD^2 = c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2c\cdot\frac{a}{2}\cdot\cos\angle B = c^2 + \frac{a^2}{4} - ac\cos\angle B.$$

Iš kosinusų teoremos trikampiui ABC išplaukia, kad

$$\cos\angle B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Įrašę šią $\cos\angle B$ išraišką ir atlikę veiksmus, gauname

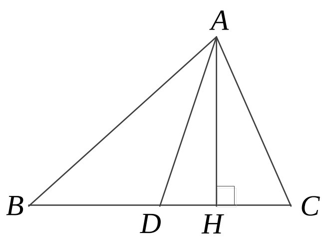


8 pav.

$$AD^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} =$$
$$= \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$

Ats.: $AD = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$

7 pavyzdys. Trikampio ABC kraštinė $BC = a,$ pusiaukraštinė $AD = m,$ aukštinė $AH = h$ (9 pav.). Rasime kitų trikampio kraštinių ilgius.



9 pav.

Sprendimas. Kadangi stačiojo trikampio AHD įžambinė netrumpesnė už statinį, tai uždavinio sąlyga turi prasmę tik kai $m \geq h.$ Taikydami 6 pavyzdyje gautą pusiaukampinės ilgio formulę, gauname, kad

$$m = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

Statiesims trikampiams ABH ir ACH taikome Pitagoro teoremą: $BH^2 = c^2 - h^2,$ $CH^2 = b^2 - h^2.$ Kadangi $BH + CH = a,$ tai gauname $\sqrt{c^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2} = a.$ Iš čia seka, kad $\sqrt{b^2 - h^2} = a - \sqrt{c^2 - h^2},$ t. y. $b^2 = a^2 + c^2 - 2a\sqrt{c^2 - h^2}.$ Įrašę šią b^2 reikšmę į pirmąją lygybę, gauname, kad $4m^2 = 4c^2 + a^2 - 4a\sqrt{c^2 - h^2}.$ Pažymėję $t = \sqrt{c^2 - h^2},$ gauname kvadratinę lygtį $4t^2 - 4at + a^2 + 4h^2 - 4m^2 = 0,$ kurią išsprendę, turime $t_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{m^2 - h^2}.$ Taigi

$$c^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2} \pm a\sqrt{m^2 - h^2}\right)^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} \pm a\sqrt{m^2 - h^2}.$$

Iš čia

$$b^2 = a^2 + m^2 + \frac{a^2}{4} \pm a\sqrt{m^2 - h^2} - 2a\sqrt{m^2 - h^2} = m^2 + \frac{a^2}{4} \mp a\sqrt{m^2 - h^2}.$$

Ats.: Kai $m \geq h,$ kraštinių ilgiai lygūs $\sqrt{m^2 + \dfrac{a^2}{4} \pm a\sqrt{m^2 - h^2}}$.

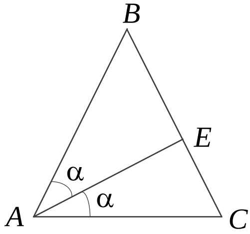
8 pavyzdys. Trikampis ABC – lygiašonis $(AB = BC),$ atkarpa AE – jo pusiaukampinė, $\angle BAC = 2\alpha,$ $BE = a,$ (10 pav.). Rasime trikampio ABC plotą.

Sprendimas. Kadangi $\angle ABC = 180^\circ - 4\alpha,$ o $\angle AEB = 3\alpha,$ tai trikampiui ABE taikydami sinusų teoremą, gauname: $\dfrac{AB}{\sin 3\alpha} = \dfrac{a}{\sin\alpha},$ t. y. $AB = \dfrac{a\sin 3\alpha}{\sin\alpha}.$

Tuomet trikampio ABC plotas

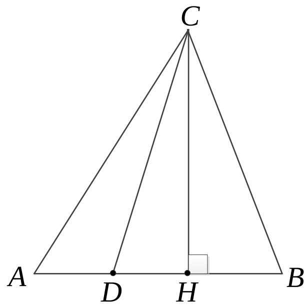
$$S = \frac{1}{2}AB^2 \sin\angle ABC = \frac{a^2 \sin 3\alpha \sin 4\alpha}{2\sin\alpha}.$$

Ats.: $S = \dfrac{a^2 \sin 3\alpha \sin 4\alpha}{2\sin\alpha}.$



10 pav.

3. Sakykime, kad trikampio ABC kraštinių ilgiai $BC = a,$ $AC = b,$ $AB = c,$ o kraštinėje AB yra taškas $D,$ nutolęs nuo viršūnės C atstumu $CD = d,$ dalijantis kraštinę BC į dalis $AD = n,$ $BD = m$ (11 pav.). Įrodysime, kad teisinga lygybė $a^2 n + b^2 m = c(d^2 + mn)$ (Stiuarto formulė, Mathew Stewart, 1717 – 1785, škotų matematikas).



11 pav.

Įrodymui nubrėžiame trikampio ABC aukštinę $CH = h,$ o trikampiams BHC ir DHC taikome Pitagoro teoremą:

$$CB^2 = CH^2 + HB^2,$$
$$CD^2 = CH^2 + HD^2.$$

Pažymėkime $HD = p,$ tuomet

$$a^2 = h^2 + (m - p)^2 \text{ ir } h^2 = d^2 - p^2.$$

Iš čia seka, kad

$$a^2 = d^2 - p^2 + (m - p)^2 = d^2 + m^2 - 2pm.$$

Taikydami Pitagoro teoremą trikampiui AHC gauname, kad

$$AC^2 = CH^2 + AH^2,$$

Kadangi $AH = n + p,$ tai $b^2 = d^2 - p^2 + (n + p)^2 = d^2 + n^2 + 2np.$ Iš gautųjų lygybių išplaukia, kad

$$a^2n = d^2n + nm^2 - 2pmn, \text{ ir } b^2m = d^2m + n^2m + 2mnp.$$

Sudėję šias lygybes, gauname, kad $a^2n + b^2m = d^2(m+n) + mn(m+n).$ Kadangi $m + n = c,$ tai iš čia ir išplaukia įrodomoji lygybė.

9 pavyzdys. Lygiašonio trikampio šoninės kraštinės lygios 17. Trikampio pagrinde yra taškas, nutolęs nuo viršūnės atstumu, lygiu 16, jis dalija pagrindą į atkarpas, kurių viena 8 ilgesnė už kitą. Rasime į kokio ilgio atkarpas jis dalija trikampio pagrindą.

Sprendimas. Sakykime, kad lygiašoniame trikampyje ABC šoninės kraštinės $BC = AC = 17,$ o taškas D yra jo pagrindo taškas AB (12 pav.). Sakykime, kad $AD = x,$ tuomet $DB = x + 8.$ Pagal Stiuarto formulę gauname, kad

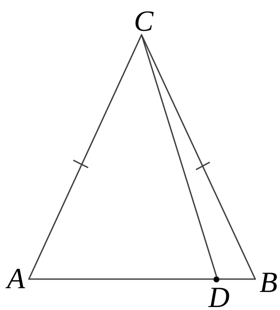
$$17^2 x + 17^2(x+8) = (2x+8)(16^2 + x(x+8)).$$

Pertvarkę gauname lygtį

$$(2x+8)(x^2 + 8x - 33) = 0,$$

kurios teigiamas sprendinys yra $x = 3.$

Ats.: 3 ir 11.



12 pav.

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Stačiojo trikampio statinio ilgis lygus 6, o jo projekcija įžambinėje lygi 3,6. Raskite apie trikampį apibrėžto ir į jį įbrėžto apskritimų spindulius.

2. Stačiojo trikampio statinis a ir į jį nubrėžta pusiaukraštinė m. Raskite kito statinio ilgį ir nustatykite, kada uždavinys turi sprendinį.

3. Į statųjį trikampį įbrėžto apskritimo spindulys lygus r, o į įžambinę nubrėžtos pusiaukraštinės ilgis lygus m. Raskite trikampio statinių ilgius. Nurodykite sąlygas, su kuriomis uždavinys turi sprendinį

4. Stačiojo trikampio *ABC* statiniai *AC* ir *BC* lygūs atitinkamai 6 ir 8. Raskite pusiaukampinės *BD* ilgį.

5. Trikampio *ABC* kraštinių ilgiai $AB = 15$, $AC = 18$, $BC = 23$. Kraštinėje *BC* pažymėtas taškas *D*. Raskite apie trikampius *ABD* ir *ACD* apibrėžtų apskritimų spindulių santykį.

6. Trikampio *ABC* kraštinių ilgiai $AB = 13$, $AC = 15$, $BC = 14$. Per įbrėžto į trikampį apskritimo centrą nubrėžta tiesė, lygiagreti su tiese *AC*, kertanti kraštines *AB* ir *BC* atitinkamai taškuose *M* ir *N*. Apskaičiuokite atkarpos *MN* ilgį.

7. Trikampio *ABC* kraštinė $BC = 6$, pusiaukraštinė $BD = 4$, aukštinė $AH = 2\sqrt{7}$. Raskite kitų dviejų trikampio kraštinių ilgius.

8. Duota trikampio *ABC* kraštinė $BC = 8$, ir pusiaukraštinės $AD = 9$, $BE = 6$. Raskite kitų dviejų trikampio kraštinių ilgius.

9. Lygiašoniame trikampyje *CDE* $CD = DE = b$, $\angle DCE = \varphi$, atkarpa *CM* – pusiaukampinė. Raskite trikampio *CDM* plotą.

10. Trikampio *ABC* kraštinių ilgiai $AC = 4$, $BC = 5$, $AB = 6$. Kraštinėje *AB* yra toks taškas *E*, kad $AE = \frac{1}{2}EB$. Raskite atkarpos *CE* ilgį.

VI. RODIKLINĖS IR LOGARITMINĖS NELYGYBĖS

Antanas Apynis
(Vilniaus Mykolo Biržiškos gimnazija)

Nelygybės sprendinių aibė – kintamojo reikšmių, su kuriomis nelygybė tampa teisinga, visuma.

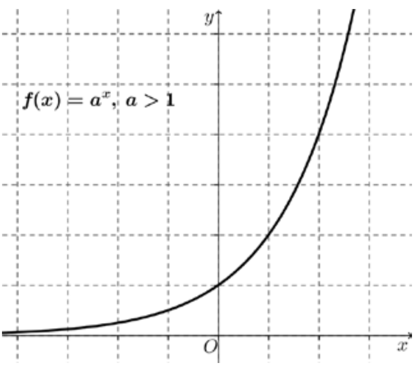
Išspręsti nelygybę – rasti visus nelygybės sprendinius arba įrodyti, kad nelygybė sprendinių neturi.

Rodiklinės nelygybės

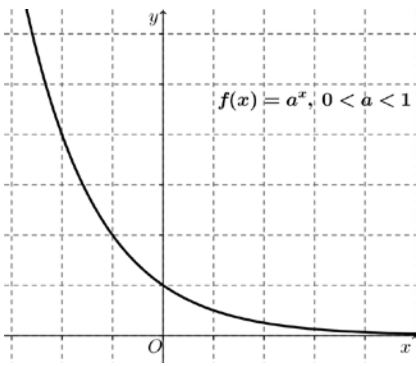
Prieš pradedant kalbėti apie rodiklines nelygybes, pirmiausia, reikia prisiminti rodiklinę funkciją.

Funkcija, apibrėžta realiųjų skaičių aibėje ir išreikšta formule $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$, vadinama *rodikline funkcija*.

Rodiklinės funkcijos apibrėžimo sritis yra $D_f=(-\infty;+\infty)$, o reikšmių sritis yra $E_f=(0;+\infty)$. Visas rodiklines funkcijas galima suskirstyti į dvi grupes – pirmoje grupėje būtų rodiklinės funkcijos, kurių pagrindas didesnis už vienetą, t. y. $a>1$ (1 pav.), o kitoje grupėje būtų funkcijos, kurių pagrindas yra tarp nulio ir vieneto, t. y. $a\in(0;1)$ (2 pav.). Jei $a>1$, tai rodiklinė funkcija yra didėjančioji $\left(x_2>x_1\Rightarrow f(x_2)>f(x_1)\right)$, jei $0<a<1$, tai funkcija yra mažėjančioji $\left(x_2>x_1\Rightarrow f(x_2)<f(x_1)\right)$.



1 pav.



2 pav.

Taip pat naudinga žinoti veiksmų su laipsniais savybes ($a>0$, $b>0$):

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;
- $\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m} = \left(a^m\right)^n$
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$;
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$;
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$;
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.

1 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $7 \cdot 0{,}4^{2x} + 4 \cdot 0{,}4^{2x-2} \le 500$.

Sprendimas. Nelygybę pertvarkome taip, kad abiejose pusėse būtų to paties pagrindo laipsniai:

$$7 \cdot 0{,}4^{2x} + 4 \cdot 0{,}4^{2x} \cdot 0{,}4^{-2} \le 500,$$

$$0{,}4^{2x}\left(7 + 4 \cdot 0{,}4^{-2}\right) \le 500,$$

$$0{,}4^{2x} \cdot 32 \le 500,$$

$$0{,}4^{2x} \le \frac{125}{8},$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} \le \frac{125}{8}.$$

Šią nelygybę galima pertvarkyti dviem būdais – laipsnio pagrindas gali būti $\dfrac{2}{5}$ arba $\dfrac{5}{2}$.

I būdas. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{2x} \le \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3} \Rightarrow 2x \ge -3$ (nes $\dfrac{2}{5} \in (0;1)$) $\Rightarrow x \ge -1{,}5$.

II būdas. $\left(\dfrac{5}{2}\right)^{-2x} \le \left(\dfrac{5}{2}\right)^{3} \Rightarrow -2x \le 3$ (nes $\dfrac{5}{2} > 1$) $\Rightarrow x \ge -1{,}5$.

Ats.: $x \in [-1{,}5; +\infty)$.

2 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $0{,}25^{x-1} - 9 \cdot 0{,}5^x + 2 \ge 0$.

Sprendimas. Šią nelygybę pertvarkykime taip:

$$0{,}25^{x-1} - 9 \cdot 0{,}5^x + 2 \ge 0,$$

$$0{,}25^x \cdot 0{,}25^{-1} - 9 \cdot 0{,}5^x + 2 \ge 0,$$

$$4 \cdot (0{,}5)^{2x} - 9 \cdot 0{,}5^x + 2 \ge 0.$$

Pažymėję $0{,}5^x = t$, $t > 0$, gauname kvadratinę nelygybę

$$4 \cdot t^2 - 9 \cdot t + 2 \ge 0,\ t > 0.$$

Jos teigiami sprendiniai yra $t \in \left(0; \frac{1}{4}\right] \cup [2; +\infty)$. Toliau sprendžiame dvi nelygybes:

$$0{,}5^x \le \frac{1}{4} \quad \text{ir} \quad 0{,}5^x \ge 2 .$$

Iš pirmosios gauname $x \ge 2$, o iš antrosios – $x \le -1$.

Ats.: $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

3 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $2^{3x} - 2^{2x} - 2^x + 1 > 0$.

Sprendimas. Nelygybę pertvarkykime taip:

$$2^{3x} - 2^{2x} - 2^x + 1 > 0,$$
$$\left(2^x\right)^3 - \left(2^x\right)^2 - 2^x + 1 > 0.$$

Pažymėkime $2^x = t$, $t > 0$. Tada nelygybę sprendžiame taip:

$$t^3 - t^2 - t + 1 > 0,\ t > 0,$$
$$t^2(t-1) - (t-1) > 0,\ t > 0,$$
$$(t-1)\left(t^2 - 1\right) > 0,\ t > 0,$$
$$(t-1)^2(t+1) > 0,\ t > 0 \Rightarrow t \ne 1 \text{ ir } t+1 > 0,$$
$$t > 0 \Rightarrow t \in (0;1) \cup (1; +\infty).$$

Iš nelygybės $0 < 2^x < 1$ gauname, kad $x < 0$, o iš nelygybės $2^x > 1$ gauname, kad $x > 0$.

Ats.: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

4 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $4^{x+1} - 53 \cdot 14^x + 7^{2x+2} \le 0$.

Sprendimas. Nelygybę pertvarkykime taip:

$$4^{x+1} - 53 \cdot 14^x + 7^{2x+2} \le 0,$$
$$4^x \cdot 4^1 - 53 \cdot 2^x \cdot 7^x + 7^{2x} \cdot 7^2 \le 0,$$
$$4 \cdot 2^{2x} - 53 \cdot 2^x \cdot 7^x + 49 \cdot 7^{2x} \le 0,$$
$$4 \cdot \left(2^x\right)^2 - 53 \cdot 2^x \cdot 7^x + 49 \cdot \left(7^x\right)^2 \le 0.$$

Tokia nelygybė toliau sprendžiama ją dalijant iš $\left(2^x\right)^2$, $\left(7^x\right)^2$ arba

$2^x \cdot 7^x$. Dalydami iš $\left(7^x\right)^2$ gausime:

$$4 \cdot \frac{\left(2^x\right)^2}{\left(7^x\right)^2} - 53 \cdot \frac{2^x \cdot 7^x}{\left(7^x\right)^2} + 49 \cdot \frac{\left(7^x\right)^2}{\left(7^x\right)^2} \leq 0,$$

$$4 \cdot \left(\frac{2^x}{7^x}\right)^2 - 53 \cdot \frac{2^x}{7^x} + 49 \leq 0.$$

Pažymėję $\left(\frac{2}{7}\right)^x = t$, $t > 0$, gauname kvadratinę nelygybę

$$4 \cdot t^2 - 53 \cdot t + 49 \leq 0,\ t > 0.$$

Šios nelygybės sprendiniai yra $t \in \left[1; \frac{49}{4}\right]$.

Spręsdami nelygybę $1 \leq t \leq \frac{49}{4}$, gauname:

$$1 \leq \left(\frac{2}{7}\right)^x \leq \frac{49}{4},$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^0 \leq \left(\frac{2}{7}\right)^x \leq \left(\frac{2}{7}\right)^{-2},$$

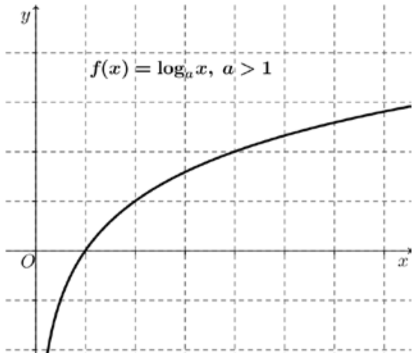
$$0 \geq x \geq -2 \text{ (nes } \frac{2}{7} \in (0;1)\text{)}.$$

Ats.: $x \in [-2; 0]$.

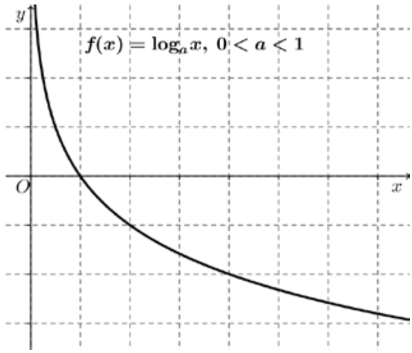
Logaritminės nelygybės

Prieš pradedant kalbėti apie logaritmines nelygybes, pirmiausia, reikia prisiminti logaritminę funkciją.

Funkcija, kuri išreikšta formule $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, vadinama *logaritmine funkcija*. Logaritminės funkcijos apibrėžimo sritis yra $D_f = (0; +\infty)$, o reikšmių sritis yra $E_f = (-\infty; +\infty)$. Visas logaritmines funkcijas galima suskirstyti į dvi grupes – pirmoje grupėje būtų logaritminės funkcijos, kurių pagrindas didesnis už vienetą, t. y. $a > 1$ (3 pav.), o kitoje grupėje būtų funkcijos, kurių pagrindas yra tarp nulio ir vieneto, t. y. $0 < a < 1$ (4 pav.). Jei $a > 1$, tai funkcija yra didėjančioji (su didesne argumento reikšme gaunama didesnė funkcijos reikšmė, pavyzdžiui, $\log_2 x_1 < \log_2 x_2$, kai $x_1 < x_2$); jei $0 < a < 1$, tai funkcija yra mažėjančioji (su didesne argumento reikšme gaunama mažesnė funkcijos reikšmė, pavyzdžiui, $\log_{\frac{1}{2}} x_1 > \log_{\frac{1}{2}} x_2$, kai $x_1 < x_2$).



3 pav.



4 pav.

Taip pat naudinga žinoti veiksmų su logaritmais savybes ($a > 0$, $a \neq 1$):

- $\log_a 1 = 0$;
- $\log_a a = 1$;
- $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$, $x > 0$, $y > 0$;
- $\log_a x^k = k \log_a x$, $x > 0$; jei k yra sveikasis skaičius, tai
$$\log_a x^k = \begin{cases} k \cdot \log_a |x|, \text{ kai } k \text{ lyginis,} \\ k \cdot \log_a x, \text{ kai } k \text{ nelyginis;} \end{cases}$$
- $\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\dfrac{x}{y}\right)$, $x > 0$, $y > 0$;
- $\log_a x = \dfrac{\log_c x}{\log_c a}$, $x > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$.

Naudojantis šiomis savybėmis bet kurį realųjį skaičių galima užrašyti logaritmu, kurio pagrindas laisvai pasirenkamas. Pavyzdžiui,

$$3 = 3 \cdot 1 = 3\log_2 2 = \log_2 2^3 = \log_2 8;$$

$$3 = 3\log_{0,2} 0{,}2 = \log_{0,2} 0{,}2^3 = \log_{0,2} \frac{1}{125};$$

$$-3=-3\log_{0,2}0,2=\log_{0,2}0,2^{-3}=\log_{0,2}125.$$

Sprendžiant logaritmines nelygybes svarbu prisiminti logaritminės funkcijos apibrėžimo sritį, į kurią reikia atsižvelgti ieškant nelygybės sprendinių aibės. Pavyzdžiui, logaritmas $\log_7(x+2)$ yra apibrėžtas, kai $x+2>0$, o logaritmas $\log_x(x+2)$ apibrėžtas, kai $x>0$ ir $x\neq 1$.

5 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $\log_{0,3}(x-2)>\log_{0,3}(3-x)$.

Sprendimas. Nelygybės $\log_{0,3}(x-2)>\log_{0,3}(3-x)$ abiejose pusėse yra to paties pagrindo logaritmai, todėl galima palyginti logaritmuojamus reiškinius. Kadangi logaritmų pagrindas priklauso intervalui $(0;1)$, tai turi galioti nelygybė $x-2<3-x$. Taip pat reikia atsižvelgti į abiejų logaritmų apibrėžimo sritis apibrėžiančias nelygybes $x-2>0$ ir $3-x>0$. Taigi sprendžiame nelygybių sistemą

$$\begin{cases} x-2<3-x, \\ x-2>0 \end{cases}$$

ir gauname:

$$\begin{cases} 2x<5, \\ x>2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2,5, \\ x>2 \end{cases} \Rightarrow x\in(2;\,2,5).$$

Ats.: $x\in(2;\,2,5)$.

6 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $\log_2(x-2)\leq -2$.

Sprendimas. Pirmiausia pertvarkome dešinę nelygybės pusę taip, kad abiejose nelygybės pusėse būtų to paties pagrindo logaritmai: $-2=-2\cdot 1=-2\log_2 2=\log_2 2^{-2}=\log_2 0,25$.

Toliau sprendžiame nelygybę $\log_2(x-2)\leq\log_2 0,25$:

$$\begin{cases} x-2\leq 0,25, \\ x-2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leq 2,25, \\ x>2 \end{cases} \Rightarrow x\in(2;\,2,25].$$

Ats.: $x\in(2;\,2,25]$.

7 pavyzdys. Raskime sveikuosius skaičius *x*, tenkinančius nelygybę $\log_2 x^2\leq 2$.

Sprendimas. Šią nelygybę galima išspręsti dviem būdais.

I būdas. Pirmiausia pertvarkome dešinę nelygybės pusę taip, kad abiejose nelygybės pusėse būtų to paties pagrindo logaritmai:

$$2 = 2\cdot 1 = 2\log_2 2 = \log_2 2^2 = \log_2 4\,.$$

Toliau sprendžiame nelygybę

$$\log_2 x^2 \le \log_2 4$$

sudarydami nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} x^2 \le 4, \\ x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-2;\,2], \\ x \ne 0 \end{cases} \Rightarrow\ x \in [-2;\,0) \cup (0;\,2].$$

Sveikieji šios sistemos sprendiniai yra -2, -1, 1 ir 2.

II būdas. Spręsdami nelygybę $\log_2 x^2 \le 2$, taikome veiksmų su logaritmais savybę $\log_2 x^2 = 2\log_2 |x|$:

$$2\log_2|x| \le 2\,,$$

$$\log_2|x| \le 1\,,$$

$$\log_2|x| \le \log_2 2\,,$$

$$\begin{cases} |x| \le 2, \\ x \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-2;\,2], \\ x \ne 0 \end{cases} \Rightarrow\ x \in [-2;\,0) \cup (0;\,2].$$

Sveikieji šios sistemos sprendiniai yra -2, -1, 1 ir 2.

Ats.: $x \in \{-2;\,-1;\,1;\,2\}$.

8 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $\dfrac{\log_5 x}{\log_x 5} \ge 1$.

Sprendimas. Logaritmas $\log_x 5$ apibrėžtas, kai $x > 0$ ir $x \ne 1$, o logaritmas $\log_5 x$ apibrėžtas, kai $x > 0$.

Logaritmai yra skirtingų pagrindų, todėl logaritmą $\log_x 5$ pertvarkome taip: $\log_x 5 = \dfrac{\log_5 5}{\log_5 x} = \dfrac{1}{\log_5 x}$.

Gauname nelygybę $\log_5^2 x \ge 1$. Ją sprendžiame taip:

$$\log_5^2 x - 1 \ge 0,$$

$$(\log_5 x + 1)(\log_5 x - 1) \ge 0\,;$$

$$\begin{cases}\log_5 x+1\ge 0,\\ \log_5 x-1\ge 0\end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases}\log_5 x+1\le 0,\\ \log_5 x-1\le 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log_5 x\ge \log_5 5^{-1},\\ \log_5 x\ge \log_5 5\end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases}\log_5 x\le \log_5 5^{-1},\\ \log_5 x\le \log_5 5;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\ge \dfrac{1}{5},\\ x\ge 5\end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases}x\le \dfrac{1}{5},\\ x\le 5.\end{cases}$$

Logaritmai apibrėžti, kai $x>0$ ir $x\ne 1$, todėl $x\in\left(0;\frac{1}{5}\right]\cup[5;+\infty)$.

Ats.: $x\in\left(0;\frac{1}{5}\right]\cup[5;+\infty)$.

9 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $\log_x(2x-1)\ge \log_x x$.

Sprendimas. Abiejose nelygybės pusėse yra to paties pagrindo logaritmai. Tačiau iš karto negalima lyginti logaritmuojamų reiškinių, nes nežinome, ar šios logaritminės funkcijos yra didėjančiosios, ar mažėjančiosios. Todėl turime nagrinėti du atvejus: kai $0<x<1$ ir kai $x>1$.

Spręsime dvi nelygybių sistemas:

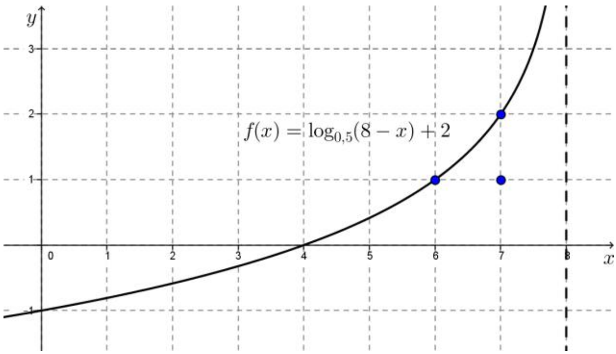
1) $$\begin{cases}0<x<1,\\ 2x-1\le x,\\ 2x-1>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0<x<1,\\ x\le 1,\\ x>\dfrac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow x\in\left(\frac{1}{2};1\right);$$

2) $$\begin{cases}x>1,\\ 2x-1\ge x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>1,\\ x\ge 1\end{cases} \Rightarrow x\in(1;+\infty).$$

Ats.: $x\in\left(\frac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$.

10 pavyzdys. Raskime natūraliųjų skaičių x ir y poras $(x;y)$, tenkinančias nelygybių sistemą

$$\begin{cases}y\le \log_{0,5}(8-x)+2,\\ y>0.\end{cases}$$



5 pav.

Sprendimas. Pažymėkime

$$f(x) = \log_{0,5}(8 - x) + 2\,.$$

Šios funkcijos apibrėžimo sritis yra $D_f = (-\infty; 8)$. Ieškant nelygybių sistemos natūraliųjų sprendinių galima taikyti perrankos metodą. Gauname, kad logaritmas $\log_{0,5}(8 - x)$ apibrėžtas su septyniomis natūraliosiomis kintamojo x reikšmėmis, sudarančiomis aibę $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Tačiau galima sumažinti nagrinėtinų variantų skaičių. Funkcija f yra didėjančioji, todėl galima nustatyti, kuriame taške jos grafikas kirs abscisių ašį. Sprendžiame lygtį $f(x) = 0$:

$$y = \log_{0,5}(8 - x) + 2 = 0\,,$$

$$\log_{0,5}(8 - x) = -2\,,$$

$$8 - x = 0{,}5^{-2}\,,$$

$$x = 4\,.$$

Funkcijos f grafikas abscisių ašį kerta taške $(4; 0)$. Kadangi viena iš sistemos nelygybių yra $y > 0$, tai belieka perrinkti tris variantus $x \in \{5; 6; 7\}$.

Kai $x = 5$,

tai $\begin{cases} y \le \log_{0,5}(8 - 5) + 2 = \log_{0,5} 3 + 2, \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow y \in \left(0; \log_{0,5} 3 + 2\right].$

Ši sistema natūraliųjų sprendinių neturi, nes $0 < \log_{0,5} 3 + 2 < 1$.

Kai $x = 6$,

tai $\begin{cases} y \le \log_{0,5}(8-6) + 2 = \log_{0,5} 2 + 2 = -1 + 2 = 1, \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow y \in (0;1].$

Gavome vieną natūralųjį sprendinį $(6;1)$.

Kai $x = 7$,

tai $\begin{cases} y \le \log_{0,5}(8-7) + 2 = \log_{0,5} 1 + 2 = 2, \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow y \in (0;2].$

Gavome du natūraliuosius sprendinius – $(7;1)$ ir $(7;2)$.

Ats.: $(6;1)$, $(7;1)$ ir $(7;2)$.

11 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $\log_4 x + \log_4(4-x) \le 3^x$.

Sprendimas. Šiame uždavinyje logaritminė funkcija

$$f(x) = \log_4 x + \log_4(4-x)$$

lyginama su rodikline funkcija $g(x) = 3^x$. Pirmiausia nustatykime leistinąsias kintamojo *x* reikšmes – bendrą abiejų funkcijų apibrėžimo sritį. Tuo tikslu sprendžiame nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} x > 0, \\ 4 - x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0;4).$$

Rodiklinė funkcija $g(x) = 3^x$ yra didėjančioji, todėl kai $x \in (0;4)$, tai $g(x) \in (1;81)$.

Logaritminės funkcijos $f(x) = \log_4 x + \log_4(4-x) = \log_4\left(4x - x^2\right)$ reikšmes, kai $x \in (0;4)$, rasti yra sudėtingiau. Kvadratinis dvinaris $4x - x^2$, kai $x \in (0;4)$, įgyja reikšmes, priklausančias intervalui $(0;4]$. Todėl funkcijos *f* reikšmių sritis yra $(-\infty;1]$.

Gavome, kad $f(x) \le 1 < g(x)$, todėl šią nelygybę tenkina visos *x* reikšmės, su kuriomis apibrėžtos abi funkcijos, t. y. $x \in (0;4)$.

Ats.: $x \in (0;4)$.

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Išspręskite nelygybę $8^{1-x} - 0{,}5^{3x-1} < 24$.

2. Išspręskite nelygybę $\log_{0,4}\left(x^3 - 259\right) > -3$.

3. Išspręskite nelygybę $4^{3x} - 2 \cdot 4^{2x} - 4^{x+2} + 32 \leq 0$.

4. Išspręskite nelygybę $4 \cdot 3^x + 9^x + 3 > 0$.

5. Raskite nelygybės

$2\log_{0,2}^2(x-2) - \log_5(x-2) \leq 1$

sveikųjų sprendinių vidurkį.

6. Kiek yra natūraliųjų skaičių, kurie tenkina nelygybę

$15\left(5^x - 3^x\right) < 16 \cdot 15^{\frac{x}{2}}$?

7. Išspręskite nelygybę $\log_{x+3} x^2 \leq 2$.

8. Išspręskite nelygybę $\log_x(x-2) \geq \log_{x-2} x$.

9. Išspręskite nelygybę $\log_2\left(3x - x^2 - 2\right) \geq 3^{x+2}$.

10. Raskite natūraliųjų skaičių x ir y poras $(x; y)$, tenkinančias nelygybių sistemą $\begin{cases} y \leq 6 - 2^x, \\ y > \log_3(x+2). \end{cases}$

VII. VEKTORIAI

Vilma Gesevičienė
(Lietuvos edukologijos universitetas)

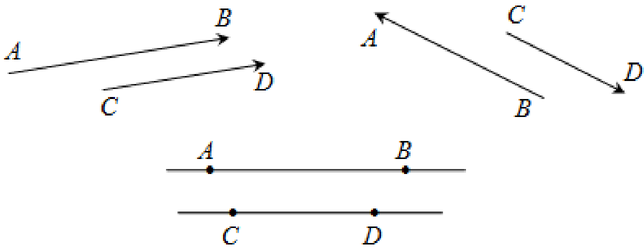
Priminsime kai kuriuos iš mokyklinės geometrijos kurso žinomus teiginius apie vektorius.

I. *Vektoriumi* $\vec{a}$ arba kryptine atkarpa $\overrightarrow{AB}$ $(\vec{a} = \overrightarrow{AB})$ vadinama atkarpa *AB*, kurioje nurodyti jos pradžios ir galo taškai. Vektorius, kurio pradžios ir galo taškai sutampa, vadinamas *nuliniu* vektoriumi: $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$. Du vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ vadinami (žr. 1 pav.):

a) *vienakrypčiais* $(\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD})$, jeigu spinduliai *AB* ir *CD* yra vienodos krypties;

b) *priešpriešiais* $(\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD})$, jeigu spinduliai *AB* ir *CD* yra priešingų krypčių;

c) *kolineariaisiais* $(\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD})$, jeigu tiesės, kuriose yra atkarpos *AB* ir *CD*, yra lygiagrečios.

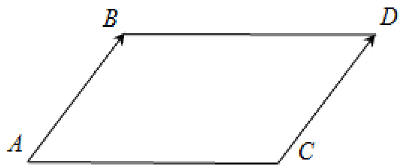


1 pav.

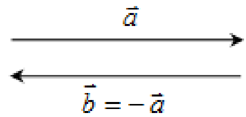
Nulinis vektorius yra kolinearus su bet kuriuo vektoriumi.

Vektoriaus $\vec{a}$ $(\vec{a} = \overrightarrow{AB})$ *moduliu* (*ilgiu*) $\left|\vec{a}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$ vadinamas atkarpos *AB* ilgis. Nulinio vektoriaus $\vec{0}$ ilgis lygus nuliui: $\left|\vec{0}\right| = 0$.

Du vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vadinami *lygiais* $(\vec{a} = \vec{b})$, jeigu jie yra vienakrypčiai $(\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b})$, o jų moduliai lygūs $(|\vec{a}| = |\vec{b}|)$. Iš šio apibrėžimo išplaukia, kad du vienai tiesei nepriklausantys vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ yra lygūs tada ir tik tada, kai keturkampis *ABCD* yra lygiagretainis (žr. 2 pav.).



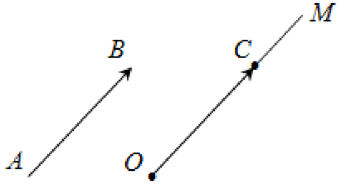
2 pav.



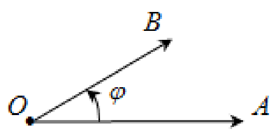
3 pav.

Priešpriešiai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, kurių moduliai lygūs, vadinami *priešingaisiais* vektoriais (žr. 3 pav.). Kiekvienam vektoriui $\vec{a}$ egzistuoja su juo priešingasis vektorius, kuris žymimas $-\vec{a}$. Akivaizdu, kad $-(-\vec{a}) = \vec{a}$.

Sakykime, kad turime vektorių $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ir kurį nors plokštumos tašką *O*. Nubrėžkime spindulį *OM*, vienakryptį su spinduliu *AB*, ir jame raskime tokį vienintelį tašką *C*, kad atkarpos *AB* ir *OC* būtų lygios (žr. 4 pav.). Tuomet ir vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{OC}$ yra lygūs. Nurodytas veiksmas vadinamas *vektoriaus* $\vec{a}$ *atidėjimu nuo taško* O.



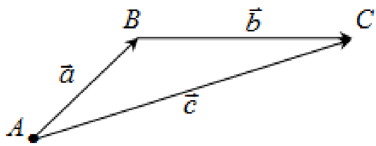
4 pav.



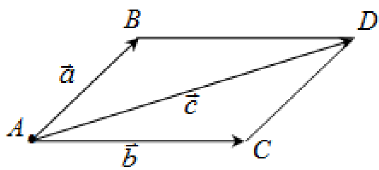
5 pav.

Sakykime, kad du nekolinearieji vektoriai $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ir $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ yra atidėti nuo vieno taško O (žr. 5 pav.). Tuomet kampas $\angle AOB$ yra vadinamas kampu tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ $(\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi)$. Jeigu $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, tai kampas tarp šių vektorių lygus 0, o jeigu $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ – tai kampas lygus 180°.

II. Vektorių sudėtis. Sakykime, kad turime du vektorius $\vec{a}$ ir $\vec{b}$. Nuo taško A atidėkime vektorių $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, o nuo taško B – vektorių $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ (žr. 6 pav.). Tuomet vektorius $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ yra vadinamas *vektorių* $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *suma*: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ arba $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (vektorių sudėties *trikampio taisyklė*). Jeigu vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nekolinearieji, tai galime nuo taško A atidėti abu vektorius: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ir $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, ir nubrėžti lygiagretainį $ABCD$ (žr. 7 pav.). Tuomet $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (vektorių sudėties *lygiagretainio taisyklė*).



6 pav.



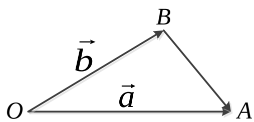
7 pav.

Vektorių sudėčiai būdingos šios savybės:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Vektorių atimtis. *Vektorių* $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *skirtumu* $\vec{a} - \vec{b}$ yra vadinamas vektorius, kuris lygus vektoriaus $\vec{a}$ ir vektoriui $\vec{b}$ priešingojo vektoriaus $-\vec{b}$ sumai:

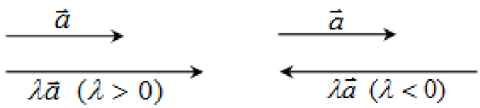
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$



8 pav.

Jeigu vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ atidėti nuo vieno taško O, tai (žr. 8 pav.)

$$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + (-\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}.$$



9 pav.

III. Vektorių daugyba iš skaičiaus. *Vektoriaus* $\vec{a}$ ir *skaičiaus* λ *sandauga* yra vadinamas vektorius $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$, kuris apibrėžiamas taip (žr. 9 pav.):

1. $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, kai $\lambda > 0$, ir $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, kai $\lambda < 0$ (jeigu $\lambda = 0$, tai $\vec{b} = \vec{0}$);
2. $\left|\vec{b}\right| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$.

Iš apibrėžimo išplaukia, kad kai $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, tai $\lambda = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, o kai $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, tai $\lambda = -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ $(|\vec{a}| \neq 0)$.

Vektorių daugybai iš skaičių būdingos šios savybės:

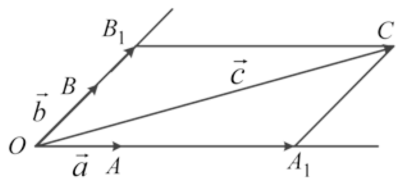
1. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;
2. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
3. $\lambda(\mu\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a}$;
4. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.

1 teorema. Du plokštumos vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearieji tada ir tik tada, kai egzistuoja toks skaičius λ, kad $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Kadangi kolinearieji vektoriai yra arba vienakrypčiai, arba priešpriešiai, tai teoremos įrodymas išplaukia iš vektoriaus daugybos iš skaičiaus apibrėžimo: kai $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, tai $\lambda = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, o kai $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, tai

$$\lambda = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \quad (|\vec{a}| \neq 0).$$

2 teorema Jeigu $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ – du nekolinearieji plokštumos vektoriai, tai bet kurį plokštumos vektorių $\vec{c}$ galima vieninteliu būdu išreikšti vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, t. y. galima rasti tokius skaičius *x* ir *y*, kad būtų teisinga lygybė: $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ (žr. 10 pav.).



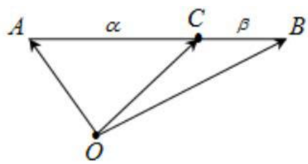
10 pav.

Teoremos įrodymui atidėkime vektorius $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ir $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ nuo taško O. Per tašką C brėžiame tieses CA_1 ir CB_1, lygiagrečias atitinkamai su tiesėmis OB ir OA. Vektoriai $\overrightarrow{OA}$ ir $\overline{OA_1}$ yra kolinearieji, tai $\overline{OA_1} = x\vec{a}$; analogiškai $\overline{OB_1} = y\vec{b}$. Kadangi keturkampis OA_1CB_1 yra lygiagretainis, tai $\overline{OC} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1}$, t. y. $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Teoremoje minimų vektorių pora $(\vec{a}; \vec{b})$ yra plokštumos vektorių aibės *bazė*, vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra vadinami *baziniais vektoriais*, o skaičiai x ir y vadinami *vektoriaus* $\vec{c}$ *koordinatėmis* bazėje $(\vec{a}; \vec{b})$ ir žymima $\vec{c}(x; y)$. Nesunkiai įsitikiname, kad vektoriaus koordinatės duotojoje bazėje surandamos vienareikšmiškai. Iš tikrųjų, jei kuriam nors plokštumos vektoriui $\vec{c}$ teisingos lygybės $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ ir $\vec{c} = l\vec{a} + m\vec{b}$, tai atėmę gauname, kad $\vec{0} = (x-l)\vec{a} + (y-m)\vec{b}$. Kadangi vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra nekolinearieji, tai ši lygybė yra teisinga tik kai $x = l,\ y = m$.

Akivaizdu, kad trys plokštumos taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje tada ir tik tada, kai vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ yra kolinearieji.

3 teorema. Sakykime, kad atkarpos AB taškas C dalija ją santykiu $AC : CB = \alpha : \beta$. Tuomet bet kuriam plokštumos taškui O yra teisinga lygybė (žr. 11 pav.):

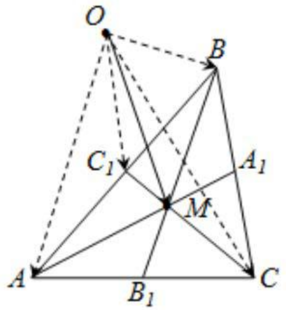


11 pav.

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\alpha\overrightarrow{OB} + \beta\overrightarrow{OA}}{\alpha + \beta}.$$

Įrodymui pastebime, kad iš sąlygos $AC : CB = \alpha : \beta$ išplaukia lygybė $\overrightarrow{AC} = \frac{\alpha}{\beta}\overrightarrow{CB}$, t. y. lygybė $\beta\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{CB}$. Kadangi $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, o $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, tai iš čia gauname, kad $\beta(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \alpha(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$, t. y. $(\beta + \alpha)\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OB} + \beta\overrightarrow{OA}$, ką ir reikėjo įrodyti.

1 pavyzdys. Sakykime, kad taškas M yra trikampio ABC pusiaukraštinių sankirtos taškas, o O – bet kuris plokštumos taškas. Įrodysime, kad $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.



12 pav.

Sprendimas. Kadangi M yra trikampio ABC pusiaukraštinių AA_1, BB_1 ir CC_1 susikirtimo taškas (12 pav.), tai

$AM : MA_1 = BM : MB_1 = CM : MC_1 = 2:1,$

o taškas C_1 dalija atkarpą AB santykiu $AC_1 : C_1B = 1:1.$ Tuomet pagal 3 teoremą bet kuriam plokštumos taškui O yra teisingos lygybės:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OC_1}}{3} \text{ ir } \overrightarrow{OC_1} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}.$$

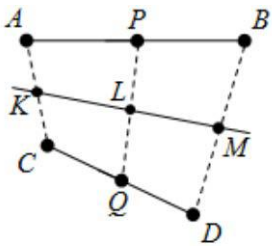
Iš šių lygybių gauname, kad $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$.

Kadangi įrodytoji lygybė teisinga bet kuriam plokštumos taškui O, tai ji teisinga ir tada, kai taškas O sutampa su tašku M. Šiuo atveju gauname, kad $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

2 pavyzdys. Taškai P ir Q yra atkarpų AB ir CD vidurio taškai. Įrodysime, kad atkarpų AC, BD ir PQ vidurio taškai yra vienoje tiesėje.

Spendimas. Sakykime, kad taškai K, L ir M yra atkarpų AC, BD ir PQ vidurio taškai (žr. 13 pav.). Tuomet taškai K, L ir M yra vienoje tiesėje, jeigu vektoriai $\overrightarrow{KL}$ ir $\overrightarrow{KM}$ yra kolinearieji t. y. pagal 1 teoremą egzistuoja toks skaičius λ, kad

$$\overrightarrow{KL} = \lambda \overrightarrow{KM}. \qquad (1)$$



13 pav.

Pagal vektorių atimties apibrėžimą ir 3 teoremą gauname, kad vektoriui $\overrightarrow{KL}$ teisingos lygybės:

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = \frac{\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}}{2} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}}{2} - \overrightarrow{AC}\right) =$$

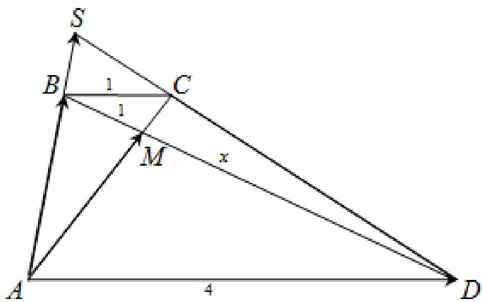
$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}).$$

Analogiškai vektorių $\overrightarrow{KM}$ galime išdėstyti taip:

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AK} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}{2} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}).$$

Iš gautųjų vektorių $\overrightarrow{KL}$ ir $\overrightarrow{KM}$ išraiškų gauname, kad $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KM}$, t. y. (1) lygybė teisinga, kai $\lambda = \frac{1}{2}$ Taigi taškai K, L ir M yra vienoje tiesėje. Be to, taškas L yra atkarpos KM vidurio taškas, nes iš lygybės $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM})$ išplaukia lygybė $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{LM}$.

3 pavyzdys. Trapecijos $ABCD$ pagrindų santykis $AD : BC = 4$. Trapecijos įstrižainės susikerta taške M, o šoninės kraštinės – taške S. Vektorius $\overrightarrow{AM}$ ir $\overrightarrow{AS}$ išreikšime vektoriais $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{AB}$.



14 pav.

Sprendimas. Sakykime, kad trapecijos $ABCD$ įstrižainių sankirtos taškas M dalija įstrižainę BD santykiu $BM : MD = 1 : x$ (žr. 14 pav.). Tuomet pagal 3 teoremą:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AD} + x\overrightarrow{AB}}{1 + x} \qquad (1)$$

Kita vertus, vektoriai $\overrightarrow{AM}$ ir $\overrightarrow{AC}$ yra kolinearieji, tai pagal 1 teoremą turime, kad

$$\overrightarrow{AM} = y\,\overrightarrow{AC} = y\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}).$$

Kadangi $AD : BC = 4$, tai $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$. Tuomet

$$\overrightarrow{AM} = y\,\overrightarrow{AB} + \frac{y}{4}\overrightarrow{AD}. \qquad (2)$$

Vektorius $\overrightarrow{AM}$ (1) ir (2) lygybėmis išreikštas tais pačiais nekolineariaisiais vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$. Pagal 2 teoremą gauname, kad abi šios išraiškos turi sutapti, t. y. turi būti teisingos lygybės $\frac{1}{1+x} = \frac{y}{4}$ ir $\frac{x}{1+x} = y$. Iš čia randame, kad $x = 4,\ y = \frac{4}{5}$. Gautas reikšmes įrašę į (1) arba (2) lygybes turime, kad vektorius $\overrightarrow{AM}$ vektoriais $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{AB}$ išreiškiamas taip: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{AD} + 4\,\overrightarrow{AB})$.

Kadangi vektoriai $\overrightarrow{AS}$ ir $\overrightarrow{AB}$ kolinearieji, tai pagal 1 teoremą galioja lygybė:

$$\overrightarrow{AS} = \lambda\,\overrightarrow{AB}. \qquad (3)$$

Akivaizdu, kad $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DS}$, o vektoriai $\overrightarrow{DS}$ ir $\overrightarrow{DC}$ yra kolinearieji. Todėl $\overrightarrow{DS} = \mu\,\overrightarrow{DC} = \mu(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})$. Iš gautųjų lygybių $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{AD} + 4\,\overrightarrow{AB})$ gauname, kad $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + 4\,\overrightarrow{AB})$. Iš čia išplaukia, kad $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$. Taigi gauname tokią vektoriaus $\overrightarrow{AS}$ išraišką:

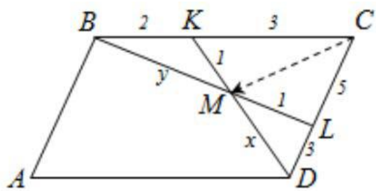
$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AD} + \mu\,\overrightarrow{DC} = \mu\,\overrightarrow{AB} + \left(1 - \frac{3}{4}\mu\right)\overrightarrow{AD}. \qquad (4)$$

Vektoriaus $\overrightarrow{AS}$, išraiškos (3) ir (4) lygybėmis pagal 1 teoremą sutampa, t. y., yra teisingos tokios lygybės: $\mu = \lambda$ ir $1 - \frac{3}{4}\mu = 0$. Iš čia gauname, kad $\lambda = \frac{4}{3}$. Taigi $\overrightarrow{AS} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.

Ats.: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{AD} + 4\overrightarrow{AB})$, $\overrightarrow{AS} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.

4 pavyzdys. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėse BC ir CD yra tokie taškai K ir L, kad $BK : KC = 2 : 3$ ir $CL : LD = 5 : 3$. Tiesės DK ir BL kertasi taške M. Rasime kokiu santykiu taškas M dalija atkarpas DK ir BL.

Sprendimas. Sakykime, kad $DM : MK = x$, o $BM : ML = y$ (žr. 15 pav.). Tuomet pagal 3 teoremą gauname, kad $\overrightarrow{CM} = \dfrac{\overrightarrow{CD} + x\overrightarrow{CK}}{1+x}$. Kadangi $BK : KC = 2 : 3$, tai $\overrightarrow{CK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$.



15 pav.

Taigi

$$\overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CD} + \frac{3}{5}x\overrightarrow{CB}}{1+x} \qquad (1)$$

Kita vertus, analogiškai gauname, kad $\overrightarrow{CM} = \dfrac{\overrightarrow{CB} + y\overrightarrow{CL}}{1+y}$. Kadangi $CL : LD = 5 : 3$, tai $\overrightarrow{CL} = \frac{5}{8}\overrightarrow{CD}$.

Tuomet

$$\overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CB} + \frac{5}{8}y\overrightarrow{CD}}{1+y}. \qquad (2)$$

Vektorius $\overrightarrow{CM}$ (1) ir (2) lygybėmis išreikštas tais pačiais nekolineariaisiais vektoriais $\overrightarrow{CB}$ ir $\overrightarrow{CD}$. Kadangi pagal 2 teoremą šios išraiškos turi sutapti, tai turi būti teisingos lygybės: $\dfrac{3x}{5(1+x)} = \dfrac{1}{1+y}$ ir

$\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{5y}{8(1+y)}$. Iš čia gauname, kad $x=\dfrac{3}{2}$, o $y=\dfrac{16}{9}$. Taigi taškas M atkarpas DK ir BL dalija santykiais $DM:MK=3:2$ ir $BM:ML=16:9$.

IV. Vektorių skaliarinė daugyba. Sakykime, kad plokštumoje duoti du vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, o kampas tarp kurių lygus φ (5 pav.). Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *skaliarine sandauga* vadinamas skaičius (žymima $\vec{a}\cdot\vec{b}$ arba $\vec{a}\vec{b}$), kuris lygus šių vektorių modulių sandaugai, padaugintai iš kampo tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ kosinuso, t. y. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$.

Vektorių skaliarinei daugybai būdingos šios savybės:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;
2. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;
3. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\vec{b})$;
4. $\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}>0$, jeigu $\vec{a}\neq\vec{0}$ ir $\vec{a}^2=0$ tada ir tik tada, kai $\vec{a}=\vec{0}$.

Iš vektorių skaliarinės sandaugos apibrėžimo išplaukia, kad kampas φ tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaičiuojamas pagal formulę $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$, o vektoriaus $\vec{a}$ modulis randamas taip: $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$. Be to, vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra statmeni tada ir tik tada, kai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui, t. y. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

5 pavyzdys. Duoti vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, kurių ilgiai yra 2 ir 5, o kampas tarp jų lygus $\dfrac{2\pi}{3}$. Rasime su kuriomis λ reikšmėmis vektoriai $\vec{p}=\lambda\vec{a}+17\vec{b}$ ir $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ yra statmeni.

Sprendimas. Vektoriai $\vec{p}$ ir $\vec{q}$ yra statmeni, kai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui. Taikydami skaliarinės daugybos savybes rasime šių vektorių skaliarinės sandaugos išraišką, kurią prilyginę nuliui, gauname, kad

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=(\lambda\vec{a}+17\vec{b})(3\vec{a}-\vec{b})=3\lambda\vec{a}^2+(51-\lambda)\vec{a}\vec{b}-17\vec{b}^2=$$

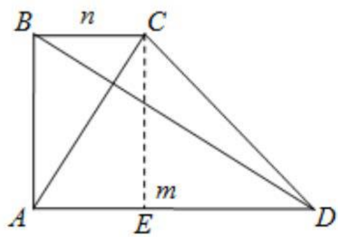
$$= 3\lambda \cdot 2^2 + (51 - \lambda) \cdot 2 \cdot 5 \cdot \cos\frac{2\pi}{3} - 17 \cdot 5^2 = 0.$$

Iš lygties $17\lambda - 680 = 0$ gauname, kad vektoriai $\vec{p}$ ir $\vec{q}$ statmeni, kai $\lambda = 40$.

Ats.: $\lambda = 40$

6 pavyzdys. Stačiosios trapecijos $ABCD$ įstrižainės yra statmenos, o pagrindų santykis yra lygus $m:n$, $m > n$. Rasime: a) trapecijos šoninių kraštinių ilgių santykį; b) įstrižainių ilgių santykį; c) smailiojo trapecijos kampo didumą.

Sprendimas. Sakykime, kad vektoriaus $\overrightarrow{AD}$ modulis $\left|\overrightarrow{AD}\right| = m$, o vektoriaus $\overrightarrow{BC}$ modulis $\left|\overrightarrow{BC}\right| = n$ (žr. 16 pav.).



16 pav.

a) Stačiosios trapecijos $ABCD$ įstrižainės statmenos, todėl vektorių $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ skaliarinė sandauga yra lygi nuliui, t. y.

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{AB} = 0.$$

Kadangi $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB}$, tai šių vektorių skaliarinės sandaugos yra lygios nuliui: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Taigi iš paskutinės lygybės išplaukia, kad $\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}^2 = 0$. Kampas tarp vienakrypčių vektorių $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{AD}$ lygus 0°, todėl, taikydami vektorių skaliarinės sandaugos apibrėžimą, pastarąją lygybę galime užrašyti taip: $n \cdot m \cdot \cos 0^0 - \overrightarrow{AB}^2 = 0$. Iš čia gauname, kad trapecijos šoninės kraštinės AB ilgis $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{mn}$.

Nubrėžkime trapecijos aukštinę *CE*. Kadangi $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{AB}$, tai šią lygybę skaliariškai pakėlę kvadratu ir pastebėję, kad $\left|\overrightarrow{ED}\right| = m - n$, o $\overrightarrow{ED} \perp \overrightarrow{AB}$, gauname: $\overrightarrow{CD}^2 = \overrightarrow{ED}^2 - 2\overrightarrow{ED}\,\overrightarrow{AB} +$

$+\overrightarrow{AB}^2 = (m-n)^2 + mn$. Taigi trapecijos šoninės kraštinės CD ilgis $\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{m^2 - mn + n^2}$. Tuomet trapecijos šoninių kraštinių ilgių santykis $\dfrac{CD}{AB} = \dfrac{\sqrt{m^2 - mn + n^2}}{\sqrt{mn}} = \sqrt{\dfrac{m}{n} + \dfrac{n}{m} - 1}$.

b) Iš lygybės $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ gauname, kad trapecijos įstrižainės AC ilgis yra lygus: $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2} = \sqrt{mn + n^2}$. Analogiškai, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, todėl įstrižainės BD ilgis $\left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{m^2 + mn}$. Taigi trapecijos įstrižainių ilgių santykis $\dfrac{BD}{AC} = \dfrac{\sqrt{m^2 + mn}}{\sqrt{mn + n^2}} = \sqrt{\dfrac{m}{n}}$.

c) Smailiojo trapecijos kampo, kurį pažymėkime raide α, didumas yra lygus kampo tarp vektorių $\overrightarrow{DC}$ ir $\overrightarrow{DA}$ didumui. Šio kampo kosinusą randame taip:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}}{\left|\overrightarrow{DC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DA}\right|} = \frac{\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{CD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{(\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AD}}{\sqrt{m^2 - mn + n^2}\cdot m} = \frac{m-n}{\sqrt{m^2 - mn + n^2}},$$

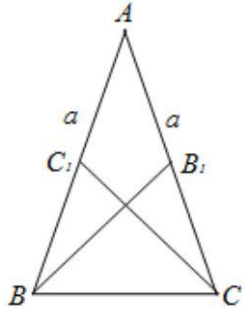
nes $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AD}$, o $\left|\overrightarrow{DC}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$ ir $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right|$. Taigi gauname, kad trapecijos smailusis kampas $\alpha = \arccos\dfrac{m-n}{\sqrt{m^2 - mn + n^2}}$.

Ats.: $\dfrac{CD}{AB} = \sqrt{\dfrac{m}{n} + \dfrac{n}{m} - 1}$, $\dfrac{BD}{AC} = \sqrt{\dfrac{m}{n}}$, $\alpha = \arccos\dfrac{m-n}{\sqrt{m^2 - mn + n^2}}$.

7 pavyzdys. Rasime lygiašonio trikampio ABC kampą A, jeigu žinoma, kad iš trikampio pagrindo viršūnių nubrėžtos pusiaukraštinės BB_1 ir CC_1 yra statmenos.

Sprendimas. Sakykime, kad trikampio šoninių kraštinių AB ir AC ilgis lygus a (žr. 17 pav.). Tuomet kampo A kosinusas

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{a^2}.$$



17 pav.

Iš sąlygos, kad pusiaukraštinės BB_1 ir CC_1 yra statmenos, rasime vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ skaliarinę sandaugą. Tuo tikslu vektorius $\overrightarrow{BB_1}$ ir $\overrightarrow{CC_1}$ išdėstysime nekolineariaisiais vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$. Pagal 3 teoremą

$$\overrightarrow{BB_1} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2} = \frac{-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}}{2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.$$

Analogiškai, $\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Kadangi $\overrightarrow{BB_1} \perp \overrightarrow{CC_1}$, tai

$$\overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{CC_1} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - a^2 = 0.$$

Iš čia turime, kad $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{4}{5}a^2$. Tuomet $\cos A = \frac{4}{5}$, t. y. kampas $A = \arccos \frac{4}{5}$.

Ats.: $A = \arccos \frac{4}{5}$

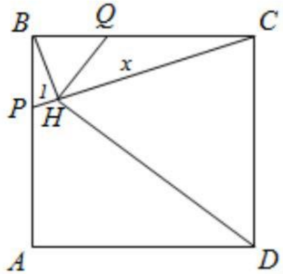
8 pavyzdys. Kvadrato $ABCD$ kraštinėse AB ir BC taškai P ir Q pažymėti taip, kad $BP = BQ$. BH yra trikampio PBC aukštinė. Įrodysime, kad $HQ \perp HD$.

Kadangi $BP = BQ$, tai $\overrightarrow{BC} = \mu\overrightarrow{BQ}$ ir $\overrightarrow{BA} = \mu\overrightarrow{BP}$. Norint įrodyti, kad $HQ \perp HD$, reikia parodyti, kad $\overrightarrow{HQ} \cdot \overrightarrow{HD} = 0$. Išdėstykime vektorius $\overrightarrow{HQ}$ ir $\overrightarrow{HD}$ nekolineariaisiais vektoriais $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{BC}$ taip (žr. 18 pav.):

$$\overrightarrow{HQ} = \overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BH} = \frac{1}{\mu}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BH},$$
$$\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BH}. \qquad (1)$$

Sakykime, kad trikampio BPC aukštinės BH pagrindo taškas H dalija kraštinę PC santykiu $PH : HC = 1 : x$. Tuomet pagal 3 teoremą teisingos lygybės

$$\overrightarrow{BH} = \frac{x\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BC}}{1+x} = \frac{x}{\mu(1+x)}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{(1+x)}\overrightarrow{BC}.$$



18 pav.

Kadangi

$$\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{\mu}\overrightarrow{BA},$$

tai šių vektorių skaliarinė sandauga lygi nuliui, t. y.

$$\left(\frac{x}{\mu(1+x)}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{(1+x)}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC} - \frac{1}{\mu}\overrightarrow{BA}\right) = 0.$$

Iš pastarosios lygybės gauname, kad

$$\frac{1}{(1+x)}\overrightarrow{BC}^2 - \frac{x}{\mu^2(1+x)}\overrightarrow{BA}^2 = 0, \qquad (2)$$

nes $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$. Kadangi BA ir BC yra kvadrato kraštinės, tai $\overrightarrow{BA}^2 = \overrightarrow{BC}^2 \neq 0$ ir iš (2) lygybės randame, kad $x = \mu^2$. Gautąją x reikšmę įrašę į vektorių $\overrightarrow{HQ}$ ir $\overrightarrow{HD}$ (1) išraiškas ir pertvarkę reiškinius, turime:

$$\overrightarrow{HQ} = \frac{\mu^2 - \mu + 1}{1+\mu^2}\overrightarrow{BC} - \frac{\mu}{1+\mu^2}\overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{HD} = \frac{\mu}{1+\mu^2}\overrightarrow{BC} + \frac{\mu^2 - \mu + 1}{1+\mu^2}\overrightarrow{BA}.$$

Sudauginę vektorius $\overrightarrow{HQ}$ ir $\overrightarrow{HD}$ skaliariškai gauname, kad

$$\overrightarrow{HQ}\cdot\overrightarrow{HD} = \frac{\mu(\mu^2 - \mu + 1)}{(1+\mu^2)^2}\left(\overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{BA}^2\right) = 0,$$

nes akivaizdu, kad $\overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{BA}^2 = (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. Taigi įrodėme, kad $HQ \perp HD$.

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1. Trapecijos $ABCD$ pagrindų santykis $AD : BC = 3 : 2$. Vektoriais $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{BD}$ išreikškite vektorius $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ ir $\overrightarrow{DA}$.

2. Taškas M yra trikampio ABC kraštinės AB vidurio taškas, taškas O – trikampio pusiaukraštinių sankirtos taškas. Raskite vektorių $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AO}$ ir $\overrightarrow{MO}$ koordinates bazėje $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

3. Keturkampio $ABCD$ įstrižainių AC ir BD vidurio taškai yra E ir F. Įrodykite, kad $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$.

4. Trikampio ABC kraštinėse AB ir AC taškai M ir N pažymėti taip, kad $AM : MB = 3 : 2$ ir $AN : NC = 4$. Tiesės BN ir CM kertasi taške O. Raskite santykius $BO : ON$ ir $CO : OM$.

5. Trikampio ABC pusiaukraštinėje AD yra taškas K taip, kad $AK : KD = 3$. Kokiais santykiais tiesės CK ir BK dalija trikampio kraštines AB ir AC?

6. Kampai tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ bei $\vec{a}$ ir $\vec{c}$ lygūs 60°. Žinant, kad $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$ ir $|\vec{c}| = 6$, raskite vektoriaus $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ilgį.

7. Trikampio ABC pusiaukraštinė yra atkarpos BD, $BD = \frac{\sqrt{3}}{4}AB$, o kampas BAD lygus $60°$. Raskite kampo ABD didumą.

8. Keturkampio $ABCD$ įstrižainės statmenos ir lygios. Keturkampio kraštinėse pažymėti taškai P, Q, R ir S taip, kad $AP : PB = BQ : QC = CR : RD = DS : SA = 2$. Įrodykite, kad atkarpos PR ir QS yra statmenos ir lygios.

9. Lygiakraščio trikampio ABC kraštinėse AC ir AB taškai D ir E pažymėti taip, kad $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EB}$. Tiesės BD ir CE kertasi taške Q. Raskite kampo AQC didumą.

10. Trapecijos $ABCD$ pagrindų AD ir BC santykis lygus 3. Trapecijos šoninės kraštinės AB ilgis lygus b, o įstrižainės AC ilgis – c. Apskaičiuokite trapecijos $ABCD$ kraštinių ilgius, kampų didumus ir atstumą tarp šoninių kraštinių susikirtimo taško S ir įstrižainių susikirtimo taško M.

VIII. MATEMATIKOS TAIKYMAS EKONOMIKOJE

Antanas Apynis
(Vilniaus universitetas)

Taikant matematiką (ne tik ekonomikoje) pirmiausia sudaromas gvildenamos problemos matematinis modelis – tam tikras matematinis uždavinys. Čia pakaktų prisiminti vadinamuosius tekstinius uždavinius, kurie daugeliui mokinių paprastai sukelia nemenkų rūpesčių.

Šioje jaunesniesiems matematikams skirtoje temoje artimiau susipažinsime su tokiais gamybos ir prekybos optimizavimo, pasiūlos ir paklausos balanso bei gamybos pelningumo uždaviniais, kuriems suformuluoti ir išspręsti pakanka gana lengvai suprantamų tiesinės algebros žinių.

1. Gamybos planavimo uždavinys. Tarkime, kad kuri nors firma gamina detales $D_1, D_2, \dots, D_n$ ir numato parduoti jas kainomis $p_1, p_2, \dots, p_n$. Šioms detalėms gaminti ji naudoja išteklius $R_1, R_2, \dots, R_m$, kurių turimi kiekiai (tam tikrais vienetais) yra $b_1, b_2, \dots, b_m$. Kiekvienai detalei D_i, $i = 1, 2, \dots, n$, sunaudojama a_{i1} ištekliaus R_1 vienetų, a_{i2} – ištekliaus R_2 ir t. t. Taigi detalių gamyba nusakoma tam tikra išteklių *sąnaudų lentele* (*žr.* 1 lent.).

1 lentelė

	D_1	D_2	$\dots$	D_n	
R_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	b_1
R_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
R_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	b_m

Planuojamus pagaminti detalių skaičius pažymėkime atitinkamai $x_1, x_2, \dots, x_n$, o sutvarkytą rinkinį $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ pavadinkime *gamybos planu*. Pardavus visas detales, gaunamos *pajamos*; jas pažymėkime $P(x)$. Aišku, kad $P(x)$ skaičiavimo formulė (su tam tikromis išlygomis) yra tokia:

$$P(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n. \qquad (1)$$

Natūralu, kad firmos tikslas – suplanuoti gamybą taip, kad pajamos $P(x)$ būtų pačios didžiausios. Paprastai funkcija $P(x)$ vadinama gamybos *tikslo funkcija*.

Firma turi daug laisvės planuodama gamybą, tačiau ji turi atsižvelgti į išteklių sąnaudas ir turimus išteklius. Tegu $s_i(x)$ yra ištekliaus R_i, $i = 1, 2, ..., m,$ sąnaudos, reikalingos planui x įvykdyti. Esant prielaidai, kad kiekvieno ištekliaus sąnaudos yra proporcingos gaminamų detalių skaičiui, gausime tokias skaičiavimo formules:

$$s_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

Aišku, kad turi galioti nelygybės

$$s_1(x) \le b_1, \quad s_2(x) \le b_2, ..., \quad s_m(x) \le b_m,$$

kurios sudaro *apribojimų sistemą*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \qquad (2)$$

Kartais reikalaujama, kad visi turimi ištekliai $b_1, b_2, ..., b_m$ būtų visiškai sunaudoti (gamybos be atliekų atvejis). Tada gamybos apribojimų sistema bus *tiesinių lygčių sistema*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (3)$$

Apribojimams priskiriama ir dydžių $x_1, x_2, ..., x_n$ *neneigiamumo sąlyga*

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, ..., \quad x_n \ge 0, \qquad (4)$$

kuri kiekvienam planuotojui yra akivaizdi.

Apibendrindami pasakysime, kad apribojimų sistemos (tiek (2), tiek (3)) neneigiamų sprendinių (t. y. tenkinančių (4) sąlygą) aibė vadinama gamybos planų *leistiniąja aibe*; ją žymėsime X.

Uždavinys toks: *leistinojoje aibėje X rasti didžiausias pajamas* $P(x)$ *duosiantį gamybos planą x*.

Dažnai vartojami tokie formalūs šio uždavinio užrašai:

- $\max\{P(x): x \in X\}$;
- $P(x) \to \max,\ x \in X$;
- $\max P(x)$, kai $x \in X$.

Išskleistu pavidalu optimalios gamybos planavimo uždavinys užrašomas taip:

$$\max(p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n),$$

$$\text{kai } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m. \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, ... ,\ x_n \ge 0. \end{cases} \tag{5}$$

Analogiškai užrašomas uždavinys ir tuo atveju, kai apribojimų sistema yra (3) pavidalo.

Gamybos uždavinio *sprendiniu* (*optimaliu planu*) vadinamas toks leistinosios aibės *X* taškas *x* (leistinasis planas), kuriame tikslo funkcija $P(x)$ įgyja didžiausią reikšmę.

Išnagrinėkime pavyzdį.

1 pavyzdys. Baldų fabrikas gamina kėdes ir suolus. Vienai kėdei pagaminti reikia išleisti 21 eurą medžiagoms ir 7 eurus atlyginimui už darbą, o vienam suolui – atitinkamai 35 ir 5 eurus. Gaminamų kėdžių kaina 50 eurų, o suolų kaina 65 eurai. Sudarykime didžiausias pajamas duosiantį kėdžių ir suolų gamybos planą, jei medžiagoms išleisti galima iki 2 100 eurų, o atlyginimams už darbą ne daugiau kaip 500 eurų.

Sprendimas. Tegu x_1 yra planuojamų gaminti kėdžių, o x_2 – suolų skaičius. Taigi gamybos planas yra $x = (x_1; x_2)$. Pagal uždavinio sąlygą, $P(x) = 50x_1 + 65x_2$ yra numatomos pajamos.

Išteklių sąnaudų lentelė tokia:

1 tentelė	Kėdė	Suolas	
Išlaidos medž.	21	35	2100
Išlaidos atlygin.	7	5	500

Iš šios lentelės matyti, kad išlaidos medžiagoms, reikalingoms planui $x=(x_1;\,x_2)$ įvykdyti, sudarys $21x_1+35x_2$ eurų, o išlaidos atlyginimams sudarys $7x_1+5x_2$ eurų. Atsižvelgę į turimus išteklius ir dydžių x_1 bei x_2 neneigiamumo sąlygą, gausime tokią apribojimų sistemą:

$$\begin{cases} 21x_1+35x_2\le 2100, \\ 7x_1+\ 5x_2\le\ 500, \\ x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0. \end{cases}$$

Pirmą nelygybę padaliję iš 7, gauname ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} 3x_1+5x_2\le 300, \\ 7x_1+5x_2\le\ 500, \\ x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0. \end{cases}$$

Ieškodami didžiausias pajamas duosiančio gamybos plano, turime išspręsti šį uždavinį:

$$\max\,(50x_1+65x_2),\ \text{ kai } \begin{cases} 3x_1+5x_2\le 300, \\ 7x_1+5x_2\le\ 500, \\ x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0. \end{cases} \tag{6}$$

Kadangi uždavinys yra su dviem nežinomaisiais, optimalaus gamybos plano ieškokime taikydami grafinį metodą.

Iš pradžių stačiakampėje koordinačių sistemoje pavaizduokime leistinąją aibę X – tiesinių nelygybių sistemos

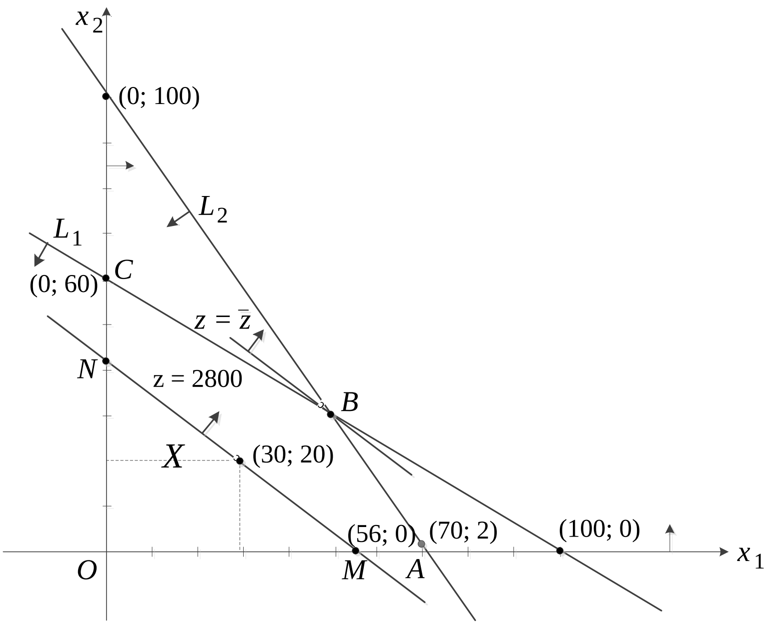
$$\begin{cases} 3x_1+5x_2\le 300, \\ 7x_1+5x_2\le\ 500, \end{cases}$$

neneigiamų sprendinių $(x_1\ge 0$ ir $x_2\ge 0)$ aibę.

Žinome, kad tiesinės nelygybės $3x_1+5x_2\le 300$ sprendinių aibės geometrinis vaizdas (grafikas) yra pusplokštumė, kurios kraštas – tiesė $3x_1+5x_2=300$. Ši tiesė (*žr.* 1 pav.) eina per taškus (0; 60) ir (100; 0). Ją pažymėkime L_1, o griežtos nelygybės $3x_1+5x_2<300$ sprendinių pusplokštumę nurodykime rodykle prie tiesės L_1.

Analogiškai nelygybės $7x_1 + 5x_2 \leq 500$ sprendinių aibės geometrinis vaizdas yra rodykle prie tiesės L_2 nurodyta pusplokštumė ir jos kraštas – tiesė L_2, kurios lygtis yra $7x_1 + 5x_2 = 500$. Ši tiesė eina per taškus (0; 100) ir (70; 2).

Nelygybės $x_1 \geq 0$ ir $x_2 \geq 0$ apriboja abiejų minėtų pusplokštumių sankirtą iki tos dalies, kuri yra pirmame ketvirtyje (nurodyta rodyklėmis prie koordinatinių ašių).



1 pav.

Taigi šio gamybos planavimo uždavinio leistinoji aibė yra keturkampiu *OABC* apribota plokštumos dalis (*žr.* 1 pav.).

Dabar nagrinėkime tikslo funkcijos $z = 50x_1 + 65x_2$ (čia z yra vietoj $P(x)$) reikšmių kitimą leistinojoje aibėje X.

Pasirinkime bet kurį leistinosios aibės tašką, pavyzdžiui, (30; 20). Tikslo funkcijos reikšmė jame yra $z = 50 \cdot 30 + 65 \cdot 20 = 2800.$

Sudarykime lygtį $50x_1 + 65x_2 = 2800.$ Jos sprendinių aibės geometrinis vaizdas (grafikas) yra tiesė, einanti per taškus (30; 20) ir (56; 0); ji

1 paveiksle pažymėta užrašu $z = 2800$. Ši tiesė ypatinga tuo, kad visuose jos taškuose tikslo funkcijos $z = 50x_1 + 65x_2$ reikšmės yra vienodos (jos lygios 2800). Todėl ta tiesė vadinama tikslo funkcijos *lygio tiese*.

Jei pasirinktume bet kurį kitą leistinosios aibės X tašką, tai analogiškai gautume kitą lygio tiesę, kuri būtų lygiagreti su lygio tiese $z = 2800$. Beje, visos lygio tiesės yra tarpusavyje lygiagrečios (šio teiginio pagrindimą (įrodymą) čia praleisime).

Atkreipkime dėmesį į dar vieną esminį dalyką. Lygio tiesė $z = 2800$ padalija plokštumą į dvi pusplokštumes. Vienoje (ji 1 paveiksle nurodyta rodykle prie lygio tiesės) tikslo funkcijos reikšmės yra didesnės už 2800, o kitoje – mažesnės.

Taigi atkarpos MN taškuose tikslo funkcijos $z = 50x_1 + 65x_2$ reikšmės lygios 2800, o trikampiu OMN apribotoje srityje jos yra mažesnės už 2800. Šią leistinosios aibės dalį „nupjauname“ (atmetame), ir toliau nagrinėjame tikslo funkcijos reikšmių kitimą tik daugiakampiu $MABCN$ apribotoje leistinosios aibės dalyje (čia tikslo funkcijos reikšmės didesnės už 2800).

Pasirinkime tašką B ir nubrėžkime per jį tiesę $z = \bar{z}$ (*žr.* 1 pav.), lygiagrečią su lygio tiese $z = 2800$. Tai bus lygio tiesė, atitinkanti tikslo funkcijos reikšmę taške B (jo koordinačių kol kas dar nežinome kaip ir tikslo funkcijos reikšmės $\bar{z}$ jame). Rodykle prie jos nurodytoje pusplokštumėje tikslo funkcijos $z = 50x_1 + 65x_2$ reikšmės didesnės negu taške B. Bet šioje pusplokštumėje nėra aibės X taškų. Todėl B yra ieškomasis leistinosios aibės X taškas, kuriame tikslo funkcijos reikšmė yra pati didžiausia. Belieka rasti taško B koordinates.

Kadangi taške B susikerta tiesės L_1 ir L_2, tai jo koordinatės yra tų tiesių lygčių sistemos

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 300, \\ 7x_1 + 5x_2 = 500 \end{cases}$$

sprendinys (50; 30).

Vadinasi, didžiausias pajamas $\bar{z} = \max P(x)$ fabrikas gali gauti, suplanavęs pagaminti 50 kėdžių ir 30 suolų. Aišku, kad

$$\bar{z} = 50 \cdot 50 + 65 \cdot 30 = 4450 \text{ (eurų).}$$

Pastaba. Jeigu būtų nutikę taip, kad taško B koordinatės nebūtų buvę sveikieji skaičiai, būtume turėję daug papildomų rūpesčių rašydami galutinį atsakymą. Tokiu atveju reikėtų rasti artimiausią (pagal pajamų didumą) leistinosios aibės tašką, kurio abi komponentės – sveikieji skaičiai. Įprastinis skaičių apvalinimas tik išskirtiniais atvejais duoda tikrą rezultatą. O gali nutikti ir taip, kad „suapvalintas“ taškas net atsidurs už leistinosios aibės X ribų.

Šio pobūdžio problemų sprendimo čia nenagrinėsime.

Nesunku suvokti, kad čia nagrinėtą gamybos planavimo uždavinį siekiant didžiausių pajamų galima apibendrinti. Jei detales (vienetais skaičiuojamus gaminius) pakeistume be galo dalia produkcija (nepra-randančia savo savybių skaidant į dalis), tai atkristų ir būtinumas ieškoti gamybos plano, kurio komponentės yra sveikieji skaičiai. Be to, vietoj pajamų galima nagrinėti pelną arba patiriamus nuostolius. Pastaruoju atveju turėtume ieškoti plano, atnešiančio mažiausius nuostolius.

2. Pasiūlos ir paklausos balansas ir gamybos pelningumas.

Gaminamos produkcijos paklausa yra savotiškas vartotojų užsakymas, su kuriuo būtina skaitytis. Paskelbus per aukštas gaminamos produkcijos kainas, lyg ir galima tikėtis didesnių pajamų (taigi ir pelno), bet nepardavus dalies prekių (dėl sumažėjusios paklausos) nuostoliai būtų neišvengiami.

Pirmiausia susipažinkime su pasiūlos ir paklausos balanso problema tarę, kad rinka yra nusistovėjusi, o gaminamos produkcijos paklausa yra žinoma.

Tarkime, kad gamintojai (firmos, cechai, individai) $G_1, G_2, \dots, G_n$ gamina tik po vieną produkcijos rūšį $P_1, P_2, \dots, P_n$ (G_j gamina P_j, $j = 1, 2, \dots, n$) ir yra susiję tokio pobūdžio technologiniais ryšiais. Kiekvienas gamintojas G_j savo produkcijai P_j gaminti naudoja ne tik turimus išteklius, bet ir gamybos partnerių (netgi savo) gaminamą produkciją kaip tam tikrą gamybos išteklių. Tie ryšiai paprastai nusakomi vadinamaisiais *technologiniais koeficientais* a_{ij}, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$, iš kurių galima sudaryti *technologinę lentelę* (*žr.* 2 lent.), kurią toliau vadinsime *technologine matrica*. Koeficiento a_{ij} prasmė tokia: produkcijos P_j vienam kiekio vienetui pagaminti reikia sunaudoti a_{ij} produkcijos P_i tam tikrų kiekio vienetų.

2 lentelė

	G_1	G_2	...	G_n
P_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
P_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
P_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}

Taigi technologinės matricos stulpeliai

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

apibūdina produkcijos P_j gamybos technologiją, o eilutės

$$(a_{i1}; a_{i2}; \ldots; a_{in}), \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

parodo produkcijos P_i technologines sąnaudas.

Planuojamą gaminti produkcijos P_j kiekį (tam tikrais mato vienetais) pažymėkime x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Tada sutvarkytą rinkinį $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ vadinsime *gamybos planu* (turėdami mintyje gamintojų $G_1, G_2, \ldots, G_n$ sistemą).

Skaičiuodami produkcijos P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, technologines sąnaudas (jas žymėsime $s_i(x)$), reikalingas planui *x* įvykdyti, remsimės prielaida, kad jos yra proporcingos gaminamam produkcijos P_j kiekiui $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Gausime tokią formulę:

$$s_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Kad būtų paprasčiau, tarkime, jog visa likusi nuo technologinių sąnaudų produkcija parduodama. Tai reiškia, kad produkcijos P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, pasiūla (ją žymėkime $p_i(x)$) užrašoma formule

$$p_i(x) = x_i - s_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Jeigu d_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, būtų produkcijos P_j paklausa, tai pasiūlos ir paklausos balansą nusakytų lygčių $p_i(x) = d_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sistema

$$\begin{cases} p_1(x) = d_1, \\ p_2(x) = d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n(x) = d_n. \end{cases}$$

Remdamiesi (7) ir (8) formulėmis, gausime, kad

$$p_1(x) = x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) = (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n,$$

$$p_2(x) = x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n) =$$

$$= -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_n(x) = x_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n\,n-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n) =$$

$$= -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{n\,n-1}x_{n-1} + (1 - a_{nn})x_n.$$

Vadinasi, ieškant subalansuoto gamybos plano $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ reikia išspręsti tokią *balanso lygčių sistemą:*

$$\begin{cases} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n-1}x_{n-1} - a_{1n}x_n = d_1, \\ -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n-1}x_{n-1} - a_{2n}x_n = d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - a_{n3}x_3 - \ldots - a_{n\,n-1}x_{n-1} + (1 - a_{nn})x_n = d_n. \end{cases} \tag{9}$$

Neneigiamas (9) sistemos sprendinys vadinamas *subalansuotu gamybos planu*.

Sakoma, kad ekonominė sistema yra *produktyvi*, jeigu (9) sistema turi neneigiamą sprendinį esant bet kuriai paklausai $d = (d_1; d_2; \ldots; d_n)$; aišku, kad turi būti $d_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$, ..., $d_n \geq 0$.

O dabar tą patį gamybos modelį, nusakomą technologine matrica (*žr.* 2 lent.), pagvildenkime kitu, finansiniu, apsektu. Tarkime, kad p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, yra produkcijos P_i kaina, o c_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, yra produkcijos P_j savikaina (išlaidos vienam kiekio vienetui pagaminti). Remdamiesi prielaida, kad bendros išlaidos proporcingos perkamos produkcijos kiekiui, gausime tokią savikainos skaičiavimo formulę:

$$c_j = a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \ldots + a_{nj}p_n, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Aišku, kad nelygybė $p_j - c_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, yra būtina racionalaus gamybos planavimo sąlyga. O siekiant gauti tam tikrą pridėtinę vertę v_j, $j = 1, 2, \dots, n$, reikėtų ieškoti tokių kainų $p_1, p_2, \dots, p_n$, kad galiotų lygybės

$$p_1 - c_1 = v_1,\ p_2 - c_2 = v_2,\ \dots,\ p_n - c_n = v_n. \qquad (11)$$

Atsižvelgę į (10) formulę, gausime, kad

$$\begin{aligned}
p_1 - c_1 &= p_1 - (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3 + \dots + a_{n-1\,1}p_{n-1} + a_{n1}p_n) = \\
&= (1 - a_{11})p_1 - a_{21}p_2 - a_{31}p_3 - \dots - a_{n-1\,1}p_{n-1} - a_{n1}p_n, \\
p_2 - c_2 &= p_2 - (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3 + \dots + a_{n-1\,2}p_{n-1} + a_{n2}p_n) = \\
&= -a_{12}p_1 + (1 - a_{22})p_2 - a_{32}p_3 - \dots - a_{n-1\,2}p_{n-1} - a_{n2}p_n, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
p_n - c_n &= p_n - (a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + a_{3n}p_3 + \dots + a_{n-1\,n}p_{n-1} + a_{nn}p_n) = \\
&= -a_{1n}p_1 - a_{2n}p_2 - a_{3n}p_3 - \dots - a_{n-1\,n}p_{n-1} + (1 - a_{nn})p_n.
\end{aligned}$$

Taigi (11) lygčių (kainų $p_1, p_2, \dots, p_n$ atžvilgiu) sistema išskleistu pavidalu yra tokia:

$$\begin{cases}
(1 - a_{11})p_1 - a_{21}p_2 - a_{31}p_3 - \dots - a_{n-1\,1}p_{n-1} - a_{n1}p_n = v_1, \\
-a_{12}p_1 + (1 - a_{22})p_2 - a_{32}p_3 - \dots - a_{n-1\,2}p_{n-1} - a_{n2}p_n = v_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
-a_{1n}p_1 - a_{2n}p_2 - a_{3n}p_3 - \dots - a_{n-1\,n}p_{n-1} + (1 - a_{nn})p_n = v_n.
\end{cases} \qquad (12)$$

Jeigu yra toks kainų $p_1, p_2, \dots, p_n$ rinkinys, kuris tenkina (12) sistemą, kai $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, ..., $v_n > 0$, tai sakoma, kad ekonominė sistema, nusakoma 2 technologine lentele, yra *pelninga*.

Šiame skyrelyje glaustai aprašytas pasiūlos ir paklausos balanso modelis vadinamas Leontjevo (W. Leontjef (1906–1999) – amerikiečių ekonomistas, 1973 m. Nobelio premijos laureatas) modeliu. Giliau nagrinėjant šį modelį aiškinamasi, kokioms sąlygoms esant ekonominė sistema yra produktyvi ir pelninga, o taip pat pereinama nuo statinio prie dinaminio jo varianto analizės.

Išspręskime kelis pavyzdžius.

2 pavyzdys. Raskime (jei egzistuoja) subalansuotą gamybos planą $x = (x_1; x_2; x_3)$, atitinkantį gaminamos produkcijos paklausą $d = (d_1; d_2; d_3)$ šiais atvejais:

a) $d = (42; 18; 0)$, o gamybos technologinė matrica tokia:

	G_1	G_2	G_3
P_1	0,5	0,1	0,2
P_2	0	0,5	0,1
P_3	0,1	0,1	0,3

b) $d = (50; 20; 30)$, o gamybos technologinė matrica tokia:

	G_1	G_2	G_3
P_1	0,5	0	0,1
P_2	0,3	0,6	0,5
P_3	0,4	0,6	0,2

Sprendimas. a) Technologinės sąnaudos

$$s(x) = (s_1(x); s_2(x); s_3(x)),$$

būtinos planui $x = (x_1; x_2; x_3)$ šiuo atveju yra tokios:

$$s_1(x) = 0{,}5x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3,$$
$$s_2(x) = 0{,}5x_2 + 0{,}1x_3,$$
$$s_3(x) = 0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}3x_3,$$

todėl pasiūlos $p(x) = (p_1(x); p_2(x); p_3(x))$ komponentės apskaičiuojamos pagal šias formules:

$$p_1(x) = x_1 - s_1(x) = x_1 - (0{,}5x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3),$$
$$p_2(x) = x_2 - s_2(x) = x_2 - (0{,}5x_2 + 0{,}1x_3),$$
$$p_3(x) = x_3 - s_3(x) = x_3 - (0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}3x_3).$$

Atlikę veiksmus gauname:

$$p_1(x) = 0{,}5x_1 - 0{,}1x_2 - 0{,}2x_3,$$
$$p_2(x) = 0{,}5x_2 - 0{,}1x_3,$$
$$p_3(x) = -0{,}1x_1 - 0{,}1x_2 + 0{,}7x_3).$$

Dabar išspręskime balanso $p(x)=d$ lygčių sistemą

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 - 0{,}1x_2 - 0{,}2x_3 = 42, \\ 0{,}5x_2 - 0{,}1x_3 = 18, \\ -0{,}1x_1 - 0{,}1x_2 + 0{,}7x_3 = 0. \end{cases}$$

Iš pradžių kiekvieną lygtį padauginkime iš 10 (kad nebeliktų trupmeninių koeficientų). Gausime ekvivalenčią lygčių sistemą

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 420, \\ 5x_2 - x_3 = 180, \\ -x_1 - x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

Lygtis (mintyse) pažymėkime L_1, L_2 ir L_3 ir lygtį L_3 pakeiskime lygtimi $L_1 + 5L_3$. Gausime ekvivalenčią (turinčią tuos pačius sprendinius) lygčių sistemą

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 420, \\ 5x_2 - x_3 = 180, \\ -6x_2 + 33x_3 = 420. \end{cases}$$

Šios sistemos lygtį L_3 pakeiskime lygtimi $\frac{1}{3}L_3$ (kitaip sakant, trečią lygtį padauginkime iš $\frac{1}{3}$ (padalykime iš 3)). Gausime sistemą

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 420, \\ 5x_2 - x_3 = 180, \\ -2x_2 + 11x_3 = 140. \end{cases}$$

Dabar trečią lygtį L_3 pakeiskime lygtimi $2L_2 + 5L_3$ ir vėl gausime ekvivalenčią lygčių sistemą

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 420, \\ 5x_2 - x_3 = 180, \\ 53x_3 = 1060. \end{cases}$$

Iš L_3 gauname, kad $x_3 = 20.$ Tada iš L_2 gauname $x_2 = 40,$ o iš L_1 – $x_1 = 100.$

Taigi ši ekonominė trijų gamintojų G_1, G_2 ir G_3 sistema gali sudaryti bendrą gamybos planą $x=(100;\,40;\,20)$, kuris yra subalansuotas su produkcijos paklausa $d=(42;18;\,0)$.

b) Šiuo atveju gauname tokias pasiūlos $p(x)=(p_1(x);\ p_2(x);\ p_3(x))$ komponenčių formules:

$p_1(x)=x_1-s_1(x)=x_1-(0{,}5x_1+0{,}1x_3)=0{,}5x_1-0{,}1x_3,$

$p_2(x)=x_2-s_2(x)=x_2-(0{,}3x_1+0{,}6x_2+0{,}5x_3)=-0{,}3x_1+0{,}4x_2-0{,}5x_3,$

$p_3(x)=x_3-s_3(x)=x_3-(0{,}4x_1+0{,}6x_2+0{,}2x_3)=-0{,}4x_1-0{,}6x_2+0{,}8x_3.$

Sudarykime ir spęskime balanso $p(x)=d$ lygčių sistemą

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 \qquad\qquad -0{,}1x_3=50,\\ -0{,}3x_1+0{,}4x_2-0{,}5x_3=20,\\ -0{,}4x_1-0{,}6x_2+0{,}8x_3=30. \end{cases}$$

Kiekvieną lygtį padauginę iš 10, gausime ekvivalenčią lygčių sistemą

$$\begin{cases} 5x_1 \qquad\qquad -x_3=500,\\ -3x_1+4x_2-5x_3=200,\\ -4x_1-6x_2+8x_3=300. \end{cases}$$

Dabar antrą lygtį L_2 pakeiskime lygtimi $3L_1+5L_2$, o trečią lygtį L_3 – lygtimi $4L_1+5L_3$. Gausime ekvivalenčią lygčių sistemą

$$\begin{cases} 5x_1 \qquad\qquad -x_3=\ 500,\\ \qquad 20x_2-28x_3=2500,\\ \quad -30x_2+36x_3=3500. \end{cases}$$

Spręsdami toliau L_2 pakeiskime lygtimi $\frac{1}{4}L_2$, o lygtį L_3 – lygtimi $\frac{1}{2}L_3$.

Gausime lygčių sistemą

$$\begin{cases} 5x_1 \qquad\qquad -x_3=\ 500,\\ \qquad 5x_2-\ 7x_3=\ 625,\\ \quad -15x_2+18x_3=1750. \end{cases}$$

Šios sistemos trečią lygtį L_3 pakeiskime lygtimi $3L_2+L_3$. Gausime ekvivalenčią lygčių sistemą

$$\begin{cases} 5x_1 \qquad\qquad - x_3 = 500, \\ \qquad 5x_2 - 7x_3 = 625, \\ \qquad\qquad -3x_3 = 3625. \end{cases}$$

Iš trečios lygties gauname neigiamą ieškomo plano x trečią komponentę. Ir tai reiškia, kad neįmanoma sudaryti subalansuoto gamybos plano $x = (x_1; x_2; x_3)$, atitinkančio produkcijos paklausą $d = (50; 20; 30)$.

3 pavyzdys. Nustatykime, ar dviejų gamintojų G_1 ir G ekonominė sistema yra produktyvi (gali sudaryti gamybos planą $x = (x_1; x_2)$, subalansuotą su bet kuria paklausa $d = (d_1; d_2)$, $d_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$, jei jos gamybos technologinė matrica yra

	G_1	G_2
P_1	0,2	0,3
P_2	0,4	0,1

Sprendimas. Tegu $d = (d_1; d_2)$, $d_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$, yra gaminamos produkcijos P_1 ir P paklausa. Technologinės gaminamos produkcijos sąnaudos $s_1(x)$ ir $s_2(x)$ apskaičiuojamos pagal formules:

$$s_1(x) = 0{,}2x_1 + 0{,}3x_3 \quad \text{ir} \quad s_2(x) = 0{,}4x_1 + 0{,}1x_3.$$

Todėl pasiūlos $p(x) = (p_1(x); p_2(x))$ komponentės apskaičiuojamos pagal šias formules:

$$p_1(x) = x_1 - s_1(x) = x_1 - (0{,}2x_1 + 0{,}3x_2) = 0{,}8x_1 - 0{,}3x_2,$$
$$p_2(x) = x_2 - s_2(x) = x_2 - (0{,}4x_1 + 0{,}1x_2) = -0{,}4x_1 + 0{,}9x_2.$$

Gauname tokią balanso $p(x) = d$ lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 - 0{,}3x_2 = d_1, \\ -0{,}4x_1 + 0{,}9x_2 = d_2. \end{cases}$$

Antrą lygtį L_2 pakeiskime lygtimi $L_1 + 2L_2$ ir gausime ekvivalenčią lygčių sistemą

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 - 0{,}3x_2 = d_1, \\ \qquad 1{,}5x_2 = d_1 + 2d_2. \end{cases}$$

Iš antros lygties gauname, kad

$$x_2 = \frac{d_1 + 2d_2}{1{,}5},$$

o tada iš pirmos lygties apskaičiuojame x_1 ir gauname

$$x_1 = \frac{3d_1 + d_2}{2}.$$

Aišku, kad $x_1 \ge 0$ ir $x_2 \ge 0$, kai $d_1 \ge 0$ ir $d_2 \ge 0$.

Vadinasi, ši dviejų gamintojų sistema yra produktyvi.

4 pavyzdys. Tarkime, kad trijų gamintojų G_1, G_2 ir G_3 ekonominės sistemos gamybos technologinė matrica tokia:

	G_1	G_2	G_3
P_1	0,4	0,3	0
P_2	0,2	0,1	0,4
P_3	0,5	0,2	0,3

Raskime (jei įmanoma) tokias gaminamos produkcijos P_1, P_2, P_3 kainas (tam tikrais piniginiais vienetais) $p = (p_1; p_2; p_3)$, kad gamyba būtų pelninga, o pridėtinė vertė būtų $v = (50; 10; 30)$.

Sprendimas. Iš pradžių apskaičiuokime gaminamos produkcijos savikainos $c = (c_1; c_2; c_3)$ komponentes c_1, c_2 ir c_3:

$$c_1 = 0{,}4p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}5p_3,$$
$$c_2 = 0{,}3p_1 + 0{,}1p_2 + 0{,}2p_3,$$
$$c_3 = 0{,}4p_2 + 0{,}3p_3.$$

Apskaičiuokime kiekvieno gamintojo pelną, gaunamą už kiekvieną parduotos produkcijos kiekio vienetą:

$$p_1 - c_1 = p_1 - (0{,}4p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}5p_3) = 0{,}6p_1 - 0{,}2p_2 - 0{,}5p_3,$$
$$p_2 - c_2 = p_2 - (0{,}3p_1 + 0{,}1p_2 + 0{,}2p_3) = -0{,}3p_1 + 0{,}9p_2 - 0{,}2p_3,$$
$$p_3 - c_3 = p_3 - (0{,}4p_2 + 0{,}3p_3) = -0{,}4p_2 + 0{,}7p_3.$$

Dabar ieškokime kainų p_1, p_2 ir p_3, kad kiekvienas gamintojas gautų sąlygoje nurodytą pridėtinę vertę (pelną). Tuo tikslu reikia išspręsti šią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 0{,}6p_1 - 0{,}2p_2 - 0{,}5p_3 = 50, \\ -0{,}3p_1 + 0{,}9p_2 - 0{,}2p_3 = 10, \\ \quad\quad -0{,}4p_2 + 0{,}7p_3 = 30. \end{cases}$$

Kiekvieną lygtį padauginkime iš 10. Gausime:

$$\begin{cases} 6p_1 - 2p_2 - 5p_3 = 500, \\ -3p_1 + 9p_2 - 2p_3 = 100, \\ \quad\quad -4p_2 + 7p_3 = 300. \end{cases}$$

Antrą lygtį L_2 pakeiskime lygtimi $L_1 + 2L_2$. Gausime ekvivalenčią lygčių sistemą

$$\begin{cases} 6p_1 - 2p_2 - 5p_3 = 500, \\ \quad\quad 16p_2 - 9p_3 = 700, \\ \quad\quad -4p_2 + 7p_3 = 300. \end{cases}$$

Dabar trečią lygtį L_3 pakeiskime lygtimi $L_2 + 4L_3$ ir vėl gausime ekvivalenčią lygčių sistemą

$$\begin{cases} 6p_1 - 2p_2 - 5p_3 = \ 500, \\ \quad\quad 16p_2 - 9p_3 = \ 700, \\ \quad\quad\quad\quad 19p_3 = 1900. \end{cases}$$

Iš trečios lygties L_3 gauname $p_3 = 100,$ o tada iš $L_3 - \ p_2 = 100$ ir iš $L_1 - \ p_1 = 200.$

Vadinasi, esant kainoms $p = (100; 100; 200)$ pirmas gamintojas gautų pelną, lygų 50, antras – pelną, lygų 10, o trečias gamintojas – pelną, lygų 30 (tam tikrų piniginių vienetų).

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Firma siuva vyriškas ir moteriškas striukes, gaudama po 9 eurus pelno už kiekvieną vyrišką striukę ir po 12 eurų pelno už kiekvieną moterišką striukę. Išlaidos vienai vyriškai striukei pasiūti lygios 100 eurų, o vienai moteriškai striukei 40 eurų. Vyriškos striukės reklamai firma išleidžia vieną eurą, o moteriškai – tris eurus. Raskite didžiausią pelną duosiantį striukių siuvimo planą su sąlyga, kad firmos išlaidos siuvimui neturi viršyti 50 000 eurų, o reklamai – nedidesnės už 1800eurų.

Pastaba. Už teisingą uždavinio sprendimą skiriami 3 taškai. Atskirai bus vertinamos šios sprendimo dalys:

1) matematinio modelio sudarymas;

2) leistinosios aibės grafinis pavaizdavimas;

3) optimalaus striukių siuvimo plano sudarymas ir pelno apskaičiavimas.

2. Cementas gaminamas dviejose įmonėse. Pirmoje per dieną pagaminama 30 tonų, o antroje – 40 tonų cemento. Pagamintas cementas vežamas į tris statybos objektus – O_1, O_2 ir O_3, kurių užsakymai yra atitinkamai 10, 25 ir 35 tonos. Vienos tonos cemento pervežimo iš įmonių vidutinės kainos (eurais) tokios, kaip šioje lentelėje:

	O_1	O_2	O_3
1 įmonė	20	50	36
2 įmonė	45	35	27

Visus užsakymus reikia įvykdyti pagal pigiausią pervežimų planą.

Sudarykite šio uždavinio matematinį modelį.

3. Firma siuva moteriškus, vyriškus ir vaikiškus džinsus. Gamyba vyksta trimis etapais – sukirpimo, siuvimo ir kontrolės. Darbo laiko sąnaudos (minutėmis) vieniems džinsams pasiūti yra tokios:

Džinsai

	Moteriški	Vyriški	Vaikiški
Sukirpimas	8	6	5
Siuvimas	10	8	7
Kontrolė	1	1	1

Per savaitę sukirpimui įmonė gali skirti 132 valandas, siuvimui – 176 valandas, o kontrolei – 20 valandų. Visi džinsai parduodami. Firmos pelnas pardavus (vienus) moteriškus džinsus yra 7 eurai, vyriškus džinsus – 6 eurai, o vaikiškus – 5 eurai. Kiek ir kokių džinsų turi pasiūti firma, kad per savaitę gautų didžiausią pelną?

Sudarykite šio uždavinio matematinį modelį.

4. Ekonominę sistemą sudaro du gamintojai – G_1 ir G_2, o gamybos technologinė matrica tokia:

	G_1	G_2
P_1	0,25	0,5
P_2	0,4	0

Koks turi būti gamybos planas $x = (x_1; x_2)$, kad produkcijos pasiūla $p(x) = (p(x_1); p(x_2))$ sutaptų su paklausa $d = (110; 120)$?

5. Nustatykite, ar produktyvi ekonominė sistema, kurios gamybos technologija apibrėžta matrica

	G_1	G_2
P_1	0,1	0,2
P_2	0,4	0,3

6. Raskite subalansuotą gamybos planą $x = (x_1; x_2; x_3)$, kai trijų gamintojų ekonominės sistemos technologinė matrica yra

	G_1	G_2	G_3
P_1	0	0,1	0,2
P_2	0,1	0,1	0,3
P_3	0,2	0	0,5

o gaminamos produkcijos paklausa $d = (403; 806; 806)$.

7. Raskite (jei egzistuoja) tokias kainas $p = (p_1; p_2)$, kad esant gamybos technologinei matricai

	G_1	G_2
P_1	0	0,2
P_2	0,3	0

gamintojas G_1 gautų pelną v_1, o gamintojas G_2 pelną – v_2, jei

a) $v_1 = 14$, $v_2 = 16$; b) $v_1 = 25$, $v_2 = 42$.

8. Raskite (jei egzistuoja) tokias kainas $p = (p_1;\ p_2;\ p_3)$, kurioms esant gamintojas G_1 gautų pridėtinę vertę $v_1 = 26$, gamintojas G_2 pridėtinę vertę $v_2 = 32$, o gamintojas G_3 – pridėtinę vertę $v_3 = 50$, jei gamybos technologinė matrica yra

	G_1	G_2	G_3
P_1	0	0,3	0,1
P_2	0,1	0	0,3
P_3	0,1	0,2	0,1

BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Edmundas Mazėtis,
Eugenijus Stankus, Juozas Šinkūnas

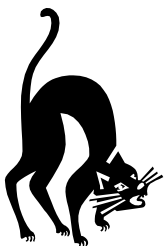
1. Su kuria parametro a reikšme funkcija $f(x)=\dfrac{ax+3}{2x+5}$ pati sau atvirkštinė?

2. Išspręskite nelygybę

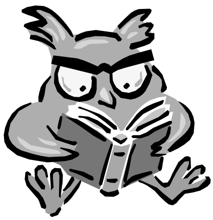
$$\log_{x-2}(4-x)<2.$$

3. Keturkampis $ABCD$ yra lygiagretainis. Raskite kampo tarp vektorių $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{BD}$ kosinusą, jei $\overrightarrow{AB}=5\vec{p}+2\vec{q}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{p}-3\vec{q}$, $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=4$, $\angle(\vec{p},\vec{q})=120^\circ$.

4. Į statųjį trikampį įbrėžto apskritimo lietimosi su įžambine taškas ją dalija į 4 cm ir 6 cm ilgio dalis. Apskaičiuokite trikampio plotą.



Užduočių sprendimai



STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Skaičių 201400 dalijant iš 101 gaunama liekana 6 $(201400 = 1994 \cdot 101 + 6)$. Todėl skaičius 201495 dalijasi iš 101.

Ats.: 95.

2. Užrašytas skaičius yra sudarytas iš 9 vienaženklių skaičių, 90 dviženklių skaičių ir 900 triženklių skaičių.

Vienaženklių skaičių suma yra

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Dviženklių skaičių suma yra

$$10(1 + 2 + 3 + ... + 9) + 9(0 + 1 + 2 + 3 + ... + 9) = 855,$$

o triženklių skaičių skaitmenų suma yra

$$100(1 + 2 + 3 + ... + 9) + 90(0 + 1 + 2 + 3 + ... + 9) + +90(0 + 1 + 2 + 3 + ... + 9) =$$

$$= 45(100 + 90 + 90) = 45 \cdot 280 = 12600.$$

Taigi visų gautojo skaičiaus skaitmenų suma yra

$$45 + 855 + 12600 = 13500.$$

Ats.: 13500.

3. Tegu $\overline{abcd}$, $a \neq 0$, yra keturženklis skaičius. Pagal uždavinio sąlygą turi galioti lygybė

$$\overline{abcd} = 9\overline{bcd}.$$

Kadangi

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$$

ir

$$\overline{bcd} = 100b + 10c + d,$$

Tai gauname:

$$1000a + 100b + 10c + d = 9(100b + 10c + d),$$

$$1000a = 800b + 80c + 8d,$$

$$125a = 100b + 10c + 8d,$$

$$125a = \overline{bcd}.$$

Matome, kad skaitmens a, $a \neq 0$, ir skaičiaus 125 sandauga turi būti triženklis skaičius. Tokios a reikšmės yra 1, 2, 3, 4, 5, 6 ir 7.

Vadinasi, yra 7 keturženkliai skaičiai, kurie tenkina uždavinio sąlygą.

Ats.: 7.

4. Kad dešimtženklis skaičius dalytųsi iš 9, jo skaitmenų suma turi dalytis iš 9. Aišku, kad ta suma gali būti tik 45. Tai reiškia, kad vienas dešimtženklio skaičiaus skaitmuo turi būti nulis (bet ne pirmoje pozicijoje), o kiti – devynetai. Tokių skaičių yra 9.

Ats.: 9.

5. Tegu x yra ieškomasis žiūrovų skaičius. Pagal uždavinio sąlygą turi galioti lygybė

$$\frac{x-(0{,}15x+144)}{0{,}15x}=\frac{5}{3}.$$

Iš čia gauname:

$$3(0{,}85x-144)=0{,}75x,$$

$$x=240.$$

Ats.: 240.

6. Tegu x Jonaičio, o y – Petraičio pirktų lydekų skaičius. Tada x yra Jonaičio pirktų karšių skaičius, o $2y$ yra Petraičio pirktų karšių skaičius.

Vadinasi, Jonaitis turėjo sumokėti $5x+3x=8x$ eurų, o Petraitis turėjo sumokėti $5y+6y=11y$ eurų. Pagal sąlygą $8x=11y.$ Taigi x turi dalytis iš 11, o y turi dalytis iš 8.

Pagal tolesnę sąlygą $8x<100$ ir $11y<10m,\ \ m\in\{2;3;...;10\}$.

Vadinasi, $x=11.$ Tada

$$11y=88\Rightarrow y=8\Rightarrow m=9.$$

Kadangi $100-88=12$ ir $90-88=2,$ tai Jonaitis vietoj grąžos eurais gavo 4 karšius, o Petraitis vietoj grąžos eurais gavo 2 ešerius.

Taigi Jonaitis iš parduotuvės išsinešė $11+11+4=26$ žuvis, o Petraitis – $8+16+2=26$ žuvis.

Ats.: Po 26 žuvis.

7. Pagal Vijeto teoremą $x_1+x_2=-p$ ir $x_1x_2=q,$ o pagal uždavinio sąlygą galioja lygybė $x_1-x_2=6.$

Spręsdami sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 - x_2 = 6, \\ x_1 x_2 = q, \end{cases}$$

gauname :

$$2x_1 = 6 - p \Rightarrow x_1 = 3 - \frac{1}{2}p;$$

$$x_2 = x_1 - 6 = \left(3 - \frac{1}{2}p\right) - 6 = -3 - \frac{1}{2}p;$$

$$\left(3 - \frac{1}{2}p\right)\left(-3 - \frac{1}{2}p\right) = q \Rightarrow q = \frac{1}{4}p^2 - 9.$$

Toliau:

$$x^2 + px + q = \left(x - \frac{1}{2}p\right)^2 + q - \frac{1}{4}p^2 = \left(x - \frac{1}{2}p\right)^2 - 9 \geq -9;$$

čia lygybė galioja tik tada, kai $x = \frac{1}{2}p.$

Vadinasi, –9 yra mažiausia kvadratinio trinario $P(x)$ reikšmė; ji įgyjama taške $x = \frac{1}{2}p.$

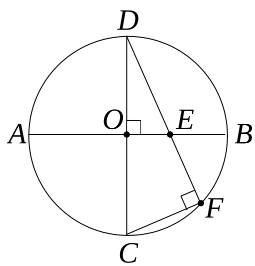
Ats.: –9.

8. Skritulio spindulį pažymėkime R. Nubrėžkime atkarpą CF ir gausime statųjį trikampį CFD. Iš stačiųjų trikampių CFD ir DOE panašumo gauname:

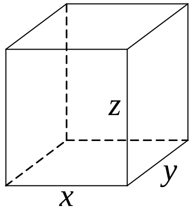
$$\frac{CD}{DF} = \frac{DE}{DO} \Rightarrow \frac{2R}{7} = \frac{4}{R} \Rightarrow R^2 = 14.$$

Vadinasi, $S = \pi R^2 = 14\pi.$

Ats.: $14\pi.$



9. Tegu x ir y yra gretasienio pagrindo kraštinių ilgiai, o z yra gretasienio aukštinės (briaunos) ilgis; $x < y < z$. Pagal uždavinio sąlygą $xy = 6$, $xz = 8$, $yz = 27$. Sudauginę visas tris lygybes gausime:



$$(xyz)^2 = 6 \cdot 8 \cdot 27 = 1296 \Rightarrow xyz = 36.$$

Taigi stačiakampio gretasienio tūris yra 36.

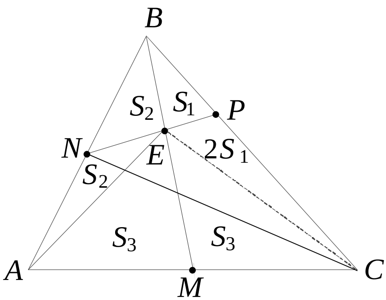
Ats.: 36.

10. Tegu S yra ieškomasis trikampio ABC plotas (žr. pav.). Kadangi $PC = 2BP$, tai

$$S_{CEP} = 2S_{BEP} = 2S_1 = 4.$$

Vadinasi,

$$S_{CEB} = 6.$$



Iš lygybių

$$S_{ABM} = S_{MBC} \text{ ir}$$
$$S_{AEM} = S_{MEC}$$

išplaukia, kad

$$S_{AEB} = S_{CEB} = 6.$$

Vadinasi,

$$S_2 = 3.$$

Todėl

$$NE : EP = 3 : 2.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$S_{NCP} = S_{NCE} + S_{ECP} = 3S_1 + 2S_1 = 10.$$

Tada

$$S = 2S_{NBC} = 2(S_{NBP} + S_{NCP}) = 2(3 + 2 + 10) = 30.$$

Ats.: 30.

PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. $1999 = 7\cdot 285 + 4 = 7\cdot(7\cdot 40 + 5) + 4 = 7\cdot(7\cdot(7\cdot 5 + 5) + 5) + 4 =$

$= 5\cdot 7^3 + 5\cdot 7^2 + 5\cdot 7^1 + 4\cdot 7^0 = 5554_7,$

$127 = 1\cdot 2^6 + 63 = 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 15 =$

$= 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 1111111_2 .$

2. $10101010_2 = 1\cdot 2^7 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^1 = 128 + 32 + 8 + 2 = 170,$

$1234321_5 = 1\cdot 5^6 + 2\cdot 5^5 + 3\cdot 5^4 + 4\cdot 5^3 + 3\cdot 5^2 + 2\cdot 5^1 + 1\cdot 5^0 =$

$= 15625 + 6250 + 1875 + 500 + 75 + 10 + 1 = 24336.$

3.

$$\begin{array}{r} 327_8 \\ +\,732_8 \\ \hline 1261_8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1357_8 \\ \times\ 72_8 \\ \hline 2736_8 \\ +12211_8 \\ \hline 125046_8 \end{array}$$

4. Skaičiai $a^3 + 11a$, $a \in Z$, dalijasi iš 6, nes

$$a^3 + 11a = a^3 - a + 12a = a(a^2 - 1) + 12a = a(a-1)(a+1) + 12a .$$

Kadangi abu dėmenys dalijasi iš 6, tai ir $a^3 + 11a$ dalijasi iš 6.

5. Kiekvienas sveikasis skaičius a gali būti užrašytas vienu iš pavidalų: $a = 3m$, $a = 3m + 1$ arba $a = 3m + 2$. Tuomet

pirmuoju atveju $a^2 = 9m^2 = 3q_1$,

antruoju –

$a^2 = (3m+1)^2 = 9m^2 + 6m + 1 = 3m(3m+2) + 1 = 3q_2 + 1,$

trečiuoju –

$a^2 = (3m+2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1 = 3q_3 + 1.$

Vadinasi, jokio sveikojo skaičiaus kvadratas negali būti pavidalo $3q+2$.

6. Pirmiausia įrodysime, kad skaičius $b=14a^3+9a^2+a$ su visais $a \in Z$ dalijasi iš 2. Tuo tikslu nagrinėkime galimus atvejus $a=2m$ ir $a=2m+1$. Pirmuoju atveju

$$b=14(2m)^3+9(2m)^2+2m=112m^3+36m^2+2m=$$
$$=2(56m^3+18m^2+m)=2q_1.$$

Antruoju –

$$b=14(2m+1)^3+9(2m+1)^2+2m+1=$$
$$=14(8m^3+12m^2+6m+1)+9(4m^2+4m+1)+2m+1=$$
$$=14(8m^3+12m^2+6m+1)+9(4m^2+4m+1)+2m+1=$$
$$=2q_2+24=2q_3.$$

Abiem atvejais skaičius *b* dalijasi iš 2.

Dabar įrodysime, kad *b* dalijasi ir iš 3. Kiekvienas sveikasis skaičius *a* gali būti užrašytas vienu iš pavidalų: $a=3m$, $a=3m+1$ arba $a=3m+2$.

Jeigu $a=3m$, tai $b=14(3m)^3+9(3m)^2+3m=3l_1$,

jei $a=3m+1$,

tai $b=14(3m+1)^3+9(3m+1)^2+3m+1=3l_2+24=3l_3$,

jei $a=3m+2$,

tuomet $b=14(3m+2)^3+9(3m+2)^2+3m+2=3l_4+150=3l_5$.

Taigi visais trimis atvejais skaičius *b* dalijasi iš 3.

Darome išvadą, kad *b* dalijasi iš 6.

7. Taikysime matematinės indukcijos metodą. Su $n=1$ teiginys teisingas: $9\,|\,(7^1+3\cdot1-1)$, t. y. $9\,|\,9$.

Tarkime, kad $9\,|\,(7^k+3k-1)$. Įrodysime, kad

$9\,|\,(7^{k+1}+3(k+1)-1)$. Tuo tikslu pertvarkykime reiškinį taip:

$$7^{k+1}+3(k+1)-1=7^k\cdot7+3k+2=7\cdot(7^k+3k-1)-18k+9=$$

$$= 7\cdot(7^k + 3k - 1) + 9\cdot(1-2k).$$

Kadangi abu šios sumos dėmenys dalijasi iš 9, tai $7^{k+1} + 3(k+1) - 1$ dalijasi iš 9.

Taigi $9\,|\,(7^n + 3n - 1)$ su visais natūraliaisiais skaičiais *n*.

8. Taikysime matematinės indukcijos metodą. Su $n = 1$ teiginys teisingas: $7\,|\,(4^3 + 3^3)$, t. y. $7\,|\,91$.

Tarkime, kad $7\,|\,(4^{2k+1} + 3^{2k+1})$. Įrodysime, kad $7\,|\,(4^{2(k+1)+1} + 3^{2(k+1)+1})$. Pertvarkykime reiškinį taip:

$$4^{2k+3} + 3^{2k+3} = 16\cdot 4^{2k+1} + 9\cdot 3^{2k+1} = 16\cdot(4^{2k+1} + 3^{2k+1}) - 7\cdot 3^{2k+1}.$$

Kadangi abu šio skirtumo nariai dalijasi iš 7, tai $4^{2(k+1)+1} + 3^{2(k+1)+1}$ dalijasi iš 7.

Taigi $7\,|\,(4^{2n+1} + 3^{2n+1})$ su visais natūraliaisiais skaičiais *n*.

9. Taikysime matematinės indukcijos metodą. Su $n = 1$ teiginys teisingas: $11\,|\,(6^2 + 3^3 + 3)$, t. y. $11\,|\,66$.

Tarkime, kad $11\,|\,(6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k)$. Įrodysime, kad $11\,|\,(6^{2(k+1)} + 3^{(k+1)+2} + 3^{k+1})$. Pertvarkome reiškinį taip:

$$6^{2(k+1)} + 3^{(k+1)+2} + 3^{k+1} = 36\cdot 6^{2k} + 3\cdot 3^{k+2} + 3\cdot 3^k =$$
$$= 36\cdot(6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k) - 33\cdot(3^{k+2} + 3^k)$$

Kadangi abu šios sumos dėmenys dalijasi iš 11, tai $6^{2(k+1)} + 3^{(k+1)+2} + 3^{k+1}$ dalijasi iš 11.

Taigi $11\,|\,(6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n)$ su visais natūraliaisiais skaičiais *n*.

10. Tegu *m* yra skaičiaus 2^{2014} skaitmenų skaičius, o *n* – skaičiaus 5^{2014} skaitmenų skaičius. Tuomet $10^{m-1} < 2^{2014} < 10^m$ ir $10^{n-1} < 5^{2014} < 10^n$. Sudauginę šias nelygybes gausime:

$$10^{m-1}\cdot 10^{n-1} < 2^{2014}\cdot 5^{2014} < 10^{m}\cdot 10^{n} \Rightarrow 10^{m+n-2} < 10^{2014} < 10^{m+n} \Rightarrow$$

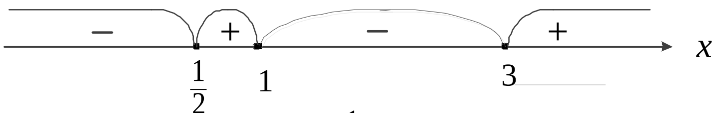
$$\Rightarrow 10^{2014} = 10^{m+n-1} \Rightarrow 2014 = m+n-1.$$

Iš čia $m+n=2015$.

ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Funkcijos $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-3}{1-3x+2x^2}}$ apibrėžimo sritį $D(f)$ rasime išsprendę nelygybę $\dfrac{x-3}{1-3x+2x^2}\geq 0$, t. y. $\dfrac{x-3}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}\geq 0$ nelygybę.

Taikydami intervalų metodą randame, kad šios nelygybės sprendinių aibė yra $\left(\dfrac{1}{2};\ 1\right)\cup[3;+\infty)$.



Ats.: $D(f)=\left(\dfrac{1}{2};\ 1\right)\cup[3;+\infty)$.

2. Šios funkcijos apibrėžimo sritis yra aibė

$$(-\infty;\ -1-\sqrt{2})\cup(-1-\sqrt{2};\ -1+\sqrt{2})\cup(-1+\sqrt{2};+\infty).$$

Jos reikšmių sritis $E(f)$ yra aibė a reikšmių, kurioms esant lygtis $\dfrac{x^2-x+2}{x^2+2x-1}=a$ turi bent vieną sprendinį. Su visais $x\in\boldsymbol{R}$, $x\neq -1+\sqrt{2}$, $x\neq -1-\sqrt{2}$, ši lygtis ekvivalenti lygčiai

$$(a-1)x^2+(2a+1)x-(a+2)=0.$$

Kai $a=1$, gauname tiesinę lygtį $3x-3=0$, kuri turi sprendinį.

Kai $a\neq 1$, ši lygtis turės sprendinių, kai $D=8a^2+8a-7\geq 0$, t. y. kai

$$a \in \left(-\infty;\ \frac{-2-3\sqrt{2}}{4}\right] \cup \left[\frac{-2+3\sqrt{2}}{4};\ +\infty\right).$$

$$Ats.:\ E(f) = \left(-\infty;\ \frac{-2-3\sqrt{2}}{4}\right] \cup \left[\frac{-2+3\sqrt{2}}{4};\ +\infty\right).$$

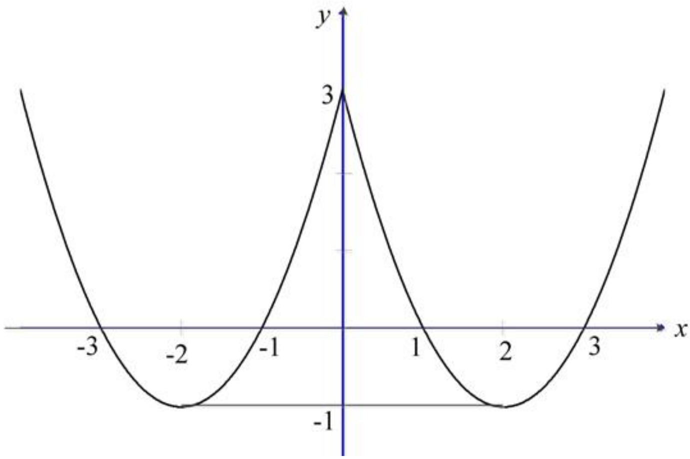
3. Kadangi $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$ ir

$$f(-x) = (-x)\cdot\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1} = -x\cdot\frac{\frac{1}{2^x}-1}{\frac{1}{2^x}+1} = -x\cdot\frac{1-2^x}{1+2^x} = -x\cdot\frac{-(2^x-1)}{2^x+1} =$$

$$= x\cdot\frac{2^x-1}{2^x+1} = f(x),$$

tai ši funkcija yra lyginė.

4. Kadangi funkcija yra lyginė, užtenka nubrėžti funkcijos $f(x) = x^2 - 4x + 3,\quad x \geq 0,$ grafiką ir atlikti jo simetriją Oy ašies atžvilgiu. Funkcijos $f(x) = x^2 - 4|x| + 3,$ grafikas pavaizduotas 2 paveiksle.



2 pav.

5. Funkcija apibrėžta realiųjų skaičių aibėje išskyrus nulį, t y. $D(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. Be to,

$$f(x)=\begin{cases}3-\dfrac{1}{\sqrt{-x}}, & \text{kai } -x>0,\\ g(-x), & \text{kai } -x<0,\end{cases}\quad \text{t. y.}\quad f(x)=\begin{cases}g(-x), & \text{kai } x>0,\\ 3-\dfrac{1}{\sqrt{-x}}, & \text{kai } x<0.\end{cases}$$

Funkcijos *f* nelygiškumo sąlyga $f(x)=-f(-x)$ bus patenkina, kai

$$g(x)=-\left(3-\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)=-3+\frac{1}{\sqrt{-x}}\quad \text{su neigiamomis } x$$

reikšmėmis. Todėl

$$f(x)=\begin{cases}3-\dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \text{kai } x>0,\\ -3+\dfrac{1}{\sqrt{-x}}, & \text{kai } x<0.\end{cases}$$

Spręsdami lygtį $f(x)=1$, turime rasti teigiamus lygties $3-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=1$ sprendinius ir neigiamus lygties $3-\dfrac{1}{\sqrt{-x}}=1$ sprendinius. Šie sprendiniai yra $x_1=\dfrac{1}{4},\ x_2=-\dfrac{1}{16}$.

Ats.: $f(x)=\begin{cases}3-\dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \text{kai } x>0,\\ -3+\dfrac{1}{\sqrt{-x}}, & \text{kai } x<0;\end{cases}\quad x_1=\dfrac{1}{4},\ x_2=-\dfrac{1}{16}.$

6. Kadangi funkcijos *g* apibrėžimo sritis yra $D(g)=(-\infty;\ 2]$ ir

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{\left(\sqrt{2-x}\right)^2-5\cdot\sqrt{2-x}+4}=$$
$$=\sqrt{\left(\sqrt{2-x}-1\right)\left(\sqrt{2-x}-4\right)},$$

tai funkcijos $f\circ g$ apibrėžimo sričiai $D(f\circ g)$ priklausys tik tie srities $D(g)$ taškai, su kuriais reiškinys $\sqrt{\left(\sqrt{2-x}-1\right)\left(\sqrt{2-x}-4\right)}$ turi prasmę, t. y. nelygybių sistemos

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\sqrt{2-x}\le 1,\\ \sqrt{2-x}\ge 4,\end{array}\right.\\ \quad x\le 2\end{array}\right. \quad \text{sprendiniai.}$$

Spręsdami šią sistemą, gauname:

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\sqrt{2-x}\le 1,\\ \sqrt{2-x}\ge 4,\end{array}\right.\\ \quad x\le 2\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\ge 1,\\ x\le -14,\end{array}\right.\\ \; x\le 2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}1\le x\le 2,\\ -1\le x\le -14.\end{array}\right.$$

Taigi $D(f\circ g)=(-\infty;\ -14]\cup[1;\ 2]$,

$(f\circ g)(x)=\sqrt{6-x-5\sqrt{2-x}}$.

Funkcijos f apibrėžimo sritį rasime išsprendę nelygybę $x^2-5x+4\ge 0$. Kadangi

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{2-\sqrt{x^2-5x+4}},$$

tai funkcijos $g\circ f$ apibrėžimo sritis $D(g\circ f)$ yra nelygybių sistemos $\left\{\begin{array}{l}2-\sqrt{x^2-5x+4}\ge 0,\\ x^2-5x+4\ge 0\end{array}\right.$ sprendinių aibė. Gausime:

$$\left\{\begin{array}{l}2-\sqrt{x^2-5x+4}\ge 0,\\ x^2-5x+4\ge 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x^2-5x+4\le 4,\\ x^2-5x+4\ge 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x(x-5)\le 0,\\ (x-1)(x-4)\ge 0.\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}0\le x\le 5,\\ \left[\begin{array}{l}x\le 1,\\ x\ge 4\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\le x\le 1,\\ 4\le x\le 5.\end{array}\right.$$

Vadinasi, $D(g\circ f)=[0;\ 1]\cup[4;\ 5]$,

$(g\circ f)(x)=\sqrt{2-\sqrt{x^2-5x+4}}$.

Ats.: $(f \circ g)(x) = \sqrt{6 - x - 5\sqrt{2 - x}}$,

$(g \circ f)(x) = \sqrt{2 - \sqrt{x^2 - 5x + 4}}$,

$D(f \circ g) = (-\infty;\ -14] \cup [1;\ 2]$,

$D(g \circ f) = [0;\ 1] \cup [4;\ 5]$.

7. $$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$(f \circ f \circ f)(x) = (f \circ (f \circ f))(x) = f((f \circ f)(x)) =$$

$$= \frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}.$$

Ats.: $(f \circ f \circ f)(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$.

8. Akivaizdu, kad $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$ ir $E(f) = (-\infty;\ +\infty)$.

Ieškosime lygties $\sqrt[3]{x + \sqrt{x^2+1}} + \sqrt[3]{x^3 - \sqrt{x^2+1}} = y, \quad \forall y \in E(f)$ sprendinių. Šią lygtį pakėlę kubu ir remdamiesi formule $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, gauname:

$$y^3 = 2x + 3y \cdot \sqrt[3]{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)}, \quad y^3 = 2x - 3y.$$

Iš čia $x = \dfrac{y^3 + 3y}{2}$. Vadinasi, funkcija

$$f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{x^2+1}} + \sqrt[3]{x^3 - \sqrt{x^2+1}}$$

turi atvirkštinę funkciją $f^{-1}(x)=\dfrac{x^3+3x}{2}$.

Ats.: $f^{-1}(x)=\dfrac{x^3+3x}{2}$.

9. Kadangi

$$(f\circ f)(x)=\frac{af(x)+1}{2f(x)+b}=\frac{a\dfrac{ax+1}{2x+b}+1}{2\dfrac{ax+1}{2x+b}+b}=\frac{a^2x+a+2x+b}{2ax+2+2bx+b^2}=$$

$$=\frac{(a^2+2)x+(a+b)}{2(a+b)x+b^2+2},$$

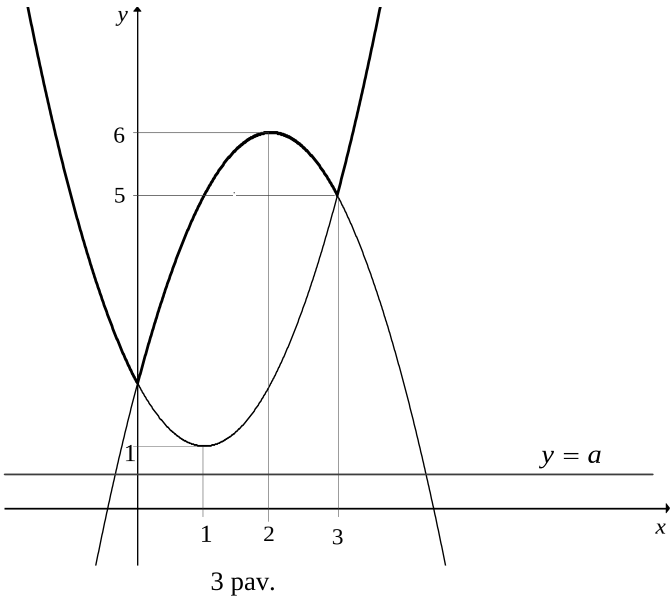
tai $(f\circ f)(x)=x$ tik tada, kai $a+b=0$, t. y. $a=-b$.

Ats.: $a=-b$.

10. Vienoje koordinačių sistemoje nubrėžiame funkcijų

$$f_1(x)=x^2-2x+2 \text{ ir } f_2(x)=2+4x-x^2$$

grafikus (paraboles). Pirmosios parabolės viršūnės koordinatės yra



3 pav.

(1; 1), o antrosios parabolės – (2; 6). Išsprendę lygtį

$$x^2 - 2x + 2 = 2 + 4x - x^2,$$

rasime grafikų susikirtimo taškų abscises: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Taigi grafikai kertasi taškuose (0; 2) ir (3; 5) (*žr.* 3 pav.). Akivaizdu, kad

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 2, \text{ kai } x \le 0, \\ 2 + 4x - x^2, \text{ kai } 0 < x < 3, \\ x^2 - 2x + 2, \text{ kai } x \ge 3. \end{cases}$$

Šios funkcijos grafikas pavaizduotas 3 paveiksle pastorinta linija.

Tirsime funkcijos f grafiko ir tiesės $y = a$ susikirtimo taškų (lygties $f(x) = a$ sprendinių) skaičių.

Kai $a < 2$, lygtis neturi sprendinių; kai $a = 2$, lygtis turi vieną sprendinį; kai $2 < a < 5$, lygtis turi du sprendinius; kai $a = 5$, lygtis turi 3 sprendinius; kai $5 < a < 6$, lygtis turi 4 sprendinius; kai $a = 6$, – 3 sprendinius ir kai $a > 6$ – 2 sprendinius.

Ats.: 1) lygtis sprendinių neturi, kai $a < 2$;
2) lygtis turi vieną sprendinį, kai $a = 2$;
3) lygtis turi 2 sprendinius, kai $a \in (2;\ 5) \cup (6;\ +\infty)$;
4) lygtis turi 3 sprendinius, kai $a = 5$ ir $a = 6$;
5) lygtis turi 4 sprendinius, kai $a \in (5;\ 6)$.

TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tegu $m = \overline{xy} = 10x + y$ yra ieškomas skaičius. Remiantis pirmąja sąlygos dalimi galima užrašyti lygtį

$$\frac{10x + y}{x + y} = 3 + \frac{7}{x + y},$$

iš kurios išplaukia, kad

$$x = 1 + \frac{2y}{7}, \quad y \in \{0; 1; 2; ...; 9\}.$$

Taigi $y \in \{0; 7\}$, o galimi dviženkliai skaičiai yra 10 ir 37. Skaičiaus 10 skaitmenys netenkina uždavinio sąlygos antrosios dalies.

Ats.: 37.

2. Tegu m_1 yra pirmo, o m_2 – antro kristalo masė. Pirmo kristalo masės pokytį per mėnesį pažymėkime x_1, o antro – x_2. Pagal uždavinio sąlygą,

$$3x_1 = 7x_2,\ 12x_1 = 0{,}04m_1 \text{ ir } 12x_2 = 0{,}05m_2.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{7}{3} \text{ ir } \frac{x_1}{x_2} = \frac{0{,}04m_1}{0{,}05m_2} = \frac{4m_1}{5m_2}.$$

Vadinasi,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{x_1}{x_2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{3} = \frac{35}{12}.$$

Ats.: 35:12.

3. Tegu m ir n, $m > n$, yra mokinio dauginti skaičiai, o s – jo gauta sandauga. Pagal sąlygą,

$$\frac{s}{m} = 17 + \frac{8}{m}, \quad s = m \cdot n + 60 \quad \text{ir} \quad m - n = 36.$$

Iš šių sąryšių gauname:

$$\begin{cases} m(m-36) + 60 = 17m + 8, \\ n = m - 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 - 53m + 52 = 0, \\ n = m - 36 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{53 \pm 51}{2}, \\ n = m - 36 \end{cases} \Rightarrow m = 52,\ n = 16.$$

Ats.: 52 ir 16.

4. Tegu S yra atstumas (km) nuo A iki B. Tada $S + 20$ yra atstumas nuo C iki B. Pagal uždavinio sąlygą,

$$\frac{5}{S} - \frac{5}{S+20} = \frac{1}{48}.$$

Iš čia gauname kvadratinę lygtį

$$S^2 + 20S - 4800 = 0,$$

kurios sprendiniai yra –80 ir 60. Vadinasi, atstumas nuo A iki B yra 60 km.

Ats.: 60 km.

5. Tegu v_1 yra pirmo, o v_2 – antro motociklininko greitis (km/h). Laiką, per kurį pirmas nuvažiavo 250 km, o antras – 200 km, pažymėkime t_0 (h). Tada

$$v_1 = \frac{250}{t_0}, \quad v_2 = \frac{200}{t_0}.$$

Pagal antrą sąlygos dalį gauname lygtį

$$\frac{600}{v_2} - \frac{600}{v_1} = 3.$$

Toliau:

$$\frac{600t_0}{200} - \frac{600t_0}{250} = 3,$$

$$3t_0 - 2{,}4t_0 = 3,$$

$$t_0 = 5.$$

Vadinasi, $v_1 = 50$, $v_2 = 40$.

Ats.: 50 km/h ir 40 km/h.

6. Tegu x, y, z yra atitinkamai raudonų, geltonų ir žalių kamuoliukų skaičius, o n – bendras kamuoliukų skaičius.

Remdamiesi pirma sąlygos dalimi, gauname nelygybes

$$x \geq (n-11) + 2 = n - 9$$

ir

$$z \geq (n-11) + 1 = n - 10,$$

o, remdamiesi antra sąlygos dalimi, gauname nelygybę

$$y \geq (n-12) + 1 = n - 11.$$

Sudėję visas tris nelygybes, gausime:

$$x + y + z \geq 3n - 30 \Rightarrow n \geq 3n - 30 \Rightarrow n \leq 15.$$

Aišku, kad turi būti $n \geq 12$. Todėl galimos n reikšmės yra 12, 13, 14 ir 15.

Kai $n = 12$, tai $x \geq 3$, $y \geq 1$, $z \geq 2$;

kai $n = 13$, tai $x \geq 4$, $y \geq 2$, $z \geq 3$;

kai $n = 14$, tai $x \geq 5$, $y \geq 3$, $z \geq 4$;

kai $n = 15$, tai $x \geq 6$, $y \geq 4$, $z \geq 5$.

Pastaruoju atveju galimas tik vienas kamuoliukų pasiskirstymas pagal spalvą: $x = 6$, $y = 4$, $z = 5$.

Ats.: 12, 13, 14 arba 15.

7. Pagal uždavinio sąlygą, turi galioti tokios nelygybės:

$$\frac{300}{v} - \frac{300}{v+20} \leq \frac{3}{4},$$

$$\frac{300}{v-10} - \frac{300}{v} \geq \frac{1}{3}.$$

Spręsdami šių nelygybių sistemą, gauname:

$$\begin{cases} \dfrac{400}{v} - \dfrac{400}{v+20} \leq 1, \\ \dfrac{900}{v-10} - \dfrac{900}{v} \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v^2 + 20v - 8000 \geq 0, \\ v^2 - 10v - 9000 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (v+10)^2 - 8100 \geq 0, \\ (v-5)^2 - 9025 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (v+10)^2 - 90^2 \geq 0, \\ (v-5)^2 - 95^2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (v-80)(v+100) \geq 0, \\ (v-100)(v+90) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v - 80 \geq 0, \\ v - 100 \leq 0. \end{cases}$$

Taigi $80 \leq v \leq 100$.

Ats.: tarp 80 km/h ir 100 km/h.

8. Tegu d yra atstumas (km) tarp M ir N. Tada $\dfrac{d}{v}$ yra laikas, per kurį dviratininkas nuvažiavo iš M į N.

Dviratininko sugaištą laiką grįžtant iš N į M galima užrašyti formule

$$1+0{,}5+\frac{d-v}{v+5}.$$

Pagal uždavinio sąlygą,

$$1+0{,}5+\frac{d-v}{v+5}\le\frac{d}{v}.$$

Iš čia, padauginę nelygybę iš $v(v+5)$ ir atlikę aritmetinius veiksmus, gauname nelygybę

$$0{,}5v^2+7{,}5v-5d\le 0. \qquad (1)$$

Lygties $0{,}5v^2+7{,}5v-5d=0$ sprendinių formulė yra

$$v=-7{,}5\pm\sqrt{56{,}25+10d}.$$

Kadangi $v_1=-7{,}5-\sqrt{56{,}25+10d}<0,$ tai (1) kvadratinės nelygybės sprendinių intervalas yra $(0;-7{,}5+\sqrt{56{,}25+10d}\,].$

Jeigu būtų $d=45,$ gautume greičio v kitimo intervalą (0; 15], o jeigu būtų $d=70,$ gautume intervalą (0; 20].

Ats.: a) nedidesnis kaip 15 km/h, kai atstumas tarp M ir N yra 45 km;

b) nedidesnis kaip 20 km/h, kai atstumas tarp M ir N yra 70 km.

9. Tegu $\frac{m}{n}$ yra ieškoma trupmena. Pagal uždavinio sąlygą,

$$n=m^2+1,\quad \frac{m+3}{m^2+1}<\frac{1}{4}\quad \text{ir}\quad \frac{m}{n+3}>\frac{1}{8}.$$

Iš čia gauname nelygybes

$$\frac{m+3}{m^2+1}<\frac{1}{4}\quad \text{ir}\quad \frac{m}{m^2+4}>\frac{1}{8}.$$

Spręsdami jų sistemą, gauname:

$$\begin{cases} m^2+1>4m+12, \\ m^2+4<8m \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} m^2-4m-11>0, \\ m^2-8m+4<0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} (m-2)^2-15>0, \\ (m-4)^2-12<0 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} (m-2)^2>15, \\ (m-4)^2<12 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} m-2<-\sqrt{15}\ \text{ arba }\ m-2>\sqrt{15}, \\ m-4<-\sqrt{12}\ \text{ arba }\ m-4>\sqrt{12} \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m-2<-\sqrt{15} \text{ arba } m-2>\sqrt{15}, \\ m-4<-\sqrt{12} \text{ arba } m-4>\sqrt{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<2-\sqrt{15} \text{ arba } m>2+\sqrt{15}, \\ 4-2\sqrt{3}<m<4+2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Iš čia (turint mintyje, kad m – natūralusis skaičius) išplaukia, jog $m=6$ arba $m=7$.

Taigi yra dvi trupmenos, tenkinančios uždavinio sąlygą – $\dfrac{6}{37}$ ir $\dfrac{7}{50}$.

Ats.: $\dfrac{6}{37}$ ir $\dfrac{7}{50}$.

10. Darbininkų skaičių pažymėkime n, o darbo valandų skaičių per dieną – t. Per 14 darbo dienų susidarė $14nt$ darbo valandų (jei dirbtų tik vienas žmogus). Pagal kitą sąlygos dalį gauname $10(n+4)(t+1)$ darbo valandų, o pagal sąlygos pabaigą gauname $7(n+10)(t+2)$ darbo valandų. Visi trys skaičiai turi sutapti. Skaičiams n ir t rasti išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} 10(n+4)(t+1)=14nt, \\ 7(n+10)(t+2)=14nt. \end{cases}$$

Gausime:

$$\begin{cases} 5(n+4)(t+1)=7nt, \\ (n+10)(t+2)=214nt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5nt+5n+20t+20=7nt, \\ nt+2n+10t+20=2nt \end{cases} \Rightarrow$$

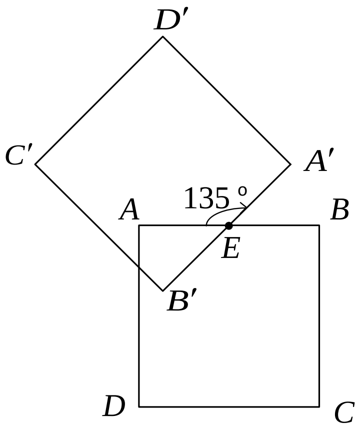
$$\Rightarrow \begin{cases} n=20, \\ 20t=40+10t+20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=20, \\ t=6. \end{cases}$$

Taigi grupę sudarė 20 darbininkų, ir jie dirbo po 6 valandas per dieną.

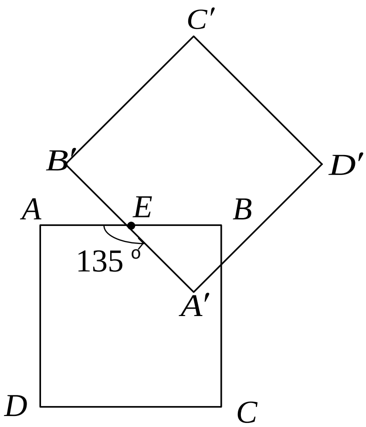
Ats.: 20 darbininkų, 6 darbo valandos.

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. 1a pav. parodytas kvadratas $A'B'C'D'$, gautas, atlikus posūkį apie tašką E 135° kampu pagal laikrodžio rodyklę, o 1b pav. – prieš laikrodžio rodyklę.

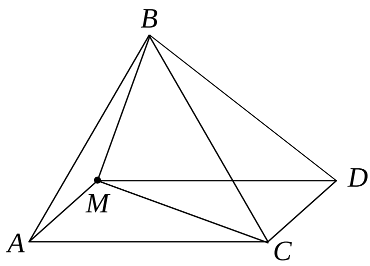


1a pav.



1b pav.

2. Pasukime plokštumą apie tašką B 60° kampu taip, kad taško A vaizdas būtų taškas C (2 pav.). Sakykime, kad taško M vaizdas yra taškas D. Kadangi posūkis yra judesys, o atkarpos AM vaizdas yra atkarpa CD, tai $CD = AM = 1$. Analogiškai atkarpos BM vaizdas yra atkarpa BD, todėl $BD = = BM = \sqrt{3}$. Kadangi $BM = BD = \sqrt{3}$, o $\angle MBD = 60°$, tai trikampis BMD yra lygiakraštis, taigi $MD = \sqrt{3}$. Kadangi $MC^2 = MD^2 + CD^2$, tai trikampis MCD yra statusis, atkarpa MC – jo įžambinė, o $\angle MDC = 90°$. Šio trikampio statinis DC lygus pusei įžambinės MC, todėl $\angle DMC = 30°$. Tuomet



2 pav.

$$\angle BMC = \angle CMD + \angle DMB = 90°,$$

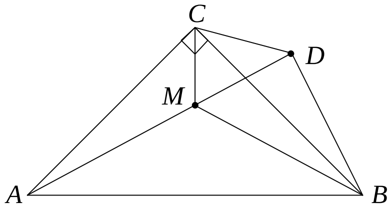
todėl $BC^2 = MB^2 + CM^2 = 7$. Kadangi $BC = AB$, $BD = BM$, o

$DC = AM$, tai trikampiai BCD ir BAM yra lygūs, todėl

$$\angle AMB = \angle BDC = \angle BDM + \angle MDC = 150°.$$

Ats.: $AB = \sqrt{7}$, $\angle BMC = 90°$, $\angle AMB = 150°$.

3. Pasukime plokštumą apie tašką C 90° kampu taip, kad taško A vaizdas būtų taškas B (3 pav.). Sakykime, kad taško M vaizdas yra taškas D. Kadangi posūkis yra judesys, o atkarpos AM vaizdas yra atkarpa BD, tai $BD = AM = 2$.



3 pav.

Kadangi

$CM = CD$, o $\angle MCD = 90°$,

tai trikampis CMD yra statusis lygiašonis, taigi

$\angle CMD = \angle CDM = 45°$.

Kadangi

$BC = AC$, $CD = CM$,

o $BD = AM$, tai trikampiai BCD ir ACM yra lygūs, todėl $\angle CDB = \angle AMC = 105°$. Iš čia gauname, kad

$$\angle MDB = \angle CDB - \angle CDM = 60°.$$

Kita vertus

$$\angle DMB = 360° - \angle AMB - \angle AMC - \angle CMD = 90°,$$

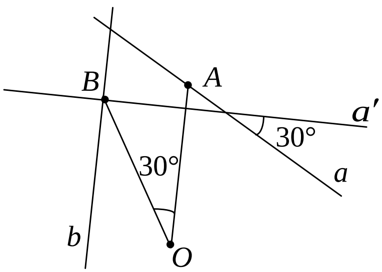
taigi trikampis DMB – statusis, todėl $\angle MBD = 30°$. Tuomet

$$MD = BD \sin\angle MBD = 1, \quad CM = CD = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

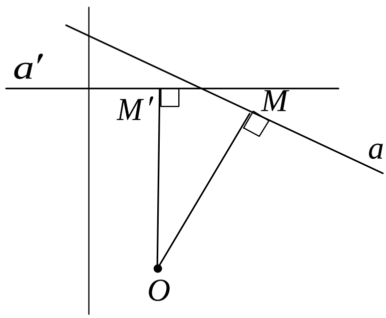
o $\quad MB = BD\cos\angle MBD = \sqrt{3}$

Ats.: $BM = \sqrt{3}$, $CM = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

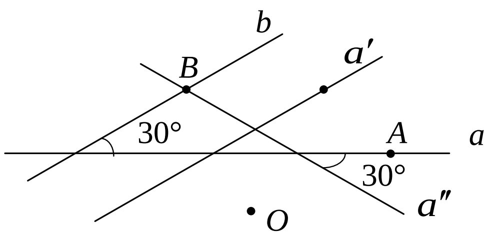
4. Sakykime, kad ieškomieji taškai A ir B yra atitinkamai tiesėse a ir b, t.y. atkarpos OA ir OB yra lygios, o $\angle AOB = 30°$. Pasukime plokštumą apie tašką *O* 30° kampu taip, kad taško *A* vaizdas būtų taškas *B*. Sakykime, kad tiesės *a* vaizdas yra tiesė a' (4a pav.). Kadangi taškas *A* yra tiesėje *a*, tai jo vaizdas *B* yra tiesėje a'. Kita vertus, taškas *B* yra ir tiesėje *b*. Taigi taškas *B* yra tiesių *b* ir a' susikirtimo taškas. Taigi norint gauti ieškomuosius taškus, reikia pasukti tiesę *a* apie tašką *O* 30° kampu, jos vaizdo ir tiesės *b* sankirta yra taškas *B*, o taškas *A* gaunamas, pasukus tašką *B* 30° kampu apie tašką *O*, bet į kitą pusę, negu buvo sukama tiesė *a*. Pastebėsime, kad norint nubrėžti tiesės vaizdą, gautą atliekant posūkį apie tašką, reikia rasti dviejų tiesės taškų vaizdus, arba duotuoju kampu pasukti statmenį tiesei, nuleistą iš sukimosi taško, o per pasukto statmens galą nubrėžti jam statmeną tiesę (4b pav.). Kadangi posūkis apie tašką *O* gali būti atliekamas dviem kryptimis, tai uždavinys turi du sprendinius, kai kampas tarp tiesių a ir b nelygus 30°. Kai kampas tarp tiesių *a* ir *b* lygus 30°, vienu atveju gauname, kad tiesės *b* ir a'. yra lygiagrečios (4c pav.), taigi šiuo atveju yra vienas sprendinys.



4a pav.

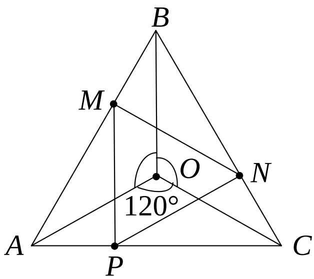


4b pav.



4c pav.

5. Pasukime plokštumą apie trikampio ABC apibrėžto apskritimo centrą O 120° kampu taip, kad taško A vaizdas būtų taškas B (5 pav.). Kadangi $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120°$ ir $OA = OB = OC$, tai taško B vaizdas yra taškas C, o taško C – taškas A, t. y., trikampio ABC vaizdas yra trikampis ABC. Taško M, kuris yra kraštinėje AB, vaizdas M' yra kraštinėje BC, kuri yra kraštinės AB vaizdas. Kadangi posūkis yra judesys, tai $AM = BM'$, o $MB = M'C$. Taigi taškas M' dalija kraštinę BC tuo pačiu santykiu, kaip ir taškas N. Kadangi atkarpoje yra tik vienas taškas, dalijantis ją duotuoju santykiu, tai taškai M' ir N sutampa. Taigi taško M vaizdas yra taškas N. Analogiškai, taško N vaizdas yra taškas P, o taško P vaizdas – taškas M, t. y., trikampio MNP vaizdas yra tas pats trikampis. Kadangi kraštinės MN vaizdas yra kraštinė NP, o kraštinės NP vaizdas – kraštinė PA, tai $MN = NP = PA$. Taigi trikampis MNP yra lygiakraštis. Trikampyje AMP kampas $\angle MAP = 60°$, $AM = \dfrac{3a}{4}$, $AP = \dfrac{a}{4}$, todėl pagal kosinusų teoremą

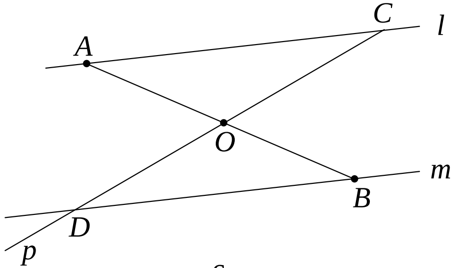


5 pav.

$$MP^2 = AP^2 + AM^2 - 2AP \cdot AM \cos\angle MAP =$$
$$= \frac{9a^2}{16} + \frac{a^2}{16} - 2 \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10 - 3\sqrt{3}}{16} a^2.$$

Ats.: Trikampio kampų didumai yra 60°, kraštinės ilgis lygus $\dfrac{\sqrt{10 - 3\sqrt{3}}}{4} a$.

6. Sakykime, kad lygiagrečios tiesės l ir m yra nubrėžtos per taškus A ir B, o per tašką O einanti tiesė p

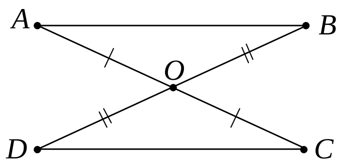


6 pav.

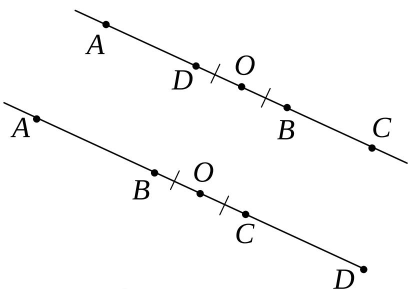
kerta tiesę l taške C, o tiesę m – taške D (6 pav.). Nagrinėkime plokštumos simetriją taško O atžvilgiu. Taškai A ir B yra simetriški taško O atžvilgiu. Tiesė l eina per taško A, todėl jos vaizdas yra tiesė, einanti per taško A vaizdą – tašką B, ir lygiagreti su tiese l. Taigi tiesės l vaizdas yra tiesė m. Kadangi tiesė p eina per simetrijos centrą, tai jos vaizdas yra tiesė p. Taigi tiesių l ir p susikirtimo taško C vaizdas yra tiesių m ir p susikirtimo taškas D. Taigi taškai C ir D yra simetriški taško O atžvilgiu. Pagal ašinės simetrijos savybes $AC = BD = 16, OC = \frac{1}{2}CD = 14$, todėl trikampio AOC perimetras lygus $P = AO + OC + CD = 12 + 14 = 16 = 42$.

Ats.: 42.

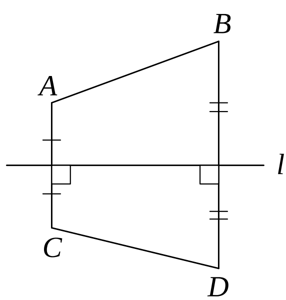
7. a) Sakykime, kad AB ir CD dvi atkarpos, simetriškos taško O atžvilgiu, o taškai A, B, C ir D nėra vienoje tiesėje. Tai reiškia, kad taškai A ir C , o taip pat taškai B ir D yra simetriški taško O atžvilgiu (7a pav.). Iš simetrijos taško atžvilgiu apibrėžimo seka, kad $AO = OC$, $BO = OD$. Taigi keturkampis $ABCD$ yra lygiagretainis, t. y., $AB \parallel CD$. Atvirkščiai, jei $AB = CD$ ir $AB \parallel CD$, tai keturkampis $ABCD$ yra lygiagretainis, taigi atkarpos AB ir CD yra simetriškos jo įstrižainių susikirtimo taško atžvilgiu. Jei taškai A, B, C ir D yra vienoje tiesėje, o taškas O yra atkarpos BD (arba atkarpos BC) vidurio taškas, tai jis yra ir atkarpos AC



7a pav.



7b pav.



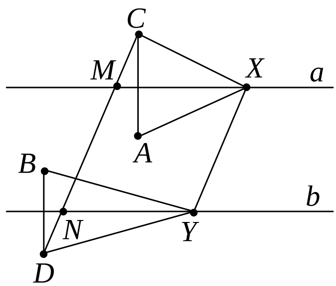
7c pav.

(arba atkarpos *AD*) vidurio taškas (7b pav.), taigi šiuo atveju bet kurios dvi lygios atkarpos yra simetriškos taško atžvilgiu.

b) Jei taškai *A* ir *C* yra simetriški tiesės *l* atžvilgiu, tai tiesė *l* yra atkarpos *AC* vidurio statmuo. Dėl tos pačios priežasties tiesė *l* yra ir atkarpos *BD* vidurio statmuo. Taigi tiesės *AC* ir *BD* yra lygiagrečios (7c pav.), nes jos statmenos tiesei *l*. Atvirkščiai, jei tiesės *AC* ir *BD* yra lygiagrečios, tai keturkampis *ABDC* yra lygiašonė trapecija, kuri yra simetriška tiesės, jungiančios trapecijos pagrindų vidurio taškus, atžvilgiu.

Ats.: a) kai $AB \| CD$, b) kai $AC \| BD$.

8. Sakykime, kad taškas *C* yra simetriškas taškui *A* tiesės *a* atžvilgiu, o taškas *D* yra simetriškas taškui *B* tiesės *b* atžvilgiu (8 pav.). Koks bebūtų tiesės *a* taškas *X*, ir koks bebūtų tiesės *b* taškas *Y*, suma *AX* + *XY* + *YB* lygi sumai *CX* + *XY* + *YD*, nes *AX* = = *CX*, o *BY* = *DY*. Bet suma *CX* + +*XY* +*YD* yra mažiausia, kai taškai *C*, *X*, *Y* ir *D* yra vienoje tiesėje. Taigi taškai *M* ir *N* yra tiesės *CD* sankirtos su tiesėmis *a* ir *b* taškai.



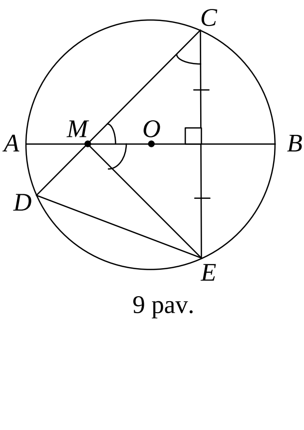
8 pav.

Ats.: Reikia rasti tašką, *C*, simetrišką taškui *A* tiesės *a* atžvilgiu, ir tašką *D*, simetrišką taškui *B* tiesės *b* atžvilgiu. Tiesės *CD* ir tiesių *a* ir *b* susikirtimo taškai yra ieškomieji taškai *M* ir *N*.

9. Sakykime, kad taškas *E* yra simetriškas taškui *C* tiesės *AB* atžvilgiu (9 pav.). Kadangi tiesė *AB* yra apskritimo simetrijos ašis, tai taškas *E* yra apskritime. Pagal ašinės simetrijos savybes $EM = CM$, o $\angle BME = \angle BMC = 45°$, todėl $\angle EMC = \angle EMD = 90°$ Iš stačiojo trikampio *EDM* turime

$$MD^2 + MC^2 = MD^2 + EM^2 = DE^2.$$

Kadangi $\angle ECM = 45°$, tai pagal sinu-



9 pav.

sų teoremą

$$DE = 2R\sin\angle ECD = R\sqrt{2}\ .$$

Taigi ieškomoji suma

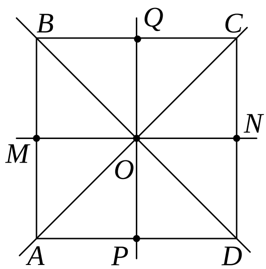
$$MD^2 + MC^2 = 2R^2.$$

Ats.: $2R^2$.

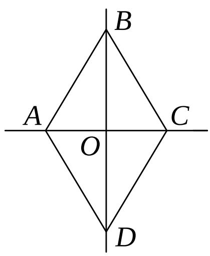
10. *Ats.:* a) kvadratas *ABCD* (10a pav.) turi 8 simetrijas: simetrija centro *O* atžvilgiu, posūkiai apie jo centrą *O* 90° ir 270° kampais, ašinės simetrijos tiesių *AC*, *BD*, *MN* ir *PQ* atžvilgiu (čia *M*, *N*, *P* ir *Q* yra atitinkamai kraštinių *AB*, *CD*, *AD* ir *BC* vidurio taškai) ir tapatingoji transformacija;

b) rombas *ABCD* turi keturias simetrijas (10b pav.): simetrija taško *O* atžvilgiu, simetrijos tiesių *AC* ir *BD* atžvilgiu ir tapatingoji transformacija;

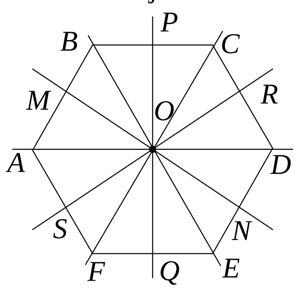
c) taisyklingasis šešiakampis *ABCDEF* (10c pav.) turi 12 simetrijų: simetrija jo centro *O* atžvilgiu, posūkiai apie centrą *O* 60°, 120°, 240° ir 300° kampais, simetrijos tiesių *AD*, *BE*, *CF*, *MN*, *PQ* ir *RS* atžvilgiu (čia *M*, *N*, *P*, *Q*, *R* ir *S* yra kraštinių *AB*, *ED*, *BC*, *EF*, *CD* ir *FA* vidurio taškai) ir tapatingoji transformacija.



10a pav.



10b pav.



10c pav.

PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Sakykime, kad stačiojo trikampio *ABC* statinis $AC = 6$, atkarpa *CH* yra jo aukštinė, nubrėžta į įžambinę *AB* (1 pav.). Taigi atkarpa *AH* yra statinio AC projekcija į įžambinę, t. y., $AH = 3{,}6.$ Pagal Pitagoro teoremą stačiajam trikampiui ACH turime

$$CH^2 = AC^2 - AH^2 = 6^2 - (3{,}6)^2 = 4{,}8^2,$$

taigi $CH = 4{,}8.$ Kadangi $CH^2 = AH \cdot HB,$ tai

$$HB = \frac{CH^2}{AH} = \frac{4{,}8^2}{3{,}6} = 6{,}4.$$

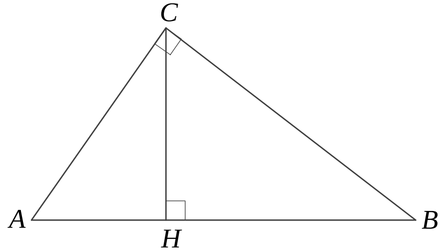
Trikampio įžambinė $AB = AH + HB = 10,$ taigi statinis

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 8.$$

Kadangi apibrėžto apskritimo spindulys R lygus pusei įžambinės, tai $R = 5.$

Iš lygybės $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$ randame, kad $r = 2.$

Ats.: $R = 5,\ \ r = 2.$



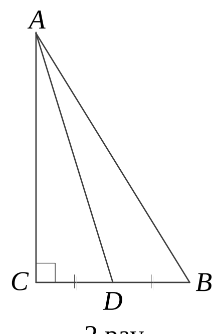
1 pav.

2. Sakykime, kad stačiojo trikampio ABC statinis $BC = a,$ pusiaukraštinė $AD = m$ (2 pav.). Kadangi $CD = \frac{a}{2},$ tai iš trikampio ACD turime, kad

$$AC^2 = AD^2 - CD^2 = m^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4m^2 - a^2}{4}.$$

Taigi, kai $4m^2 - a^2 > 0,$ t. y., kai $a < 2m,$ uždavinys turi sprendinį $AC = \dfrac{\sqrt{4m^2 - a^2}}{2}.$

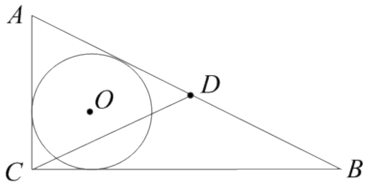
Ats.: $\dfrac{\sqrt{4m^2 - a^2}}{2},$ kai $a < 2m.$



2 pav.

3. Sakykime, kad stačiojo trikampio ABC kampas C yra statusis, atkarpa $CD = m$ yra pusiaukraštinė, nubrėžta iš stačiojo kampo viršūnės į įžambinę (3 pav.). Tuomet taškas D yra įžambinės AB

vidurio taškas, $AD = CD = BD = m$, todėl trikampio įžambinė $AB = 2m$. Kadangi $r = \frac{1}{2}(a+b-c)$, tai $2r = a+b-2m$, t. y., $b = 2r+2m-a$. Stačiajame trikampyje yra teisinga lygybė $r(a+b+c) = ab$, nes abi jos pusės lygios dvigubam trikampio plotui. Įrašę į šią lygybę gautas c ir b reikšmes, gauname, kad $r(a+2r+2m-a) = a(2r+2m-a)$, t. y., $a^2 - 2(r+m)a + 2r^2 + 4mr = 0$. Ši lygtis turi sprendinių, kai jos diskriminantas neneigiamas, t. y., kai $\frac{D}{4} = (m+r)^2 - 2r^2 - 4rm = m^2 - 2mr - r^2 \geq 0$. Kadangi kvadratinės lygties m atžvilgiu $m^2 - 2mr - r^2 = 0$ sprendiniai yra $m_{1,2} = \frac{2r \pm \sqrt{4r^2 + 4r^2}}{2} = (1 \pm \sqrt{2})r$, o m – teigiamas skaičius, tai ši nelygybė teisinga, kai $m \geq (1+\sqrt{2})r$. Išsprendę gautąją kvadratinę lygtį, randame, kad $a_{1,2} = r + m \pm \sqrt{m^2 - 2mr - r^2}$. Tuomet $b_{1,2} = r + m \mp \sqrt{m^2 - 2mr - r^2}$.



3 pav.

Ats.: kai $m \geq (1+\sqrt{2})r$ trikampio statinių ilgiai $r + m + \sqrt{m^2 - 2mr - r^2}$ ir $r + m - \sqrt{m^2 - 2mr - r^2}$.

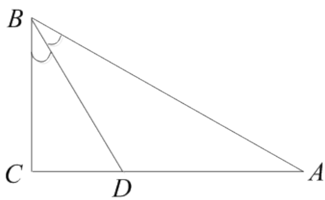
4. Trikampio ABC pusiaukampinei BD (4 pav.) taikome 4 pavyzdyje gautą formulę:

$$BD = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}.$$

Turime $a = BC = 8$, $b = AC = 6$,

$$c = AB = \sqrt{a^2 + b^2} = 10,$$

$$p = \frac{1}{2}(6+8+10) = 12.$$



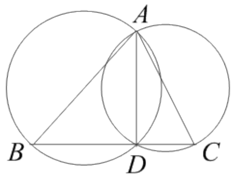
4 pav.

Tuomet $BD = \dfrac{2}{8+10}\sqrt{8\cdot 10\cdot 12\cdot(12-6)} = \dfrac{8\sqrt{10}}{3}$.

Ats.: $\dfrac{8\sqrt{10}}{3}$.

5. Sakykime, kad R_1 ir R_2 yra apie trikampius *ABD* ir *ACD* apibrėžtų apskritimų spinduliai (5 pav.). Trikampiams *ABD* ir *ACD* taikome sinusų teoremą:

$$\frac{AB}{\sin\angle ADB} = 2R_1, \quad \frac{AC}{\sin\angle ADC} = 2R_2.$$



5 pav.

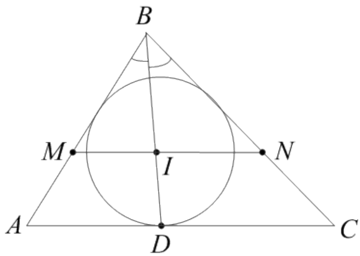
Kadangi $\angle ADB + \angle ADC = 180^\circ$, tai $\sin\angle ADB = \sin\angle ADC$. Taigi

$$R_1 : R_2 = \frac{AB}{\sin\angle ADB} : \frac{AC}{\sin\angle ADC} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{5}.$$

Taigi apibrėžtų apskritimų spindulių santykis nepriklauso nuo taško *D* padėties.

Ats.: $\dfrac{6}{5}$.

6. Sakykime, kad įbrėžto į trikampį *ABC* apskritimo centras yra taškas *I*, o tiesė *BI* kerta trikampio kraštinę *AC* taške *D* (6 pav.). Kadangi įbrėžto į trikampį apskritimo centras yra trikampio pusiaukampinių susikirtimo taškas, tai atkarpa *BD* yra trikampio pusiaukampinė. Tuomet atkarpa *BI* yra trikampio *BMN* pusiaukampinė. Kadangi tiesės *AC* ir *MN* yra lygiagrečios, tai trikampiai *ABC* ir *BMN* yra panašieji. Panašiųjų trikampių pusiaukampinių santykis lygus atitinkamų kraštinių santykiui, todėl $\dfrac{AC}{MN} = \dfrac{BD}{BI}$, t. y. $MN = \dfrac{AC\cdot BI}{BD}$. Pusiaukampinės *BD* ilgį randame pagal 4 pavyzdžio formulę. Kadangi



6 pav.

$$p = \frac{1}{2}(13 + 15 + 14) = 21,$$

tai

$$BD = \frac{2}{AB + BC}\sqrt{AB \cdot BC \cdot p \cdot (p - AC)} = \frac{2}{13 + 14}\sqrt{13 \cdot 14 \cdot 21 \cdot 6} = \frac{28\sqrt{13}}{9}.$$

Atkarpos BI ilgį rasime, pasinaudoję 5 pavyzdžio lygybe, kuri mūsų atveju yra tokia:

$$BI = \sqrt{\frac{BC \cdot AB(p - AC)}{p}} = \sqrt{\frac{14 \cdot 13 \cdot 6}{21}} = 2\sqrt{13}.$$

Tuomet

$$MN = \frac{AC \cdot BI}{BD} = \frac{15 \cdot 2\sqrt{13}}{\frac{28\sqrt{13}}{9}} = \frac{135}{14}.$$

Ats.: $\frac{135}{14}$.

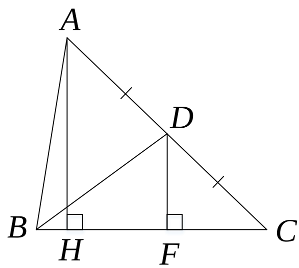
7. Iš taško D nuleidžiame statmenį DF kraštinei BC (7 pav.). Kadangi atkarpa DF yra trikampio AHC vidurinė linija, tai $DF = \frac{1}{2}AH = \sqrt{7}$. Iš stačiojo trikampio BDF randame, kad

$$BF^2 = BD^2 - DF^2 = 16 - 7 = 9,$$

t. y. $BF = 3$. Iš čia seka, kad

$$FC = BC - BF = 3,$$

o $HC = 2CF = 6 = BC$.



7 pav.

Taigi taškai B ir H sutampa, trikampis ABC – statusis,

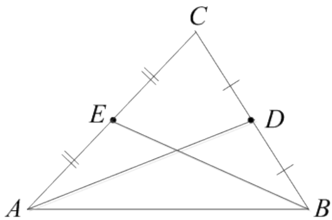
$$AB = AH = 2\sqrt{7}, \text{ o } AC^2 = AB^2 + BC^2 = 28 + 36 = 64.$$

Ats.: $AB = 2\sqrt{7}$, $AC = 8$.

8. Užrašysime trikampio ABC (8 pav.) pusiaukraštinių AD ir BE ilgių formules (6 pavyzdys):

$$4AD^2 = 2AC^2 + 2AB^2 - BC^2,$$

$$4BE^2 = 2AB^2 + 2BC^2 - AC^2.$$



8 pav.

Atėmę vieną lygybę iš kitos, gauname, kad

$4(AD^2 - BE^2) = 3AC^2 - 3BC^2$, t. y.

$$AC = \sqrt{\frac{4}{3}AD^2 - \frac{4}{3}BE^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{4}{3}\cdot 9^2 - \frac{4}{3}\cdot 6^2 + 8^2} = 2\sqrt{31}.$$

Tuomet

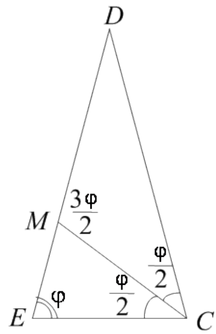
$$AB^2 = \frac{1}{2}(4AD^2 - 2AC^2 + BC^2) = \frac{1}{2}(4\cdot 9^2 - 2(2\sqrt{31})^2 + 8^2) = 70.$$

Taigi $AB = \sqrt{70}$.

Ats.: $2\sqrt{31}$ ir $\sqrt{70}$.

9. Trikampiui CDM (9 pav.) taikome sinusų teoremą:

$$\frac{DM}{\sin\angle DCM} = \frac{CD}{\sin\angle CMD}.$$



9 pav.

Kadangi atkarpa CM yra trikampio pusiaukampinė, tai $\angle DCM = \frac{\varphi}{2}$. Pagal priekampio savybę $\angle CMD = \angle CEM + \angle ECM$, tai

$\angle CMD = \frac{3\varphi}{2}$. Taigi $DM = \dfrac{b\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{3\varphi}{2}}$. Kadangi

$\angle CDE = 180^\circ - 2\varphi$, tai trikampio CDM plotas

$$S = \frac{1}{2}DC\cdot DM\sin\angle CDM = \frac{1}{2}\cdot\frac{b\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{3\varphi}{2}}\cdot\sin(180^\circ - 2\varphi) = \frac{b^2\sin\frac{\varphi}{2}\sin 2\varphi}{2\sin\frac{3\varphi}{2}}.$$

Ats.: $\dfrac{b^2 \sin\dfrac{\varphi}{2}\sin 2\varphi}{2\sin\dfrac{3\varphi}{2}}$.

10. Trikampiui ABC (10 pav.) taikome Stiuarto teoremą ir gauname:

$$AC^2 \cdot EB + CB^2 \cdot AE = AB(CE^2 + AE \cdot EB).$$

Kadangi $AE = \dfrac{1}{2}EB$, o

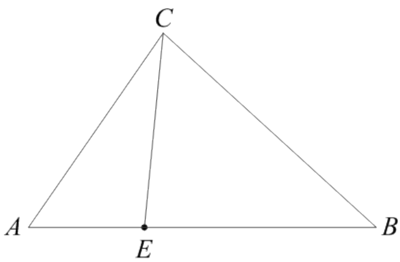
$$AE + EB = AE + 2AE = 6,$$

tai $AE = 2$, o $EB = 4$. Įrašę žinomas atkarpų ilgių reikšmes, turime, kad

$$4^2 \cdot 4 + 5^2 \cdot 2 = 6(CE^2 + 2 \cdot 4).$$

Iš čia seka, kad $CE = \sqrt{11}$.

Ats.: $\sqrt{11}$.



10 pav.

ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Pertvarkome nelygybę taip:

$$8^{1-x} - 0{,}5^{3x-1} < 24,$$
$$8 \cdot 2^{-3x} - 0{,}5^{3x} \cdot 0{,}5^{-1} < 24,$$
$$8 \cdot 2^{-3x} - 2 \cdot 2^{-3x} < 24,$$
$$2^{-3x} < 4,$$
$$2^{-3x} < 2^2.$$

Laipsnių pagrindai didesni už 1, todėl

$$-3x < 2,$$
$$x > -\frac{2}{3}.$$

Ats.: $x \in \left(-\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$.

2. Skaičių -3 užrašome logaritmu, kurio pagrindas

$$0{,}4: \ -3 = \log_{0{,}4} 0{,}4^{-3}.$$

Tada nelygybę sprendžiame taip:

$$\begin{cases} x^3 - 259 < 0{,}4^{-3}, \\ x^3 - 259 > 0 \end{cases}$$

$$259 < x^3 < 274\frac{5}{8},$$

$$\sqrt[3]{259} < x < 6{,}5.$$

Ats.: $x \in \left(\sqrt[3]{259}; 6{,}5\right)$.

3. Pažymėję $4^x = t$, $t > 0$, sprendžiame nelygybę taip:

$$t^3 - 2t^2 - 16t + 32 \le 0, \ t > 0,$$

$$t^2(t-2) - 16(t-2) \le 0, \ t > 0,$$

$$(t-2)(t-4)(t+4) \le 0, \ t > 0,$$

$$t \in [2; 4].$$

Tada

$$2 \le 4^x \le 4,$$

$$2 \le 2^{2x} \le 2^2.$$

Laipsnio pagrindas didesnis už 1 todėl:

$$1 \le 2x \le 2,$$

$$\frac{1}{2} \le x \le 1.$$

Ats.: $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

4. Pažymėję $3^x = t$, $t > 0$, gauname kvadratinę nelygybę

$$t^2 + 4t + 3 > 0, \ t > 0,$$

$$(t+1)(t+3) > 0, \ t > 0,$$

$$t > 0.$$

Nelygybę $3^x > 0$ tenkina bet kuris realusis skaičius *x*.
Ats.: $x \in (-\infty; +\infty)$.

5. Logaritmą $\log_{0,2}(x-2)$ pertvarkome taip:

$$\log_{0,2}(x-2)=\log_{\frac{1}{5}}(x-2)=\log_5(x-2)^{-1}=-\log_5(x-2).$$

Tada nelygybę $2\log_{0,2}^2(x-2)-\log_5(x-2)\le 1$ galime pakeisti tokia:

$$2\log_{0,2}^2(x-2)-\log_5(x-2)\le 1\,.$$

Pažymėję $\log_5(x-2)=t$, gauname kvadratinę nelygybę $2t^2-t-1\le 0$. Todėl

$$(t-1)(2t+1)\le 0\,,$$

$$t\in\left[-\frac{1}{2};1\right].$$

Toliau sprendžiame dvigubą nelygybę:

$$-\frac{1}{2}\le\log_5(x-2)\le 1,$$

$$5^{-\frac{1}{2}}\le x-2\le 5\,,$$

$$2+\frac{\sqrt{5}}{5}\le x\le 7$$

$$x\in\left[2+\frac{\sqrt{5}}{5};7\right].$$

Sveikųjų nelygybės sprendinių aibė yra $\{3;4;5;6;7\}$. Šių skaičių vidurkis yra $\dfrac{3+4+5+6+7}{5}=5\,.$

Ats.: 5.

6. Nelygybę pertvarkome taip:

$$15\left(5^x-3^x\right)<16\cdot 15^{\frac{x}{2}}\,,$$

$$15\cdot 5^x-16\cdot 15^{\frac{x}{2}}-15\cdot 3^x<0\,,$$

$$15\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{x}-16\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{x}{2}}-15<0\,.$$

Pažymėję $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{x}{2}}=t$, $t>0$, gauname kvadratinę nelygybę

$$15t^2-16t-15<0,\ \ t>0\,,$$
$$(3t-5)(5t+3)<0\,,\ t>0\,,$$
$$t\in\left(0;\frac{5}{3}\right).$$

Toliau sprendžiame dvigubą nelygybę

$$0<\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{x}{2}}<\frac{5}{3}\,.$$

Laipsnių pagrindas didesnis už 1, todėl

$$\frac{x}{2}<1,$$
$$x<2\,.$$
$$x\in(-\infty;2).$$

Šioje aibėje yra vienintelis natūralusis skaičius 1.

Ats.: 1.

7. Skaičių 2 užrašome logaritmu, kurio pagrindas $x+3$:

$$2=\log_{x+3}(x+3)^2\,.$$

Tada turime spręsti nelygybę

$$\log_{x+3}x^2\le\log_{x+3}(x+3)^2\,.$$

Nagrinėjame du atvejus:

1) $\begin{cases}0<x+3<1,\\ x^2\ge x^2+6x+9,\\ x^2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3<x<-2,\\ x\le-1{,}5,\\ x\ne0\end{cases}\Rightarrow x\in(-3;-2);$

2) $\begin{cases} x+3>1, \\ x^2 \le x^2+6x+9, \\ x^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2, \\ x \ge -1{,}5, \\ x \ne 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in [-1{,}5;\, 0) \cup (0;\, +\infty)$.

Ats.: $x \in (-3;\, -2) \cup [-1{,}5;\, 0) \cup (0;\, +\infty)$.

8. Logaritmai apibrėžti, kai $x \in (2;\, 3) \cup (3;\, +\infty)$.

Logaritmą $\log_{x-2} x$ pertvarkome taip:

$$\log_{x-2} x = \frac{\log_x x}{\log_x (x-2)} = \frac{1}{\log_x (x-2)}.$$

Tada sprendžiame nelygybę

$$\log_x (x-2) \ge \frac{1}{\log_x (x-2)},$$

$$\frac{\log_x^2 (x-2) - 1}{\log_x (x-2)} \ge 0.$$

Pažymėję $\log_x (x-2) = t$, gauname kvadratinę nelygybę

$$\frac{t^2-1}{t} \ge 0 \Rightarrow t \in [-1;0) \cup [1;+\infty).$$

Tada

$$-1 \le \log_x (x-2) < 0 \quad \text{arba} \quad \log_x (x-2) \ge 1,$$

$$\log_x \frac{1}{x} \le \log_x (x-2) < \log_x 1 \quad \text{arba} \quad \log_x (x-2) \ge \log_x x.$$

Sprendžiame dvi nelygybių sistemas:

1) $\begin{cases} x>2, \\ x \ne 3, \\ \frac{1}{x} \le x-2 < 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2, \\ \frac{1}{x} \le x-2, \\ x<3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (2;\, 3), \\ x^2-2x-1 \ge 0, \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x \in (2;\, 3), \\ x \in (-\infty; 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2};\, +\infty), \end{cases} \Rightarrow x \in [1+\sqrt{2};\, 3)$.

2) $\begin{cases} x > 2, \\ x \neq 3, \\ x - 2 \geq x, \end{cases} \Rightarrow \varnothing .$

Ats.: $x \in \left[1+\sqrt{2}; 3\right)$.

9. Logaritmas apibrėžtas, kai $-x^2 + 3x - 2 > 0 \Rightarrow x \in (1; 2)$.

Pažymėkime $g(x) = 3^{x+2}$. Tada $g(x) \in (27; 81)$, kai $x \in (1; 2)$.

Pažymėkime $f(x) = \log_2\left(3x - x^2 - 2\right)$ ir $h(x) = 3x - x^2 - 2$, $f(x) = \log_2(h(x))$. Kai $x \in (1; 2)$, tai $h(x) \in (0; 0{,}25)$. Tada $f(x) \in (-\infty; -2)$.

Gavome, kad $f(x) < g(x)$. Todėl $\log_2\left(3x - x^2 - 2\right) \geq 3^{x+2}$ nelygybės sprendinių aibė yra tuščioji.

Ats.: $\varnothing$.

10. Funkcija $f(x) = 6 - 2^x$ yra mažėjančioji, todėl ji kirs Ox ašį, kai $y = f(x) = 0 \Rightarrow$ taške $(\log_2 6; 0)$.

Taikome perrankos metodą, kai $x \in \{1; 2\}$, nes $\log_2 6 < 3$.

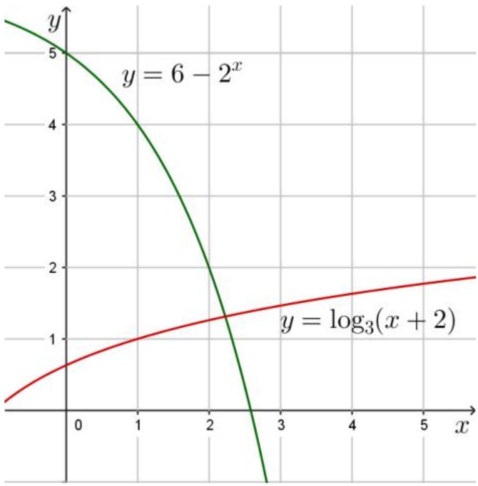
Kai $x = 1$, tai

$\begin{cases} y \leq 4 \\ y > 1 \end{cases} \Rightarrow (1; 2),\ (1; 3)$ ir $(1; 4)$.

Kai $x = 2$, tai

$\begin{cases} y \leq 2 \\ y > \log_3 4 > 1 \end{cases} \Rightarrow (2; 2)$.

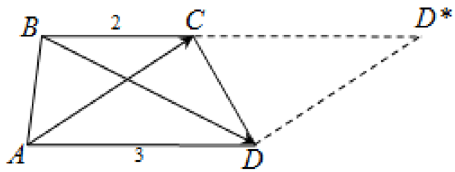
Ats.: $(1; 2)$, $(1; 3)$, $(1; 4)$ ir $(2; 2)$.



SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Trapecijos kraštinės BC tęsinyje atidėkime atkarpą $CD^* = AD$ (žr. 1 pav.). Tuomet keturkampis ACD^*D – lygiagretainis. Kadangi

$$\overrightarrow{BD^*} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD^*} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{BC},$$



1 pav.

tai

$$\overrightarrow{BC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BD^*} = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD^*}\right) = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}\right).$$

Tuomet

$$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{3}{5}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}\right)$$

ir

$$\overrightarrow{DA} = -\frac{3}{5}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}\right).$$

Pagaliau

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \frac{3}{5}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{AC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BD} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AC},$$

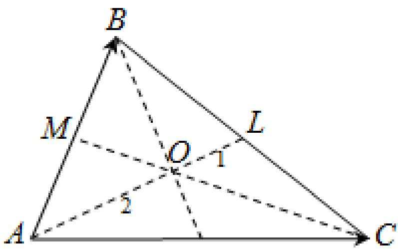
o

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{5}\overrightarrow{BD}.$$

Ats.: $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{5}\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}\right)$;

$\overrightarrow{CD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BD} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DA} = -\frac{3}{5}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}\right)$.

2. Akivaizdu, kad $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (žr. 2 pav.), todėl vektoriaus $\overrightarrow{AM}$ koordinatės bazėje $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ yra $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. Kadangi taškas L yra kraštinės BC vidurio taškas, o trikampio pusiaukraštinių sankirtos taškas dalija jas santykiu $2:1$, skaičiuojant nuo viršūnės, todėl



2 pav.

$$\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).$$

Tuomet vektoriaus $\overrightarrow{AO}$ koordinatės duotojoje bazėje yra $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Analogiškai gauname, kad vektorius

$$\overrightarrow{MO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MC} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},$$

todėl $\overrightarrow{MO}\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right)$.

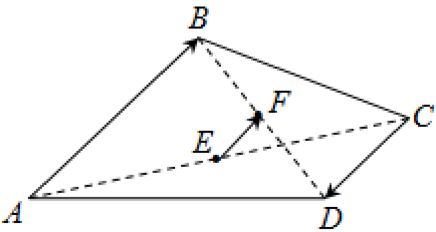
Ats.: $\overrightarrow{AM}\left(\frac{1}{2}; 0\right)$; $\overrightarrow{AO}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$; $\overrightarrow{MO}\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right)$.

3. Vektorių $\overrightarrow{EF}$ išreikškime dviem būdais:

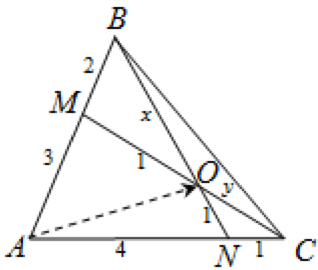
$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)$$

ir $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)$

(žr. 3 pav.).



3 pav.



4 pav.

Kadangi pirmuoju atveju $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD}$, o antruoju atveju $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, tai $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right)$.

4. Sakykime, kad $BO : ON = x$, o $CO : OM = y$ (žr. 4 pav.). Tuomet iš trikampio AMC turime, kad

$$\overrightarrow{AO} = \frac{y\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC}}{1+y} = \frac{\frac{3}{5}y\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{1+y}.$$

Analogiškai iš trikampio ABN turime, kad

$$\overrightarrow{AO} = \frac{\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AN}}{1+x} = \frac{\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}x\overrightarrow{AC}}{1+x}.$$

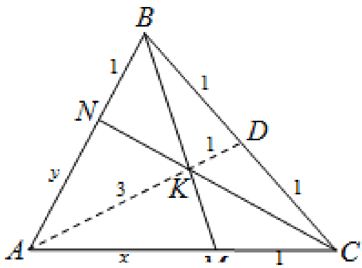
Dėl vektoriaus $\overrightarrow{AO}$ išraiškos vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ vienaties gauname, kad $\frac{3y}{5(1+y)} = \frac{1}{1+x}$ ir $\frac{1}{1+y} = \frac{4x}{5(1+x)}$.

Padaliję vieną lygybę iš kitos, gauname: $\frac{3y}{5} = \frac{5}{4x}$, t. y. $x = \frac{25}{12y}$. Iš čia išplaukia, kad $\frac{1}{1+y} = \frac{20y}{12y+25}$, t.y. $y = \frac{5}{8}$. Tuomet $x = \frac{10}{3}$.

Ats.: $BO : ON = 10 : 3$, $CO : OM = 5 : 8$.

5. Sakykime, kad tiesė BK kerta trikampio ABC kraštinę AC taške M, kuris dalija ją santykiu $AM : MC = x$ (žr. 5 pav.). Tuomet teisinga lygybė

$$\overrightarrow{BM} = \frac{\overrightarrow{BA} + x\overrightarrow{BC}}{1+x}.$$



5 pav.

Kadangi vektoriai $\overrightarrow{BM}$ ir $\overrightarrow{BK}$ yra kolinearieji, tai

$$\overrightarrow{BM} = z \cdot \overrightarrow{BK} = z \cdot \frac{3\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}}{3+1} = z \cdot \frac{\frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}}{4}.$$

Dėl vektoriaus $\overrightarrow{BM}$ išraiškos baziniais vektoriais $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{BA}$ vienaties turime, kad $\dfrac{x}{1+x} = \dfrac{3z}{8}$ ir $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{z}{4}$. Kadangi pakanka rasti tik kintamąjį x, padaliję vieną lygybę iš kitos, gauname, kad $x = \dfrac{3}{2}$.

Analogiškai, sakykime, kad tiesė CK kerta trikampio ABC kraštinę AB taške N, kuris dalija ją santykiu $AN : NB = y$. Tuomet $\overrightarrow{CN} = \dfrac{\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB}}{1+y}$. Kita vertus, vektoriai $\overrightarrow{CN}$ ir $\overrightarrow{CK}$ yra kolinearieji, todėl $\overrightarrow{CN} = k \cdot \overrightarrow{CK} = k \cdot \dfrac{3\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}}{3+1} = k \cdot \dfrac{\frac{3}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}}{4}$.

Dėl vektoriaus $\overrightarrow{CN}$ išraiškos vienaties gauname $\dfrac{1}{1+y} = \dfrac{k}{4}$ ir $\dfrac{y}{1+y} = \dfrac{3k}{8}$. Iš čia randame, kad $y = \dfrac{3}{2}$.

Ats.: $AM : MC = AN : NB = 3 : 2$.

6. Vektoriaus $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ ilgį rasime iš formulės:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2}=\sqrt{\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{c}}\,.$$

Remiantis vektorių skaliarinės sandaugos apibrėžimu, gauname, kad

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=4\cdot2\cdot\frac{1}{2}=4,$$

o

$$\vec{a}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cos\angle\left(\vec{a},\vec{a}\right)=\left|\vec{a}\right|^2=16.$$

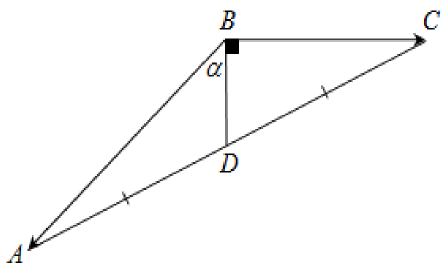
Analogiškai randame: $\vec{a}\cdot\vec{c}=12,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=6,\ \vec{b}^{\,2}=4,\ \vec{c}^{\,2}=36$.

Tuomet $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\sqrt{16+4+36+2\cdot4+2\cdot12+2\cdot6}=10$.

Ats.: 10.

7. Kampą $\angle ABD=\alpha$ (žr. 6 pav.) rasime iš formulės

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|}.$$



6 pav.

Kadangi

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|,$$

t. y.,

$$\left|\overrightarrow{BA}\right|^2=\overrightarrow{BA}^{\,2}$$

o pagal sąlygą $\left|\overrightarrow{BD}\right|=\frac{\sqrt{3}}{4}\left|\overrightarrow{BA}\right|$, tai

$$\cos\alpha=\frac{4\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}}{\sqrt{3}\left|\overrightarrow{BA}\right|^2}=\frac{4\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}}{\sqrt{3}\cdot\overrightarrow{BA}^{\,2}}.$$

Sakykime, kad $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$ – baziniai vektoriai. Kadangi $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$, tai vektorių skaliarinė sandauga $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$

yra lygi

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\right). \qquad (1)$$

Vektoriai $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{BD}$ yra statmeni, todėl jų skaliarinė sandauga lygi nuliui, t.y., $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$. Iš čia gautą išraišką $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BC}^2$ įrašę į (1) lygybę turime, kad

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}^2-\overrightarrow{BC}^2\right). \qquad (2)$$

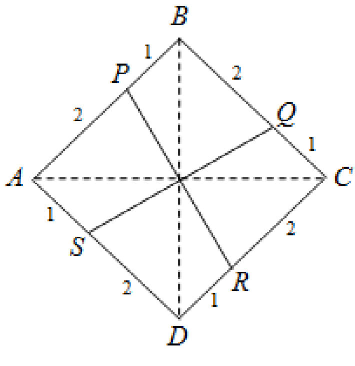
Kadangi $\left|\overrightarrow{BD}\right|=\frac{\sqrt{3}}{4}\left|\overrightarrow{BA}\right|$, tai įrašę vektoriaus $\overrightarrow{BD}$ išraišką baziniais vektoriais į kairiąją (2) lygybės pusę ir pakėlę abi gautosios lygybės puses skaliariškai kvadratu, turime $3\overrightarrow{BA}^2=4\left(\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2\right)$. Iš čia, prisiminę, kad $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BC}^2$, randame $\overrightarrow{BC}^2=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}^2$.

Iš (2) lygybės išplaukia, kad $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{3}{8}\overrightarrow{BA}^2$. Taigi

$$\cos\alpha=\frac{4\cdot\frac{3}{8}\overrightarrow{BA}^2}{\sqrt{3}\cdot\overrightarrow{BA}^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ats.: $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

8. Pagal sąlygą keturkampio $ABCD$ įstrižainės AC ir BD yra statmenos ir lygios, jų ilgį pažymėkime raide a (žr. 7 pav.). Sakykime, kad bazę sudaro vektoriai $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{BD}$. Tai



7 pav.

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD}}{3}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=$$

$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

ir

$$\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}}{3}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Tuomet vektorių $\overrightarrow{PR}$ ir $\overrightarrow{QS}$ išraiškas baziniais vektoriais pakėlę skaliariškai kvadratu gauname, kad

$$\overrightarrow{PR}^2=\frac{4}{9}\overrightarrow{BD}^2+\frac{1}{9}\overrightarrow{AC}^2+\frac{4}{9}\underbrace{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}_{=0,\ nes\ \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}}=\frac{4}{9}a^2+\frac{1}{9}a^2=\frac{5}{9}a^2$$

ir, analogiškai, $\overrightarrow{QS}^2=\frac{1}{9}\overrightarrow{BD}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}^2-\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BB}=\frac{5}{9}a^2.$

Iš čia išplaukia, kad $\left|\overrightarrow{PR}\right|=\left|\overrightarrow{QS}\right|$, t.y. atkarpos PR ir QS yra lygios. Kadangi skaliarinė sandauga

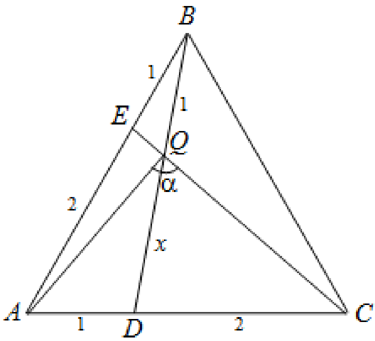
$$\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{QS}=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)=$$

$$=\frac{2}{9}\overrightarrow{BD}^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}-\frac{2}{9}\overrightarrow{AC}^2=\frac{2}{9}a^2-\frac{2}{9}a^2=0,$$

tai reiškia, kad atkarpos PR ir QS yra ir statmenos.

9. Lygiakraščio trikampio ABC kraštinės ilgį pažymėkime raide a. Pagal sąlygą $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EB}$, todėl $AD:DC=1:2$ ir $AE:EB=2$ (žr. 8 pav.). Sakykime, kad $\angle AQC=\alpha$, o bazę sudaro vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$. Kampą α rasime iš formulės

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QC}}{\left|\overrightarrow{QA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{QC}\right|} = \frac{\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{CQ}}{\left|\overrightarrow{AQ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CQ}\right|}.$$



8 pav.

Kadangi vektorius $\overrightarrow{CQ}$ kolinearus su vektoriumi $\overrightarrow{CE}$, tai $\overrightarrow{CQ} = k\cdot\overrightarrow{CE} = k\left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}\right) = k\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)$. Sakykime, kad $DQ : QB = x$, tuomet

$$\overrightarrow{CQ} = \frac{x\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}}{1+x} = \frac{x\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}}{1+x} = \frac{x\overrightarrow{AB} - \left(x + \frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AC}}{1+x}.$$

Dėl vektoriaus $\overrightarrow{CQ}$ išraiškos vienaties gauname $\frac{x}{1+x} = \frac{2k}{3}$ ir $\frac{x+\frac{2}{3}}{1+x} = k$. Iš čia randame, kad $k = \frac{6}{7}$ ir $x = \frac{4}{3}$. Taigi taškas Q atkarpą DB dalija santykiu $DQ : QB = 4 : 3$, todėl

$$\overrightarrow{CQ} = \frac{4\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{AC}}{7}, \text{ o } \overrightarrow{AQ} = \frac{4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}}{4+3} = \frac{4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{7}.$$

Kadangi skaliarinė sandauga

$$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{CQ} = \frac{4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{7}\cdot\frac{4\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{AD}}{7} =$$

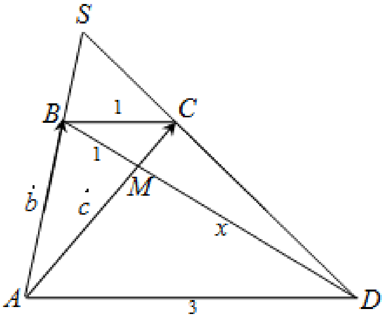
$$= \frac{1}{49}\left(16\overrightarrow{AB}^2 - 20\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AC}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{49}\left(16a^2 - 20a\cdot a\cdot\frac{1}{2} - 6a^2\right) = 0,$$

tai $\cos\alpha = \frac{0}{\left|\overrightarrow{QA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{QC}\right|} = 0$. Iš čia $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Ats.: $\dfrac{\pi}{2}$.

10. Pagal sąlygą $AD : BC = 3$, t.y., $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BC}$. Be to, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{b}\right| = b$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\vec{c}\right| = c$ (žr. 9 pav.). Sakykime, kad bazę sudaro vektoriai $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Kadangi



9 pav.

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{c} - \vec{b},$$

tai

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{\overrightarrow{BC}^2} = \sqrt{\left(\vec{c} - \vec{b}\right)^2} = = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c}},$$

nes $\vec{b}^2 = \left|\vec{b}\right|^2 = b^2$ ir $\vec{c}^2 = \left|\vec{c}\right|^2 = c^2$.

Tuomet $\left|\overrightarrow{AD}\right| = 3\left|\overrightarrow{BC}\right| = 3\sqrt{b^2 + c^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c}}$.

Kadangi $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = 2\vec{c} - 3\vec{b}$, tai kraštinės CD ilgis

$$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{\left(2\vec{c} - 3\vec{b}\right)^2} = \sqrt{9b^2 + 4c^2 - 12\vec{b}\cdot\vec{c}}.$$

Trapecijos $ABCD$ kampo A didumą rasime iš formulės

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{3\left(\vec{c} - \vec{b}\right)\cdot\vec{b}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{c} - b^2}{3b\sqrt{b^2 + c^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c}}},$$

t.y. $\quad \angle A = \arccos\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c} - b^2}{3b\sqrt{b^2 + c^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c}}}$.

Tuomet $\angle B = 180^0 - \angle A$.

Analogiškai

$$\cos D = \frac{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}}{\left|\overrightarrow{DA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DC}\right|} = \frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|} = \frac{3\left(\vec{c}-\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{c}-3\vec{b}\right)}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|} =$$

$$= \frac{3b^2+2c^2-5\vec{b}\cdot\vec{c}}{\sqrt{b^2+c^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}}\cdot\sqrt{9b^2+4c^2-12\vec{b}\cdot\vec{c}}},$$

t.y. $\angle D = \arccos\dfrac{3b^2+2c^2-5\vec{b}\cdot\vec{c}}{\sqrt{b^2+c^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}}\cdot\sqrt{9b^2+4c^2-12\vec{b}\cdot\vec{c}}}$ ir $\angle C = 180^0 - \angle D$.

Vektorių $\overrightarrow{MS}$ užrašome taip: $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AM}$.

Kadangi vektoriai $\overrightarrow{AS}$ ir $\overrightarrow{AB}$ kolinearieji, tai $\overrightarrow{AS} = k\,\overrightarrow{AB} = k\,\vec{b}$. Kita vertus, vektoriai $\overrightarrow{DS}$ ir $\overrightarrow{CD}$ yra kolinearieji, todėl teisinga lygybė

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DS} = 3\left(\vec{c}-\vec{b}\right) + \lambda\,\overrightarrow{CD} = 3\left(\vec{c}-\vec{b}\right) + \lambda\left(2\vec{c}-3\vec{b}\right) =$$
$$= (3+2\lambda)\vec{c} - (3+3\lambda)\vec{b}.$$

Dėl vektoriaus $\overrightarrow{AS}$ išraiškos vienaties gauname $3+2\lambda = 0$ ir $-3(1+\lambda) = k$. Iš čia randame, kad $k = \dfrac{3}{2}$. Taigi $\overrightarrow{AS} = \dfrac{3}{2}\vec{b}$.

Vektoriai $\overrightarrow{AM}$ ir $\overrightarrow{AC}$ kolinearieji, todėl $\overrightarrow{AM} = y\,\overrightarrow{AC} = y\,\vec{c}$.

Sakykime, kad trapecijos įstrižainių sankirtos taškas M dalija įstrižainę BD santykiu $BM : MD = 1 : x$. Tada iš trikampio ABD turime, kad $\overrightarrow{AM} = \dfrac{x\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}{1+x} = \dfrac{x\vec{b} + 3\left(\vec{c}-\vec{b}\right)}{1+x} = \dfrac{(x-3)\vec{b} + 3\vec{c}}{1+x}$.

Dėl vektoriaus $\overrightarrow{AM}$ išraiškos vienaties gauname $\dfrac{x-3}{1+x} = 0$ ir $\dfrac{3}{1+x} = y$. Iš čia randame, kad $y = \dfrac{3}{4}$. Taigi $\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{4}\vec{c}$.

Iš čia išplaukia, kad $\overrightarrow{MS} = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{c} = \frac{3}{4}\left(2\vec{b} - \vec{c}\right)$. Todėl atstumas tarp trapecijos įstrižainių sankirtos ir šoninių kraštinių sankirtos taškų M ir S yra lygus $\left|\overrightarrow{MS}\right| = \frac{3}{4}\sqrt{4\vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 4\vec{b}\cdot\vec{c}}$.

Ats.: $AB = b$; $BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c}}$;

$AD = 3\sqrt{b^2 + c^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c}}$; $CD = \sqrt{9b^2 + 4c^2 - 12\vec{b}\cdot\vec{c}}$;

$\angle A = \arccos\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c} - b^2}{3b\sqrt{b^2 + c^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c}}}$; $\angle B = 180^0 - \angle A$;

$\angle D = \arccos\dfrac{3b^2 + 2c^2 - 5\vec{b}\cdot\vec{c}}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c}}\cdot\sqrt{9b^2 + 4c^2 - 12\vec{b}\cdot\vec{c}}}$;

$\angle C = 180^0 - \angle D$; $\left|\overrightarrow{MS}\right| = \frac{3}{4}\sqrt{4\vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 4\vec{b}\cdot\vec{c}}$.

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tegu x_1 yra vyriškų, o x_2 – moteriškų striukių siūti planuojamas skaičius, o $P(x)$, $x = (x_1; x_2)$, yra planuojamas pelnas. Pagal uždavinio sąlygą, $P(x) = 9x_1 + 12x_2$, išlaidos striukėms pasiūti lygios $100x_1 + 40x_2$, o išlaidos reklamai lygios $x_1 + 3x_2$. Planą $x = (x_1; x_2)$ ribojančios sąlygos yra tokios: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $100x_1 + 40x_2 \le 50\,000$ ir $x_1 + 3x_2 \le 1800$.

Taigi reikia išspręsti šį uždavinį:

$$\text{rasti} \quad \max(9x_1 + 12x_2), \quad \text{kai} \quad \begin{cases} 100x_1 + 40x_2 \le 50\,000, \\ x_1 + \ \ 3x_2 \le 1800, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Aišku, jis ekvivalentus šiam uždaviniui:

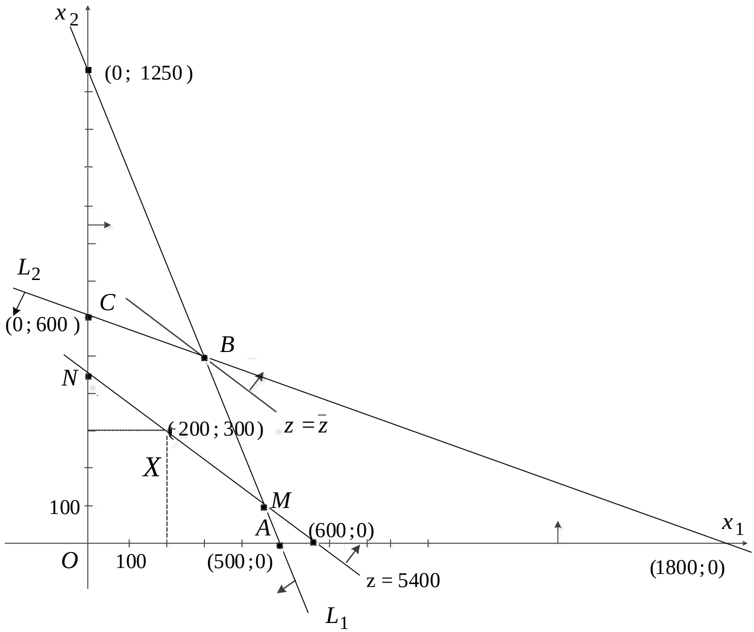
$$\max(9x_1 + 12x_2), \quad \text{kai} \quad \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 2500, \\ x_1 + 3x_2 \le 1800, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Iš pradžių pavaizduokime leistinąją aibę – nelygybių sistemos

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 2500, \\ x_1 + 3x_2 \le 1800, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

sprendinių aibę *X*.

Gausime keturkampiu *OABC* apribotą plokštumos sritį (*žr.* pav.).



Dabar panagrinėkime tikslo funkcijos $z = 9x_1 + 12x_2$ reikšmių kitimą leistinojoje aibėje.

Leistinosios aibės taške (200; 300) tikslo funkcijos reikšmė yra $9 \cdot 200 + 12 \cdot 300 = 5400$. Brėžiame lygio tiesę $z = 5400$, kurios lygtis $9x_1 + 12x = 5400$. Ji eina per taškus (200; 300) ir (600; 0). Ši tiesė leistinąją sritį padalija į dvi dalis. Keturkampiu *MBCN* apibrėžtoje srityje tikslo funkcijos reikšmės yra didesnės negu srityje, apribotoje keturkampiu *OAMN*. Todėl apatinę srities dalį nupjauname (atmetame) ir optimalaus taško ieškome viršutinėje srities dalyje. Per tašką *B* nubrėžta lygio tiesė $z = \overline{z}$ (ji lygiagreti su lygio tiese $z = 5400$) turi tik vieną bendrą tašką su leistinąja aibe. Kadangi didesnės negu taške *B* tikslo funkcijos reikšmės yra rodykle prie tiesės $z = \overline{z}$ pažymėtoje pusplokštumėje (*žr.* pav.), tai *B* yra optimalus taškas. Jo koordinates randame, išsprendę lygčių sistemą

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 2500, \\ x_1 + 3x_2 = 1800. \end{cases}$$

Gauname: $x_1 = 300, \quad x_2 = 500.$

Taigi optimalus striukių siuvimo planas yra (300; 500), o didžiausias pelnas lygus $9 \cdot 300 + 12 \cdot 500 = 8\,700$ (eurų).

Ats.: 300 vyriškų striukių ir 500 moteriškų striukių; pelnas – 8 700 eurų.

2. Tegu $x = (x_1; x_2; x_3)$ yra cemento, pagaminto pirmoje įmonėje, vežimo į objektus planas, o $y = (y_1; y_2; y_3)$ – cemento, pagaminto antroje įmonėje, vežimo į objektus planas. Cemento vežimo išlaidas pažymėkime $P(x, y)$. Remdamiesi kainų lentele, gausime, kad

$$P(x, y) = 20x_1 + 50x_2 + 36x_3 + 45y_1 + 35y_2 + 27y_3.$$

Kadangi visus užsakymus reikia įvykdyti, tai reikia išvežti visą cementą (nes užsakymų suma sutampa su abiejose įmonėse pagaminto cemento kiekiu). Vadinasi, turi galioti šios lygybės:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 30,$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 40,$$
$$x_1 + y_1 = 10,$$
$$x_2 + y_2 = 25,$$
$$x_3 + y_3 = 35.$$

Aišku, kad turi būti $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ ir $y_3 \geq 0$.

Gauname tokį nagrinėjamo uždavinio matematinį modelį:

rasti $\min(20x_1 + 50x_2 + 36x_3 + 45y_1 + 35y_2 + 27y_3)$, kai

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 30, \\ y_1 + y_2 + y_3 = 40, \\ x_1 + y_1 = 10, \\ x_2 + y_2 = 25, \\ x_3 + y_3 = 35, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, \\ y_j \geq 0, i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

3. Tegu $x = (x_1; x_2; x_3)$ yra džinsų siuvimo planas; čia x_1 yra moteriškų, o x_2 – vyriškų, o x_3 – vaikų džinsų skaičius.

Remdamiesi sąnaudų lentele, gauname, kad sukirpimui reikės $8x_1 + 6x_2 + 5x_3$ minučių, siuvimui reikės $10x_1 + 8x_2 + 7x_3$ minučių, o kontrolei – $x_1 + x_2 + x_3$ minučių.

Gauname tokias plano $x = (x_1; x_2; x_3)$ komponentes ribojančias sąlygas:

$$8x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 132 \cdot 60 = 7\,920,$$

$$10x_1 + 8x_2 + 7x_3 \leq 176 \cdot 60 = 10\,560,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 \cdot 60 = 1200.$$

Aišku, kad $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ ir x_1, x_2, x_3 turi būti sveikieji skaičiai.

Laukiamą pelną pažymėkime $P(x)$. Jo apskaičiavimo formulė (pagal sąlygą) yra $P(x) = 7x_1 + 6x_2 + 5x_3$.

Gauname tokį šio uždavinio matematinį modelį:

rasti $\max(7x_1 + 6x_2 + 5x_3)$, kai

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 \le 7\,920, \\ 10x_1 + 8x_2 + 7x_3 \le 10\,560, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 1\,200, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \\ x_1,\ x_2,\ x_3 - \text{sveikieji sk.} \end{cases}$$

4. Gamybos technologinės sąnaudos $s(x) = (s_1(x);\, s_2(x))$ planui $x = (x_1;\, x_2)$ įvykdyti yra tokios:

$$s_1(x) = 0{,}25x_1 + 0{,}5x_2, \quad s_2(x) = 0{,}4x_1.$$

Tada

$$p_1(x) = x_1 - s_1(x) = x_1 - (0{,}25x_1 + 0{,}5x_2) = 0{,}75x_1 - 0{,}5x_2,$$
$$p_2(x) = x_2 - s_2(x) = x_2 - 0{,}4x_1 = -0{,}4x_1 + x_2$$

Yra pasiūlos $p(x) = (p_1(x);\, p_2(x))$ komponentės.

Subalansuotam su paklausa $d = (110;\, 120)$ gamybos planui rasti reikia išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} 0{,}75x_1 - 0{,}5x_2 = 110, \\ -0{,}4x_1 + \quad x_2 = 120. \end{cases}$$

Gauname vienintelį sprendinį: $x_1 = \dfrac{3400}{11}$, $x_2 = \dfrac{2680}{11}$. Kadangi $x_1 > 0$ ir $x_2 > 0$, tai $x = \left(\dfrac{3400}{11};\, \dfrac{2680}{11}\right)$ yra ieškomas gamybos planas.

Ats.: $\left(\dfrac{3400}{11};\, \dfrac{2680}{11}\right)$.

5. Tegu $x = (x_1;\, x_2)$ yra gamybos planas, o $d = (d_1;\, d_2)$, $d_1 \ge 0$, $d_2 \ge 0$, yra paklausa.

Remdamiesi technologine matrica gauname tokias pasiūlos $p(x)=(p_1(x);\ p_2(x))$ komponentes:

$$p_1(x)=x_1-s_1(x)=x_1-(0{,}1x_1+0{,}2x_2)=0{,}9x_1-0{,}2x_2,$$
$$p_2(x)=x_2-s_2(x)=x_2-(0{,}4x_1+0{,}3x_2)=-0{,}4x_1+0{,}7x_2.$$

Dabar išspręskime balanso lygčių sistemą

$$\begin{cases} 0{,}9x_1-0{,}2x_2=d_1, \\ -0{,}4x_1+0{,}7x_2=d_2. \end{cases}$$

Ir pirmą, ir antrą lygtį padauginę iš 10, gauname ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} 9x_1-2x_2=10d_1, \\ -4x_1+7x_2=10d_2. \end{cases}$$

Išsprendę ją, gauname, kad $x_1=\dfrac{14d_1+4d_2}{11}$ ir $x_2=\dfrac{8d_1+18d_2}{11}$.

Kadangi $x_1\ge 0$ ir $x_2\ge 0$, kai $d_1\ge 0$ ir $d_2\ge 0$, tai darome išvadą, kad ekonominė sistema yra produktyvi.

Ats.: Produktyvi.

6. Pasiūlos $p(x)=(p_1(x);\ p_2(x);\ p_3(x))$ komponentės yra tokios:

$$p_1(x)=x_1-s_1(x)=x_1-(0{,}1x_2+0{,}2x_3)=x_1-0{,}1x_2-0{,}2x_3,$$
$$p_2(x)=x_2-s_2(x)=x_2-(0{,}1x_1+0{,}1x_2+0{,}3x_3)=-0{,}1x_1+0{,}9x_2-0{,}3x_3,$$
$$p_3(x)=x_3-s_3(x)=x_3-(0{,}2x_1+0{,}5x_3)=-0{,}2x_1+0{,}5x_3.$$

Gauname tokią balanso lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1-0{,}1x_2-0{,}2x_3=403, \\ -0{,}1x_1+0{,}9x_2-0{,}3x_3=806, \\ -0{,}2x_1+0{,}5x_3=806. \end{cases}$$

Kiekvieną lygtį padauginę iš 10, gausime ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} 10x_1-x_2-2x_3=4030, \\ -x_1+9x_2-3x_3=8060, \\ -2x_1+5x_3=8060. \end{cases}$$

Iš trečios lygties gauname, kad $x_3=\dfrac{8060+2x_1}{5}=1612+0{,}4x_1.$

Įrašę į pirmąsias dvi lygtis, gausime sistemą su nežinomaisiais x_1 ir x_2:

$$\begin{cases} 9{,}2x_1 - x_2 = 7\,254, \\ -2{,}2x_1 + 9x_2 = 12\,896. \end{cases}$$

Ši sistema turi vienintelį sprendinį: $x_1 = 970,\ \ x_2 = 1670.$

Todėl $x_3 = 1612 + 0{,}4 \cdot 970 = 2000.$

Ats.: (970; 1670; 2000).

7. Produkcijos savikainos $c = (c_1; c_2)$ komponentės yra

$$c_1 = 0 \cdot p_1 + 0{,}3p_2 = 0{,}3p_2 \text{ ir } c_2 = 0{,}2p_1 + 0 \cdot p_2 = 0{,}2p_1,$$

todėl pridėtinės vertės $v = (v_1; v_2)$ komponentės yra

$$v_1 = p_1 - c_1 = p_1 - 0{,}3p_2,$$
$$v_2 = p_2 - c_2 = p_2 - 0{,}2p_1.$$

Taigi ieškomoms kainoms rasti reikia išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} p_1 - 0{,}3p_2 = v_1, \\ -0{,}2p_1 + p_2 = v_2. \end{cases}$$

Pagal uždavinio sąlygą, gauname:

a) $\begin{cases} p_1 - 0{,}3p_2 = 14, \\ -0{,}2p_1 + p_2 = 16 \end{cases} \Rightarrow p_1 = 20,\ p_2 = 20;$

b) $\begin{cases} p_1 - 0{,}3p_2 = 25, \\ -0{,}2p_1 + p_2 = 42 \end{cases} \Rightarrow p_1 = 40,\ p_2 = 50.$

Ats.: a) (20; 20); b) (40; 50).

8. Pridėtinės vertės $v = (v_1; v_2; v_3)$ komponentės yra tokios:

$$v_1 = p_1 - c_1 = p_1 - (0{,}1p_2 + 0{,}1p_3) = p_1 - 0{,}1p_2 - 0{,}1p_3,$$
$$v_2 = p_2 - c_2 = p_2 - (0{,}3p_1 + 0{,}2p_3) = -0{,}3p_1 + p_2 - 0{,}2p_3,$$
$$v_3 = p_3 - c_3 = p_3 - (0{,}1p_1 + 0{,}3p_2 + 0{,}1p_3) = -0{,}1p_1 - 0{,}3p_2 + 0{,}9p_3.$$

Ieškomoms kainoms rasti reikia išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} p_1 - 0{,}1p_2 - 0{,}1p_3 = 26, \\ -0{,}3p_1 + p_2 - 0{,}2p_3 = 32, \\ -0{,}1p_1 - 0{,}3p_2 + 0{,}9p_3 = 50. \end{cases}$$

Iš pirmos lygties gauname, kad

$$p_1 = 26 + 0{,}1p_2 + 0{,}1p_3.$$

Įrašę į kitas dvi lygtis, gausime tokią lygčių su nežinomaisiais x_2 ir x_3 sistemą:

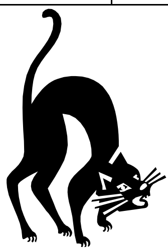
$$\begin{cases} 0{,}97p_2 - 0{,}3p_3 = 39{,}8, \\ -0{,}31p_2 + 0{,}89p_3 = 52{,}6, \end{cases}$$

turinčią vienintelį sprendinį: $p_2 = 60$, $p_3 = 80$. Todėl $p_1 = 26 + 0{,}1 \cdot 60 + 0{,}1 \cdot 80 = 40$.

Ats.: (40; 60; 80).

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

1	2	3	4
$a = -5$	$(2; 3) \cup (3; 4)$	$\frac{10}{177}$	24 cm^2



Išleistose LJMM knygelėse buvo nagrinėtos tokios temos:

I KNYGA

I. J. Šinkūnas. *Kvadratinis trinaris.*
II. G. Stepanauskas. *Rekurenčiosios sekos.*
III. R. Kašuba. *Elementarinės matematikos uždavinių sprendimo metodai.*
IV. A.Skūpas. *Funkcija*.
V. V. Pekarskas. *Sveikoji ir trupmeninė skaičiaus dalis. Jų savybės.*
VI. P. Survila. *Kombinatorikos ir tikimybių skaičiavimo pradmenys.*
VII. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. *Grafai.*

II KNYGA

I. J. Šinkūnas, A. Urbonas. *Funkcija.*
II. E. Mazėtis. *Apskritimų geometrija. Įbrėžtiniai ir apibrėžtiniai daugiakampiai. Taisyklingieji daugiakampiai.*
III. B. Vasylienė. *Skaičiaus modulis algebros uždaviniuose.*
IV. J. Šinkūnas. *Figūrų panašumas. Talio teorema ir jos taikymai.*
V. D. Jurgaitis. *Matematinės indukcijos metodas.*
VI. A. Urbonas. *Lygčių, nelygybių bei jų sistemų ekvivalentumas.*
VII. B. Grigelionis. *Urnų schemos ir baigtinės Markovo grandinės.*
VIII. A. Juozapavičius, J. Šinkūnas. *Koordinačių sistemos. Žemėlapiai.*

III KNYGA

I. E. Stankus. *Skaičių dalumas.*
II. R. Skrabutėnas. *Grandininės trupmenos.*
III. V. Vitkus. *Vidurkiai.*
IV. E. Mazėtis. *Vektoriai.*
V. J. Šinkūnas. *Plokščių figūrų plotai.*
VI. S. Staknienė. *Iracionaliosios lygtys ir nelygybės.*
VII. A. Apynis, E. Stankus. *Trigonometrinės lygtys ir nelygybės.*
VIII. G. Stepanauskas. *Sekos.*

IV KNYGA

I. G. Stepanauskas. *Skaičiavimo sistemos.*
II. P. Vaškas. *Antrosios eilės kreivės.*
III. L. Maliaukienė. *Įdomioji logika.*
IV. A. Urbonas. *Atvirkštinės funkcijos.*
V. A. Apynis. *Optimizavimo uždaviniai.*
VI. P. Survila. *Kombinatorikos pradmenys.*
VII. P. Survila. *Tikimybių teorijos pradmenys.*
VIII. A. Nagelė. *Kompleksiniai skaičiai.*

V KNYGA

I. O. Jablonskienė. *Planimetrijos uždaviniai.*
II. V. Pekarskas. *Antrosios eilės kreivės.*
III. G. Stepanauskas. *Skaičių dalikliai.*
IV. V. Stakėnas. *Šifrai ir skaičiai.*
V. A. Apynis. *Tiesinių lygčių sistemos.*
VI. R. Skrabutėnas. *Algebrinės lygtys.*
VII. V. Vitkus. *Brėžimo uždaviniai.*
VIII. R. Kašuba. *Sudėtis, atimtis ir daugyba stulpeliu bei dalyba kampu.*

VI KNYGA

I. A. Bakštys. *Finansų matematika.*
II. E. Mazėtis. *Geometrinės transformacijos.*
III. B. Galbogienė. *Funkcijos reikšmių sritis.*
IV. V. Stakėnas. *Paskalio trikampis.*
V. A. Apynis. *Tiesinių lygčių sistemų taikymo uždaviniai.*
VI. L. Narkevičius. *Invariantų metodas.*
VII. J. Šinkūnas. *Tiesinės rekurenčiosios sekos.*
VIII. A. Apynis. *Uždaviniai su parametru.*

VII KNYGA

I. E. Stankus. *Skaičių dalumas, dalumo požymiai.*
II. E. Mazėtis. *Nelygybės geometrijoje.*
III. J. Šinkūnas. *Kraštinio elemento principas.*
IV. A. Apynis, E. Stankus. *Indukcijos principas.*
V. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. *Grafai. Oilerio formulė.*
VI. J. Vainavičienė. *Geometrinės vietos.*
VII. A. Apynis. *Aibės, taikymo uždaviniai.*
VIII. A. Skūpas. *Išvestinės ir integralai.*

VIII KNYGA

I. J. Šinkūnas. *Vidurkiai ir jų taikymai.*
II. I. Bagdonienė. *Dirichlė principas.*
III. E. Stankus. *Diofantinės lygtys.*
IV. L.Papreckienė. *Daugianarių dalumas.*
V. A. Apynis, J. Šinkūnas. *Niutono binomas.*
VI. E. Tumėnaitė. *Logaritminės ir rodiklinės lygtys, nelygybės ir tapatybės.*
VII. E. Mazėtis. *Stereometrijos uždaviniai.*
VIII. A. Apynis. *Trigonometriniai uždaviniai.*

IX KNYGA

I. A. Urbonas. *Dirichlė principas.*
II. A. Apynis. *Neapibrėžtųjų koeficientų metodas.*
III. A. Apynis. *Sumavimas.*
IV. E. Tumėnaitė. *Logaritminės lygtys ir nelygybės.*
V. E. Mazėtis. *Geometrijos uždavinių sprendimo analiziniai metodai.*
VI. E. Stankus, J. Šinkūnas. *Pilnosios tikimybės formulė.*
VII. E. Mazėtis. *Vektoriai erdvėje.*
VIII. E. Stankus, J. Šinkūnas. *Progresijos.*

X KNYGA

I. A. Apynis, E. Stankus. *Racionaliosios lygtys*.
II. A. Urbonas. *Nestandartiniai uždaviniai.*
III. V. Pekarskas. *Trigonometrinių keitinių taikymas sprendžiant uždavinius.*
IV. A. Apynis. *Nelygybės tekstiniuose uždaviniuose.*
V. J. Šinkūnas. *Kompleksiniai skaičiai ir jų taikymas.*
VI. E. Mazėtis. *Kai kurios planimetrijos teoremos ir jų taikymai.*
VII. E. Stankus. *Bernulio formulė ir jos taikymas.*
VIII. E. Mazėtis. *Briaunainiai.*

XI KNYGA

I. E. Tumėnaitė. *Kvadratinės lygtys tekstiniuose uždaviniuose.*
II. A. Apynis. *Bezu teorema*.
III. J. Šinkūnas. *Masių centras ir jo taikymas*.
IV. E. Stankus. *Lyginiai ir jų taikymas*.
V. A. Apynis. *Funkcinės lygtys.*
VI. E. Mazėtis. *Trigonometrijos taikymas g*eometrijoje.
VII. J. Šinkūnas. *Iškilosios funkcijos ir nelygybės*.
VIII. E. Stankus. *Priklausomi ir nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.*

XII KNYGA

I. R. Skrabutėnas. *Euklido algoritmas ir jo taikymas.*
II. J. Šinkūnas. *Lygčių ir nelygybių sprendimas taikant funkcijų savybes.*
III. A. Apynis. *Simetrinių lygčių sistemos.*
IV. R. Kašuba. *Svėrimo ir pilstymo uždaviniai*.
V. E. Stankus. *Pitagoro ir Herono skaičių trejetai*.
VI. J. Šinkūnas. *Sąlyginės tapatybės ir nelygybės*.
VII. E. Mazėtis. *Keturkampiai*.
VIII. A. Apynis. *Geriausio varianto pasirinkimo uždaviniai.*

XIII KNYGA

I. A. Apynis. *Kvadratinio trinario savybių taikymo uždaviniai*.
II. E. Mazėtis. *Apskritimų geometrija.*
III. G. Stepanauskas. *Pirminiai skaičiai*.
IV. R. Kašuba. *Kaip spręsti, kai nelabai žinai kaip?*
V. J. Šinkūnas. *Simetrinės tapatybės, lygtys ir nelygybės*.
VI. V. Pekarskas. *Nelygybės su parametrais*.
VII. E. Stankus. *Atsitiktiniai dydžiai*.
VIII. E. Mazėtis. *Sukiniai*.

XIV KNYGA

I. A. Apynis, J. Šinkūnas. *Procentų uždaviniai*.
II. J. Jankauskas. *Kaip spręsti lygtis sveikaisiais skaičiais?*
III. E. Mazėtis. *Ekstremumai geometrijoje.*
IV. A. Novikas. *Homotetija.*
V. R. Kašuba. *Turnyrai ir lentelės.*
VI. E. Stankus. *Sekos ir jų ribos.*
VII. E. Mazėtis. *Trigonometrijos taikymas stereometrijoje.*
VIII. G. Stepanauskas. *Monte Karlo metodas.*

XV KNYGA

I. A. Apynis, J. Šinkūnas. *Lygtys ir jų sistemos tekstiniuose uždaviniuose.*
II. E. Mazėtis. *Trikampių uždaviniai.*
III. A. Apynis, J. Šinkūnas. *Variantų perrankos metodas.*
IV. A. Apynis, J. Šinkūnas. *Kombinatorikos uždaviniai*.
V. E. Stankus. *Fibonačio skaičiai*.
VI. L. Maliaukienė. *Įdomioji logika*.
VII. E. Mazėtis. *Plokštumos figūrų kombinacijos*.
VIII. E. Stankus, J. Šinkūnas. *Lygčių ir nelygybių sprendimas taikant funkcijų savybes.*

XVI KNYGA

I. E. Stankus, J. Šinkūnas. *Vijeto teorema ir jos taikymas.*
II. E. Mazėtis. *Stačiųjų trikampių uždaviniai.*
III. A. Gackienė. *Iracionaliosios lygtys ir nelygybės.*
IV. R. Kašuba. *Uždavinių sprendimo strategija „grįžk atgal“.*
V. V. Stakėnas. *Geometriniai skaičiai.*
VI. A. Novikas. *Paprasčiausios funkcinės lygtys.*
VII. E. Mazėtis. *Geometrinių uždavinių algebrinis sprendimo metodas.*
VIII. D. Pumputis. *Baigtinių populiacijų statistikos uždaviniai.*