LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Jaunajam matematikui

2

1999–2001 metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Danielius leidykla

Vilnius, 2001

UDK 51(079)
Ja712

Leidinio sudarytojai:
Antanas APYNIS
Eugenijus STANKUS
Juozas ŠINKŪNAS

Leidinį recenzavo Marytė STRIČKIENĖ
Leidinį redagavo Joana PRIBUŠAUSKAITĖ

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerija
Rekomenduota 2002 02 14 Nr. 107

ISBN 9955-476-06-0

TURINYS

PRATARMĖ

Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla pateikia savo antrąjį leidinį. Čia sudėta 1999–2001 mokslo metais nagrinėta teorinė medžiaga, užduotys bei jų sprendimai.

Moksleiviai, baigę LJMM 2001 metais, galėjo išsamiau paanalizuoti kai kurias mokyklinės matematikos temas: funkcijų savybes, skaičiaus modulį, lygčių bei nelygybių ekvivalentumą, apskritimo geometriją, figūrų panašumą ir Talio teoremą. Be šių temų 1999–2001 metais LJMM programoje buvo nagrinėtas dažnai taikomas matematinės indukcijos metodas, kai kurie kartografijos klausimai. Tikimybių teorijai studijuoti pasirinkta urnų schemų tema. Daugeliui moksleivių ji buvo nelengva. Todėl skelbtoji metodinė medžiaga šioje knygelėje papildyta išsamesniu temos aiškinimu.

Manome, kad ir ši knygelė, kaip ir pirmoji, bus naudinga moksleiviams, siekiantiems gilesnių ir išsamesnių matematikos žinių, taip pat matematikos mokytojams ir visiems, besidomintiems matematika.

Sudarytojai A. Apynis, E. Stankus, J. Šinkūnas

Metodinė medžiaga

ir užduotys

STOJAMOJI UŽDUOTIS

A.Apynis, E.Stankus (Vilniaus universitetas),
J.Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Du automobiliai vienu metu išvyksta iš vietovių A ir B vienas priešais kitą. Atvykę į galinius punktus, apsisuka ir važiuoja atgal. Pirmą kartą jie susitiko 30 km atstumu nuo vietovės A, o antrą kartą – 40 km atstumu nuo vietovės B. Abu automobiliai važiuoja pastoviais greičiais. Raskite atstumą tarp vietovių A ir B.

2. Name yra daugiau negu 100 vieno, dviejų, trijų ir keturių kambarių butų. Dviejų kambarių butų yra 4 kartus daugiau negu vieno kambario, o trijų – keletą kartų daugiau negu vieno kambario butų. Jeigu trijų kambarių butų skaičius būtų 5 kartus didesnis, tai jis būtų 143 didesnis už dviejų kambarių butų skaičių. Kiek šiame name yra vieno kambario butų?

3. Įrodykite, kad lygtis $x^3 - 3x^2 + 2x + 1999 = 0$ neturi sveikųjų sprendinių.

4. Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 15, \\ x^3 y - x y^3 = 6. \end{cases}$$

5. Įrodykite, kad $\sin 70^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 10^\circ$.

6. Realiųjų skaičių, nelygių nuliui, aibėje apibrėžtas veiksmas, kuris žymimas □ ir turi šias savybes:

1) $x \,\square\, x = 1$; 2) $(xy) \,\square\, z = x\,(y \,\square\, z)$.

Apskaičiuokite $12 \,\square\, 20$.

7. Suprastinkite reiškinį:

$$\left[\left(\frac{b}{b-a}\right)^{-2} - \frac{(a+b)^2 - 4ab}{a^2 - ab}\right] \cdot \frac{a}{a^2 b - ab^2 - b^3}.$$

8. Raskite lygties $\frac{15x^2-1}{28x}+\frac{7x}{15x^2-1}=1$ mažiausiąjį sprendinį.

9. Trikampio *ABC* pusiaukraštinė *BD* padalyta į 4 lygias dalis. Per viršūnę *A* ir trečiąjį padalinimo tašką (skaičiuojant nuo viršūnės *B*) išvesta tiesė, kertanti trikampio kraštinę BC taške *E*. Raskite trikampių *AEC* ir *ABC* plotų santykį.

10. Ant stalo padėti 4 vienodo spindulio besiliečiantys rutuliai. Ant viršaus uždėtas penktasis tokio pat spindulio rutulys, liečiantis pirmuosius keturis. Raskite penktojo rutulio centro nuotolį nuo stalo plokštumos, jeigu rutulių spinduliai lygūs 5 cm.

I. FUNKCIJA

APIBRĖŽIMO SRITIS. GRAFIKAS. FUNKCIJOS MONOTONIŠKUMAS, DIDŽIAUSIA IR MAŽIAUSIA REIKŠMĖS, IŠKILOSIOS FUNKCIJOS

J. Šinkūnas ir A. Urbonas
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Sakykime, X ir Y yra dvi aibės. Taisyklė (dėsnis) pagal kurią kiekvienam aibės X elementui x priskiriamas vienas aibės Y elementas y, vadinama funkcija.

Dažnai funkcija žymima $y = f(x)$, $x \in X$, arba $f : X \to Y$. Aibė X vadinama funkcijos f apibrėžimo sritimi (dažnai žymima $D(f)$), o visos galimos y reikšmės funkcijos kitimo sritimi.

Mokykliniame matematikos kurse paprastai X ir Y yra realiųjų skaičių aibės, todėl ir funkcijos vadinamos skaitinėmis funkcijomis. Jeigu apibrėžimo sritis nenurodyta, o funkcija apibrėžta formule (reiškiniu), tai funkcijos apibrėžimo sritimi laikoma reiškinio $f(x)$ apibrėžimo sritis.

1 pavyzdys. Rasime funkcijų:

a) $f(x) = \sqrt{6 - x - x^2}$;

b) $g(x) = \sqrt{x - 2} + \dfrac{1}{x - 5}$

apibrėžimo sritis.

Sprendimas. a) Funkcija $f(x)$ apibrėžta su visomis x reikšmėmis, tenkinančiomis nelygybæ $6 - x - x^2 \geq 0$. Šios nelygybės sprendinių aibė (funkcijos apibrėžimo sritis) yra $[-3;2]$;

b) Funkcijos $g(x)$ apibrėžimo sritį rasime išsprendę sistemą:

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ x - 5 \neq 0. \end{cases}$$

Taigi $D(g) = [2;5) \cup (5;+\infty)$

2 pavyzdys. Apskaičiuosime funkcijos

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+4}{x^2+1}, x\le 3,\\ 1,\ 3<x<6,\\ 2x-11, x\ge 6\end{cases}$$

reikšmes: $f(-1)$, $f(5)$, $f(a^2+6)$.

Sprendimas. Funkcija $f(x)$ apibrėžta trimis formulėmis. Funkcijos reikšmę taške $x=-1$ skaičiuosime pagal pirmąją formulę, taške $x=5$ – pagal antrąją formulę ir taške $x=a^2+6$ – pagal paskutinę formulę. Taigi $f(-1)=\dfrac{2(-1)+4}{(-1)^2+1}=1$, $f(5)=1$, $f(a^2+6)=2(a^2+6)-11=$ $=2a^2+1$.

2. Funkcijos $y=f(x)$, $x\in D(f)$ grafiku stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje Oxy vadinama plokštumos taškų, kurių koordinatės $(x;f(x))$, $x\in D(f)$, aibė.

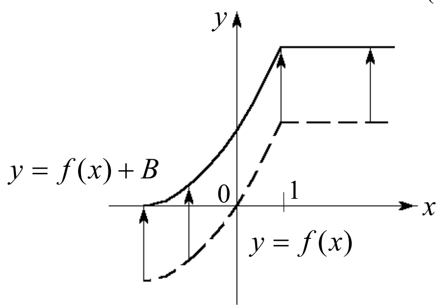
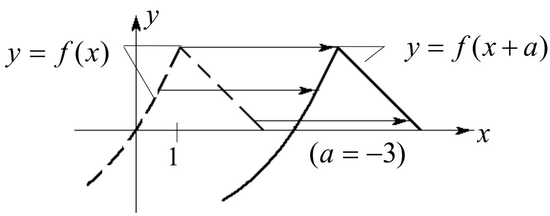
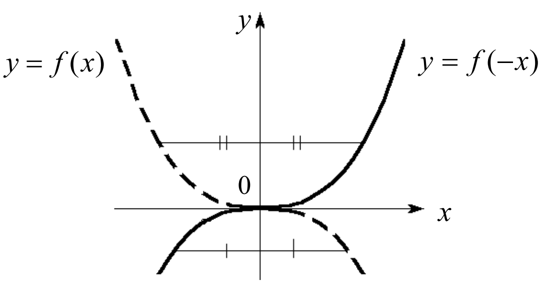
Gerai žinomi funkcijų $f(x)=ax+b$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $f(x)=\dfrac{k}{x}$ grafikai.

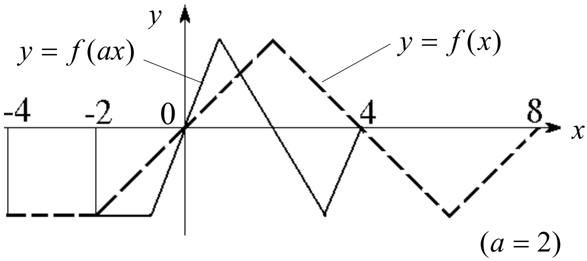
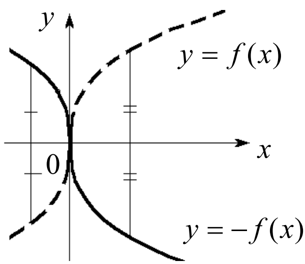
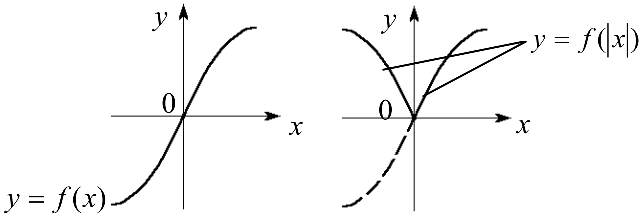
Trumpai susipažinsime su paprasčiausiomis funkcijų grafikų transformacijomis, kurias taikydami braižysime sudėtingesnių funkcijų grafikus.

Sakykime, žinomas funkcijos $y=f(x)$ grafikas. 1 lentelėje pateikiami funkcijų grafikai, gauti transformuojant funkcijos $y=f(x)$ grafiką. Funkcijos $f(x)=Af(ax+b)+B$ grafiką galima gauti iš funkcijos $y=f(x)$ grafiko, atlikus šitokias transformacijas:

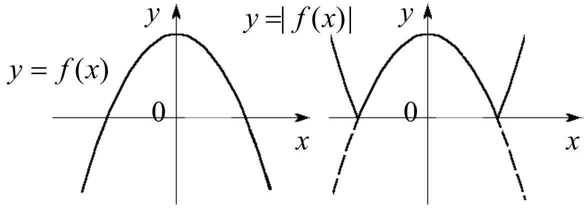
$$f(x)\to f(ax)\to f\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]\equiv f(ax+b)\to$$
$$\to Af(ax+b)\to Af(ax+b)+B\ .$$

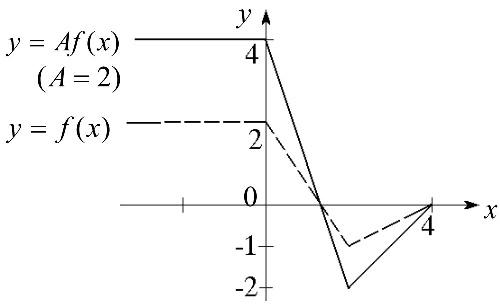
1 lentelė

Funkcija	**Transformacija, kurią reikia atlikti su funkcijos $y = f(x)$ grafiku**
$y = f(x) + B$, $B \neq 0$	Postūmis Oy ašies kryptimi per B vienetų į viršų, jei $B > 0$, ir žemyn, jei $B < 0$ $(B = 1)$ 
$y = f(x + a)$, $a \neq 0$	Postūmis Ox ašies kryptimi į dešinę per $\lvert a \rvert$ vienetų, jei $a < 0$, ir į kairę, jei $a > 0$ 
$y = f(-x)$	Simetrija Oy ašies atžvilgiu 

Funkcija	Transformacija, kurią reikia atlikti su funkcijos $y = f(x)$ grafiku
$y = f(ax)$, $a > 0$, $a \neq 1$	Suspaudimas Oy ašies atžvilgiu ir Ox ašies kryptimi a kartų, jei $a > 1$, ir ištempimas $1/a$ kartų, jei $0 < a < 1$ 
$y = -f(x)$	Simetrija Ox ašies atžvilgiu 
$y = f(\|x\|)$	Funkcijos $y = f(x)$ grafiko dalis, esanti Oy ašies dešinėje $(x \geq 0)$ paliekama, o grafiko dalis, esanti Oy ašies kairėje $(x < 0)$ nuvaloma ir pakeičiama likusio grafiko simetrišku vaizdu Oy ašies atžvilgiu 

<table>
<tr><th>Funkcija</th><th>Transformacija, kurią reikia atlikti su funkcijos $y = f(x)$ grafiku</th></tr>
<tr><td>$y = |f(x)|$</td><td>Grafiko dalis, esanti žemiau Ox ašies, atvaizduojama simetriškai šios ašies atžvilgiu, o likusi grafiko dalis, esanti aukščiau Ox ašies, paliekama nepakeista


</td></tr>
<tr><td>$y = Af(x)$,
$A > 0$, $A \neq 1$</td><td>Suspaudimas Oy ašies kryptimi $\frac{1}{A}$ kartų, jei $0 < A < 1$, ir ištempimas A kartų, jei $A > 1$


</td></tr>
</table>

Funkcijos $f(x) = Af(ax+b)+B$ grafiką galima gauti iš funkcijos $y = f(x)$ grafiko, atlikus šitokias transformacijas:

$$f(x) \to f(ax) \to f\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right] \equiv f(ax+b) \to$$
$$\to Af(ax+b) \to Af(ax+b)+B\ .$$

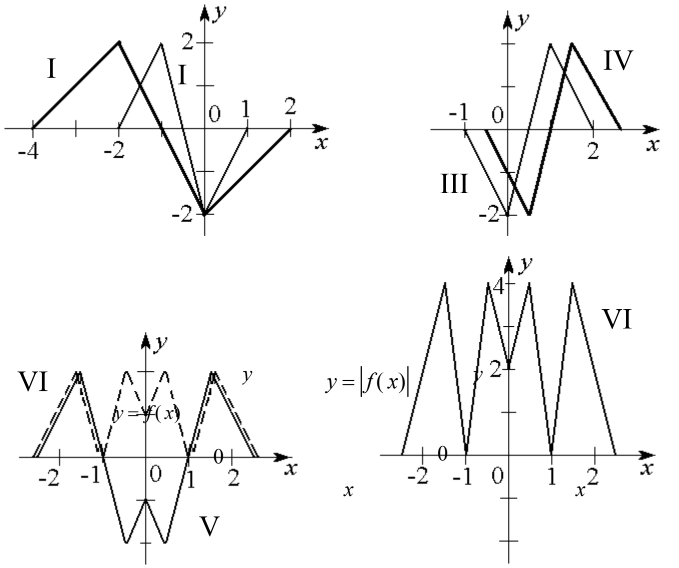
3 pavyzdys. Remdamiesi funkcijos $y = f(x)$, $-4 \le x \le 2$, grafiku, nubraižysime funkcijos $y = 2\left|f(1-2|x|)\right|$ grafiką.

Sprendimas. Atliksime šitokias funkcijos $y = f(x)$ grafiko transformacijas:

$$f(x) \xrightarrow{\mathrm{I}} f(2x) \xrightarrow{\mathrm{II}} f(2(-x)) \equiv f(-2x) \xrightarrow{\mathrm{III}} f\left(-2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) \equiv$$

$$\equiv f(1-2x) \xrightarrow{\mathrm{IV}} f(1-2|x|) \xrightarrow{\mathrm{V}} \left|f(1-2|x|)\right| \xrightarrow{\mathrm{VI}} 2\left|f(1-2|x|)\right| \xrightarrow{\mathrm{VII}}.$$

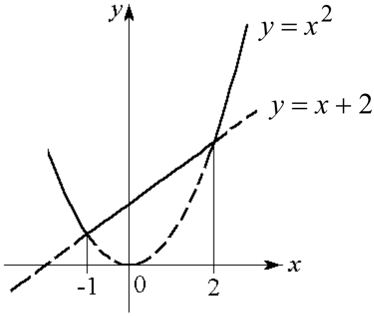
Grafiko brėžimo etapai pavaizduoti brėžiniuose.



4 pavyzdys. Didžiausią iš skaičių a ir b žymėsime $\max(a;b)$, o mažiausią iš skaičių a ir b – $\min(a;b)$. Nubrėšime funkcijos $f(x) = \max(x^2; x+2)$ grafiką.

Sprendimas. Vienoje koordinačių sistemoje nubrėžiame funkcijų $y = x^2$ ir $y = x + 2$ grafikus. Funkcijų grafikai susikerta taškuose, kurių abscisės lygios –1 ir 2. Akivaizdu, kad $f(x) = \begin{cases} x^2, -\infty < x \le -1, \\ x+2, -1 < x \le 2, \\ x^2, x > 2. \end{cases}$

Šios funkcijos grafikas pavaizduotas ištisinėmis linijomis.



Pastaba. Apie funkcijų $y = f([x])$, $y = [f(x)]$ (čia skliausteliais [ ] žymima sveikoji skaičiaus dalis, pavyzdžiui, $[2{,}99] = 2$, $[-1{,}001] = -2$) grafikų braižymą galima rasti LJMM 1999 m. 5-ojoje užduotyje (V. Pekarskas), o apie funkcijų savybes (lyginumą, periodiškumą, funkcines lygtis – 1999 m. 4-ojoje užduotyje (A.Skūpas).

3. Funkcija $f(x)$ intervale I vadinama didėjančia (mažėjančia), jeigu, imdami šio intervalo bet kurią taškų x_1 ir x_2 porą, kai $x_1 < x_2$, gauname $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). Didėjančios ir mažėjančios funkcijos vadinamos monotoninėmis funkcijomis.

5 pavyzdys. Įsitikinsime, kad funkcija

$$f(x) = \sqrt{3x + a}$$

apibrėžimo srityje $[-\frac{a}{3};+\infty)$ yra didėjanti funkcija.

Sprendimas. Tarkime, kad $-\frac{a}{3} \le x_1 < x_2$. Tuomet

$$f(x_2) - f(x_1) = \sqrt{3x_2 + a} - \sqrt{3x_1 + a} =$$

$$= \frac{3(x_2 - x_1)}{\sqrt{3x_2 + a} + \sqrt{3x_1 + a}} > 0.$$

Taigi $f(x_2) > f(x_1)$, t.y. funkcija $f(x) = \sqrt{3x + a}$ apibrėžimo srityje yra didėjanti.

Užduotis. 1) Įsitikinkite, kad funkcijos $f(x)=x^3$, $f(x)=\sqrt[4]{x}$ apibrėžimo srityje yra didėjančios;

2) Įsitikinkite, kad funkcija $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$, intervaluose $(-\infty;-1]$ ir $[1;+\infty)$ – mažėjanti, o intervale $[-1;1]$ – didėjanti.

Sakoma, kad funkcija $f(x)$ taške $x_0 \in D(f)$ įgyja mažiausią (didžiausią) reikšmę, jeigu $f(x_0) \le f(x)$ ($f(x_0) \ge f(x)$) su visomis galimomis x reikšmėmis.

Funkcija mažiausią (didžiausią) reikšmę gali įgyti viename, keliuose apibrėžimo srities $D(f)$ taškuose arba jos neįgyti nė viename taške. Pavyzdžiui, funkcija $f(x)=\dfrac{1}{x}$ intervale $(0;+\infty)$ neįgyja nei didžiausios, nei mažiausios reikšmės. Monotoninės funkcijos intervale $[a;b]$ didžiausią ir mažiausią reikšmę įgyja šio intervalo galuose.

Priminsime, kad kvadratinis trinaris $f(x)=ax^2+bx+c$, kai $a>0$, intervale $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ mažėja, o intervale $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$ didėja. Taške $x=-\dfrac{b}{2a}$ jis įgyja mažiausią reikšmę. Jeigu $a<0$, kvadratinis trinaris intervale $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ didėja, o intervale $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$ mažėja. Taške $x=-\dfrac{b}{2a}$ jis įgyja didžiausią reikšmę. Apie kvadratinio trinario šaknų savybes galima rasti 1998 m. 1-ojoje užduotyje (J.Šinkūnas).

Funkcijų didžiausią ir mažiausią reikšmes, monotoniškumo intervalus galima tirti remiantis išvestinėmis. Mes išvestinėmis nesinaudosime.

6 pavydys. Rasime funkcijos

$$f(x)=x+\frac{a}{x} \quad (a>0)$$

mažiausią reikšmę intervale $(0;+\infty)$.

Sprendimas. Lygindami dviejų skaičių aritmetinį ir geometrinį vidurkius, gauname:

$\dfrac{x+\frac{a}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \dfrac{a}{x}}$, t.y. $x+\dfrac{a}{x} \geq 2\sqrt{a}$. Lygybė galima, kai skaičiai x ir $\dfrac{a}{x}$ yra lygūs, t.y. kai $x=\sqrt{a}$. Su kitomis x reikšmėmis galioja nelygybė $x+\dfrac{a}{x} > 2\sqrt{a}$. Taigi funkcija $f(x)=x+\dfrac{a}{x}$ mažiausią reikšmę įgyja taške $x=\sqrt{a}$. Ji lygi $2\sqrt{a}$. Ši funkcija didžiausios reikšmės intervale $(0;+\infty)$ neįgyja.

7 pavyzdys. Rasime funkcijos $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$, $x \geq 0$ didžiausią ir mažiausią reikšmes.

Sprendimas. Akivaizdu, kad $f(x) \leq 1$. Funkcijos reikšmė lygi 1, kai $x=0$, t.y. $f(0)=1$. Kita vertus,

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}=1-\frac{x}{x^2+2x+1}=1-\frac{1}{x+\frac{1}{x}+2} \geq 1-\frac{1}{2+2}=\frac{3}{4},$$

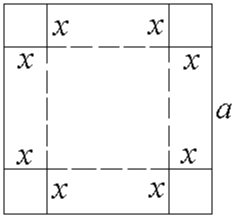
nes $x+\dfrac{1}{x}$ mažiausia reikšmė lygi 2 (žr. 6 pavyzdį). Funkcijos reikšmė lygi $\dfrac{3}{4}$, kai $x=1$. Taigi mažiausia funkcijos reikšmė lygi $\dfrac{3}{4}$, o didžiausia yra 1.

Ieškant funkcijų didžiausių ir mažiausių reikšmių, dažnai tenka remtis lemomis, kurias pateikiame be įrodymo.

1 lema. Jeigu su visomis kintamųjų $x_1, x_2, \ldots, x_n$ teigiamomis reikšmėmis jų suma yra pastovi, t.y. $x_1+x_2+\ldots+x_n=S$, tai sandauga $x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{m_n}$ (čia $m_1, m_2, \ldots, m_n$ – teigiami racionalieji skaičiai) įgyja didžiausią reikšmę, kai $\dfrac{x_1}{m_1}=\dfrac{x_2}{m_2}=\ldots=\dfrac{x_n}{m_n}$.

2 lema. Jeigu su visomis kintamųjų $x_1, x_2, \ldots, x_n$ teigiamomis reikšmėmis jų sandauga $x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{m_n}$ yra pastovi, t.y. $x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{m_n} = P$, tai suma $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ įgyja mažiausią reikšmę, kai $\dfrac{x_1}{m_1} = \dfrac{x_2}{m_2} = \ldots = \dfrac{x_n}{m_n}$.

8 pavyzdys. Kvadrato, kurio kraštinės ilgis a, kampuose išpjauti kvadratukai, kurių kraštinė lygi x. Su kuria x reikšme, sulenkus kvadratą per punktyrines linijas, gaunama didžiausio tūrio dėžutė.



Sprendimas. Dėžutės tūris $V = x(a - 2x)^2$. Reikia rasti tokią x reikšmę, su kuria sandauga $x \cdot (a - 2x)^2$ yra didžiausia. Kadangi $x + a - 2x = a - x$ nėra pastovus skaičius, tai negalima taikyti pirmosios lemos. Nagrinėkime $2V = 2x(a - 2x)^2$. Kadangi $2x + a - 2x = a$, tai sandauga $2x \cdot (a - 2x)^2$ įgyja didžiausią reikšmę, kai $\dfrac{2x}{1} = \dfrac{a - 2x}{2}$, t.y., kai $x = \dfrac{a}{6}$. Taigi $2V$, o tuo pačiu ir dėžutės tūris V įgyja didžiausią reikšmę, kai $x = \dfrac{a}{6}$; $V = \dfrac{a}{6}\left(a - \dfrac{a}{3}\right)^2 = \dfrac{2a^3}{27}$.

9 pavyzdys. Rasime, su kuria x reikšme funkcija $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 2}{x}$, $x \in (0; +\infty)$ įgyja mažiausią reikšmę.

Sprendimas. Kadangi $f(x) = x^2 + 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x}$ ir $x^2 \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{x} = 1$, tai funkcija $f(x)$ įgyja mažiausią reikšmę, kai $x^2 = 1 = \frac{1}{x}$ (2 lema), t.y. kai $x = 1$; $f(1) = 4$.

Sprendžiant lygtis, dažnai tenka remtis akivaizdžiomis monotoninių funkcijų savybėmis:

1) Jeigu funkcija $f(x)$ yra didėjanti (mažėjanti), tai lygtis $f(x) = a$ turi ne daugiau kaip vieną sprendinį.

2) Jeigu funkcija $f(x)$ yra didėjanti (mažėjanti), o funkcija $g(x)$ – mažėjanti (didėjanti), tai lygtis $f(x) = g(x)$ turi ne daugiau kaip vieną sprendinį.

3) Jeigu $f(x) \le A$, $g(x) \ge A$, tai lygtis $f(x) = g(x)$ ekvivalenti lygčių sistemai

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

10 pavyzdys. Išspręsime lygtį

$$\sqrt[4]{x-1} + \sqrt{x+2} = \frac{4}{x} + 1.$$

Sprendimas. Nesunku įsitikinti, kad funkcija $f(x) = \sqrt[4]{x-1} + \sqrt{x+2}$ apibrėžimo srityje $[1;+\infty)$ yra didėjanti, o funkcija $g(x) = \frac{4}{x} + 1$ intervale $[1;+\infty)$ – mažėjanti. Taigi nagrinėjama lygtis gali turėti ne daugiau kaip vieną sprendinį. Akivaizdu, kad tas sprendinys yra $x = 2$.

11 pavyzdys. Išspręsime lygtį

$$x^4 - 2x^2 + 2 = 1 - \sqrt{x^3 - x^2}.$$

Sprendimas. Pastebėsime, kad funkcijos

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 2 = (x^2 - 1)^2 + 1$$

mažiausia reikšmė lygi 1, o funkcijos

$$g(x) = 1 - \sqrt{x^3 - x^2},$$

kurios apibrėžimo sritis $[-1;1]$, didžiausia reikšmė lygi 1. Vadinasi, lygtis $f(x) = g(x)$ ekvivalenti lygčių sistemai

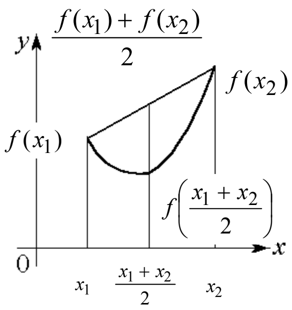
$$\begin{cases} (x^2 - 1)^2 + 1 = 1, \\ 1 - \sqrt{x^3 - x^2} = 1. \end{cases}$$

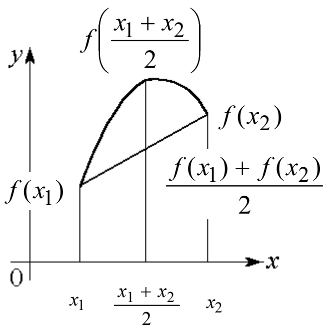
Jos sprendinys: $x = 1$. Taigi ir duotosios lygties sprendinys yra $x = 1$.

4. Funkcija $f(x)$ vadinama iškila žemyn (iškila aukštyn) intervale *I*, jeigu su bet kuriais šio intervalo taškais x_1 ir x_2 teisinga nelygybė

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \qquad \left(f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \right).$$

Iškilos žemyn funkcijos grafikas yra po styga, jungiančia taškus $(x_1; f(x_1))$ ir $(x_2; f(x_2))$, o iškilos aukštyn funkcijos grafikas yra virš tuos taškus jungiančios stygos. $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$





12 pavyzdys. Ištirsime funkcijos $f(x) = x^3 + 2x$ iškilumą.

Sprendimas. Sakykime x_1 ir x_2 – bet kokios vienodo ženklo argumento x reikšmės. Tuomet $f(x_1) = x_1^3 + 2x_1$, $f(x_2) = x_2^3 + 2x_2$,

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{(x_1 + x_2)^3 + 8(x_1 + x_2)}{8}.$$

Nustatysime, kokį ženklą turi skirtumas:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{x_1^3+2x_1+x_2^3+2x_2}{2}-$$

$$-\frac{(x_1+x_2)^2+8(x_1+x_2)}{8}=\frac{4(x_1^3+x_2^3)-(x_1+x_2)^3}{8}=$$

$$=\frac{3}{8}(x_1+x_2)(x_1-x_2)^2.$$

Taigi, kai $x>0$, tai $x_1+x_2>0$ ir nagrinėjamas skirtumas yra teigiamas, o kai $x<0$, tai $x_1+x_2<0$ ir šis skirtumas yra neigiamas. Vadinasi, kai $x>0$ funkcijos grafikas yra iškilas žemyn, o kai $x<0$ – iškilas aukštyn.

Panašiai galima įsitikinti, kad: 1) funkcija $f(x)=\sin x$ intervale $[0;\pi]$ yra iškila aukštyn, o intervale $[-\pi;0]$ – iškila žemyn; 2) funkcija $f(x)=x^2$ – iškila žemyn; 3) funkcija $f(x)=x^{2n}$ – iškila žemyn.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. a) Raskite funkcijos

$$f(x)=\sqrt{x^2-x-12}+\frac{1}{\sqrt{35+2x-x^2}}$$

apibrėžimo sritį.

b) Su kuriomis parametro a reikšmėmis funkcija

$$f(x)=\sqrt{(a-3)x^2+2(a+3)x+a+1}$$

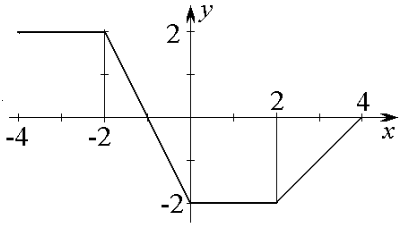
apibrėžta tik viename taške?

2. a) Nubraižykite funkcijos

$$f(x)=\left|\frac{8-3|x|}{|x|-2}\right|$$

grafiką.

b) Nubraižykite funkcijos $f(x)=2\left|f\left(1-2|x|\right)\right|$ grafiką, jeigu funkcijos $y=f(x)$, $-4\le x\le 4$ grafikas pavaizduotas brėžinyje.



3. Su kuriomis parametro a reikšmėmis funkcija $f(x)=(a-1)x^2-2ax-2$ mažėja intervale $[1;\,3]$?

4. Su kuriomis parametro a reikšmėmis kvadratinio trinario

$$f(x)=4x^2-4ax+a^2-2a+2$$

mažiausia reikšmė intervale $[0;\,2]$ lygi 3?

5. Raskite lygties $\min(2x^2-x+1, x+5)=a$ šaknų skaičių priklausomai nuo parametro a reikšmės.

6. Į spindulio R rutulį įbrėžtas ritinys. Kokie turi būti ritinio matmenys, kad jo tūris būtų didžiausias?

7. Trikampio viduje raskite tašką, kurio atstumų iki trikampio kraštinių sandauga būtų didžiausia?

8. Viename inde yra 5 kg druskos tirpalo, o kitame – 20 kg kito druskos tirpalo. Garuojant vandeniui, druskos koncentracija pirmame inde padidėja m kartų, o antrame inde – n kartų. Koks vandens kiekis išgaravo iš abiejų indų kartu, jeigu žinoma, kad $m\cdot n=9$?

9. Įrodykite, kad lygtis $4x^2+4x+17=\dfrac{12}{x^2-x+1}$ neturi sprendinių.

10. Įrodykite, kad su visais realiaisiais skaičiais teisinga nelygybė

$$8(x^4+y^4)\ge(x+y)^4.$$

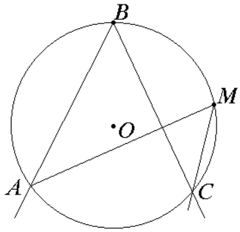
II. APSKRITIMŲ GEOMETRIJA. ĮBRĖŽTINIAI IR APIBRĖŽTINIAI DAUGIAKAMPIAI. TAISYKLINGIEJI DAUGIAKAMPIAI

Edmundas Mazėtis (Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Kampas, kurio viršūnė yra apskritimo taškas, o kraštinės tą apskritimą kerta, vadinamas įbrėžtiniu.

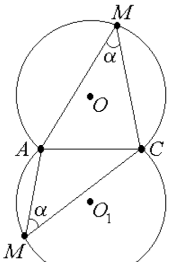
1 teorema. Įbrėžtinis kampas *ABC* (1 pav.) yra lygus pusei lanko *AC*, į kurį jis remiasi.

Šio fakto įrodymas pateiktas mokykliniame vadovėlyje. Iš jo išplaukia, kad visiems lanko *ABC* taškams *M* galioja lygybė $\angle AMC = \angle ABC$. Teisingas ir atvirkščias teiginys.



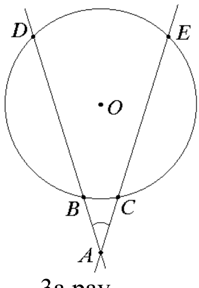
1 pav.

2 teorema. Aibė taškų *M*, tenkinančių sąlygą $\angle AMC = \alpha$ yra du apskritimų lankai, simetriški tiesės *AC* atžvilgiu (2 pav.)

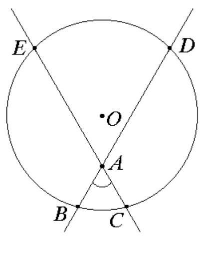


2 pav.

3 teorema. Sakykime, kad kampas, kurio viršūnė *A* nėra apskritime, iškerta apskritime lankus $\cup BC$ ir $\cup DE$. Tuomet $\angle BAC = \frac{1}{2}(\cup DE - \cup BC)$, jei taškas *A* yra apskritimo išorėje (3a pav.) ir $\angle BAC = \frac{1}{2}(\cup DE + \cup BC)$, jei taškas *A* yra apskritimo viduje (3b pav.) Šio fakto įrodymui pakanka per vienos kurios nors stygos galą nubrėžti tiesę, lygiagrečią su kita styga.



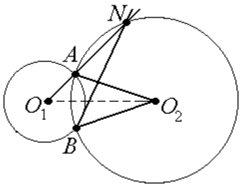
3a pav.



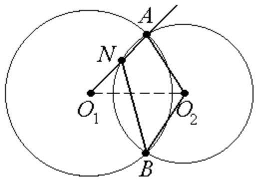
3b pav.

1 pavyzdys. Du apskritimai, kurių centrai O_1 ir O_2, kertasi taškuose *A* ir *B*. Tiesė O_1A kerta apskritimą su centru O_2 taške *N*. Įrodysime, kad taškai O_1, O_2, *B* ir *N* yra viename apskritime.

Sprendimas. Pagal įbrėžtinių kampų 1 teoremą $\angle ANB = \frac{1}{2}\angle AO_2B$ (4a pav.) arba $\angle ANB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AO_2B$ (4b pav.). Pirmuoju atveju $\angle O_1NB = \angle ANB = \frac{1}{2}\angle AO_2B$,



4a pav.

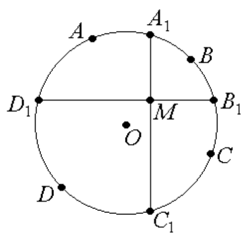


4b pav.

antruoju atveju $\angle O_1NB = 180^\circ - \angle ANB = \frac{1}{2}\angle AO_2B$.

Kadangi $\angle AO_2O_1 = \angle BO_2O_1 = \frac{1}{2}\angle AO_2B$, tai abiem atvejais galioja $\angle O_1NB = \angle O_1O_2B$, o pagal pirmajame punkte pateiktą 2 teoremą iš šios lygybės išplaukia, kad taškai O_1, *N*, *B*, O_2 yra viename apskritime.

2 pavyzdys. Apskritime duoti keturi taškai *A*, *B*, *C*, *D*, o taškai A_1, B_1, C_1, D_1 yra lankų *AB*, *BC*, *CD*, *DA* vidurio taškai. Įrodysime, kad $A_1C_1 \perp B_1D_1$.



5 pav.

Sprendimas. Sakykime, kad tiesės A_1C_1 ir B_1D_1 kertasi taške *M* (5 pav.). Pagal kampo tarp dviejų apskritimo kirstinių formulę (žr. 3 teoremą) gauname

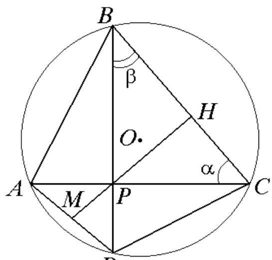
$$\angle A_1MB_1 = \frac{1}{2}\left(\cup A_1B_1 + \cup C_1D_1\right) =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cup A_1B+\cup BB_1+\cup C_1D+\cup DD_1\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cup AB+\frac{1}{2}\cup BC+\frac{1}{2}\cup CD+\frac{1}{2}\cup DA\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\cup AB+\cup BC+\cup CD+\cup DA\right)=90^\circ.$$

2. Daugiakampis yra vadinamas įbrėžtiniu į apskritimą, jei visos jo viršūnės yra tame apskritime. Tuomet apskritimas yra vadinamas apibrėžtiniu apie minėtą daugiakampį. Mokykliniame vadovėlyje įrodyta, kad apie kiekvieną trikampį galima apibrėžti vienintelį apskritimą, jo centras yra trikampio kraštinių vidurio statmenų sankirtos taškas. Taip pat gerai žinome, kad apie keturkampį galima apibrėžti apskritimą tada ir tik tada, kai to keturkampio priešingų kampų suma lygi 180°.

Daugiakampis vadinamas apibrėžtu apie apskritimą, jei visos jo kraštinės yra to apskritimo liestinėse. Tuomet minėtas apskritimas vadinamas įbrėžtuoju į daugiakampį. Žinome, kad į kiekvieną trikampį galima įbrėžti apskritimą. To apskritimo centras yra trikampio pusiaukampinių sankirtos taškas. Mokykliniame vadovėlyje įrodoma, kad į keturkampį galima įbrėžti apskritimą tada ir tik tada, kai to keturkampio priešingųjų kraštinių sumos lygios.

3 pavyzdys. Įdomiomis savybėmis pasižymi įbrėžtas į apskritimą keturkampis *ABCD* su statmenomis įstrižainėmis.



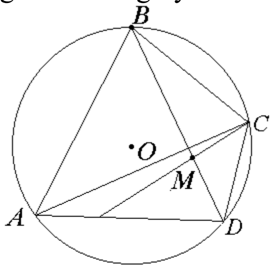
6 pav.

Jei R – apskritimo spindulys, tai keturkampio kraštinių kvadratų suma yra lygi $8R^2$. Įrodysime tai.

Sakykime, kad $ABCD$ – į apskritimą įbrėžtas keturkampis, kurio įstrižainės AC ir BD stačiu kampu kertasi taške P (6 pav.). Jei $\angle ACB=\alpha,\ \angle CBD=\beta$, tai $\alpha+\beta=90^\circ$. Iš sinusų teoremos gauname, kad $CD=2R\sin\beta=$ $=2R\cos\alpha$, $AB=2R\sin\alpha$. Tuomet
$$AB^2+CD^2=4R^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=4R^2.$$
Analogiškai ir $BC^2+AD^2=4R^2$, kas ir įrodo minėtą tvirtinimą.

Nubrėžkime tiesę PH statmeną kraštinei BC. Įrodysime, kad tiesė PH kerta kraštinę AD jos vidurio taške M. Pagal įbrėžtinių kampų 1 teoremą $\angle BDA = \angle BCA = \alpha$. Kadangi kampai BPH ir BCA papildo kampą HPC iki $90°$, tai $\angle BCA = \angle BPH = \angle MPD = \alpha$. Taigi $\angle MDP = \angle MPD$, arba $MD = MP$. Analogiškai įrodoma, jog $AM = MP$. Vadinasi, kad MP yra trikampio APD pusiaukraštinė. Taigi taškas M yra atkarpos AD vidurys.

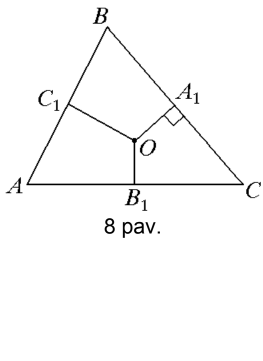
3. Jei keturkampis $ABCD$ yra įbrėžtas į apskritimą, tai jo priešingųjų kraštinių sandaugų suma lygi įstrižainių sandaugai. Šis teiginys – tai **Ptolemėjo teorema**. Įrodysime šią teoremą.



7 pav.

Sakykime, kad $ABCD$ – į apskritimą įbrėžtas keturkampis. Įstrižainėje BD pažymėkime tašką M, tenkinantį sąlygą. $\angle DCM = \angle ACB$ (7 pav.). Kadangi $\angle BAC = \angle BDC$, tai trikampiai ABC ir DMC yra panašūs, t.y. $\dfrac{AB}{DM} = \dfrac{AC}{DC}$, arba $AB \cdot CD = DM \cdot AC$. Kita vertus, $\angle BCM = \angle DCA$, nes jie gauti, prie lygių kampų DCM ir ACB pridėjus (arba iš jų atėmus) tą patį kampą ACM. Kadangi $\angle CBD = \angle CAD$, tai ΔBCM ir ΔACD panašūs. Taigi $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{BM}{AD}$, arba $BC \cdot AD = AC \cdot BM$. Iš čia išplaukia, kad $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot DM + AC \cdot BM =$
$= AC \cdot (BM + MD) = AC \cdot BD$, o tai ir reikėjo įrodyti.

4 pavyzdys. Smailiajame trikampyje ABC atstumai nuo apibrėžtojo apskritimo centro iki kraštinių lygūs d_a, d_b, d_c, R ir r – apibrėžtojo ir įbrėžtojo apskritimų spinduliai. Įrodysime, kad $d_a + d_b + d_c = R + r$.



8 pav.

Sprendimas. Sakykime, kad O – apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo centras, A_1, B_1, C_1 – kraštinių BC, AC ir AB vidurio taškai (8 pav.). $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Tuomet $OA_1 = d_a$, $OB_1 = d_b$, $OC_1 = d_c$.

Keturkampis AB_1OC_1 yra įbrėžtinis, nes du jo priešingieji kampai B_1 ir C_1 yra statūs.

Pritaikę jam Ptolemėjo teoremą, gauname $AC_1 \cdot OB_1 + AB_1 \cdot OC_1 =$
$= AO \cdot C_1B_1$. Kadangi $AC_1 = \frac{1}{2}c$, $AB_1 = \frac{1}{2}b$, $C_1B_1 = \frac{1}{2}a$, tai $c \cdot d_b + b \cdot d_c = Ra$. Pritaikę Ptolemėjo teoremą keturkampiams BA_1OC_1 ir CB_1OA_1, gauname dar dvi lygybes $a \cdot d_c + c \cdot d_a = Rb$, $b \cdot d_a + a \cdot d_b = Rc$. Kita vertus,

$$a \cdot d_a + b \cdot d_b + c \cdot d_c = 2S = (a+b+c) \cdot r .$$

Sudėję visas keturias lygybes, gauname
$d_a(a+b+c) + d_b(a+b+c) + d_c(a+b+c) = R(a+b+c) + r(a+b+c)$
suprastinę iš $a+b+c$, – įrodomąją lygybę.

4. Daugiakampis vadinamas taisyklinguoju, jei jo visos kraštinės tarpusavyje lygios, ir visi kampai tarpusavyje lygūs. Mokykliniuose vadovėliuose įrodoma, kad apie kiekvieną taisyklingąjį daugiakampį galima apibrėžti apskritimą, ir kad į kiekvieną taisyklingąjį daugiakampį galima įbrėžti apskritimą. Be to, įbrėžtojo ir apibrėžtojo apskritimų centrai sutampa.

4 teorema. Jei a_n – taisyklingojo n-kampio kraštinės ilgis, R ir r – apibrėžtojo apie jį ir įbrėžtojo į jį apskritimų spinduliai, tai galioja šios lygybės: $a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n} = 2r\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$.

Iš šių formulių atskiru atveju gauname

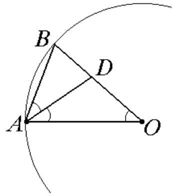
$$a_3 = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}\,,\ a_4 = R\sqrt{2} = 2r\,,\ a_6 = R = \frac{2\sqrt{3}}{3}r .$$

Jei AB – įbrėžtojo į apskritimą taisyklingojo n-kampio kraštinė, C – lanko AB vidurio taškas, tai $AC = CB$ yra įbrėžtojo į tą patį apskritimą taisyklingojo $2n$-kampio kraštinė. Atvirkščiai, jungdami kas antrą taisyklingojo $2n$-kampio viršūnę, gauname taisyklingąjį n-kampį.

Lengvai į apskritimą galime įbrėžti taisyklingąjį trikampį, keturkampį, šešiakampį, aštuonkampį. Parodysime, kaip į duotąjį apskritimą galima įbrėžti taisyklingąjį dešimtkampį ir taisyklingąjį penkiakampį.

Sakykime, kad $AB = a_{10}$ – taisyklingojo dešimtkampio, įbrėžto į apskritimą su centru O ir spinduliu R, kraštinė (9 pav.). Tuomet,

$\angle OAB = \angle OBA = 72^\circ$, $\angle AOB = 36^\circ$. Jei AD – kampo A pusiaukampinė, tai $\angle DAB = 36^\circ$, $\angle BDA = 72^\circ$. Taigi, trikampiai ABD ir OAB panašūs, nes jie turi po du lygius kampus.



9 pav.

Iš trikampių panašumo gauname

$$\frac{AB}{OA} = \frac{BD}{AB},$$

t.y.,

$$AB^2 = OA \cdot BD.$$

Kita vertus,

$$BD = OB - OD, \quad OD = AD = AB.$$

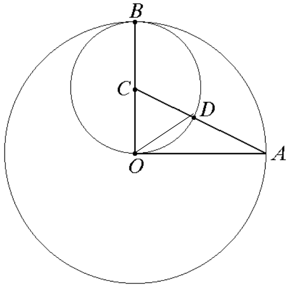
Taigi

$$a_{10}^2 = R \cdot (R - a_{10}),$$

arba

$$a_{10}^2 + Ra_{10} - R^2 = 0.$$

Teigiama šios lygties šaknis yra $a_{10} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}R.$ Gavome taisyklingojo dešimtkampio kraštinės ilgio išraišką. Tuomet iš 4 teoremos išplaukia, kad $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}.$



10 pav.

Įbrėždami taisyklingąjį dešimtkampį į duotąjį apskritimą, brėžiame bet kokius du statmenus to apskritimo spindulius OA ir OB (10 pav.). Jei taškas C dalija atkarpą OB pusiau, tai tiesė AC taške D kerta apskritimą, kurio centras C, o spindulys OC. Atkarpa AD yra lygi taisyklingojo dešimtkampio, įbrėžto į apskritimą, kraštinei. Tikrai, jei

$$OA = OB = R, \text{ tai } OC = OD = \frac{R}{2},$$

tuomet

$$AC = \frac{\sqrt{5}}{2}R, \quad AD = \frac{\sqrt{5}}{2}R - \frac{R}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R = a_{10}.$$

A N T R O J I   U Ž D U O T I S

1. Keturkampis *ABCD* – kvadratas. Nubrėžti du vienodų spindulių besiliečiantys apskritimai, kurių centrai O_1 ir O_2. Pirmasis apskritimas liečia kvadrato kraštines *AD* ir *AB*, o antrasis – kraštines *AD* ir *DC*. Iš kvadrato viršūnės *B* nubrėžta liestinė pirmajam, o iš viršūnės *C* – liestinė antrajam apskritimui; liestinės susikerta taške *E*. Įrodykite, kad į trikampį *BCE* įbrėžto apskritimo spindulys lygus duotųjų apskritimų spinduliui.

2. Įrodykite, kad stačiojo trikampio įžambinės dalių, į kurias ją dalija įbrėžtojo apskritimo lietimosi taškas, sandauga lygi to trikampio plotui.

3. Du apskritimai kertasi taškuose *M* ir *K*. Per tašką *M* nubrėžta tiesė, vieną iš tų apskritimų kertanti taške *A*, o kitą – taške *B*. Per tašką *K* nubrėžta antra tiesė, kertanti minėtus apskritimus taškuose *C* ir *D*. Įrodykite, kad tiesės *AC* ir *BD* yra lygiagrečios.

4. Duoti apskritimo taškai *A*, *B*, *C* ir *D*. Taškas *M* yra lanko *AB* vidurys, stygos *MC* ir *MD* kerta stygą *AB* taškuose *E* ir *K*. Įrodykite, kad taškai *K*, *E*, *C* ir *D* yra viename apskritime.

5. Apie kvadratą *ABCD* apibrėžtas apskritimas, kurio lanke *CD* pažymėtas taškas *P*. Įrodykite, kad $PA + PC = \sqrt{2}PB$.

6. Apskritimo spindulys *R*, stygų *AB* ir *BC* ilgiai *a* ir *b*. Apskaičiuokite stygos *AC* ilgį.

7. Į apskritimą įbrėžtas keturkampis *ABCD*, kurio įstrižainės statmenos, *O* – apskritimo centras. Įrodykite, kad atstumas nuo taško *O* iki kraštinės *AB* lygus kraštinės *CD* ilgio pusei.

8. Į apskritimą įbrėžtas keturkampis *ABCD*, kurio įstrižainės statmenos. Įrodykite, kad keturkampio plotas lygus priešingųjų kraštinių sandaugų sumos pusei.

9. Įrodykite, kad taisyklingojo aštuonkampio plotas lygus jo mažiausios ir didžiausios įstrižainių sandaugai.

10. Atkarpos AB ir CD yra du statmeni apskritimo su centru O skersmenys. Taškas M yra atkarpos AO vidurys. Apskritimas, kurio centras M, o spindulio ilgis MC, kerta skersmenį AB taške X. Įrodykite, kad OX yra įbrėžtojo į pirmąjį apskritimą taisyklingojo dešimtkampio kraštinė, o CX – taisyklingojo penkiakampio kraštinė.

III. SKAIČIAUS MODULIS ALGEBROS UŽDAVINIUOSE

Birutė Vasylienė (Kauno „Saulės“ gimnazija)

Matematikoje modulio sąvoka sutinkama gana dažnai. Mokyklinėje matematikoje modulis (absoliutinis didumas) suprantamas kaip tam tikra realiojo skaičiaus skaitinė charakteristika. Pats žodis „modulis“ kilęs iš lotyniško žodžio „modulus“, reiškiančio matą.

Prisiminkime, kaip šeštoje klasėje buvo apibrėžtas skaičiaus modulis.

Skaičiaus moduliu vadinamas atstumas nuo atskaitos pradžios iki taško, atitinkančio tą skaičių.

Bet kurio teigiamojo skaičiaus modulis lygus pačiam skaičiui; bet kurio neigiamojo skaičiaus modulis lygus jam priešingam skaičiui; nulio modulis lygus 0.

Pagal šį apibrėžimą

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ kai } x \geq 0, \\ -x, \text{ kai } x \leq 0. \end{cases}$$

Taigi geometriškai skaičiaus x modulis $|x|$ reiškia skaičių tiesės taško x nuotolį (atstumą) nuo taško 0.

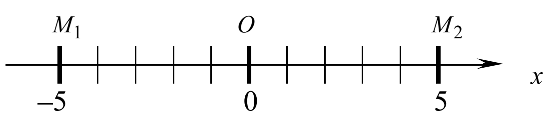
Panagrinėkime keletą pavyzdžių.

1. Raskime koordinačių tiesėje tokius taškus M, kurių koordinatės x tenkina šias sąlygas:

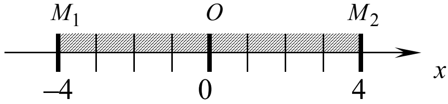
a) $|x| = 5$;   b) $|x| < 4$;   c) $|x| \geq 7$.

Sprendimas

a) Atidėkime koordinačių tiesėje taškus M_1 ir M_2, nutolusius nuo taško O per 5 vienetus (į kairę ir į dešinę). Tik šie du taškai tenkina sąlygą $|x| = 5$. Tokiu atveju sakoma, kad lygties $|x| = 5$ sprendiniai yra –5 ir 5.

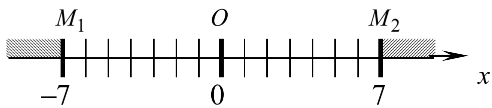


b) Atidėkime koordinačių tiesėje taškus M_1 ir M_2, nutolusius nuo taško O per 4 vienetus.Aišku, kad taškai x, tenkinantys sąlygą $|x| < 4$, yra tarp –4 ir 4.



Sakoma, kad nelygybės $|x| < 4$ sprendinių aibė yra intervalas $(-4; 4)$.

c) Atidėkime koordinačių tiesėje taškus M_1 ir M_2, nutolusius nuo taško O per 7 vienetus.



Ieškomieji taškai yra į kairę nuo M_1 ir į dešinę nuo M_2. Taigi, nelygybės $|x| \geq 7$ sprendinių aibė yra $(-\infty; -7] \cup [7; +\infty)$.

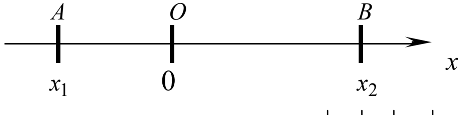
Apskritai, kai $a > 0$, lygtis $|x| = a$ turi du sprendinius: $x = -a$ arba $x = a$; nelygybės $|x| < a$ sprendiniai $-a < x < a$ sudaro intervalą $(-a; a)$; nelygybės $|x| > a$ sprendiniai yra $x < -a$ arba $x > a$.

Jei $A(x_1)$ ir $B(x_2)$ – du koordinačių tiesės taškai, tai atstumą AB galima išreikšti taškų A ir B koordinatėmis x_1 ir x_2 taip:

$$AB = |x_2 - x_1|.$$

Šią formulę galima įrodyti išnagrinėjus visus taškų A ir B tarpusavio išsidėstymo atvejus pradžios taško O atžvilgiu.

Pavyzdžiui, kai $x_1 < 0$, o $x_2 > 0$, tai



$$AB = OA + OB = |x_1| + |x_2| = -x_1 + x_2 = x_2 - x_1.$$

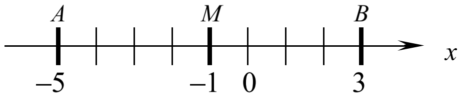
Kitus atvejus siūlome išnagrinėti savarankiškai.

2. Geometriškai išspręskime lygtis:

a) $|x-3|=|x+5|$; b) $|x-3|=2|x|$.

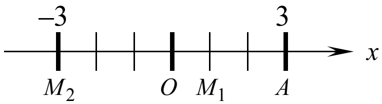
Sprendimas.

a) Užduotį galima perfrazuoti taip: rasti tokį tašką $M(x)$, kuris būtų vienodai nutolęs nuo $B(3)$ ir $A(-5)$. Aišku, tai taškas $M(-1)$. Todėl



lygties sprendinys yra $x=-1$.

b) Užduotį galima suvokti taip: rasti tokius taškus $M(x)$, kurie nuo taško $A(3)$ nutolę dvigubai toliau negu nuo O.



Tokie taškai yra du $M_1(1)$ ir $M_2(-3)$, nes $OM_1=\frac{1}{3}OA$ $(AM_1=2OM_1)$ ir $OM_2=\frac{1}{2}M_2A$ $(AM_2=2OM_2)$.

Atsakymas: -3 ir 1.

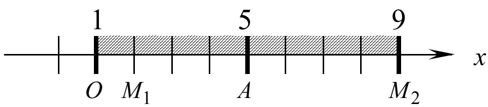
3. Išspręskime nelygybes:

a) $|x-5|\le 4$; b) $|x+3|\ge|5-x|$.

Sprendimas.

a) Užduotį perfrazuokime taip: raskime tokius taškus $M(x)$, kurie nuo taško $A(5)$ nutolę ne daugiau kaip per 4 vienetus.

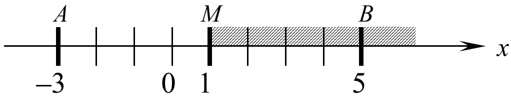
Lygiai per 4 vienetus nuo taško $A(5)$ nutolę du taškai: $M_1(1)$ ir $M_2(9)$.



Nelygybės sprendiniai: $x\in[1;9]$.

b) Pagal sąlygą reikia rasti tokius taškus $M(x)$, kurie iki taško $B(5)$ arčiau negu iki taško $A(-3)$.

Pirmiausia suraskime tašką M, vienodai nutolusį nuo A ir B. Jo koordinatė lygi 1.



Ieškomieji taškai yra į dešinę nuo M. Nelygybės sprendiniai: $x \in [1;+\infty)$.

Kai kurios **modulio savybės**. Iš modulio apibrėžimo tiesiogiai matyti, kad

1. $|x| \geq 0$; 2. $|-x| = |x|$; 3. $|x-y| = |y-x|$.

Lengvai galima įrodyti ir šias savybes:

4. $|xy| = |x| \cdot |y|$; 5. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, kai $y \neq 0$;

6. $\left|x^k\right| = |x|^k$, $k \in Z$; 7. $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Čia įrodysime tik 7 savybę.

Nelygybė įrodoma išnagrinėjus visus galimus skaičių x ir y ženklų atvejus. Kai $x \geq 0$ ir $y \geq 0$, tai $|x+y| = |x| + |y|$. Ši lygybė galioja ir kai $x < 0$, $y < 0$. Jei $x < 0$, $y > 0$, tai $|x+y| = \big||x| - |y|\big|$, o $|x| + |y| = -x + y$. Kadangi $\big||x| - |y|\big| < -x + y$, tai $|x+y| < |x| + |y|$. Ši nelygybė galioja ir tuomet, kai $x > 0$, $y < 0$. Gautume: $|x+y| = \big||x| - |y|\big|$, $|x| + |y| = x - y \Rightarrow |x+y| < |x| + |y|$.

Analogiškai įrodomos ir kitos nelygybės. Išspręskime dar keletą pavyzdžių.

4. Išspręskime šias lygtis:

a) $\big||x-3| - 5\big| = 7$; b) $|x-4| - 2|x+1| = 3x + 1$.

Sprendimas.

a) Iš ankstesnių samprotavimų aišku, kad duotoji lygtis ekvivalenti lygčiai $|x-3|-5=7$ (kai $|x-3|-5>0$) arba lygčiai $|x-3|-5=-7$ (kai $|x-3|-5<0$). Todėl sprendžiame dvi sistemas:

$$\begin{cases} |x-3|=12, \\ |x-3|>5 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} |x-3|=-2, \\ |x-3|<5. \end{cases}$$

Pirmoji turi du sprendinius: $x=-9$ ir $x=15$. Antroji sistema sprendinių neturi.

Atsakymas: –9; 15.

b) Kadangi
$$|x-4|=\begin{cases} x-4, & \text{kai } x\ge 4, \\ -x+4, & \text{kai } x<4; \end{cases}$$

$$|x+1|=\begin{cases} x+1, & \text{kai } x\ge -1, \\ -x-1, & \text{kai } x<-1; \end{cases}$$

tai duotąją lygtį galima nagrinėti trimis atvejais:

1. $x<-1$; 2. $-1\le x\le 4$; 3. $x>4$.

Taigi sprendžiame šias sistemas:

1) $\begin{cases} x<-1, \\ -x+4-2(-x-1)=3x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2{,}5, \\ x<-1, \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$

2) $\begin{cases} -1\le x\le 4, \\ -x+4-2(x+1)=3x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{6}, \\ -1\le x\le 4 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{1}{6}.$

3) $\begin{cases} x>4, \\ x-4-2(x+1)=3x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{7}{6}, \\ x>4 \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$

Atsakymas: $\dfrac{1}{6}$.

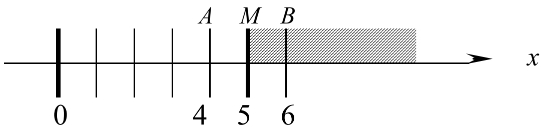
5. Išspręskime šias nelygybes:

a) $|x-4|\ge|x-6|$; b) $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\le 1$;

c) $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-10x+25}\ge 10$.

Sprendimas.

a) <u>1 būdas</u>. Spręskime geometriškai, t.y. raskime tokius taškus $M(x)$, kurie arčiau iki taško $B(6)$ negu iki taško $A(4)$.



Taškas $M(5)$ vienodai nutolęs nuo A ir B. Todėl nelygybės sprendiniai sudaro intervalą $[5;+\infty)$.

<u>2 būdas</u>. Pakelkime abi puses kvadratu:

$$|x-4|^2 \geq |x-6|^2.$$

Toliau

$$(x-4)^2-(x-6)^2 \geq 0,$$

$$(x-4-x+6)(x-4+x-6) \geq 0,$$

$$2\cdot(2x-10) \geq 0,\ \ 2x \geq 10,\ x \geq 5.$$

Atsakymas: $[5;\,+\infty)$.

b) Pakėlę abi puses kvadratu, gauname

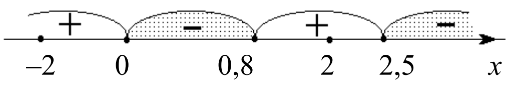
$$\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \leq 1,\ \left(\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right)^2 -1 \leq 0,$$

$$\left(\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}-1\right)\left(\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}+1\right) \leq 0,$$

$$\frac{-5x+4}{x^2-4}\cdot\frac{2x^2-5x}{x^2-4} \leq 0,\ \frac{(-5x+4)\cdot x(2x-5)}{(x^2-4)^2} \leq 0 \text{ arba, kai } x \neq \pm 2,$$

$$(-5x+4)\cdot x\cdot(2x-5) \leq 0.$$

Nelygybę spręsime intervalų metodu:



Atsakymas: $[0;\,0{,}8]\cup[2{,}5;\,+\infty]$.

c) Kadangi

$$\sqrt{x^2+4x+4}=\sqrt{(x+2)^2}=|x+2|=\begin{cases} x+2, \text{ kai } x\ge -2,\\ -x-2, \text{ kai } x<-2;\end{cases}$$

ir

$$\sqrt{x^2-10x+25}=\sqrt{(x-5)^2}=|x-5|=\begin{cases} x-5, \text{ kai } x\ge 5,\\ -x+5, \text{ kai } x<5;\end{cases}$$

tai sprendžiame nelygybę $|x+2|+|x-5|\ge 10$, nagrinėdami tris atvejus:

1) $\begin{cases} x<-2,\\ -x-2-x+5\ge 0\end{cases} \Rightarrow -2x\ge 7 \Rightarrow \begin{cases} x\le -3{,}5,\\ x<-2\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (-\infty;-3{,}5]$;

2) $\begin{cases} -2\le x<5,\\ x+2-x+5\ge 10\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\le x<5,\\ 7\ge 10\end{cases} \Rightarrow \varnothing$;

3) $\begin{cases} x\ge 5,\\ x+2+x-5\ge 10\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 5,\\ 2x\ge 13\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 5,\\ x\ge 6{,}5\end{cases} \Rightarrow [6{,}5;+\infty)$.

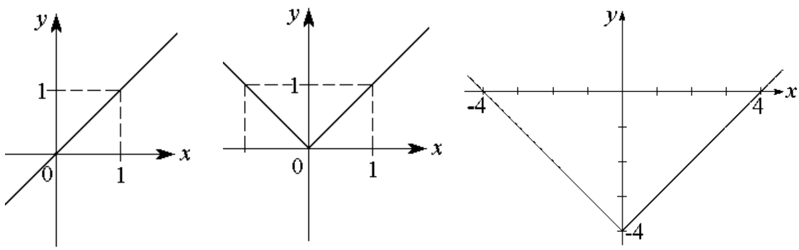
Atsakymas: $(-\infty;-3{,}5]\cup[6{,}5;+\infty)$.

6. Kiek sprendinių turi lygtis $||x|-4|=a$ priklausomai nuo a reikšmių?

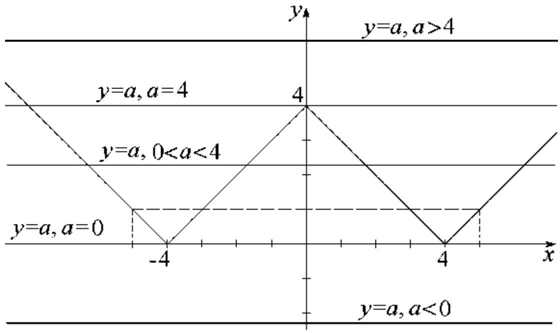
Sprendimas. Taikykime geometrinį metodą. Uždaviniui išspręsti pakanka suskaičiuoti, keliuose taškuose kertasi funkcijų $y=||x|-4|$ ir $y=a$ grafikai.

Pirmiausia nubrėžkime funkcijos $y=||x|-4|$ grafiką:

I $y=x$ II $y=|x|$ III $y=|x|-4$



IV $\quad y = \left| |x| - 4 \right|$



Paskutinįjį brėžinį papildę tiese $y = a$, matome, kad, ji nekirs funkcijos $y = \left| |x| - 4 \right|$ grafiko, kai $a < 0$. Šiuo atveju duotoji lygtis sprendinių neturi.

Kai $a = 0$ arba $a > 4$, tiesė $y = a$ kirs grafiką dviejuose taškuose ir tuomet lygtis turės du sprendinius.

Kai $0 < a < 4$, lygtis turės 4 sprendinius. Kai $a = 4$, lygtis turės tris sprendinius.

7. Įrodykime nelygybę $\left|\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha\right| \geq \left|\sin\alpha + \cos\alpha\right|$, kai $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

Pirmiausia pastebėkime, kad

$$\left|\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha\right| = \left|\mathrm{tg}\alpha\right| + \left|\mathrm{ctg}\alpha\right|,$$

nes $\mathrm{tg}\alpha$ ir $\mathrm{ctg}\alpha$ yra vienodų ženklų.

Kadangi

1) $\left|\mathrm{tg}\alpha\right| = \left|\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right| = \dfrac{\left|\sin\alpha\right|}{\left|\cos\alpha\right|} \geq \left|\sin\alpha\right|$, nes $\left|\cos\alpha\right| \leq 1$, $\alpha \neq \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$;

2) $\left|\mathrm{ctg}\alpha\right| = \left|\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right| = \dfrac{\left|\cos\alpha\right|}{\left|\sin\alpha\right|} \geq \left|\cos\alpha\right|$, nes $\left|\sin\alpha\right| \leq 1$, $\alpha \neq \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$;

tai, $\left|\mathrm{tg}\alpha\right| + \left|\mathrm{ctg}\alpha\right| \geq \left|\sin\alpha\right| + \left|\cos\alpha\right|$, kai $\alpha \neq \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

Tačiau iš modulio savybių $\left|\sin\alpha+\cos\alpha\right| \le \left|\sin\alpha\right| + \left|\cos\alpha\right|$, todėl gauname nelygybę $\left|\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha\right| \ge \left|\sin\alpha+\cos\alpha\right|$.

Pastaba. Nesunkiai įrodoma tikslesnė nelygybė: $\left|\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha\right| >$ $> \left|\sin\alpha+\cos\alpha\right|$, $\alpha \ne \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. Įrodymui pakanka įsitikinti, jog

$$\left|\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha\right| = \left|\mathrm{tg}\alpha+\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}\right| \ge 2, \text{ o} \left|\sin\alpha+\cos\alpha\right| = \left|\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right| \le \sqrt{2}.$$

8. Įrodykime nelygybę $\left|ac-bd\right| \le 1$, kai $a^2+b^2=1$ ir $c^2+d^2=1$.

Sugretinę lygybes $a^2+b^2=1$ ir $c^2+d^2=1$ su gerai žinoma trigonometrine tapatybe $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ darome išvadą: yra tokie kampai α ir β, jog a, $b=\cos\alpha$, $c=\sin\beta$, $d=\cos\beta$.

Tuomet

$$\left|ac-bd\right| = \left|\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta\right| = \left|-\cos(\alpha-\beta)\right| = \left|\cos(\alpha-\beta)\right| \le 1.$$

Lygybė galios, kai $\alpha=\beta$, t.y. $a=c=\pm1$, $b=d=\pm1$, $a=c=0$.

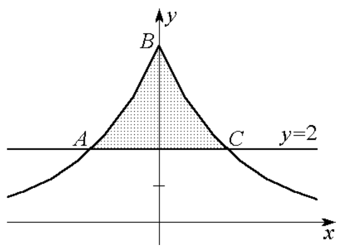
9. Koordinačių plokštumoje pavaizduokime aibę taškų $(x;y)$, kurių koordinatės tenkina sąlygą

$$2 \le y \le 2^{1-|x|}+1.$$

Perrašykime šią nelygybių sistemą taip:

$$\begin{cases} y \ge 2; \\ y \le 2^{1-|x|}+1. \end{cases}$$

Nubrėžkime funkcijos $y = 2^{1-|x|}+1 = \begin{cases} 2^{1-x}+1, \text{kai} x \ge 0, \\ 2^{1+x}+1, \text{kai} x < 0; \end{cases}$ grafiką.



Ieškomoji taškų aibė – kreivinis trikampis ABC.

10. Nubrėžkime funkcijos

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 20x + 25} - \frac{1}{3}\sqrt{9x^2 - 24x + 16} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$$

grafiką ir raskime jos mažiausią reikšmę.

Sprendimas. Kadangi

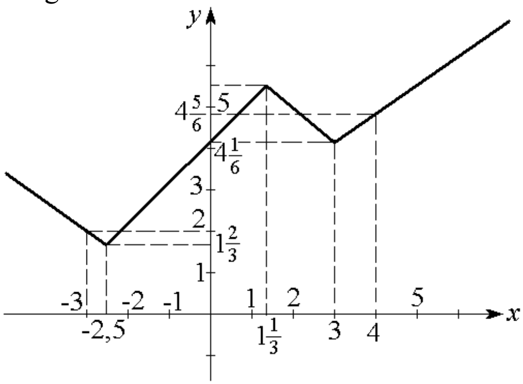
$$y = \frac{1}{2}\sqrt{(2x+5)^2} - \frac{1}{3}\sqrt{(3x-4)^2} + \sqrt{(x-3)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}|2x+5| - \frac{1}{3}|3x-4| + |x-3|,$$

tai pagal modulio apibrėžimą duotąją funkciją galima užrašyti taip:

$$y = \begin{cases} -x - \frac{5}{6}, \text{kai } x < -2{,}5; \\ x + 4\frac{1}{6}, \text{kai} -2{,}5 \le x < \frac{4}{3}; \\ -x + 6\frac{5}{6}, \text{kai } \frac{4}{3} \le x < 3; \\ x + \frac{5}{6}, \text{kai } x \ge 3. \end{cases}$$

Jos grafikas toks:



Matome, kad mažiausioji funkcijos reikšmė yra $1\frac{2}{3}$ (kai $x = -2{,}5$).

11. Raskime funkcijos $f(x) = \left|x^2 - 2x\right| - 3x + 4$ ekstremumus.

Sprendimas. Pagal modulio apibrėžimą

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 4, \text{kai } x \le 0 \text{ arba } x \ge 2; \\ -x^2 - x + 4, \text{kai } 0 < x < 2. \end{cases}$$

Apskaičiuokime išvestinę:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5, \quad \text{kai} \quad x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty); \\ -2x - 1, \text{ kai} \quad x \in (0; 2). \end{cases}$$

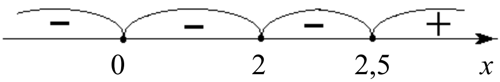
$f'(x)$ – neegzistuoja, kai $x = 0$ ir $x = 2$. Sprendžiame lygtį

$$f'(x) = 0:$$

1) $\begin{cases} 2x - 5 = 0, \\ x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2{,}5; \\ x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x = 2{,}5;$

2) $\begin{cases} -2x - 1 = 0, \\ x \in (0; 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -0{,}5; \\ x \in (0; 2) \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$

Ištirsime $f'(x)$ ženklų intervalus.



Matome, kad taške $x = 2{,}5$ funkcija įgyja minimumą: $f_{\min} = f(2{,}5) = -2{,}25$.

T R E Č I O J I   U Ž D U O T I S

1. Geometriškai išspręskite lygtį

$$3\left|x + 2\right| = \left|x - 4\right|.$$

2. Išspręskite lygtį

$$\left|2x - 7\right| + \left|x - 3y + 4\right| = 0.$$

3. Išspręskite nelygybę

$$\left||x-3|-x\right| \geq 4 .$$

4. Įrodykite nelygybę $|ac-bd| \leq 1$, kai $a^2+b^2=1$ ir $c^2+d^2=1$ kitu būdu negu įrodyta 8 pavyzdyje.

5. Nubrėžkite funkcijos

$$y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$$

grafiką.

6. Išspręskite lygtį

$$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}=3x-6 .$$

7. Išspręskite lygtį

$$|6x-5|=4\sin\frac{\pi x}{3} .$$

8. Raskite funkcijos

$$f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|$$

mažiausiąją reikšmę.

9. Su kuriomis a $(a \in \mathrm{R})$ reikšmėmis lygtis $\left|x^2-4x-5\right|=a$ turi dvi šaknis.

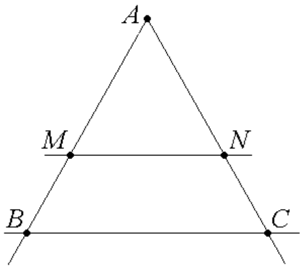
10. Raskite sveikųjų skaičių poras $(x; m)$, tenkinančias lygybę $\left|x^2-1\right|+\left|x^2-4\right|=m \cdot x$.

IV. FIGŪRŲ PANAŠUMAS. TALIO TEOREMA IR JOS TAIKYMAI

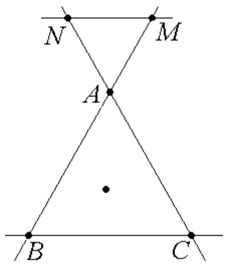
Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginio universitetas)

1. Atkarpos AB ir CD vadinamos proporcingomis atkarpoms A_1B_1 ir C_1D_1, jeigu jų ilgių santykiai lygūs, t.y. $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{CD}{C_1D_1}$. Atkarpų proporcingumas analogiškai apibrėžiamas ir didesniam atkarpų skaičiui.

1 teorema (Talio teorema). Lygiagrečios tiesės, kirsdamos kampo kraštines arba jų tęsinius, atkerta jose proporcingas atkarpas (žr. 1 pav.).



1 a pav.



1 b pav.

Jeigu $MN \parallel BC$, tai $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}$ – sakoma, jog trikampiams AMN ir ABC galima taikyti Talio teoremą.

1 išvada. Jeigu $MN \parallel BC$, tai $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{AN}{NC}$.

2 išvada. Tiesė, lygiagreti trikampio kraštinei ir kertanti kitas dvi kraštines arba jų tęsinius, atkerta nuo jo trikampį, kurio kraštinės proporcingos duotojo trikampio kraštinėms (1 pav. a, b):

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}.$$

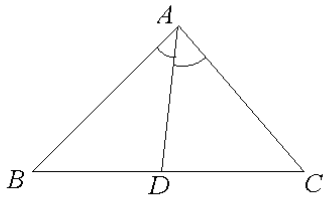
3 išvada. Jeigu lygiagrečios tiesės, kertančios kampo kraštines, vienoje kraštinėje iškerta lygias atkarpas, tai jos iškerta lygias atkarpas ir kitoje kraštinėje.

2 teorema (Atvirkštinė Talio teoremai). Jeigu tiesė kerta dvi trikampio kraštines arba jų tęsinius, esančius vienoje trečiosios kraštinės pusėje, ir atkirstos atkarpos proporcingos atitinkamoms duotojo trikampio kraštinėms, tai ta tiesė yra lygiagreti trečiajai trikampio kraštinei (žr. 1 pav.): jei $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, tai $MN \parallel BC$.

Taikydami Talio teoremą, galime įrodyti, kad

1) trikampio pusiaukraštinės susikerta viename taške ir tas taškas jas dalija santykiu $2:1$ skaitant nuo viršūnės;

2) trikampio kampo pusiaukampinė prieš tą kampą esančią kraštinę dalija į atkarpas, proporcingas prie jo esančioms kraštinėms (žr.2 pav.): $\frac{BD}{BA} = \frac{DC}{CA}$;

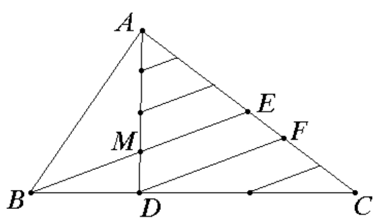


2 pav.

3) atkarpa, jungianti dviejų trikampio kraštinių vidurio taškus (vidurinė linija), lygiagreti trečiajai kraštinei ir lygi pusei tos kraštinės;

4) atkarpa, jungianti trapecijos šoninių kraštinių vidurio taškus (vidurinė linija), lygiagreti trapecijos pagrindams ir lygi jų sumos pusei.

1 pavyzdys. Trikampio ABC kraštinę BC taškas D dalija santykiu $BD:DC=1:2$, o taškas M atkarpą AD dalija santykiu $AM:MD=3:1$. Atkarpos BM tęsinys kerta trikampio kraštinę AC taške E. Apskaičiuosime santykį $AE:EC$ (3 pav.).

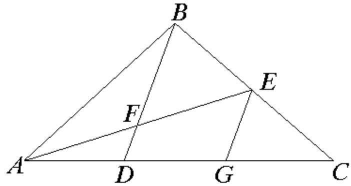


3 pav.

Sprendimas. Atkarpą AD padalijame į 4 lygias dalis ir per dalijimo taškus išvedame tieses lygiagrečias tiesei BE. Pagal 3 išvadą atkarpa

AF taip pat yra padalyta į 4 lygias dalis. Kraštinę BC padalijame į tris lygias dalis ir per dalijimo taškus išvedame tieses, lygiagrečias tiesei BE. Atkarpa EC taip pat yra padalyta į 3 lygias dalis. Kadangi atkarpa EF įeina į abu dalijimus, tai kraštinė AC yra padalyta į 6 lygias dalis. Taigi $AE : EC = 1$.

2 pavyzdys. Trikampio ABC viduje pažymėtas taškas F. Atkarpų AF ir BF tęsiniai kerta trikampio kraštines atitinkamai taškuose E ir D (4 pav.). Apskaičiuosime santykį $AF : FE$, jeigu $AD : DC = m$ ir $EC : BE = n$.



4 pav.

Sprendimas. Per tašką E išveskime tiesę EG, lygiagrečią tiesei BD. Taigi lygiagrečios tiesės BD ir EG kerta kampų EAC ir ACB kraštines. Remdamiesi 1-ąja išvada, gauname:

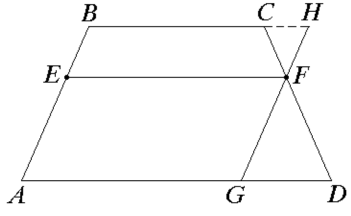
$$\frac{AF}{FE} = \frac{AD}{DG} \text{ ir } \frac{GC}{DG} = \frac{EC}{BE} = n .$$

Iš paskutiniųjų lygybių išplaukia, kad

$$\frac{DC}{DG} = \frac{DG + GC}{DG} = 1 + \frac{GC}{DG} = 1 + n .$$

Vadinasi, $\dfrac{AF}{FE} = \dfrac{AD}{DC} \cdot \dfrac{DC}{DG} = m(1+n)$.

3 pavyzdys. Atkarpos EF galai yra trapecijos $ABCD$ šoninėse kraštinėse AB ir CD. Apskaičiuosime EF ilgį, jeigu ji lygiagreti pagrindams, $BE : EA = \lambda$ ir $BC = a$, $AD = b$ (5 pav.).



5 pav.

Sprendimas. Duota $ABCD$ – trapecija, $EF \parallel AD \parallel BC$, $BE : EA = \lambda$, $AD = b$, $BC = a$. Rasti EF.

Sakykime $EF = x$. Per tašką F nubrėžkime tiesę, lygiagrečią AB. Ji pagrindus arba jų tęsinius kirs taškuose G ir H. Tuomet $CH = x - a$, $GD = b - x$. Kadangi $CH \parallel GD$, tai trikampiams CFH ir DFG galima taikyti Talio teoremos 2-ąją išvadą: $\frac{CH}{DG} = \frac{HF}{FG}$. Kadangi $HF = BE$, $FG = EA$, tai $\frac{CH}{DG} = \frac{BE}{EA} = \lambda$. Taigi $\frac{x-a}{b-x} = \lambda$. Iš čia $x = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}$.

Apibrėžimas. Du trikampiai vadinami **panašiais**, jeigu jų atitinkami kampai lygūs ir vieno trikampio kraštinės proporcingos atitinkamoms kito trikampio kraštinėms.

Trikampio panašumo požymiai:

1) jeigu vieno trikampio du kampai lygūs kito trikampio dviems kampams, tai trikampiai yra panašūs;

2) jeigu dvi vieno trikampio kraštinės proporcingos kito trikampio dviems kraštinėms ir kampai tarp tų kraštinių yra lygūs, tai trikampiai yra panašūs;

3) jeigu vieno trikampio trys kraštinės yra proporcingos kito trikampio kraštinėms, tai trikampiai yra panašūs.

Aišku, kad trikampiai, kuriems galima taikyti Talio teoremą, yra panašūs.

Apibrėžimas. Du daugiakampiai $ABCDE...$ ir $A_1B_1C_1D_1E_1...$ vadinami panašiais, jeigu jų atitinkami kampai lygūs ir prieš lygius kampus esančios kraštinės yra proporcingos, t.y.

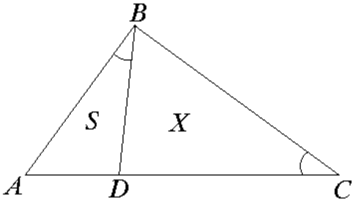
$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1,\ \dots,$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = ...$$

Skaičius $\frac{AB}{A_1B_1} = k$ vadinamas proporcingumo koeficientu. Panašių figūrų perimetrai proporcingi skaičiui k, o jų plotai proporcingi skaičiui k^2.

4 pavyzdys. Duota $\angle ABD = \angle BCD$; $S_{ABD} = S$; $BC = 3$; $BD = 2$. Apskaičiuokime S_{BDC}.

Sprendimas. Trikampiai ACB ir ABD yra panašūs pagal 1-jį panašumo požymį: $\angle A$ – bendras, $\angle ABD = \angle ACB$ pagal sąlygą. Todėl



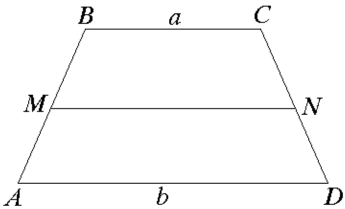
6 pav.

$\dfrac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$. Kita vertus, $S_{ABC} = S + X$, todėl turime lygtį: $\dfrac{S+X}{S} = \dfrac{9}{4}$. Iš čia: $X = \dfrac{5}{4}S$.

Ats.: $S_{BDC} = \dfrac{5}{4}S$.

5 pavyzdys. Atkarpa *MN* yra lygiagreti trapecijos *ABCD* pagrindams *BC* ir *AD* ir dalija trapeciją į dvi panašias trapecijas *AMND* ir *MBCN*. Apskaičiuokime *MN* ilgį, jeigu *BC* = *a*, *AD* = *b* (7 pav.).

Sprendimas. Remdamiesi trapecijų panašumo apibrėžimu, turime: $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AD}{MN}$, t.y. $MN^2 = BC \cdot AD$. Taigi $MN = \sqrt{a \cdot b}$. Atkarpa *MN* yra vadinama atkarpų *AD* ir *BC* *geometriniu vidurkiu*.



7 pav.

Ats.: $MN = \sqrt{a \cdot b}$.

Stačiakampis vadinamas *auksinės proporcijos stačiakampiu (auksiniu, tauriuoju)*, jeigu jo kraštinių ilgių santykis lygus $\varPhi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Skaičius Φ yra lygties $1+\dfrac{1}{x}=x$ sprendinys. Jis vadinamas *auksine proporcija*.

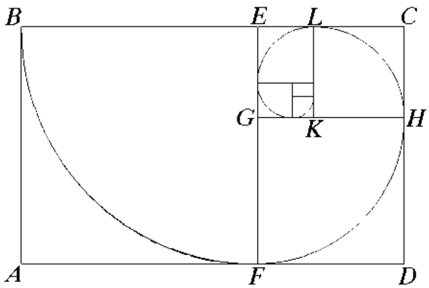
Skaičius Φ yra vienas iš labiausiai paplitusių matematikoje skaičių. Apie jį galima paskaityti [Peteris Tannenbaumas, Robertas Arnoldas. Kelionės į šiuolaikinę matematiką, TEV, Vilnius, 1995; Gediminas Stepanauskas. Fibonačio skaičiai, Matematikos žurnalas “alfa plius omega”, 1998, Nr. 2(6), 78-84.]. Dž. Bermanas skaičių Φ laikė skaičiavimo sistemos pagrindu. Štai keletas natūraliųjų skaičių , išreikštų auksine proporcija.

$$1=\frac{1}{\Phi}+\frac{1}{\Phi^2},\ 2=\Phi+\frac{1}{\Phi^2},\ 3=\Phi^2+\frac{1}{\Phi^2},$$

$$4=\Phi^2+\Phi^0+\frac{1}{\Phi^2},\ 5=\Phi^3+\frac{1}{\Phi}+\frac{1}{\Phi^4},\ \ldots .$$

Tikimasi, kad skaičiavimo sistema, kurios pagrindas Φ, bus pritaikyta supergreituose kompiuteriuose, informacijos kodavime.

6 pavyzdys. Įrodysime, kad auksinį stačiakampį galima padalyti į kvadratą ir mažesnį stačiakampį, kuris taip pat yra auksinis. Pastarąjį stačiakampį vėl galima padalyti į kvadratą ir auksinį stačiakampį ir t.t. (8 pav.).



8 pav.

Sprendimas. Duota: $AB=a$, $BC=a\Phi$, $ABEF$ – kvadratas, $FGHD$ – kvadratas ir t.t. Įrodysime: 1) stačiakampis $EFDC$ – auksinis; 2) stačiakampis $GECH$ – auksinis.

Įrodymas.1) Iš sąlygos: $BE = EF = a$, $EC = a\Phi - a = a(\Phi - 1)$.

Apskaičiuosime santykį: $\dfrac{EF}{EC} = \dfrac{a}{a(\Phi - 1)} = \dfrac{1}{\Phi - 1} = \dfrac{1}{\frac{1}{\Phi}} = \Phi$. Taigi stačiakampis $FECD$ – auksinis.

2) $GE = a - a(\Phi - 1) = a(2 - \Phi)$. Taigi

$$\frac{EC}{EG} = \frac{a(\Phi - 1)}{a(2 - \Phi)} = \frac{\frac{1}{\Phi}}{1 - \frac{1}{\Phi}} = \frac{1}{\Phi - 1} = \Phi \Rightarrow GECH \text{ – auksinis.}$$

Analogiškai įrodoma, kad keturkampis $EGKL$ irgi auksinis ir t.t.

Į kiekvieną kvadratą įbrėžus ketvirtį apskritimo, gaunama kreivė, kuri vadinama *spirale*.

K E T V I R T O J I   U Ž D U O T I S

1. Smailiojo trikampio ABC kraštinių AB ir BC projekcijų į tiesę AC ilgiai atitinkamai lygus 4 cm ir 6 cm. Raskite šio trikampio pusiaukraštinių projekcijų į AC ilgius.

2. Per trikampio ABC pusiaukraštinių susikirtimo tašką išvesta tiesė l, nuo trikampio viršūnių B ir C nutolusi atitinkamai b ir c atstumais. Raskite šios tiesės nuotolį nuo viršūnės A.

3. Per trapecijos $ABCD$ istrižainių susikirtimo tašką išvesta tiesė, lygiagreti pagrindams AD ir BC. Ji kerta šonines trapecijos kraštines taškuose E ir F. Apskaičiuokite atkarpos EF ilgį, jeigu $BC = a$, $AD = b$.

4. Trikampio ABC kraštinę BC taškas D dalija santykiu $BD : DC = 1 : 2$, o atkarpą AD taškas M dalija santykiu $AM : MD = 3 : 2$. Tiesė BM kerta trikampio kraštinę AC taške E. apskaičiuokite $S_{MECD} : S_{ABC}$.

Nurodymas. Prisiminkite, kad trikampių, kurių aukštinės bendros, plotų santykis lygus jų pagrindų ilgių santykiui.

5. Į 60° kampą įbrėžti du išoriškai besiliečiantys apskritimai. Raskite tų apskritimų spindulių santykį.

6. Trikampio ABC viduje pažymėtas *taškas* D. Tiesės AD, BD ir CD kerta trikampio kraštines atitinkamai taškuose E, F ir G. Apskaičiuokite $CF : FA$, jei $AG : GB = m$, $BE : EC = n$.

7. Trapecijos $ABCD$ pagrindai AD = 39 cm ir BC = 26 cm, o šoninės kraštinės AB = 5 cm ir CD = 12 cm, Raskite spindulį apskritimo, kuris eina per viršūnes A ir B ir liečia kraštinę CD arba jos tęsinį.

8. Stačiakampis, kurio kraštinės 8 cm ir 34 cm, padalytas į du panašius nelygius stačiakampius. Raskite jų plotus.

9. Atkarpa KL, lygiagreti trapecijos $ABCD$ pagrindams AD ir BC, trapecijos plotą dalija į dvi lygiaplotes dalis. Apskaičiuokite atkarpos KL ilgį, jeigu $BC = a$, $AD = b$.

10. Trikampis ABC lygiašonis ($AB = BC$), AE – kampo A pusiaukampinė. Jeigu trikampis ABC panašus į trikampį CAE, tai abu minėti trikampiai yra auksiniai (taurieji), t.y. $\dfrac{AB}{AC} = \Phi$ ir $\dfrac{AC}{CE} = \Phi$. Įrodykite.

V. MATEMATINĖS INDUKCIJOS METODAS

Donatas Jurgaitis (Šiaulių pedagoginis universitetas)

Teiginiai gali būti bendri ir daliniai. Bendrų teiginių pavyzdžiai:

1. Visi Lietuvos pilieèiai turi pasus.
2. Bet kurio stačiakampio įstrižainės lygios.
3. Bet kuris skaičius, kurio paskutinis skaitmuo yra 5, dalijasi iš 5.

Dalinių teiginių pavyzdžiai:

1. J. Petraitis turi Lietuvos piliečio pasą.
2. Stačiakampio $ABCD$ įstrižainės lygios.
3. Skaičius 125 dalijasi iš 5.

Perėjimas nuo bendrų teiginių prie dalinių vadinamas dedukcija. Pavyzdžiui, visi Lietuvos piliečiai turi pasus. J. Petraitis – Lietuvos pilietis. Vadinasi, J. Petraitis turi Lietuvos piliečio pasą.

Perėjimas nuo dalinių teiginių prie bendrų vadinamas indukcija. Pavyzdžiui, remdamiesi teiginiu „Triženklis skaičius 125 dalijasi iš 5“, galime suformuluoti tokias hipotezes: „Visi skaičiai, kurių paskutinis skaitmuo 5, dalijasi iš 5“, „Visi triženkliai skaičiai dalijasi iš 5“.

Matome, kad indukcinis mąstymo būdas gali atvesti prie teisingų bei klaidingų išvadų.

Panagrinėkime porą sudėtingesnių pavyzdžių.

1 pavyzdys. Skaičiuodami sumą

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\ (n+1)}$$

gauname

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}, \ S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4},$$

Čia įžvelgę tam tikrą dėsningumą, spėjame, kad $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ su visais natūraliaisiais skaičiais n.

2 pavyzdys. Trinaryje $x^2 + x + 41$ vietoje kintamojo x įrašę nulį, gauname pirminį skaičių 41. Kai $x = 1, 2, 3, \ldots, 10$, taip pat gausime pirminius skaičius. (Įsitikinkite!) Taigi peršasi išvada, jog $x^2 + x + 41$ reikšmė yra pirminis skaičius su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi x.

Pirmajame pavyzdyje padaryta teisinga išvada, o antrajame – klaidinga. Antrojo teiginio klaidingumu įsitikiname į trinarį įrašę $x = 40$ ir gavę trinario reikšmę 41^2, kuri yra sudėtinis skaičius.

Čia skaitytojui galime pasiūlyti sugalvoti daugiau teiginių, kurie teisingi daliniais atvejais, o bendruoju atveju yra klaidingi.

Kaip žinant, jog teiginys teisingas daliniais atvejais, sužinoti, ar jis teisingas visada?

Į šį klausimą galima atsakyti taikant specialų samprotavimo metodą, kuris vadinamas *matematinės indukcijos principu*.

Teiginys teisingas su visais natūraliaisiais n, jeigu

1) jis teisingas, kai $n = 1$;

2) iš prielaidos, jog jis teisingas su bet kokiu $n = k$, išplaukia jo teisingumas su $n = k + 1$.

3 pavyzdys. Įrodykime lygybę

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2 . \tag{1}$$

Sprendimas. Nesunkiai įsitikiname, kad lygybė teisinga, kai $n = 1$. Šiuo atveju kairėje pusėje yra tik vienas dėmuo, t.y. 1, o dešinioji pusė, kai $n = 1$, taip pat įgyja reikšmę 1.

Tarkime, kad (1) lygybė teisinga, kai $n = k$, t.y.

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2 .$$

Tada

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2 .$$

Vadinasi, pagal matematinės indukcijos principą (1) lygybė teisinga su visomis natūraliosiomis n reikšmėmis.

Įrodymai, pagrįsti matematinės indukcijos principu, vadinami įrodymais matematinės indukcijos metodu. Tokie įrodymai sudaryti iš dviejų dalių:

1) teiginys teisingas, kai $n = 1$.

2) teiginys teisingas, kai $n = k + 1$, jeigu jis teisingas su $n = k$.

Jeigu įrodomi abu teiginiai, tai galima daryti išvadas, kad tvirtinimas teisingas su visomis natūraliosiomis n reikšmėmis.

Sugrįžkime prie pirmojo pavyzdžio. Įrodykime, jog teiginys $S_n = \frac{n}{n+1}$ teisingas su visais natūraliaisiais n. Aišku, kad $S_1 = \frac{1}{2}$.

Tada, tarę, jog $S_k = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{k}{k+1}, \quad k \in N,$

turėtume gauti $S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$. Iš tikrųjų

$$S_{k+1} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Taigi teiginys $S_n = \frac{n}{n+1}$ teisingas su visais natūraliaisiais n.

Neįrodžius kurio nors vieno iš minėtų teiginių galima gauti klaidingą išvadą. Šį faktą iliustruokime pavyzdžiu.

Nagrinėdami teiginį „Bet kuris natūralusis skaičius n lygus pirmajam po jo einančiam natūraliajam skaičiui $n+1$, t.y. $n = n+1$“, netikrinkime jo teisingumo, kai $n=1$, o iš karto pereikime prie matematinės indukcijos principo antrosios dalies. Tarkime, kad teiginys teisingas su $n=k$, t.y. $k = k+1$. Tada (pagal prielaidą) $k+1 = (k+1)+1 = k+2$. Vadinasi, teiginys teisingas su $n = k+1$. Tačiau iš tikrųjų teiginys nėra teisingas su jokiu natūraliuoju skaičiumi n.

Svarbios abi matematinės indukcijos principo dalys. Grįžkime prie 1 pavyzdžio. Skaičiuodami sumas S_1, S_2 ir S_3, suformulavome teisingą hipotezę: $S_n = \frac{n}{n+1}$ su visais natūraliaisiais skaičiais n. Jeigu būtume skaičiavę tik S_1, galėjome suformuluoti ir tokią hipotezę: $S_n = \frac{n+1}{3n+1}$. Jos klaidingumas išryškėtų nagrinėjant antrąją matematinės indukcijos principo dalį. Iš prielaidos $S_k = \frac{k+1}{3k+1}$ gautume

$$S_{k+1} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k+1}{3k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^3 + 4k^2 + 5k + 2}{(k+1)(k+2)(3k+1)},$$

o pagal hipotezę turėtų būti

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)+1}{3(k+1)+1} = \frac{k+2}{3k+4}.$$

Matematinės indukcijos metodas leidžia patvirtinti teisingas hipotezes ir atmesti klaidingas.

4 pavyzdys. Raskime u_n, žinodami, kad $u_{n+1} = u_n + 3$, $n \in N$ ir $u_1 = 1$.

Sprendimas. Kadangi $u_1 = 1$, tai iš formulės $u_{n+1} = u_n + 3$ gauname:

$$u_2 = u_1 + 3 = 4,\ u_3 = u_2 + 3 = 7,\ u_4 = u_3 + 3 = 10 \text{ ir t.t.}$$

Čia galime įžvelgti esant tokį dėsningumą: $u_n = 3n - 2$. Aišku, ši formulė teisinga, kai $n = 1$. Tarę, kad $u_k = 3k - 2$, gauname

$$u_{k+1} = u_k + 3 = (3k-2) + 3 = (3k+3) - 2 = 3(k+1) - 2.$$

Pagal formulę $u_n = 3n - 2$ gautume tokį pat rezultatą.

Remdamiesi matematinės indukcijos principu, darome išvadą, jog formulė $u_n = 3n - 2$ teisinga su visais natūraliaisiais skaičiais n.

5 pavyzdys. Įrodykime, kad už pirkinį, kurio kaina m litų $(m \in N)$, galima atsiskaityti 2 ir 5 litų monetomis, kai $m > 6$.

Įrodymas. Pirkinio kainą užrašykime formule $m = 6 + n$, $n = 1, 2, 3, ...$ ir taikykime matematinės indukcijos metodą. Teiginys teisingas, kai $n = 1$. Sakykime, kad už pirkinį galima atsiskaityti 2 ir 5 litų monetomis, kai jo kaina lygi $6 + k$ litų. Kai pirkinio kaina lygi $6 + (k+1)$, t.y. $7 + k$ litų, galimi du atvejai.

1 atvejis. Jei skaičius k nelyginis, tai $7 + k$ yra lyginis. Todėl atsiskaityti galima tik 2 litų monetomis.

2 atvejis. Jei skaičius k lyginis, tai pakanka vienos 5 litų monetos ir $\frac{k}{2} + 1$ dviejų litų monetų. Taigi už prekes galima atsiskaityti naudojant tik 2 ir 5 litų monetas ir tuo atveju, kai prekių kaina lygi $6 + (k+1)$ litų. Pagal matematinės indukcijos principą teiginys teisingas su visais natūraliaisiais skaičiais n.

6 pavyzdys. Įrodykime, kad

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{nx}{2}, \quad n \in N.$$

Įrodymas. Kai $n = 1$, gauname lygybę $\sin x = \sin x$. Pasinaudoję prielaida

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin kx = \frac{\sin \frac{k+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{kx}{2},$$

ir žinoma formule

$$2\cos \frac{k+1}{2} x \sin \frac{x}{2} = \sin \frac{k+2}{2} x - \sin \frac{k}{2} x,$$

gauname

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin kx + \sin(k+1)x =$$

$$= \frac{\sin \frac{k+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{kx}{2} + \sin(k+1)x = \frac{\sin \frac{k+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{kx}{2} +$$

$$+ 2\sin \frac{k+1}{2} x \cos \frac{k+1}{2} x = \frac{\sin \frac{k+1}{2} x \ \sin \frac{k+2}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

7 pavyzdys. Įrodykime, kad su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi n, didesniu už vienetą, teisinga nelygybė

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

Įrodymas. Pažymėkime $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$.

Kadangi $n > 1$, tai galime rašyti $n = m+1$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. Matematinės indukcijos metodą taikykime m atžvilgiu.

Kai $m = 1$, gauname $S_2 = \frac{7}{12} > \frac{13}{24}$.

Sakykime, kad teiginys teisingas su $m = k$, t.y.

$$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + ... + \frac{1}{2(k+1)} > \frac{13}{24}.$$

Įrodysime, kad $S_{k+2} > \frac{13}{24}$. Tuo tikslu apskaičiuokime skirtumą $S_{k+2} - S_{k+1}$:

$$S_{k+2} - S_{k+1} = \frac{1}{2k+3} + \frac{1}{2(k+2)} - \frac{1}{k+2} =$$

$$\frac{1}{2k+3} - \frac{1}{2(k+2)} = \frac{1}{2(k+2)(2k+3)} > 0.$$

Iš čia gauname, jog $S_{k+2} > S_{k+1}$. Pasinaudoję prielaida $\left(S_{k+1} > \frac{13}{24}\right)$, gauname nelygybę $S_{k+2} > \frac{13}{24}$.

Vadinasi, su visais natūraliaisiais m galioja nelygybė $S_{m+1} > \frac{13}{24}$. Todėl nelygybė $S_n > \frac{13}{24}$ teisinga, kai $n > 1$.

P E N K T O J I   U Ž D U O T I S

1. Užrašykite formulę, kurioje bet kuris nelyginis natūralusis skaičius būtų išreikštas jo eilės numeriu.

2. Raskite pirmųjų n natūraliųjų skaičių kvadratų sumą.

3. Įrodykite, kad

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

4. Apskaičiuokite $S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n!$.

5. Įrodykite, kad $1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \ (x \neq 1)$.

6. Įrodykite, kad trijų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių kubų suma dalijasi iš 9.

7. Įrodykite, kad n skirtingų tiesių susikertančių viename plokštumos taške dalija tą plokštumą į $2n$ dalių.

8. Įrodykite, kad $u_n = 2^n + 1$ su visais natūraliaisiais n, kai $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$, $u_0 = 2$, $u_1 = 3$.

9. Su kuriomis natūraliosiomis n reikšmėmis galioja nelygybė

$$2^n > n^2 + 4n + 5\,?$$

Atsakymą pagrįskite.

10. Įrodykite, kad n bet kokių kvadratų galima sukarpyti į dalis taip, jog iš tų dalių būtų įmanoma sudėti naują kvadratą.

VI. LYGČIŲ, NELYGYBIŲ BEI JŲ SISTEMŲ EKVIVALENTUMAS

Algimantas Urbonas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. LYGTYS IR NELYGYBĖS SU VIENU KINTAMUOJU

Apibrėžimas. Reiškinių su kintamaisiais pora, sujungta lygybės (nelygybės) ženklu, vadinama lygtimi (nelygybe).

Pavyzdžiai

1. $\frac{2}{x-1} = 5 - x$;
2. $2 - x > 4 + 2x$;
3. $3x + y = 1$;
4. $x^2 + y \leq 1$.

Pirmajame pavyzdyje pateikta lygtis su vienu kintamuoju, antrajame – nelygybė su vienu kintamuoju, o trečiajame ir ketvirtajame pavyzdžiuose – atitinkamai lygtis ir nelygybė su dviem kintamaisiais.

Lygties (nelygybės) su vienu kintamuoju bendras pavidalas yra

$f(x) = g(x)$ ($f(x) > g(x)$; $f(x) < g(x)$; $f(x) \geq g(x)$; $f(x) \leq g(x)$);

čia $f(x)$ ir $g(x)$ yra reiškiniai su kintamuoju x. Tokios lygties (nelygybės) apibrėžimo sritimi vadinama reiškinių $f(x)$ ir $g(x)$ apibrėžimo sričių sankirta: $D(f) \cap D(g)$.

Pavyzdžiui, lygties $\sqrt{x-1} = \frac{1}{x-2}$ apibrėžimo sritis yra $[1;2) \cup (2;+\infty)$.

Apibrėžimas. Kintamojo reikšmė, su kuria lygtis (nelygybė) tampa teisinga lygybe (nelygybe), vadinama tos lygties (nelygybės) sprendiniu.

Pavyzdžiui, -2 yra lygties $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{x-2} = 2 + \frac{3}{x-2}$ sprendinys, o skaičius 2 nėra šios lygties sprendinys.

Išspręsti lygtį (nelygybę) reiškia rasti visus jos sprendinius arba įrodyti, kad ji sprendinių neturi.

2. LYGČIŲ, NELYGYBIŲ BEI JŲ SISTEMŲ EKVIVALENTUMAS

Apibrėžimas. Dvi lygtys, nelygybės arba jų sistemos vadinamos ekvivalenčiomis, jei jų sprendinių aibės sutampa.

Pavyzdžiui, lygtis $x = 3x - 2$ yra ekvivalenti nelygybei $\sqrt{x-1} \le 1 - x$, o lygtis $\sqrt{x+1} = x$ – ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} x + 1 = x^2, \\ x \ge 0. \end{cases}$$

Pateikiame kelias teoremas apie ekvivalentumą (be įrodymo).

1 teorema. Jei lygties $f(x) = g(x)$ apibrėžimo sritis priklauso reiškinio $h(x)$ apibrėžimo sričiai, tai lygtis $f(x) = g(x)$ yra ekvivalenti lygčiai $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$.

2 teorema. Jei lygties (nelygybės) reiškinius tapačiai pertvarkysime ir nepasikeis lygties (nelygybės) apibrėžimo sritis, tai gausime lygtį (nelygybę) ekvivalenčią duotajai.

Pavyzdžiui, lygtis $\sqrt{x^2+1} + x + 2 = \sqrt{x^2+1}$ yra ekvivalenti lygčiai $x + 2 = 0$, o lygtis $\sqrt{x} + x + 2 = \sqrt{x}$ – neekvivalenti lygčiai $x + 2 = 0$.

3 teorema. Lygtis $\sqrt{f(x)} = g(x)$ yra ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$$

4 teorema. Lygtis $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ yra ekvivalenti bet kuriai iš sistemų

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$$

(Sprendžiant galima pasirinkti paprastesnę.)

5 teorema. Lygtis $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ yra ekvivalenti bet kuriai iš sistemų

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

6 teorema. Nelygybė $\log_a f(x) \le \log_a g(x)$ yra ekvivalenti vienai iš sistemų:

$$\begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ g(x) > 0 \,(\text{kai} \, 0 < a < 1); \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) > 0 \,(\text{kai} \, a > 1). \end{cases}$$

7 teorema. Nelygybė $|f(x)| < g(x)$ yra ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$$

8 teorema. Nelygybė $|f(x)| > g(x)$ yra ekvivalenti visumai

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$$

9 teorema. Nelygybė $|f(x)| < |g(x)|$ yra ekvivalenti nelygybei

$$(f(x) + g(x))(f(x) - g(x)) < 0 .$$

10 teorema. Nelygybė $\sqrt{f(x)} < g(x)$ yra ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} f(x) < g^2(x), \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

11 teorema. Nelygybė $\sqrt{f(x)} > g(x)$ yra ekvivalenti sistemų visumai

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Pavyzdžiai

1. Lygtis $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2x - 1$ ekvivalenti (pagal 3 teoremą) sistemai

$$\begin{cases} x^2 + 5x + 1 = (2x-1)^2, \\ 2x - 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x(x-3) = 0, \\ x \ge \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 .$$

2. Lygtis $\sqrt{x^3 - x + 2} = \sqrt{2 - x}$ ekvivalenti (pagal 4 teoremą) sistemai

$$\begin{cases} x^3 - x + 2 = 2 - x, \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 .$$

3. Lygtis $\lg(8 - 10x - 12x^2) = 3\lg(2x - 1)$ ekvivalenti (pagal 5 teoremą) sistemai

$$\begin{cases} 8 - 10x - 12x^2 = (2x - 1)^3, \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x - 1)(4x^2 + 2x + 9) = 0, \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

4. Nelygybė $\log_{0,4} \dfrac{x+7}{2x+3} \leq \log_{0,4}(5 - x)$ ekvivalenti (pagal 6 teoremą) sistemai

$$\begin{cases} \dfrac{x+7}{2x+3} \geq 5 - x, \\ 5 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-4)}{2x+3} \geq 0, \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{3}{2};-1\right] \cup [4;5).$$

5. Nelygybė $\left|x^2 - 6x + 8\right| < 5x - x^2$ ekvivalenti (pagal 7 teoremą) sistemai

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 < 5x - x^2, \\ x^2 - 6x + 8 > -5x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 11x + 8 < 0, \\ x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{11 - \sqrt{57}}{4} < x < \dfrac{11 + \sqrt{57}}{4}, \\ x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{11 - \sqrt{57}}{4}; \frac{11 + \sqrt{57}}{4} \right).$$

6. Nelygybė $\left|x^2 - 3x + 2\right| > 3x + x^2 - 2$ ekvivalenti (pagal 8 teoremą) visumai

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 > 3x + x^2 - 2, \\ x^2 - 3x + 2 < -3x - x^2 + 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3x + 2 > 0, \\ x^2 - 3x < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{2}{3}\right).$$

7. Nelygybė $\sqrt{x^2-2x} > 4-x$ ekvivalenti (pagal 11 teoremą) sistemų visumai

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4-x<0,\\ x(x-2)\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}4-x\ge 0,\\ x^2-2x>(4-x)^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>4,\\ \left[\begin{array}{l}x\le 0,\\ x\ge 2,\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 4,\\ x>\dfrac{8}{3}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>4,\\ x\in\left(\dfrac{8}{3};\,4\right]\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left(\dfrac{8}{3};+\infty\right).$$

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Kurios iš lygčių

a) $\sqrt{5x^2-14x+5}+5x+1=0$,

b) $\sqrt{5x^2-14x+5}=5x+1$,

c) $4x^2+(x+3)^2=8$

yra ekvivalenčios lygčiai $\left(5x+\dfrac{x+4}{x+1}\right)(x+1)=3$?

Išspręskite lygtis:

2. $\log_{\frac{5}{4+x^2}}(3+4x^2-4x)=\log_{1+\sqrt{x}}(-x-x^2)$;

3. $\sqrt{x^3-4x+3}=\sqrt{11-4x}$;

4. $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$

(spręsdami pasinaudokite tapatybe: $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$);

5. $20\log_{4x}\sqrt{x}+7\log_{16x}x^3-3\log_{\frac{x}{2}}x^2=0$.

Išspręskite nelygybes:

6. $\big|\, |x-2| - 2 \,\big| < 1$;

7. $|x^2 - 5x + 1| < 2x - 5$;

8. $\sqrt{\dfrac{x^3+8}{x}} > x - 2$;

9. $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x} \le \sqrt{3x-1} + \sqrt{2\,(2x-1)}$;

10. $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 18) < 2\log_{\frac{1}{3}}(x-4)$.

VII. URNŲ SCHEMOS IR BAIGTINĖS MARKOVO GRANDINĖS

Bronius Grigelionis (Lietuvos Mokslų akademija)

1. ĮVADAS

Tikimybių teorijos ištakos siekia XVII a. vidurį ir susijusios su B. Paskalio. P. Ferma, Ch. Hiuigenso bei J. Bernulio vardais. Jų, o taip pat vėlyvesni A. Muavro, T. Bajeso bei P. Laplaso darbai buvo susisteminti P. Laplaso veikale „Analizinė tikimybių teorija“ (1812). Tikimybių skaičiavimas buvo grindžiamas klasikiniu tikimybių apibrėžimu. Statistinio mąstymo ugdymui, o tuo pačiu ir tikimybių teorijos plėtotei, XIX a. didžiulę įtaką turėjo A. Ketlė veikla ir jo knyga „Socialinė fizika“ (1835). F. Galtono, G. Mendelio, K. Pirsono darbais buvo sukurti biometrikos pagrindai, o Dž. K. Maksvelio, L. E. Bolcmano, Dž. V. Gibso buvo išplėtota statistinė fizika. Klasikinės mechanikos ir antrojo termodinamikos principo prieštaravimai (J. Lošmito ir E. Cermelo paradoksai) vertė ieškoti naujų tikimybinių modelių, netelpančių į klasikinius teorijos rėmus ir galinčių nutiesti tiltą tarp klasikinės mechanikos bei termodinamikos. Tiek istoriniu, tiek šiuolaikiniu požiūriu labai svarbus buvo A.Markovo 1907 m. darbas apie atsitiktinius įvykius, susietus į grandinę, kuri dabar yra vadinama Markovo vardu. Markovo grandinių ir jų apibendrinimų teorija šiuo metu yra plačiausiai taikoma aprašant dėsningumus tiek gamtos moksluose, tiek socialiniuose moksluose ir technikoje. Paprasčiausiais atvejais užtenka apsiriboti modeliais su diskrečiuoju laiku ir diskrečiomis būsenų aibėmis, kuriuos elementariomis priemonėmis vaizdžiai galima realizuoti urnų schemomis ir kurios turėtų būti prieinamos vyresniųjų klasių žingeidiems moksleiviams.

2. BAIGTINĖ TIKIMYBIŲ TEORIJA

Šiuolaikinė tikimybių teorija yra abstrakti matematikos šaka, pagrįsta A. Kolmogorovo aksiomatika (1933). Baigtiniu atveju ji yra lengvai suvokiama.

Formuluodami pagrindines baigtinės tikimybių teorijos sąvokas bei kai kuriuos jos teiginius naudosimės aibių simbolika. Pavyzdžiui, aibei, susidedančiai iš elementų ω, kurie tenkina kokią nors savybę, užrašyti vartosime žymėjimą $\{\omega: \ldots\}$; čia vietoje daugtaškio įrašysime reikalavimus, kuriuos turi tenkinti aibės elementai ω. Taip pat, norėdami užrašyti įvairias sumas, toliau vartosime sumos ženklą $\sum$. Apie aibes, veiksmus su jomis bei sumos ženklo vartojimą galima paskaityti A.Plikuso knygelėje „Kombinatorikos, tikimybių teorijos ir statistikos pradmenys“, K., „Šviesa“, 2000. Ženklas □ reiškia įrodymo pabaigą.

1 apibrėžimas. Baigtine *tikimybine erdve* vadinama baigtinė aibė Ω, kartais vadinama *baigčių aibe*, su jos elementams ω priskirtais skaičiais $P(\{\omega\})$, $0 \le P(\{\omega\}) \le 1$, $\sum\limits_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\}) = 1$. Sutrumpintai baigtinę tikimybinę erdvę žymėsime pora (Ω, P). Aibės Ω poaibiai yra vadinami *įvykiais* , o skaičius $P(A) = \sum\limits_{\omega\in A} P(\{\omega\})$ – *įvykio A tikimybe.* Aibės Ω poaibiai $\{\omega\}$ iš vieno elemento ω yra vadinami elementariaisiais įvykiais. Tuščia aibė $\varnothing$ vadinama *negalimuoju įvykiu*, priimant, kad $P(\varnothing) = 0$.

1 pavyzdys (klasikinis modelis). Tegu Ω yra bet kokia baigtinė baigčių aibė, $P(\{\omega\}) = |\Omega|^{-1}$, kur $|\Omega|$ žymi aibės Ω elementų skaičių. Tada (Ω, P) yra klasikinė tikimybinė erdvė.

Kai kurios baigtinės tikimybinės erdvės ypatingai svarbios ir turi daugybę pritaikymų.

2 pavyzdys. (Bernulio schema). Tegu baigčių aibė yra:

$$\Omega = \{\omega : \omega = (\omega_0, \ldots, \omega_n), \omega_j \in \{0, 1\}, j = 0, 1, \ldots, n\},$$

$$P(\{\omega\}) = p^k (1-p)^{n+1-k}, \ k = \sum_{j=0}^{n} \omega_j, \ 0 \le p \le 1.$$

Tuomet tikimybinė erdvė (Ω, P) vadinama Bernulio schema.

Naudojantis žinomomis kombinatorikos formulėmis bei Niutono binomo formule, lengva patikrinti, kad tikrai

$$\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\}) = 1.$$

2 apibrėžimas. Įvykiai $A_1, \ldots, A_k$ yra nepriklausomi, jei

$$P(A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_l}) = P(A_{j_1}) \cdot P(A_{j_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{j_l})$$

su visais $\{j_1, \dots, j_l\} \subseteq \{1, \dots, k\}$.

Nesunku suvokti, jog Bernulio schema yra $n+1$ nepriklausomų bandymų modelis, kai kiekviename bandyme su tikimybe p stebimas tas pats įvykis; $\omega_j = 1$ reikštų, jog j-ajame bandyme įvykis pasirodė, o $\omega_j = 0$ – j-ajame bandyme įvykis nepasirodė. Taigi baigties $\omega = \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n\}$ išraiška rodo, kuriuose bandymuose įvykis pasirodo, kuriuose ne; sumos $k = \sum_{j=0}^{n} \omega_j$ reikšmė yra įvykio pasirodymų skaičius per visus $n+1$ bandymų (*žr.* [1]).

3 pavyzdys (Markovo schema). Tegu Ω yra ta pati aibė, kaip ir 2 pavyzdyje, o

$$P(\{\omega\}) = p_0(\omega_0)p(\omega_0, \omega_1) \dots p(\omega_{n-1}, \omega_n), \; 0 \le p_0(j) \le 1, \tag{1}$$

$$p_0(0) + p_0(1) = 1, \; 0 \le p(i, j) \le 1, \; p(i, 0) + p(i, 1) = 1, \; i, j \in \{0, 1\}.$$

Tuomet tikimybinė erdvė (Ω, P) vadinama Markovo schema.

Matematinės indukcijos būdu galima įsitikinti, kad Markovo schemoje

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1.$$

Akivaizdu, kad Markovo schema yra bendresnė už Bernulio schemą. Ji turi žymiai daugiau taikymų.

3 apibrėžimas. Dviems įvykiams A ir B, $P(B) > 0$, skaičius

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

yra vadinamas *sąlygine įvykio* A tikimybe, kai žinoma, jog įvykis B yra įvykęs.

1 teiginys. Tegu Markovo schemoje

$$A(i_0, i_1, \dots, i_k) = \{\omega : \omega_0 = i_0, \omega_1 = i_1, \dots, \omega_k = i_k\},$$

$$A_k(i_k) = \{\omega : \omega_k = i_k\}.$$

Tada

$$P(A_k(i_k) \mid A(i_0, i_1, \dots, i_{k-1})) = P(A_k(i_k) \mid A_{k-1}(i_{k-1})) = p(i_{k-1}, i_k) \tag{2}$$

su visais $i_0, i_1, \dots, i_k \in \{0, 1\}$, kuriems $P(A(i_0, i_1, \dots, i_k)) > 0$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Lygybė (2) parodo esminę Markovo schemos savybę: tikimybė pasirodyti arba nepasirodyti įvykiui k-ajame bandyme nepriklauso nuo bandymų su numeriais $0, 1, 2, \dots, k-2$ rezultatų, o priklauso tik nuo ($k-1$)-ojo bandymo rezultato. Tuo pačiu (2) lygybė paaiškina (1) sandaugos tikimybių prasmę.

1 teiginio įrodymas. Turime, kad

$$P(A(i_0, i_1, \dots, i_k)) = P(\{\omega : \omega_0 = i_0, \dots, \omega_k = i_k\}) =$$

$$= \sum_{\omega_{k+1}=0}^{1} \dots \sum_{\omega_n=0}^{1} [p_0(i_0)\, p(i_0, i_1) \dots p(i_{k-1}, i_k)\, p(i_k, \omega_{k+1}) \dots p(\omega_{n-1}, \omega_n)] =$$

$$= p_0(i_0)\, p(i_0, i_1) \dots p(i_{k-1}, i_k) = P(A(i_0, \dots, i_{k-1}))\, p(i_{k-1}, i_k),$$

nes su visais $k = 0, 1, \dots, n-1$.

$$\sum_{\omega_{k+1}=0}^{1} \dots \sum_{\omega_n=0}^{1} \left[p(i_k, \omega_{k+1}) \dots p(\omega_{n-1}, \omega_n)\right] = 1.$$

Toliau

$$P(A_k(i_k)) = P(\{\omega : \omega_k = i_k\}) =$$

$$= \sum_{\omega_0=0}^{1} \dots \sum_{\omega_1=0}^{1} \dots \sum_{\omega_{k-1}=0}^{1} \sum_{\omega_{k+1}=0}^{1} \dots \sum_{\omega_n=0}^{1} [p_0(\omega_0) \cdot$$

$$\cdot\, p(\omega_0, \omega_1) \dots p(\omega_{k-1}, i_k)\, p(i_k, \omega_{k+1}) \dots p(\omega_{n-1}, \omega_n)] =$$

$$= \sum_{\omega_0=0}^{1} \dots \sum_{\omega_1=0}^{1} \dots \sum_{\omega_{k-1}=0}^{1} [p_0(\omega_0)\, p(\omega_0, \omega_1) \dots p(\omega_{k-1}, i_k)] \cdot$$

$$\cdot \sum_{\omega_{k+1}=0}^{1} \dots \sum_{\omega_n=0}^{1} p(i_k, \omega_{k+1}) \dots p(\omega_{n-1}, \omega_n)] =$$

$$= \sum_{\omega_0=0}^{1} \dots \sum_{\omega_1=0}^{1} \dots \sum_{\omega_{k-1}=0}^{1} [p_0(\omega_0)\quad p(\omega_0, \omega_1) \dots p(\omega_{k-1}, i_k)]$$

bei analogiškai

$$P(A_{k-1}(i_{k-1}) \cap A_k(i_k)) = P(\{\omega : \omega_{k-1} = i_{k-1}, \omega_k = i_k\}) =$$

$$= \sum_{\omega_0=0}^{1} \sum_{\omega_1=0}^{1} \dots \sum_{\omega_{k-2}=0}^{1} [p_0(\omega_0)\ p(\omega_0, \omega_1) \dots p(\omega_{k-2}, i_{k-1})\ p(i_{k-1}, i_k)] =$$

$$= P(A_{k-1}(i_{k-1}))\ p(i_{k-1}, i_k)\,.$$

Belieka pasinaudoti 3 apibrėžimu, nes

$$A_k(i_k) \cap A(i_0, \dots, i_{k-1}) = A(i_0, \dots, i_k)$$

ir tuo pačiu

$$P(A_k(i_k) \mid A(i_0, \dots, i_{k-1}) = \frac{P(A(i_0, \dots, i_k)}{P(A(i_0, \dots, i_{k-1})} = p(i_{k-1}, i_k)$$

bei

$$P(A_k(i_k) \mid A_{k-1}(i_{k-1}) = \frac{P(A_{k-1}(i_{k-1}) \cap A_k(i_k))}{P(A_{k-1}(i_{k-1}))} = p(i_{k-1}, i_k)\,. \quad \square$$

Dabar įrodysime pagrindines tikimybių skaičiavimo formules.

2 teiginys. a) Bet kuriems įvykiams A ir B teisinga *sumos formulė*: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

b) Jei įvykiai $A_1, \dots, A_l$ yra tokie, kad $A_j \cap A_k = \varnothing$, $j \neq k$, ir $\bigcup_{j=1}^{l} A_j = \Omega$, tai bet kuriam įvykiui A yra teisinga *pilnosios tikimybės formulė*: $P(A) = \sum_{j=1}^{l} P(A \cap A_j)$. Jei, be to, $P(A) > 0$, $P(A_j) > 0$, $j = 1, \dots, l$, tai $P(A) = \sum_{j=1}^{l} P(A \mid A_j)\ P(A_j)$,

$$P(A_j \mid A) = \frac{P(A \mid A_j)\ P(A_j)}{\sum_{k=1}^{l} P(A \mid A_k)\ P(A_k)} \quad (\textit{Bajeso formulė}).$$

c) Įvykiams A_j $j = 0, 1, \dots, n$, kuriems

$$P(A_0 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0\,,$$

teisinga *sandaugos formulė*:

$$P(A_n \cap A_{n-1} \cap ... \cap A_1 \cap A_0) =$$
$$= P(A_n \mid A_{n-1} \cap ... \cap A_0) ... P(A_1 \mid A_0)\, P(A_0).$$

2 teiginio įrodymas. a) Akivaizdu, kad

$$A \bigcup B = A \bigcup (B \setminus (A \cap B)),$$

o A ir $B \setminus (A \cap B)$ neturi bendrų elementų. Todėl

$$P(A \bigcup B) = \sum_{\omega \in A \bigcup B} P(\{\omega\}) =$$
$$= \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in B \setminus (A \cap B)} P(\{\omega\}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

b) Iš teiginio sąlygų akivaizdu, kad poaibiai $A \cap A_j$, $j = 1, ..., l$, neturi bendrų elementų ir $\bigcup_{j=1}^{l} (A \cap A_j) = A$. Todėl

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{\omega \in A \cap A_j} P(\{\omega\}) = \sum_{j=1}^{l} P(A \cap A_j).$$

Toliau iš 2 apibrėžimo gauname, jog

$$P(A \cap A_j) = P(A \mid A_j)\, P(A_j) \text{ ir } P(A_j \mid A) = \frac{P(A \cap A_j)}{P(A)}.$$

Todėl

$$P(A) = \sum_{j=1}^{l} P(A \mid A_j)\, P(A_j)$$

bei

$$P(A_j \mid A) = \frac{P(A \mid A_j)\, P(A_j)}{\sum_{j=1}^{l} P(A \mid A_j)\, P(A_j)}.$$

c) Iš 2 apibrėžimo turime, kad

$$P(A_n \mid A_{n-1} \cap .... \cap A_0) = \frac{P(A_n \cap .... \cap A_0)}{P(A_{n-1} \cap .... \cap A_0)},$$

$$P(A_{n-1} \mid A_{n-2} \cap .... \cap A_0) = \frac{P(A_{n-1} \cap .... \cap A_0)}{P(A_{n-2} \cap .... \cap A_0)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P(A_1 \mid A_0) = \frac{P(A_1 \cap A_0)}{P(A_0)},$$

$$P(A_0) = P(A_0).$$

Sudauginę kairiąsias ir dešiniąsias šių lygybių puses randame, kad

$$P(A_n \cap .... \cap A_0) = P(A_n \mid A_{n-1} \cap .... \cap A_0) \dots P(A_1 \mid A_0)\, P(A_0). \quad \square$$

4 apibrėžimas. Sakome, kad įvykiai A_j $j = 0, 1, \dots, n$ yra susieti į Markovo grandinę, jei

$$P(A_k \mid A_{k-1} \cap \dots \cap A_0) = P(A_k \mid A_{k-1})$$

su kiekvienu $k = 1, \dots, n$, kuriam $P(A_{k-1} \cap \dots \cap A_0) > 0$.

4 pavyzdys. Iš 2 apibrėžimo turime, kad bet kokie nepriklausomi įvykiai $A_0, A_1, \dots, A_n$ yra susieti į Markovo grandinę.

5 pavyzdys. Iš 1 teiginio išplaukia, kad Markovo schemoje įvykiai $A(i_k)$, $i_k \in \{0, 1\}$, $k = 0, 1, \dots, n$, yra susieti į Markovo grandinę.

3. BAIGTINĖS MARKOVO GRANDINĖS

Tarkime S yra baigtinė aibė, vadinama *būsenų aibe*, ir (Ω, P) yra baigtinė tikimybinė erdvė. Tegu duoti skaičiai $p_0(x)$, $0 \le p_0(x) \le 1$, $\sum_{x \in S} p_0(x) = 1$ ir $p_k(x, y)$, $0 \le p_k(x, y) \le 1$, $\sum_{y \in S} p_k(x, y) = 1$, $x, y \in S$, $k = 1, \dots, n$. Tuomet p_0 žymėsime vektorių su komponentėmis $p_0(x)$, $x \in S$, o Π_k – matricas $(p_k(x, y))_{x,\, y \in S}$, $k = 1, \dots, n$.

Pavyzdžiui, jei $S = \{x_1, x_2, x_3\}$, tai vektorius p_0 yra trijų skaičių rinkinys: $p_0 = (p_0(x_1), p_0(x_2), p_0(x_3))$. Matrica Π_k šiuo atveju yra lentelė, kurioje surašytos tikimybės $p_k(x_i, x_j)$, kai $i = 1, 2, 3$ ir $j = 1, 2, 3$:

$$\Pi_k = \begin{pmatrix} p_k(x_1, x_1) & p_k(x_1, x_2) & p_k(x_1, x_3) \\ p_k(x_2, x_1) & p_k(x_2, x_2) & p_k(x_2, x_3) \\ p_k(x_3, x_1) & p_k(x_3, x_2) & p_k(x_3, x_3) \end{pmatrix}.$$

5 apibrėžimas. Sakome, kad atvaizdžiai $X_k : \Omega \to S, k = 0, 1, \ldots, n$, sudaro *baigtinę Markovo grandinę* su pradiniu tikimybių vektoriumi p_0 ir perėjimo tikimybių k-jame žingsnyje matrica Π_k, jei

$$P(A_0(x_0) \cap A_1(x_1) \cap \ldots \cap A_n(x_n)) = p_0(x_0) p_1(x_0, x_1) \ldots p_n(x_{n-1}, x_n)$$

su visais $x_k \in S$, kur $A_k(x_k) = \{\omega : X_k(\omega) = x_k\}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Markovo grandinę vadiname homogeniška, jei perėjimo tikimybių matricos Π_k nepriklauso nuo k.

Paaiškinimas. Atvaizdis $X_k : \Omega \to S$ yra taisyklė, priskirianti kiekvienam aibės Ω elementui aibės S elementą. Kitaip tariant, X_k yra funkcija, kurios apibrėžimo sritis yra Ω, o reikšmės priklauso aibei S.

6 apibrėžimas. Vektorius p_k su komponentėmis $P(A_k(x))$, $x \in S$, yra vadinamas Markovo grandinės tikimybiniu skirstiniu momentu k.

3 teiginys. Markovo grandinei su pradinių tikimybių vektoriumi p_0 ir perėjimo tikimybių k-jame žingsnyje matrica Π_k galioja lygybė

$$P(A_0(x_0) \cap A_1(x_1) \cap \ldots \cap A_k(x_k)) = p_0(x_0) p_1(x_0, x_1) \ldots p_k(x_{k-1}, x_k)$$

su visais $x_j \in S$, $j = 0, 1, \ldots, k$, $k = 1, \ldots, n$ ir

$$\begin{aligned} &P(A_k(x_k) \mid A_{k-1}(x_{k-1}) \cap \ldots \cap A_1(x_1) \cap A_0(x_0)) = \\ &= P(A_k(x_k) \mid A_{k-1}(x_{k-1})) = p_k(x_{k-1}, x_k) \end{aligned}$$

su visais S, $j = 0, 1, \ldots, k$, $k = 1, \ldots, n$, kuriems

$$P(A_{k-1}(x_{k-1}) \cap \ldots \cap A_0(x_0)) > 0.$$

3 teiginio įrodymas. Turime, kad

$$\bigcup_{x \in S} A_j(x) = \{\omega : X_j(\omega) \in S\} = \Omega,$$

$$\begin{aligned} &P(A_0(x_0) \cap A_1(x_1) \cap \ldots \cap A_k(x_k)) = \\ &= P(\{\omega : X_0(\omega) = x_0, X_1(\omega) = x_1, \ldots, X_k(\omega) = x_k\}) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{x_{k+1} \in S} \ldots \sum_{x_n \in S} P(\{\omega : X_0(\omega) = x_0, \ldots, X_k(\omega) = x_k, \ldots, X_{k+1}(\omega) = x_{k+1},$$

$$\ldots, X_n(\omega) = x_n\}) = \sum_{x_{k+1}\in S} \ldots \sum_{x_n\in S} P(A_0(x_0) \cap A_1(x_1) \cap \ldots \cap A_n(x_n)) =$$

$$= \sum_{x_{k+1}\in S} \ldots \sum_{x_n\in S} p_0(x_0) p_1(x_0, x_1) \ldots p_k(x_{k-1}, x_k)\, p_{k+1}(x_k, x_{k+1}) \ldots \cdot$$

$$\cdot\, p_n(x_{n-1}, x_n) = p_0(x_0) p_1(x_0, x_1) \ldots p_k(x_{k-1}, x_k) \cdot$$

$$\cdot \sum_{x_{k+1}\in S} \ldots \sum_{x_n\in S} p_{k+1}(x_k, x_{k+1}) \ldots p_n(x_{n-1}, x_n) =$$

$$= p_0(x_0) p_1(x_0, x_1) \ldots p_k(x_{k-1}, x_k),$$

nes iš lygybių $\sum_{y\in S} p_j(x, y) = 1$, $x \in S$, $j = 1, \ldots, n$, išplaukia, jog

$$\sum_{x_{k+1}\in S} \ldots \sum_{x_n\in S} p_{k+1}(x_k, x_{k+1}) \ldots p_n(x_{n-1}, x_n) = 1\,.$$

Toliau analogiškai 1 teiginio įrodymui turime, kad

$$P(A_0(x_0) \cap A_1(x_1) \cap \ldots \cap A_k(x_k)) =$$
$$= P(A_0(x_0) \cap A_1(x_1) \cap \ldots \cap A_{k-1}(x_{k-1}))\, p_k(x_{k-1}, x_k),$$
$$P(A_{k-1}(x_{k-1}) \cap A_k(x_k)) = P(A_{k-1}(x_{k-1})) p_k(x_{k-1}, x_k)$$

ir pasinaudojus 2 apibrėžimu,

$$P(A_k(x_k) \mid A_0(x_0) \cap \ldots \cap (A_{k-1}(x_{k-1})) = p_k(x_{k-1}, x_k)$$

bei

$$P(A_k(x_k) \mid A_{k-1}(x_{k-1})) = p_k(x_{k-1}, x_k)\,. \quad \square$$

4 teiginys. Markovo grandinės skirstiniai p_k tenkina rekurentinę formulę:

$$p_k = p_{k-1}\Pi_k\,,\ k = 1, 2, \ldots\ .$$

Homogeniškai Markovo grandinei

$$p_k = p_0\, \Pi^k\,,\ k = 1, 2, \ldots\ .$$

Paaiškinimas. Matricų $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{l1} & \ldots & c_{lm} \end{pmatrix}$ ir $D = \begin{pmatrix} d_{11} & \ldots & d_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{m1} & \ldots & d_{mr} \end{pmatrix}$

sandauga apibrėžiama formule:

$$C\,D = F = \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1l} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{r1} & \dots & f_{rl} \end{pmatrix},$$

kur $f_{ik} = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} d_{jk}$, $i = 1, \dots, l$, $k = 1, \dots, r$.

Kai $l = m$, žymime $C^k = \underbrace{C \dots C}_{k\ kartų}$, $k = 1, .2, \dots$.

Kai $l = 1$, $r = m$, turime, jog

$$(c_1, \dots, c_m)\begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & \dots & d_{mm} \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^{m} c_j d_{j1}, \dots, \sum_{j=1}^{m} c_j d_{jm} \right).$$

Kai $l = r = m$, o a ir b yra skaičiai, tai

$$a\,C = \begin{pmatrix} a\,c_{11} & \dots & a\,c_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a\,c_{m1} & \dots & a\,c_{mm} \end{pmatrix}$$

ir

$$a\,C + b\,D = \begin{pmatrix} a\,c_{11} + bd_{11} & \dots & a\,c_{1m} + b\,d_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a\,c_{m1} + bd_{m1} & \dots & a\,c_{mm} + bd_{mm} \end{pmatrix}.$$

4 teiginio įrodymas. Kai $k = 1$, naudodamiesi pilnosios tikimybės formule, turime, jog

$$p_1(x_1) = P(\{\omega : X_1(\omega) = x_1\}) = \sum_{x_0 \in S} P(\{\omega : X_0(\omega) = x_0, X_1(\omega) = x_1\}) =$$

$$= \sum_{x_0 \in S} P(A_0(x_0) \cap A_1(x_1)) = \sum_{x_0 \in S} P(A_1(x_1) \mid A_0(x_0)) P(A_0(x_0)) =$$

$$= \sum_{x_0 \in S} p_0(x_0)\, p_1(x_0, x_1) .$$

Vadinasi,

$$p_1 = p_0 \Pi_1 .$$

Toliau taikome matematinę indukciją.

Tegu

$$p_{k-1} = p_{k-2}\Pi_{k-1}.$$

Tada

$$p_k(x_k) = \sum_{x_{k-1}\in S} P(A_k(x_k)) = \sum_{x_{k-1}\in S} P(A_{k-1}(x_{k-1}) \cap A_k(x_k)) =$$

$$= \sum_{x_{k-1}\in S} P(A_k(x_k) \mid A_{k-1}(x_{k-1}))\, P(A_{k-1}(x_{k-1})) =$$

$$= \sum_{x_{k-1}\in S} p_{k-1}(x_{k-1})\, p_k(x_{k-1}, x_k).$$

Tuo būdu

$$p_k = p_{k-1}\Pi_k.$$

Homogeniškos grandinės atveju $\Pi_k = \Pi$ ir matematinės indukcijos keliu randame, kad

$$p_k = p_0\Pi^k. \qquad \square$$

6 pavyzdys. Markovo schemoje pažymėję $S = \{0, 1\}$, $X_k(\omega) = \omega_k$, $k = 0, 1, \dots, n$, turime, kad X_k, $k = 0, 1, \dots, n$, yra baigtinė homogeniška Markovo grandinė su pradinių tikimybių vektoriumi $p_0 = (p_0(0),\ p_0(1))$ ir perėjimo tikimybių matrica

$$\Pi = \begin{pmatrix} p(0,0) & p(0,1) \\ p(1,0) & p(1,1) \end{pmatrix}.$$

Kai $p(0,1) > 0$ ir $p(1,0) > 0$, galioja lygybė

$$\Pi^k = \frac{1}{p(0,1) + p(1,0)}\begin{pmatrix} p(1,0) & p(0,1) \\ p(1,0) & p(0,1) \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{(1 - p(0,1) - p(1,0))^k}{p(0,1) + p(1,0)}\begin{pmatrix} p(0,1) & -p(0,1) \\ -p(1,0) & p(1,0) \end{pmatrix}, \ k = 1, \dots, n.$$

Tikrai, kai $k = 1$,

$$\frac{1}{p(0,1) + p(1,0)}\begin{pmatrix} p(1,0) & p(0,1) \\ p(1,0) & p(0,1) \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1 - p(0,1) - p(1,0)}{p(0,1) + p(1,0)}\begin{pmatrix} p(0,1) & -p(0,1) \\ -p(1,0) & p(1,0) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{p(0,1)+p(1,0)} \begin{pmatrix} p(0,0)(p(0,1)+p(1,0)) & p(0,1)(p(0,1)+p(1,0)) \\ p(1,0)(p(0,1)+p(1,0)) & p(1,1)(p(0,1)+p(1,0)) \end{pmatrix} =$$

$= \Pi$.

Toliau

$$\begin{pmatrix} p(1,0) & p(0,1) \\ p(1,0) & p(0,1) \end{pmatrix} \Pi = \begin{pmatrix} p(1,0) & p(0,1) \\ p(1,0) & p(0,1) \end{pmatrix}$$

ir

$$\begin{pmatrix} p(0,1) & -p(0,1) \\ -p(1,0) & p(1,0) \end{pmatrix} \Pi = \left(1 - p(0,1) - p(1,0)\right) \begin{pmatrix} p(0,1) & -p(0,1) \\ -p(1,0) & p(1,0) \end{pmatrix}.$$

Vadinasi, jei formulė laipsniui Π^k teisinga su duotu k, tai

$$\Pi^{k+1} = \Pi^k \Pi = \frac{1}{p(0,1)+p(1,0)} \cdot \begin{pmatrix} p(1,0) & p(0,1) \\ p(1,0) & p(0,1) \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{(1 - p(0,1) - p(1,0))^{k+1}}{p(0,1)+p(1,0)} \begin{pmatrix} p(0,1) & -p(0,1) \\ -p(0,1) & p(1,0) \end{pmatrix}.$$

Belieka pasinaudoti matematine indukcija.

5 teiginys. Kokia bebūtų baigtinė būsenų aibė S, pradinių tikimybių vektorius p_0 ir perėjimo tikimybių matricos Π_k, $k = 1, \dots, n$, egzistuoja baigtinė tikimybinė erdvė $(\hat{\Omega}, \hat{P})$ ir tokie atvaizdžiai $\hat{X}_k$: $\hat{\Omega} \to \chi$, kad $\hat{X}_0, \hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n$ yra baigtinė Markovo grandinė su pradinių tikimybių vektoriumi p_0 ir perėjimo tikimybių k-jame žingsnyje matrica Π_k, $k = 1, \dots, n$.

5 teiginio įrodymas. Užtenka paimti $\hat{\Omega} = \{\hat{\omega} : \hat{\omega} = (\hat{\omega}_0, \dots, \hat{\omega}_n),$ $\hat{\omega}_j \in S, \quad j = 0, 1, \dots, n\}$ (*imčių aibė*),

$$\hat{P}(\{\hat{\omega}\}) = p_0(\hat{\omega}_0) p_0(\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_1) \dots p_n(\hat{\omega}_{n-1}, \hat{\omega}_n),$$

$$\hat{X}_j(\hat{\omega}) = \hat{\omega}_j, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

ir pasinaudoti 5 apibrėžimu. □

Markovo grandinė, aprašyta 5 teiginyje, vadinama *kanonine*.

4. URNŲ SCHEMOS

Panagrinėsime tik kelias urnų schemas iš jų didžiulės įvairovės.

Tegu urnoje yra M baltų ir N juodų rutulių. Atsitiktinai ištraukus rutulį, jis grąžinamas į urną papildomai įdedant c tos pačios spalvos ir d priešingos spalvos rutulių; čia c ir d – bet kokie sveikieji skaičiai. Po to tęsiamas rutulių traukimas pagal tą pačią taisyklę (kai c arba d yra neigiamas skaičius, tai papildomų rutulių įdėjimas iš tikrųjų yra jų išėmimas iš urnos).

Kai $c = d = 0$, tai turėsime rutulių traukimo iš urnos schemą su grąžinimu, t.y. Bernulio schemą su balto rutulio ištraukimo tikimybe $p = \dfrac{M}{M+N}$.

Atvejis $c = -1,\ d = 0$ atitinka traukimų be grąžinimo schemą.

Kai $c = -1$, $d = 1$, turime traukimo su grąžinimu, pakeičiant rutulio spalvą į priešingą, modelį (*Erenfestų difuzijos modelis*).

Atkreipkime dėmesį, kad atveju $c + d < 0$ aprašytasis procesas pasibaigs per baigtinį traukimų skaičių.

7 pavyzdys. Tarkime, aprašytoje urnų schemoje $c = d = 0$. Tegu $X_0 = 1$, $X_k = (-1)^{N_k}$, kur N_k yra ištrauktų baltų rutulių skaičius per pirmuosius k bandymų, $k = 1, \dots, n$. Parodysime, kad X_k, $k = 0, 1, \dots, n$, yra homogeniška Markovo grandinė su būsenų aibe $S = \{-1, 1\}$, pradinių tikimybių vektoriumi $p_0 = (0, 1)$ ir perėjimo tikimybėmis

$$p(-1,-1) = \frac{N}{M+N},\ p(1,-1) = \frac{M}{M+N}.$$

Akivaizdu, kad su visais $k = 1, \dots, n$, $X_k = X_{k-1}(-1)^{Y_k}$, kur Y_k yra lygus 1, jei k-tuoju bandymu ištraukiamas baltas rutulys ir Y_k yra lygus 0, jei k-tuoju bandymu yra ištraukiamas juodas rutulys. Kadangi turime Bernulio schemą su balto rutulio ištraukimo tikimybe $p = \dfrac{M}{M+N}$, tai, žinant X_{k-1} reikšmę X_k reikšmė nepriklausys nuo pirmųjų k–1 bandymų baigčių. Tai įrodo grandinės $X_0, X_1, \dots, X_n$ markoviškumą ir jos homogeniškumą, nes būsenos k-jame žingsnyje nesikeis, jei $Y_k = 0$ ir keisis, jei $Y_k = 1$, t.y.

$$p(-1, -1) = p(1, 1) = \frac{N}{M + N}$$

ir

$$p(-1, 1) = p(1, -1) = \frac{M}{M + N}.$$

Kadangi $X_0 = 1$, tai $p_0 = (0, 1)$.

8 pavyzdys. Tarkime, urnų schemoje $c = -1,\ d = 1$. Tegu $X_0 = M$, X_k yra baltų rutulių skaičius urnoje po k traukimų, $k = 1, \ldots, n$. Parodysime, kad X_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, yra homogeniška Markovo grandinė su būsenų aibe $S = \{0,\ 1, \ldots, M + N\}$, pradinių tikimybių vektoriumi $p_0 = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{M \text{ kartų}}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{N \text{ kartų}})$, perėjimo tikimybėmis

$$p(i, i+1) = \frac{M + N - i}{M + N},\ p(i, i-1) = \frac{i}{M + N},$$

$i = 1, \ldots, M + N - 1$, $p(0, 1) = 1$, $p(M + N, M + N - 1) = 1$ ir $= 0$ kitais atvejais.

Turime, kad su visais $k = 1, \ldots, n$ $X_k = X_{k-1} + Z_k$, kur Z_k yra lygus -1, jei k-tuoju bandymu ištraukiamas baltas rutulys ir Z_k yra lygus 1, jei k-tuoju bandymu ištraukiamas juodas rutulys. Jeigu žinoma, kad $X_{k-1} = j$, tai k-tuojo bandymo metu urnoje bus j baltų rutulių ir $M + N - j$ juodų rutulių. Vadinasi, grandinė $X_0, X_1, \ldots, X_n$ bus homogeniška Markovo grandinė su tokiomis nenulinėmis perėjimo tikimybėmis.

$$p(j, j-1) = \frac{j}{M + N},\ p(j, j+1) = \frac{M + N - j}{M + N},\ j = 1, \ldots, M + N - 1,$$

$p(0, 1) = 1$ ir $p(M + N, M + N - 1) = 1$.

Kadangi $X_0 = M$, tai $p_0 = \left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{M\ kartų}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{N\ kartų}\right)$.

Baigdami aptarsime klasikinį Bernulio-Laplaso difuzijos modelį. Tegu turime dvi urnas, kuriose yra po N rutulių, iš jų M baltų,

($M \le N$) ir $2N - M$ juodų. Iš abiejų urnų vienu metu atsitiktinai traukiame po rutulį ir juos grąžiname, sukeisdami vietomis.

9 pavyzdys. Tegu X_k yra baltų rutulių skaičius pirmojoje urnoje po k traukimų, $k = 0, 1, \ldots, n$. Parodysime, kad X_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, yra homogeniška Markovo grandinė su būsenų aibe $S = \{0, 1, \ldots, M\}$, perėjimo tikimybėmis

$$p(j, j-1) = \frac{j}{N}\left(1 - \frac{M-j}{N}\right), \; j = 1, \ldots, M,$$

$$p(j, j) = 1 - \frac{M}{N} + \frac{2j(M-j)}{N^2}, \; j = 0, 1, \ldots, M,$$

$$p(j, j+1) = \frac{(N-j)\,(M-j)}{N^2}, \; j = 0, 1, \ldots, M-1,$$

ir $= 0$ kitais atvejais.

Akivaizdu, kad su visais $k = 0, 1, \ldots, n$ $X_k = X_{k-1} + V_k$, kur V_k yra lygus -1, jei k-tuoju bandymu iš pirmosios urnos ištraukiamas baltas rutulys, o iš antrosios urnos ištraukiamas juodas rutulys. V_k yra lygus 0, jei iš abiejų urnų k-tuoju bandymu ištraukiami tos pačios spalvos rutuliai, ir V_k yra lygus 1, jei iš pirmosios urnos ištraukiamas juodas rutulys, o iš antrosios urnos ištraukiamas baltas rutulys. Jeigu žinoma, kad $X_{k-1} = j$, $0 \le j \le M$, tai k-tuojo bandymo metu pirmojoje urnoje bus j baltų ir $N - j$ juodų rutulių, o antrojoje urnoje bus $M - j$ baltų ir $N - M + j$ juodų rutulių. Kadangi traukimai iš abiejų urnų yra atliekami tuo pačiu metu ir nepriklausomai, tai įrodo, kad grandinė $X_0, X_1, \ldots, X_n$ yra homogeniška Markovo grandinė su aukščiau nurodytomis perėjimo tikimybėmis.

Įdomūs ir svarbūs uždaviniai, iškylantys nagrinėjant baigtines Markovo grandines, yra perėjimo tikimybių matricų Π laipsnių kuo paprastesni apskaičiavimo algoritmai, o taip pat sąlygų, kada egzistuoja Π^n ribos, kai n tolsta į begalybę, ištyrimas. Jie siejasi su grafų teorija bei gilesne matricų teorija, tačiau tai jau atskira tema.

L i t e r a t ū r a

1. A.Plikusas, *Kombinatorikos, tikimybių teorijos ir statistikos pradmenys*, K. „Šviesa“, 2000.

2. V.Liutikas, *Kaip skaičiuoti tikimybes*, K. „Šviesa“, 1972.

3. S.Liutikienė, V.Liutikas, *Elementarioji tikimybių teorija ir statistika,* K. „Šviesa“, 1996.

4, A.Matuliauskas, *Vektoriai ir matricos,* V. „Mokslas“, 1980.

S E P T I N T O J I   U Ž D U O T I S

1. Patikrinkite, kad Bernulio schemoje

$$\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\}) = 1 .$$

2. Įrodykite, kad Bernulio schemoje įvykiai

$$A_k(i_k) = \{\omega : \omega_k = i_k\},\ i_k \in \{0, 1\},\ k = 0, 1, \dots, n,$$

yra nepriklausomi ir

$$P(A_k(i_k)) = p^{i_k}(1-p)^{1-i_k},\ k = 0, 1, \dots, n .$$

3. Patikrinkite, kad Markovo schemoje

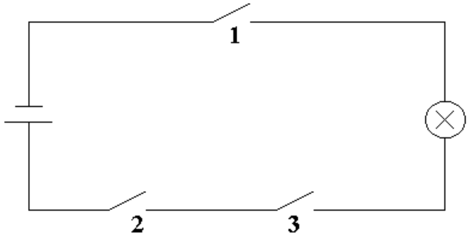
$$\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\}) = 1 .$$

4. Patikrinkite, kad tuo atveju, kai $p_0(1) = p(i, 1) = p, \quad i = 0, 1,$ Markovo schema sutampa su Bernulio schema.

5. Įrodykite, kad Bernulio schemoje $|\Omega| = 2^{n+1}$ ir, kai $p = \dfrac{1}{2}$, $P(\{\omega\}) = |\Omega|^{-1}$, t.y. turime klasikinio modelio atvejį.

6. Urnoje yra 2 balti ir 3 juodi rutuliai, kurie, gerai išmaišius, traukiami be grąžinimo. Apibrėžkite atitinkamą tikimybinę erdvę ir įrodykite, kad tikimybės įvykių, jog pirmuoju ir paskutiniuoju traukimu bus ištraukti balti rutuliai yra lygios. Raskite tas tikimybes.

7. Turime elektros grandinę (žr. pav.), kurioje kontaktai 1, 2 ir 3 gali būti sujungti arba atjungti nepriklausomai vienas nuo kito su lygiomis tikimybėmis 1/2.



Apibrėžkite atitinkamą tikimybinę erdvę ir raskite tikimybę įvykio, jog lemputė nedegs. Raskite sąlyginę tikimybę, jog kontaktas 1 atjungtas, jei žinoma, kad lemputė nedega.

8. Matematinės indukcijos būdu įrodykite, kad kai $\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-q & q \end{pmatrix}$, tai $\Pi^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-q^k & q^k \end{pmatrix}$, $k = 1, 2, \ldots$.

9. Matematinės indukcijos būdu įrodykite, kad $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, kai k lyginis natūralusis skaičius, ir $= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, kai k yra nelyginis natūralusis skaičius.

10. Tegu orų kaitą iš giedros į ūkanotą ir atvirkščiai aprašo homogeniška Markovo grandinė su perėjimo tikimybių matrica $\Pi = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$. Raskite tikimybę, kad poryt bus giedra diena, jei žinoma, kad šiandien yra giedra.

VIII. KOORDINAČIŲ SISTEMOS. ŽEMĖLAPIAI

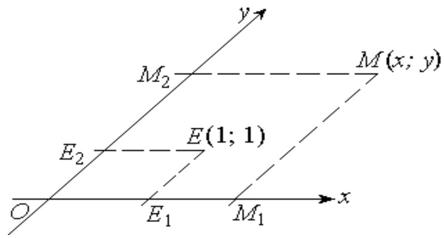
Algimantas Juozapavičius (Vilniaus universitetas)
Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

Mokykloje susipažinote su plokštumos ir erdvės stačiakampėmis Dekarto koordinačių sistemomis.

Šiame straipsnelyje nagrinėsime kitas plokštumos ir erdvės koordinačių sistemas, kurios taikomos sprendžiant įvairias matematines problemas kartografijoje, navigacijoje ir pan.

1. PLOKŠTUMOS PRAŽULNIOJI KOORDINAČIŲ SISTEMA

Pasirinkime dvi susikertančias (nestatmenas) plokštumos tieses (1 pav.). Jų susikirtimo tašką pažymėkime O ir kiekvienoje iš jų pasirinkime tašką E_1 ir E_2. Taškui O priskirkime skaičių porą $(0; 0)$, taškui E_1 – skaičių porą $(1; 0)$, o taškui E_2 – $(0; 1)$. Tiesė OE_1 vadinama



1 pav.

x-ų ašimi, o tiesė OE_2 – y-ų ašimi. Gauta koordinačių sistema vadinama *pražulniąja*. Dabar kiekvienam plokštumos taškui M galima priskirti skaičių porą – jo koordinates. Per tašką M brėžiame tieses, lygiagrečias su koordinačių ašimis. Jos kerta koordinačių ašis taškuose M_1 ir M_2. Skaičiai $x = \dfrac{OM_1}{OE_1}$, $y = \dfrac{OM_2}{OE_2}$ – taško M koordinatės. Teisingas ir atvirkščias teiginys: bet kuriai skaičių porai $(x; y)$ galima rasti plokštumos tašką M, kurio koordinatės yra šie skaičiai.

Užrašysime keletą formulių.

1) Tiesės, einančios per du taškus $A(x_A;\, y_A)$ ir $B(x_B;\, y_B)$, lygtis

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}.$$

2) Taško C, dalijančio atkarpą tarp taškų $A(x_A;\, y_A)$ ir $B(x_B;\, y_B)$ santykiu λ, t. y. $\frac{AC}{CB} = \lambda$, koordinatės yra

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda},\ y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}.$$

3) Atstumo tarp dviejų taškų $A(x_A;\, y_A)$ ir $B(x_B;\, y_B)$ formulė

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + 2(x_B - x_A)(y_B - y_A)\cos\omega};$$

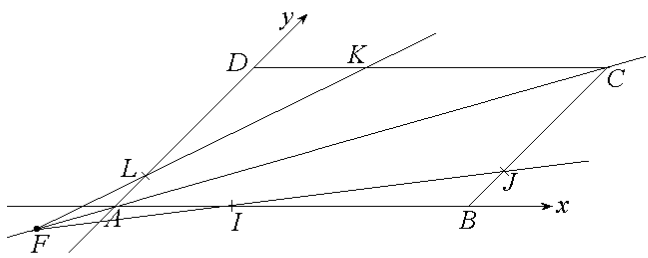
čia ω – kampas tarp koordinačių ašių.

4) Trikampio ABC ploto, kai žinomos jo viršūnių koordinatės, formulė

$$S = \frac{\sin\omega}{2}\left[x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)\right].$$

Pražulnioji koordinačių sistema efektyviai taikoma sprendžiant uždavinius, kuriuose nereikia ieškoti atstumų, kampų didumų.

1 pavyzdys. Keturkampis $ABCD$ yra lygiagretainis. Jo kraštinėse AB, BC, CD ir DA pažymėti taškai I, J, K ir L; be to, $AI = \frac{1}{3}AB$, $BJ = \frac{1}{4}BC$, $CK = \frac{2}{3}CD$ ir $DL = \frac{3}{4}DA$ (2 pav.).



2 pav.

Įrodysime, kad tiesės IJ, AC ir KL susikerta viename taške.

Sprendimas. Tegu tiesė AB yra x-ų ašis, tiesė AD – y-ų ašis, o taškų A, B ir D koordinatės yra: $A(0;0)$, $B(1;0)$, $D(0;1)$. Tuomet gausime tokias taškų I, J, K ir L koordinates: $I\left(\frac{1}{3};0\right)$, $J\left(1;\frac{1}{4}\right)$, $C(1;1)$, $K\left(\frac{1}{3};1\right)$, $L\left(0;\frac{1}{4}\right)$. Parašysime tiesių AC, IJ ir KL lygtis:

$$AC:\ y = x,$$

$$IJ:\ \frac{x-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{y-0}{\frac{1}{4}} \Rightarrow 3x-8y-1=0;$$

$$KL:\ \frac{x-0}{\frac{1}{3}} = \frac{y-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} \Rightarrow 9x-4y+1=0.$$

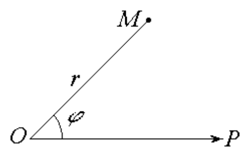
Nesunku įsitikinti, kad lygčių sistema

$$\begin{cases} x-y=0, \\ 3x-8y-1=0, \\ 9x-4y+1=0 \end{cases}$$

turi vienintelį sprendinį $\left(-\frac{1}{5};-\frac{1}{5}\right)$. Taigi visos trys tiesės eina per tašką $F\left(-\frac{1}{5};-\frac{1}{5}\right)$.

2. POLINĖ KOORDINAČIŲ SISTEMA

Plokštumoje pasirinkime tašką O ir spindulį OP (3 pav.). Bet kurio plokštumos taško M padėtį galima nusakyti to taško atstumu r iki O ($OM = r$) ir kampu φ, kurį sudaro OM su OP. Taškui M priskirti skaičiai $(r;\varphi)$ vadinami jo polinėmis koordinatėmis ($0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$).



3 pav.

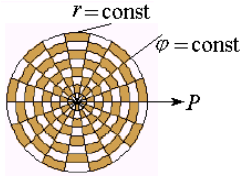
Taškas O vadinamas *poliumi*, o spindulys OP – *poline ašimi*.

Jeigu Dekarto koordinačių sistemą pasirinksime taip, kad polinė ašis sutaptų su Ox ašimi, o Oy ašis – statmena polinei ašiai, tai ryšys tarp taško M polinių ir Dekarto koordinačių yra toks:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

($y \geq 0$, $x > 0$, $0 \leq \varphi < \dfrac{\pi}{2}$; $x \leq 0$, $y > 0$, $\dfrac{\pi}{2} \leq \varphi < \pi$, $y \leq 0$, $x < 0$, $\pi \leq \varphi < \dfrac{3\pi}{2}$, $y < 0$, $x \geq 0$, $\dfrac{3\pi}{2} \leq \varphi < 2\pi$).

Polinės koordinačių sistemos koordinatinis tinklas pavaizduotas 4 pav.



4 pav.

Apskritimo, kurio spindulys a, o centras O, lygtis yra $r = a$. Tiesės, einančios per polių ir su poline ašimi sudarančios kampą α, lygtis yra $\varphi = \alpha$.

Nesunku įsitikinti, kad apskritimo, kurio centras $(a; 0)$, o spindulys a, lygtis polinėje koordinačių sistemoje yra $r = a\cos\varphi$. Lygtis apskritimo, kurio centras $(0; a)$, o spindulys a, polinėje koordinačių sistemoje yra $r = a\sin\varphi$.

Atstumas tarp dviejų taškų $A(r_A; \varphi_A)$ ir $B(r_B; \varphi_B)$ skaičiuojamas pagal formulę

$$AB = \sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B \cos(\varphi_B - \varphi_A)},$$

o trikampio OAB (viršūnė O yra poliuje) plotas – pagal formulę

$$S = \frac{1}{2} r_A \cdot r_B \cdot \sin(\varphi_B - \varphi_A).$$

2 pavyzdys. Polinėje ašyje rasime tašką, nutolusį 5 vienetų atstumu nuo taško $A\left(4\sqrt{2}; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

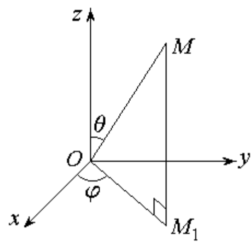
Sprendimas. Sakykime, kad taškas $M(r; 0)$ nutolęs 5 vienetų atstumu nuo taško A. Tuomet

$$\sqrt{r^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2 \cdot r \cdot 4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}} = 5,$$

t.y. $r^2 - 8r + 32 = 25$. Iš čia $r_1 = 1$, $r_2 = 7$. Taigi yra du taškai, $M_1(1; 0)$ ir $M_2(7; 0)$, nuo taško $A\left(4\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$ nutolę 5 vienetų atstumu.

3. SFERINĖS KOORDINATĖS

Taško M padėtį erdvėje galima nustatyti (turint stačiakampę Dekarto koordinačių sistemą) šio taško atstumu ρ ($0 \le \rho < +\infty$) iki koordinačių pradžios O, kampu θ tarp OM ir ašies Oz ($0 \le \theta \le \pi$) ir kampu φ tarp OM projekcijos į Oxy plokštumą OM_1 ir Ox ašies, $0 \le \varphi < 2\pi$ (5 pav.).



5 pav.

Koordinatės (ρ, φ, θ) vadinamos taško M *sferinėmis koordinatėmis*. Jų ryšys su Dekarto stačiakampėmis koordinatėmis nusakomas formulėmis:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\cos\theta, \\ z = \rho\cos\theta. \end{cases}$$

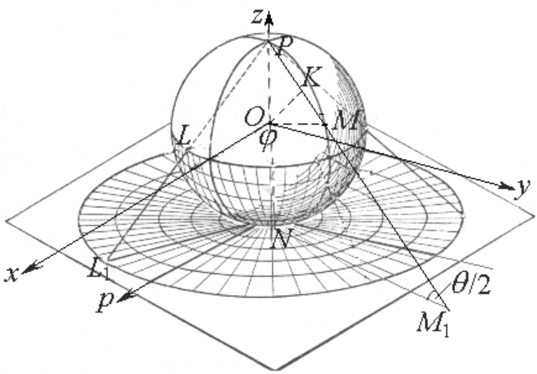
Kai $\rho = a$, o taško M koordinatės φ ir θ kinta, taškas M aprašo sferą, kurios spindulys lygus a, o centras yra Dekarto koordinačių pradžioje. Taigi koordinatės φ ir θ yra taško M koordinatės ant sferos.

4. STEREOGRAFINĖ PROJEKCIJA

Nagrinėsime sferą, kurios spindulys R. Dekarto koordinačių sistema pasirenkama kaip parodyta 6 pav. Per sferos tašką $N(0; 0; -R)$ nubrėžiame liečiamąją plokštumą w. Sferos taškus iš taško $P(0; 0; R)$ projektuojame į plokštumą w. Pavyzdžiui, taško M projekcija liečiamojoje plokštumoje yra taškas M_1, o taško L – taškas L_1. Didžiųjų sferos apskritimų, kurių skersmuo NP, projekcijos yra tiesės, einančios per tašką N, o apskritimų, gautų kertant sferą plokštumomis, statmenomis Oz ašiai, apskritimai. Toks sferos taškų projektavimas į liečiamąją plokštumą vadinamas *sferos stereografine projekcija*.

Pusapskritimis, kuris eina per taškus P, N ir $(R; 0; 0)$, projektuosis į spindulį Np. Jį laikysime poline ašimi. Rasime taško M_1 polines koordinates, jei taško M koordinatės ant sferos yra $(\varphi; \theta)$. Lygiašoniame trikampyje OMP išvedame aukštinę OK. Kadangi $\angle\, OPK = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$, tai $\angle\, PM_1N = \frac{\theta}{2}$ ir $NM_1 = PN \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = 2R \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$.

Taigi taško M_1 koordinatės yra $\left(2R \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}; \varphi\right)$.



6 pav.

3 pavyzdys. Rasime atstumą tarp spindulio R sferos taškų $A\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$ ir $B\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$ ir jų vaizdų stereografinėje projekcijoje (plokštumoje).

Sprendimas. Pastebėsime, kad taškų A ir B antrosios koordinatės yra lygios. Vadinasi, jie yra apskritime, kurį iškerta plokštuma, statmena Oz ašiai ir nuo centro O nutolusi atstumu $R\cos\frac{\pi}{3} = \frac{R}{2}$. Šio apskritimo spindulys $r = R\sin\frac{\pi}{3} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Taigi atstumas tarp taškų A ir B lygus apskritimo, kurio spindulys $\frac{R\sqrt{3}}{2}$, lanko, turinčio $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$ radianų, ilgiui $\breve{AB} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5\pi}{12} = \frac{5\pi\ R\sqrt{3}}{24} \approx 1{,}13R$. Šių taškų vaizdų A_1 ir B_1 polinės koordinatės yra: $A_1\left(2R\ \mathrm{ctg}\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right)$, $B_1\left(2R\ \mathrm{ctg}\frac{\pi}{6};\ \frac{3\pi}{4}\right)$. Atstumas tarp šių taškų yra

$$A_1B_1 = \sqrt{4R^2 \cdot 3 + 4R^2 \cdot 3 - 2 \cdot 4R^2 \cdot 3\cos\frac{5\pi}{12}} =$$

$$= \sqrt{24R^2 - 24R^2\cos\frac{5\pi}{12}} = R\sqrt{24} \cdot \sqrt{1-\cos\frac{5\pi}{12}} =$$

$$= R\sqrt{24} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\frac{5\pi}{24} = 4R\sqrt{3} \cdot \cos\frac{5\pi}{24} \approx 5{,}5R.$$

5. CILINDRINĖ KOORDINAČIŲ SISTEMA

Ši sistema yra vienas iš galimų polinės koordinačių sistemos apibendrinimų trimatėje erdvėje. Jei per polinės sistemos koordinačių pradžią O iškelsime statmenį šios sistemos plokštumai (tiesę z), tada kiekvieno taško M padėtį erdvėje galėsime nusakyti trimis skaičiais: (r, φ, z) – tai ir bus taško cilindrinės koordinatės (7 pav.).

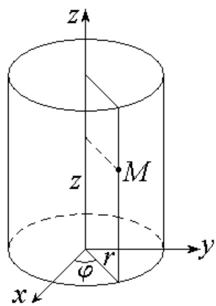
Gana nesudėtinga išvesti formules, siejančias cilindrines ir Dekarto koordinates:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z; \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\varphi = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{y}{r}\right), & \text{jeigu } x \ge 0, \\ \pi - \arcsin\left(\frac{y}{r}\right), & \text{jeigu } x < 0, \end{cases}$$

$$z = z.$$



7 pav.

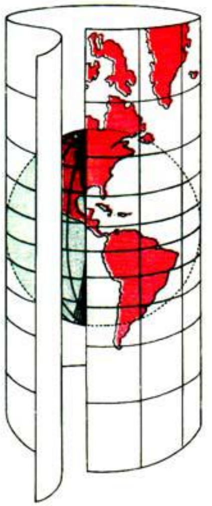
Siūlome išspręsti kelis pratimus.

Pratimai:

1. Raskite cilindrines koordinates taško, kurio Dekarto koordinatės yra $(1, 2, 3)$. Raskite Dekarto koordinates taško, kurio cilindrinės koordinatės yra: $\left(2; \dfrac{\pi}{4}; 3\right)$.

2. Parašykite rutulio, kurio centras yra koordinačių pradžioje, o spindulys lygus R, lygtį Dekarto ir cilindrinėse koordinačių sistemose.

3. Parašykite paviršiaus lygtį cilindrinėse koordinatėse, jeigu jo lygtis Dekarto sistemoje yra $z = x^2 + y^2$.



8 pav.

Cilindrinė koordinačių sistema populiari kartografijoje (8 pav.).

Iš šio paveikslėlio taip pat matosi ryšys tarp cilindrinių ir sferinių koordinačių. Perėjimo formulės yra tokios:

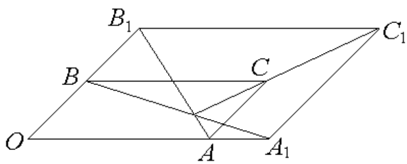
$$\begin{cases} r = \rho \sin \varphi, \\ z = \rho \cos \varphi, \text{ (iš cilindrinės į sferinę);} \\ \varphi = \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{r^2 + z^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{r}{z} \end{cases} \quad \text{(iš sferinės į cilindrinę).}$$

Lengvas pratimas: išreikškite $\sin \varphi$ ir $\cos \varphi$ cilindrinėmis koordinatėmis.

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Brėžinyje pavaizduoti du lygiagretainiai $OACB$ ir $OA_1C_1B_1$. Įrodykite, kad tiesės AB_1, BA_1 ir CC_1 susikerta viename taške.



Nurodymas. Pasirinkite pražulnią koordinačių sistemą taip, kad tiesės OA ir OB būtų koordinačių ašimis, be to, taškų O, A ir B koordinatės – $O(0;0)$; $A(1;0)$, $B(0;1)$. Pasirinkę taškų A_1 ir B_1 koordinates, pavyzdžiui, $A_1(a;0)$, $B_1(0;b)$, parašykite tiesių A_1B, AB_1 ir CC_1 lygtis ir įsitikinkite, kad jos eina per vieną tašką.

2. Taškai A_1, B_1 ir C_1 – trikampio ABC kraštinių BC, AC ir AB vidurio taškai, o taškas M – bet kuris plokštumos taškas. Taškai P, Q ir R – simetriški taškui M taškų A_1, B_1 ir C_1 atžvilgiu. Įrodykite, kad tiesės AP, BQ ir CR kertasi viename taške.

Nurodymas. Pasirinkite koordinačių sistemą taip, kad taškai A, B ir C turėtų koordinates: $A(0;0)$, $B(1;0)$ ir $C(0;1)$.

1) Apskaičiuokite taškų A_1, B_1 ir C_1 koordinates.

2) Taško M koordinates pažymėję x ir y, raskite taškų P, Q ir R koordinates.

3) Apskaičiuokite atkarpos AP vidurio taško L koordinates ir įrodykite, kad L yra atkarpų BQ ir CR vidurio taškas.

3. Apskaičiuokite plotą ir perimetrą trikampio ABC, kurio viršūnės (polinėse koordinatėse): $A\left(9;\dfrac{\pi}{10}\right)$, $B\left(12;\dfrac{\pi}{3}\right)$ ir $C\left(10;\dfrac{3\pi}{5}\right)$.

4. Nustatykite polines koordinates viršūnių taisyklingojo šešiakampio, kurio kraštinė lygi a, laikant poliumi vieną jo viršūnę, o poline ašimi – spindulį, išeinantį iš tos viršūnės, kuriam priklauso šešiakampio kraštinė.

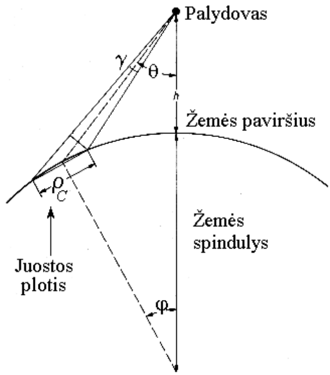
5. Kūgio lygtis Dekarto koordinatėse yra $x^2+y^2=3z^2$. Parašykite šio kūgio lygtį sferinėse koordinatėse.

6. Nubrėžkite paviršių, kurio lygtis cilindrinėje koordinačių sistemoje yra $z=r+\varphi$, kai r ir φ kinta intervale [0, 2].

7. Nubrėžkite paviršių, kurio lygtis sferinėje koordinačių sistemoje yra $\theta=\rho+\varphi$, kai ρ ir φ kinta intervale [0, 2].

8. Tarkime, kad Vilnius ir Talinas yra toje pačioje geografinėje ilgumoje (25 laipsniai į rytus nuo Grinvičo meridiano), o jų geografinės platumos yra atitinkamai lygios 54 ir 59 laipsniai (į šiaurę nuo ekvatoriaus). Žemės rutulio spindulys yra lygus apytikriai 6300 km. Koks atstumas tarp Vilniaus ir Talino žemėlapyje, kuris nubraižytas cilindrinėje koordinačių sistemoje? Kokia šio atstumo paklaida, lyginant jį su realiu atstumu, matuojamu ant Žemės paviršiaus?

9. Palydovas, skrisdamas virš Žemės paviršiaus aukštyje h, skenuoja Žemės paviršių bangų pluoštu, sudarančiu kampą θ su vertikale, nukreipta į Žemės centrą, o skenuojančio bangų pluošto skleistinis kampas yra lygus γ. Raskite skenuojamo Žemės paviršiaus juostos plotį ρ_C (Žemės spindulys yra lygus r).



9 pav.

10. Dviejų geografinių taškų, esančių toje pačioje ilgumoje, platumų skirtumas yra lygus 30 laipsnių. Jei atstumą tarp šių taškų matuosime žemėlapyje cilindrinėje koordinačių sistemoje, tai atstumo paklaida bus tuo didesnė, kuo tie taškai bus didesnėje geografinėje platumoje. Kokioms platumoms atstumų paklaida viršys 5 %?

BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

A.Apynis, E.Stankus (Vilniaus universitetas),
J.Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

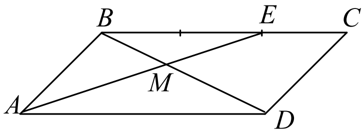
1 variantas

1. Raskite parametro p reikšmę, su kuria lygties $x^2 - 4x + p = 0$ šaknų kvadratų suma lygi 16.

2. Išspręskite nelygybę $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + |x - 5| < 4$.

3. Į statųjį trikampį įbrėžto ir apie jį apibrėžto apskritimų spinduliai atitinkamai lygūs 2 cm ir 5 cm. Raskite trikampio kraštines.

4. Keturkampis $ABCD$ yra lygiagretainis, $BE = \frac{2}{3}BC$. Atkarpa AE kerta įstrižainę BD taške M. Raskite figūros $DMEC$ plotą, jeigu $S_{ABCD} = 120\ cm^2$.



5. Du krepšininkai, Šarūnas ir Arvydas, meta po vieną baudos metimą. Tikimybė, kad Šarūnas pataikys, lygi 0,8, o tikimybė, kad Arvydas nepataikys, yra 0,15. Raskite tikimybę, kad bent vieno krepšininko metimas bus taiklus.

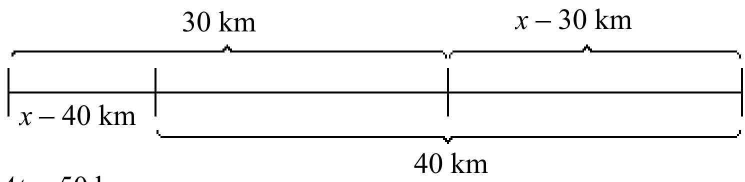
Užduočių sprendimai

STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Sakykime, kad atstumas tarp vietovių A ir B yra x km. Kadangi atstumų, nuvažiuotų per tą patį laiką santykis lygus greičių santykiui, tai nuvažiuotų atstumų santykiai yra lygūs:

$$\frac{30}{x-30}=\frac{x+40}{2x-40}.$$

Išsprendę šią lygtį, gauname: $x=50$ km.



Ats.: 50 km.

2. Vieno, dviejų, trijų ir keturių kambarių butų skaičius pažymėkime atitinkamai n_1, n_2, n_3 ir n_4.

Pagal uždavinio sąlygą gauname tokius sąryšius tarp nežinomųjų:

1) $n_1+n_2+n_3+n_4>100$;

2) $n_2=4n_1$;

3) $n_3=kn_1$, k – didesnis už 1 natūralusis skaičius;

4) $5n_3=n_2+143$.

Iš jų galima sudaryti tokią sistemą:

$$\begin{cases} n_1+n_2+n_3+n_4>100, \\ 5kn_1=4n_1+143. \end{cases}$$

Atlikę veiksmus, gauname

$$\begin{cases} (5+k)\,n_1+n_4>100, \\ (5k-4)\,n_1=143. \end{cases}$$

Skaičiams k ir n_1 rasti nagrinėjame skaičiaus 143 daliklius: 1, 11, 13 ir 143. Taikome variantų analizės metodą:

1) $5k-4=1$, $n_1=143$;

2) $5k-4=11$, $n_1=13$;

3) $5k-4=13$, $n_1=11$;

4) $5k-4=143$, $n_1=1$.

Trečiuoju ir ketvirtuoju atveju k nėra sveikasis skaičius. Pirmasis atvejis irgi netinka, nes gauname $k=1$. Tik antruoju atveju gauname priimtiną atsakymą: $k=3$, $n_1=13$.

Ats.: 13.

3. Reiškinį x^3-3x^2+2x išskaidykime dauginamaisiais:

$$x^3-3x^2+2x=x(x^2-3x+2)=x(x-2)(x-1).$$

Kai x sveikasis skaičius, tai sandauga $x(x-2)(x-1)$ yra lyginis sveikasis skaičius (tarp trijų gretimų sveikųjų skaičių $x-2$, $x-1$ ir x bent vienas yra lyginis).

Kadangi lyginio skaičiaus $x(x-1)(x-2)$ ir nelyginio skaičiaus 1999 suma nelygi nuliui, tai lygtis $x(x-2)(x-1)+1999=0$, sveikųjų sprendinių neturi. Sveikųjų sprendinių neturi ir jai ekvivalenti lygtis $x^3-3x^2+2x+1999=0$.

4. Pirmiausia pertvarkome sistemą:

$$\begin{cases}(x^2-y^2)(x^2+y^2)=15,\\ xy(x^2-y^2)=6.\end{cases}$$

Kadangi $x^2-y^2\neq 0$, tai $\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{15}{6}$.

Iš čia

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2}.$$

Spręsdami šią lygtį pažymėkime $\dfrac{x}{y}=z$ ir gauname kvadratinę lygtį $2z^2-5z+2=0$. Jos šaknys yra $z_1=2$ ir $z_2=\dfrac{1}{2}$. Taigi

$\dfrac{x}{y} = 2$ arba $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}$.

Kai $\dfrac{x}{y} = 2$, tai $x = 2y$. Įrašę į sistemos antrąją lygtį, gauname $6y^4 = 6$. Vadinasi, $y = -1$ arba $y = 1$. Gauname du sistemos sprendinius: $(-2; -1)$ ir $(2; 1)$.

Kai $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}$, tai $y = 2x$. Įrašę į sistemos antrąją lygtį, gauname lygtį $-6x^4 = 6$, neturinčią sprendinių. Šiuo atveju sistema sprendinių neturi.

Ats.: $(-2; -1)$, $(2; 1)$.

5. $\sin 70^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 10^\circ = \dfrac{2\cos 70^\circ \cdot \sin 70^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 10^\circ}{2\cos 70^\circ} =$

$= \dfrac{\sin 140^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 10^\circ}{2\cos 70^\circ} = \dfrac{\cos 50^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 10^\circ}{2\cos 70^\circ} =$

$= \dfrac{\sin 100^\circ \cdot \sin 10^\circ}{4\cos 70^\circ} = \dfrac{\cos 10^\circ \cdot \sin 10^\circ}{4\cos 70^\circ} = \dfrac{\sin 20^\circ}{8\cos 70^\circ} = \dfrac{\cos 70^\circ}{8\cos 70^\circ} = \dfrac{1}{8}$.

6. Kadangi $x \square y = \left(\dfrac{x}{y} \cdot y\right) \square y = \dfrac{x}{y}\left(y \square y\right) = \dfrac{x}{y}$, tai operacija $\square$ yra dalybos veiksmas. Taigi $12 \square 20 = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$.

7. 1) $\left(\dfrac{b}{b-a}\right)^{-2} - \dfrac{(a+b)^2 - 4ab}{a^2 - ab} = \dfrac{(b-a)^2}{b^2} - \dfrac{(a-b)^2}{a(a-b)} =$

$= \dfrac{(b-a)^2}{b^2} - \dfrac{a-b}{a} = (b-a) \cdot \left(\dfrac{b-a}{b^2} + \dfrac{1}{a}\right) =$

$= \dfrac{(b-a) \cdot (ab - a^2 + b^2)}{a \cdot b^2} = \dfrac{(a-b) \cdot (a^2 - ab - b^2)}{a \cdot b^2}$;

2) $\dfrac{(a-b)\cdot(a^2-ab-b^2)}{a\cdot b^2}\cdot\dfrac{a}{a^2b-ab^2-b^3}=$

$=\dfrac{(a-b)\cdot(a^2-ab-b^2)\cdot a}{a\cdot b^2\cdot b\cdot(a^2-ab-b^2)}=\dfrac{a-b}{b^3}$.

Ats.: $\dfrac{a-b}{b^3}$.

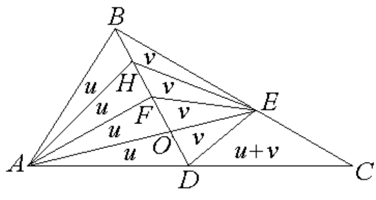
8. Pažymėkime $t=\dfrac{15x^2-1}{28x}$. Įrašę į lygtį, gauname:

$$t+\frac{1}{4t}=1,\quad \frac{4t^2-4t+1}{4t}=0.$$

Kadangi $t\neq 0$ (nes $15x^2-1\neq 0$), tai $4t^2-4t+1=0$. Iš čia $t=0{,}5$. Belieka išspręsti lygtį $\dfrac{15x^2-1}{28x}=0{,}5$. Gauname $x_1=1$ ir $x_2=-\dfrac{1}{15}$.

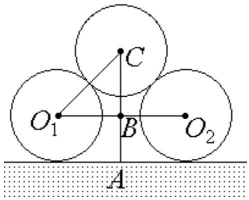
Ats.: $-\dfrac{1}{15}$.

9. Jei trikampio *AOD* plotą pažymėtume *u,* o trikampio *EOD* plotą – *v*, tada $S_{\Delta AOD}=S_{\Delta AOF}=S_{\Delta AFH}=S_{\Delta AHB}=u$, o $S_{\Delta DEO}=S_{\Delta OEF}=S_{\Delta FEH}=S_{\Delta EHB}=v$, nes atitinkamųjų trikampių kraštinės lygios, o aukštinės tos pačios. (*Žr.* 1 pav.) $S_{\Delta ADE}=S_{\Delta ADO}+S_{\Delta DOE}=u+v=S_{\Delta EDC}$ dėl tos pačios priežasties. Dabar $S_{\Delta AEC}:S_{\Delta ABC}=(2u+2v):(5u+5v)=\dfrac{2}{5}$.



1 pav.

10. Atstumai tarp gretimų besiliečiančių ant stalo padėtų rutulių centrų lygūs 10 cm. Todėl pagal Pitagoro teoremą vienas prieš kitą esančių rutulių centrai yra nutolę per $\sqrt{10^2+10^2} =$ $=\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ cm. Dabar galime spręsti plokštumos uždavinį (*žr.* 2 pav.), kuriame reikia surasti atkarpos AC ilgį.



2 pav.

Iš stačiojo trikampio O_1CB pagal Pitagoro teoremą gauname

$$BC = \sqrt{O_1C^2 - O_1B^2} = \sqrt{100-(5\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Todėl penktojo rutulio centro atstumas nuo stalo plokštumos lygus: $AC = 5 + 5\sqrt{2} = 5(1+\sqrt{2})$ cm.

PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. a) Funkcija apibrėžta su visomis x reikšmėmis, tenkinančiomis nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \ge 0, \\ 35 + 2x - x^2 > 0. \end{cases}$$

Išsprendę ją gauname: $x \in (-5; -3] \cup [4; 7)$.

Ats. $(-5; -3] \cup [4; 7)$.

b) Funkcija yra apibrėžta tik viename taške, kai $a-3<0$ ir $(a+3)^2-(a-3)(a+1)=0$. Išsprendę sistemą

$$\begin{cases} a-3<0, \\ (a+3)^2-(a-3)(a+1)=0, \end{cases}$$

gauname $a=-1{,}5$.

Ats. Funkcija apibrėžta tik viename taške, kai $a=-1{,}5$.

Pastaba. Kai $a=-1{,}5$, nagrinėjama funkcija yra tokia:

$f(x)=\sqrt{-\frac{1}{2}(3x-1)^2}$. Ji apibrėžta tik viename taške $x=\frac{1}{3}$.

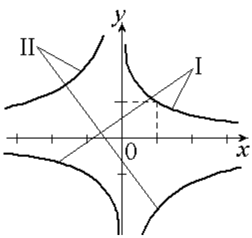
2. a) Duotąją funkciją perrašome taip:

$$f(x)=\left|\frac{8-3|x|}{|x|-2}\right|=\left|\frac{3|x|-8}{|x|-2}\right|=\left|3-\frac{2}{|x|-2}\right|.$$

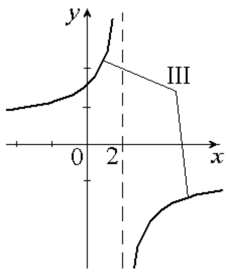
Jos grafiką gausime iš funkcijos $g(x)=\dfrac{1}{x}$ grafiko, atlikę šitokias transformacijas:

$$\overset{\text{I}}{\frac{1}{x}}\to\overset{\text{II}}{-\frac{2}{x}}\to\overset{\text{III}}{-\frac{2}{x-2}}\to\overset{\text{IV}}{3-\frac{2}{x-2}}\to\overset{\text{V}}{3-\frac{2}{|x|-2}}\to\overset{\text{VI}}{\left|3-\frac{2}{|x|-2}\right|}.$$

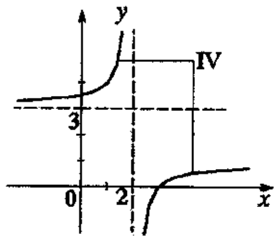
Funkcijos $f(x)=\left|\dfrac{8-3|x|}{|x|-2}\right|$ grafiko brėžimo etapai pavaizduoti 1–5 pav.



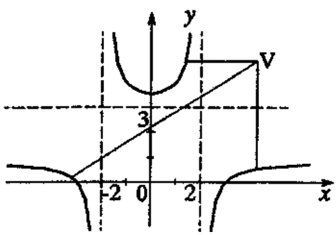
1 pav.



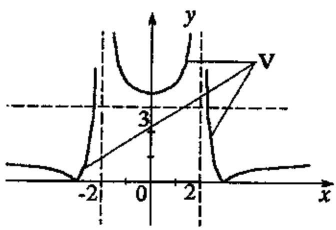
2 pav.



3 pav.



4 pav.



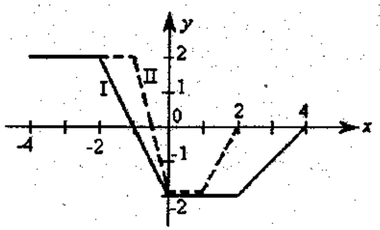
5 pav.

b) Atliksime šitokias funkcijos $y=f(x)$ grafiko transformacijas:

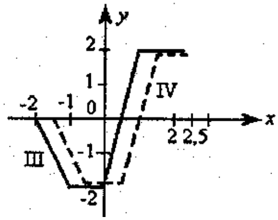
$$\overset{\text{I}}{f(x)} \to \overset{\text{II}}{f(2x)} \to f(2(-x)) \to \overset{\text{III}}{f(-2x)} \to f\left(-2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) \equiv$$

$$\equiv \overset{\text{IV}}{f(1-2x)} \to \overset{\text{V}}{f(1-2|x|)} \to \overset{\text{VI}}{\left|f(1-2|x|)\right|} \to \overset{\text{VII}}{2\left|f(1-2|x|)\right|}.$$

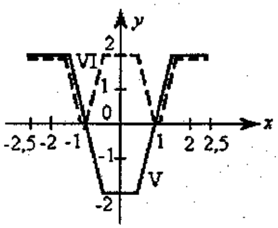
Grafiko brėžimo etapai pavaizduoti 6–9 pav.



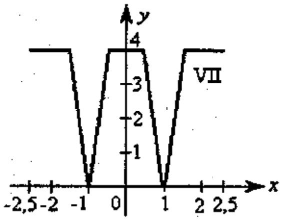
6 pav.



7 pav.



8 pav.



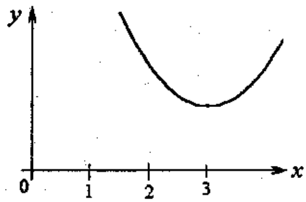
9 pav.

3. Nagrinėsime tris atvejus: 1) $a-1<0$; 2) $a-1=0$; 3) $a-1>0$.

1 atvejis. Kai $a-1<0$, kvadratinio trinario grafiko (parabolės) šakos eina žemyn. Vadinasi, kvadratinis trinaris mažėja intervale [1; 3] tik tuomet, kai grafiko viršūnės abscisė yra nedidesnė už 1, t.y. kai $\dfrac{a}{a-1} \le 1$. Išsprendę nelygybių sistemą $\begin{cases} a-1<0, \\ \dfrac{a}{a-1} \le 1, \end{cases}$ gauname $a<1$. Taigi, kai $a<1$, kvadratinis trinaris mažėja intervale [1; 3].

2 atvejis. Kai $a=1$, gauname $f(x)=-2x-2$. Ši funkcija yra tiesinė ir ji yra mažėjanti.

3 atvejis. Kai $a-1>0$, kvadratinio trinario grafiko (parabolės, *žr.* 10 pav.) šakos eina į viršų. Kvadratinis trinaris intervale [1; 3] mažėja, jeigu parabolės viršūnės abscisė yra ne mažesnė už 3, t.y., kai $\frac{a}{a-1}\ge 3$. Išsprendę



10 pav.

nelygybių sistemą $\begin{cases} a-1>0, \\ \dfrac{a}{a-1}\ge 3, \end{cases}$ gauname $1<a\le\frac{3}{2}$. Taigi funkcija mažėja intervale [1; 3], kai $1<a\le\frac{3}{2}$.

Ats. Funkcija mažėja intervale [1; 3], kai $a\in\left(-\infty;\ \frac{3}{2}\right]$.

4. Su kiekviena *a* reikšme kvadratinio trinario

$$f(x)=4x^2-4ax+a^2-2a+2\,.$$

grafikas yra parabolė, kurios viršūnės abscisė $x=\frac{a}{2}$. Priklausomai nuo parabolės viršūnės padėties intervalo [0; 2] atžvilgiu parametro *a* reikšmes rasime iš trijų sistemų visumos:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2}\le 0, \\ f(0)=3; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0<\dfrac{a}{2}<2, \\ f\left(\dfrac{a}{2}\right)=3; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{a}{2}\ge 2, \\ f(2)=3. \end{cases}$$

Kadangi

$$f(0)=a^2-2a+2\,,\ f\left(\frac{a}{2}\right)=-2a+2\,,\ f(2)=a^2-10a+18\,.$$

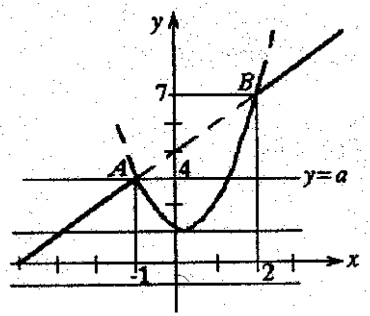
Iš pirmos sistemos randame, kad $a=1-\sqrt{2}$; antroji sistema sprendinių neturi, trečiosios sistemos sprendinys yra $a=5+\sqrt{10}$.

Ats. $a=1-\sqrt{2}$ arba $a=5+\sqrt{10}$.

5. Nubraižysime funkcijos

$$y = \min\,(2x^2 - x + 1,\ x + 5)$$

grafiką (*žr.* 11 pav.) ir ištirsime, kiek susikirtimo taškų jis turi su tiese $y = a$ priklausomai nuo a reikšmės. Funkcijos grafikas parodytas stora linija. Parabolės viršūnė yra $\left(\frac{1}{4}; \frac{7}{8}\right)$, o taškų A ir B koordinatės $A(-1; 4)$, $B(2; 7)$. Taigi,

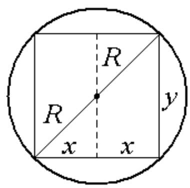


11 pav.

kai $a < \frac{7}{8}$, tiesė $y = a$ grafiką kerta viename taške; kai $a = \frac{7}{8}$ – dviejuose taškuose; kai $\frac{7}{8} < a < 4$ – trijuose taškuose; kai $a = 4$ – dviejuose taškuose, o kai $a > 4$ – viename taške.

Ats. Kai $a \in \left(-\infty; \frac{7}{8}\right) \cup (4; +\infty)$, lygtis turi vieną sprendinį, kai $a = \frac{7}{8}$ ir $a = 4$ – du sprendinius; kai $\frac{7}{8} < a < 4$ – tris sprendinius.

6. Sakykime, į rutulį įbrėžto ritinio pagrindo spindulys yra x, o aukštinė y (11 pav.). Tuomet ritinio tūris yra $V = \pi x^2 y$. Kadangi $4R^2 = 4x^2 + y^2$, tai



11 pav.

$$V = \frac{\pi}{4} y\left(4R^2 - y^2\right) = \frac{\pi}{4} \cdot \left(y^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(4R^2 - y^2\right);$$

čia $y > 0$.

Daugiklių y^2 ir $4R^2 - y^2$ suma yra pastovi, todėl tūris įgis didžiausią reikšmę, kai $\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}} = \dfrac{4R^2 - y^2}{1}$ (1 lema), t.y., kai

$3y^2 = 4R^2$. Iš čia $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$ ir $x = \sqrt{\frac{2}{3}}R$.

Ats. Ritinio spindulys lygus $\sqrt{\frac{2}{3}}R$, o aukštinė – $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$.

7. Sakykime, kad ieškomas trikampio vidaus taškas *M*, o jo atstumai iki trikampio kraštinių yra *x*, *y* ir *z*. Tuomet $ax + by + cz = 2S$ (čia *a*, *b*, *c* – trikampio kraštinių ilgiai, o *S* – trikampio plotas). Kadangi $x \cdot y \cdot z = \frac{1}{abc}(ax) \cdot (by) \cdot (cz)$, o $ax + by + cz = 2S$ (pastovus dydis), tai ši sandauga pagal 1 lemą įgyja didžiausią reikšmę, kai $ax = by = cz$. Vadinasi, $3ax = 2S$, $3by = 2S$, $3cz = 2S$. Kita vertus, $2S = ah_a = bh_b = ch_c$. Taigi $x = \frac{1}{3}h_a$, $y = \frac{1}{3}h_b$, $z = \frac{1}{3}h_c$. Toks taškas yra trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taškas.

8. Sakykime, pirmame ir antrame induose yra *z* kg ir *t* kg druskos, o iš jų išgaravo *x* kg ir *y* kg. vandens atitinkamai. Tuomet pagal uždavinio sąlygą: $\frac{z}{5-x}\Big/\frac{z}{5} = m$ ir $\frac{t}{20-y}\Big/\frac{t}{20} = n$. Iš čia $\frac{5}{5-x} = m$ ir $\frac{20}{20-y} = n$. Iš šių lygybių gauname: $x = 5 - \frac{5}{m}$, $y = 20 - \frac{20}{n}$. Vadinasi, iš abiejų indų išgaravusio vandens kiekis yra: $x + y = 25 - \frac{5}{m} - \frac{20}{n}$. Kadangi $m \cdot n = 9$, tai $n = \frac{9}{m}$ ir $x + y = 25 - \left(\frac{5}{m} + \frac{20}{9}m\right)$. Kita vertus, remdamiesi dviejų skaičių aritmetinio ir geometrinio vidurkio savybe, gauname: $\frac{5}{m} + \frac{20}{9}m \geq 2\sqrt{\frac{5}{m} \cdot \frac{20}{9}m} = \frac{20}{3}$. Todėl $x + y \leq 25 - \frac{20}{3} = 18\frac{1}{3}$. Taigi iš abiejų indų negali išgaruoti daugiau kaip $18\frac{1}{3}$ kg vandens. Jeigu $\frac{5}{m}=\frac{20}{9}m$, t.y. $m=\frac{3}{2}$, tai šių skaičių aritmetinis vidurkis lygus geometriniam vidurkiui ir $x+y=25-\frac{20}{3}=18\frac{1}{3}$.

Iš pirmo indo išgaravo $x=5-\frac{5}{m}=\frac{5}{3}$ (kg), iš antrojo – $y=20-\frac{20}{9}m=\frac{50}{3}$ (kg) vandens.

Ats. Iš abiejų indų išgaravo ne daugiau $18\frac{1}{3}$ kg vandens, $18\frac{1}{3}$ kg vandens išgaravo, kai $m=\frac{3}{2}$, $n=6$.

9. Sakykime, $f(x)=4x^2+4x+17$ ir $g(x)=\frac{12}{x^2-x+1}$. Akivaizdu, kad

$$f(x)=(2x+1)^2+16\geq 16,$$

o

$$g(x)=12:\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)\leq 12:\frac{3}{4}=16.$$

Vadinasi, lygybė $f(x)=g(x)$ galima tik tuomet, kai

$$(2x+1)^2+16=16 \text{ ir } 12:\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)=16.$$

Pirmoji lygtis turi sprendinį $x=-0{,}5$, o antroji – $x=0{,}5$. Taigi sistema sprendinių neturi ir tuo pačiu nagrinėjama lygtis neturi sprendinių.

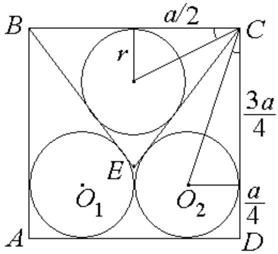
10. Nagrinėkime funkciją $f(x)=x^4$. Ji yra iškila žemyn. Vadinasi, su bet kuriomis dviem argumento reikšmėmis x ir y teisinga nelygybė

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

t.y. $\dfrac{x^4+y^4}{2} \geq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^4$. Šios nelygybės abi puses padauginę iš 16 gauname: $8(x^4+y^4) \geq (x+y)^4$.

ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Kadangi apskritimų su centrais O_1 ir O_2 spinduliai lygūs, o tie apskritimai liečiasi ir liečia priešingas kvadrato kraštines, tai jų skersmenų ilgiai lygūs pusei kvadrato kraštinės ilgio (1 pav.). Sakykime, kad $\angle BCE = \alpha$, $\angle DCE = \beta$, $AB = a$. Tada



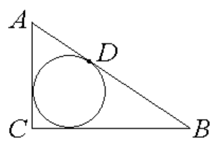
1 pav.

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{a}{4} : \frac{3a}{4} = \frac{1}{3}.\ \sin\beta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}} = \frac{3}{5}$$

Kadangi $\alpha+\beta = 90^\circ$, tai $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2} = \dfrac{4}{5}$, $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{5}$, $\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} = \sin^2\dfrac{\alpha}{2} : \cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{4}$. Kampas $\dfrac{\alpha}{2}$ smailus, todėl $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$, $r = \dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{a}{4}$.

2. Sakykime, kad $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, o p – trikampio ABC pusperimetris. Tada

$$AD = p - a = \frac{b+c-a}{2},\ BD = p - b = \frac{a+c-b}{2}.$$



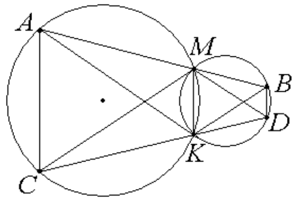
2 pav.

Taigi

$$AD \cdot BD = \frac{1}{4}(b+c-a)(a+c-b) =$$

$$= \frac{1}{4}(ab + bc - b^2 + ac + c^2 - cb - a^2 - ac + ab) = \frac{1}{2}ab = S.$$

3. Remdamiesi įbrėžtinių kampų savybėmis, gauname, kad $\angle ACM = \angle AKM$, $\angle BDM = \angle BKM$, $\angle MCK = \angle MAK$, $\angle MDK = \angle MBK$. Tuomet



3 pav.

$\angle ACK + \angle BDK =$

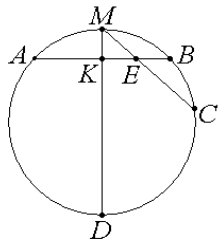
$= (\angle ACM + \angle MCK) + (\angle BDM + \angle MDK) =$

$= (\angle AKM + \angle MAK) + (\angle BKM + \angle MBK) =$

$= \angle AKB + \angle MAK + \angle MBK) = 180^\circ$, t.y. $AC \parallel BD$.

4. Kadangi $\angle KEC = \frac{1}{2}(\cup ADC + \cup MB)$, o

$\angle KDC = \frac{1}{2} \cup MC$, tai



4 pav.

$$\angle KEC + \angle KDC = \frac{1}{2}(\cup ADC + \cup MB + \cup MC) =$$

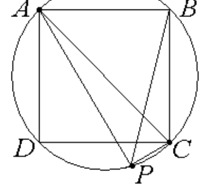
$$= \frac{1}{2}(\cup ADC + \cup AM + \cup MC) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ.$$

Taigi, keturkampis *KECD* įbrėžtinis.

5. Įbrėžtiniam keturkampiui *ABCP* taikome Ptolemėjo teoremą

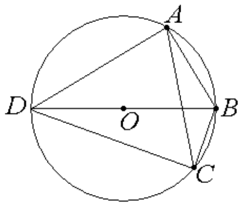
$AB \cdot PC + BC \cdot AP = AC \cdot PB.$

Kadangi $AB = BC$, o $AC = \sqrt{2}AB$, tai suprastinę iš *AB* gauname $PC + PA = \sqrt{2}PB$.

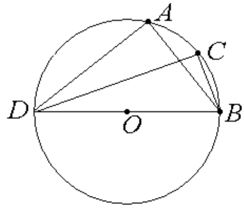


5 pav.

6. Galimi du atvejai, kai taškas B yra lanko AC viduje (6a pav.) ir kai jis nėra lanko AC viduje (6b pav.).



6a pav.



6b pav.

a) atveju brėžiame skersmenį BD ir taikome keturkampiui $ABCD$ Ptolemėjo teoremą: $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot DB$. Trikampis ADB status, todėl $AD = \sqrt{4R^2 - a^2}$. Iš stačiojo trikampio DCB gauname $DC = \sqrt{4R^2 - b^2}$. Tuomet

$$a\sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - a^2} = 2R \cdot AC .$$

Iš čia

$$AC = \frac{a\sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}.$$

Analogiškai b) atveju BD – skersmuo,

$$AC \cdot BD + CB \cdot AD = AB \cdot CD$$

ir

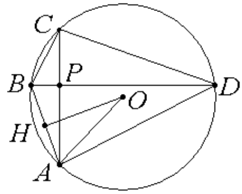
$$AC = \frac{a\sqrt{4R^2 - b^2} - b\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}.$$

7. Sakykime, kad $OH \perp AB$, tuomet taškas H — AB vidurys (7 pav.). Iš trikampių OHA ir ADC gauname

$OH = OA\cos\angle HOA = R\cos\angle HOA$,

$CD = 2R\sin\angle CAD = 2R\cos\angle ADB$

(nes $\angle CAD + \angle ADB = 90^\circ$).



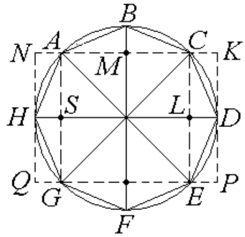
7 pav.

Bet $\angle ADB = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle HOA$,

todėl $CD = 2R\cos\angle HOA = 2OH$.

8. Kadangi keturkampio $ABCD$ įstrižainės AC ir BD statmenos, tai jo plotui S teisinga lygybė $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD$. Pagal Ptolemėjo teoremą $AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC$. Taigi $S=\frac{1}{2}(AB\cdot CD+AD\cdot BC)$.

9. Nesunkiai pastebime, kad $\Delta ABM=\Delta HAN$ ir analogiškai prie kitų viršūnių (8 pav.). Todėl aštuonkampio plotas lygus stačiakampio $NMPQ$ plotui. To stačiakampio kraštinės yra lygios ilgiausiajai ir trumpiausiajai įstrižainei.

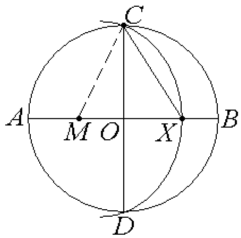


8 pav.

10. Sakykime, kad $AO=R$, $MO=AM=\frac{R}{2}$ (9 pav.). Tuomet

$$MX=MC=\sqrt{R^2+\left(\frac{R}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}R \text{ ir}$$

$$OX=MX-MO=\frac{\sqrt{5}-1}{2}R=a_{10}.$$



9 pav.

Kita vertus,

$$CX=\sqrt{CO^2+OX^2}=\sqrt{R^2+\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)^2R^2}=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=a_5,$$

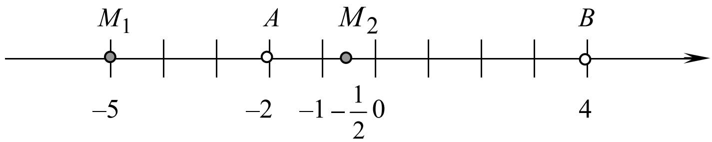
nes

$$a_5=2R\sin 72^\circ=4R\sin 36^\circ\cos 36^\circ=$$

$$=4R\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Perfrazuokime užduotį: koordinačių tiesėje raskite taškus $M(x)$, kurie iki taško $A(-2)$ būtų 3 kartus arčiau negu iki taško $B(4)$.



Tokie taškai yra du: $M_1(-5)$, nes $BM_1 = 3AM_1$, ir $M_2\left(-\frac{1}{2}\right)$, nes $BM_2 = 3AM_2$.

Ats.: –5 ir –0,5.

2. Kadangi bet kurio skaičiaus modulis yra neneigiamas skaičius, tai duotoji lygybė bus teisinga tik tada, kai $2x - 7 = 0$ ir $x - 3y + 4 = 0$. Iš čia gauname $x = 3{,}5$ ir $y = 2{,}5$.

Ats.: $x = 3{,}5$; $y = 2{,}5$.

3. Pagal modulio apibrėžimą

$$|x-3| - x = \begin{cases} -3, & \text{kai } x \geq 3, \\ 3-2x, & \text{kai } x < 3. \end{cases}$$

Nelygybė $|-3| \geq 4$ nėra teisinga, todėl toliau sprendžiame tik sistemą

$$\begin{cases} x < 3, \\ |3-2x| \geq 4. \end{cases}$$

Kadangi

$$|3-2x| = \begin{cases} 3-2x, & \text{kai } x \leq 1{,}5, \\ 2x-3, & \text{kai } x > 1{,}5, \end{cases}$$

tai nagrinėjame du atvejus:

a) $\begin{cases} x \leq 1{,}5, \\ 3-2x \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1{,}5, \\ x \leq -0{,}5 \end{cases} \Rightarrow x \leq -0{,}5;$

b) $\begin{cases} 1{,}5 < x < 3, \\ 2x - 3 \ge 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1{,}5 < x < 3, \\ x \ge 3{,}5 \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$

Ats.: $(-\infty; -0{,}5]$.

4. *1 būdas*. Kai $a^2 + b^2 = 1$ ir $c^2 + d^2 = 1$, tai

$$(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = 1,$$

$$a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = 1,$$

$$(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 = 1,$$

$$(ac - bd)^2 = 1 - (bc + ad)^2 \le 1.$$

Iš nelygybės $(ac - bd)^2 \le 1$ gauname $|ac - bd| \le 1$.

2 būdas. Su bet kuriais realiaisiais skaičiais *a, b, c* ir *d* teisingos šios nelygybės:

$$(a + c)^2 + (b - d)^2 \ge 0 \text{ ir } (a - c)^2 + (b + d)^2 \ge 0.$$

Iš pirmosios gauname

$$2(ac - bd) \ge -(a^2 + c^2 + b^2 + d^2),$$

o iš antrosios

$$2(ac - bd) \le a^2 + c^2 + b^2 + d^2.$$

Kai $a^2 + b^2 = 1$ ir $c^2 + d^2 = 1$, turėsime

$$ac - bd \ge -1 \text{ ir } ac - bd \le 1.$$

Tuomet $-1 \le ac - bd \le 1$, t.y. $|ac - bd| \le 1$.

5. Iš pradžių pertvarkykime funkcijos išraišką. Pastebime, kad

$$x + 2\sqrt{x-1} = x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1 = \left(\sqrt{x-1} + 1\right)^2$$

ir

$$x - 2\sqrt{x-1} = x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1 = \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2.$$

Todėl $y = \left|\sqrt{x-1} + 1\right| + \left|\sqrt{x-1} - 1\right|$. Šios funkcijos apibrėžimo sritis yra intervalas $[1; +\infty)$. Pagal skaičiaus modulio apibrėžimą

$$\left|\sqrt{x-1} + 1\right| = \sqrt{x-1} + 1, \text{ kai } x \ge 1,$$

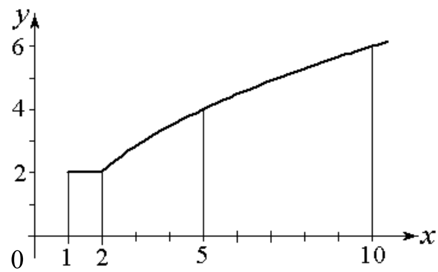
ir

$$\left|\sqrt{x-1}-1\right| = \begin{cases} \sqrt{x-1}-1, & \text{kai } x \geq 2, \\ 1-\sqrt{x-1}, & \text{kai } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Vadinasi,

$$y = \begin{cases} 2, & \text{kai } 1 \leq x < 2, \\ 2\sqrt{x-1}, & \text{kai } x \geq 2. \end{cases}$$

Naudodamiesi šia išraiška, brėžiame duotosios funkcijos grafiką.



6. Kadangi

$\sqrt{x^2-2x+1} = |x-1|$, $\sqrt{x^2-4x+4} = |x-2|$, $\sqrt{x^2-6x+9} = |x-3|$,

tai turime spręsti tokią lygtį:

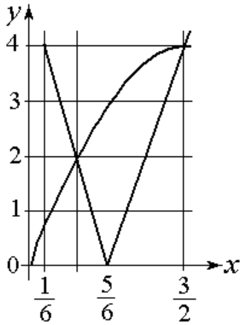
$$|x-1|+|x-2|+|x-3| = 3x-6.$$

Kairioji pusė teigiama su bet kuria realiąja x reikšme, todėl $3x-6>0$. Vadinasi, lygties sprendinių reikia ieškoti tik intervale $(2; +\infty)$. Šiame intervale $|x-1| = x-1$, $|x-2| = x-2$. Atlikę veiksmus, gauname lygtį $|x-3| = x-3$. Kadangi $|x-3| \geq 0$, tai dešinioji pusė $x-3$ neneigiama. Vadinasi, $x \geq 3$ ir $|x-3| = x-3$. Šias sąlygas tenkina visi intervalo $[3; +\infty)$ skaičiai.

Ats.: $[3; +\infty)$.

7. Kadangi $0 \leq \sin\frac{\pi x}{3} \leq 1$, tai $|6x-5| \leq 4$. Tuomet $-4 \leq 6x-5 \leq 4$ ir $\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{3}{2}$. Vadinasi, lygties sprendiniai gali būti tik intervale

$\left[\frac{1}{6};\frac{3}{2}\right]$. Nubrėžę funkcijų $y=|6x-5|$ ir $y=4\sin\frac{\pi x}{3}$ grafikus, matome, kad jie kertasi dviejuose taškuose. Todėl ir lygtis turi du sprendinius.



Iš brėžinio matome, kad vienas sprendinys artimas arba lygus 0,5, o kitas artimas arba lygus 1,5. Įstatę į lygtį $x=0{,}5$ ir $x=1{,}5$, įsitikiname, kad šie skaičiai jai tinka, todėl yra ieškomieji sprendiniai.

Ats.: 0,5; 1,5.

8. Pagal skaičiaus modulio apibrėžimą duotąją funkciją galima užrašyti tokia formule:

$$f(x)=\begin{cases}-3x+6, \text{ kai } x<1;\\ -x+4, \quad \text{kai } 1\le x<2;\\ x, \text{ kai } 2\le x<3;\\ 3x-6, \text{ kai } x\ge 3.\end{cases}$$

Kiekviename iš keturių intervalų: (–∞; 1), [1; 2), [2; 3) ir [3; +∞) ši funkcija yra tiesinė. Pirmuosiuose dviejuose intervaluose apibrėžtos funkcijos yra mažėjančios (nes koeficientai prie kintamojo x neigiami), o kituose – didėjančios. Be to, pastebime, kad intervalų sandūros taškuose funkcijos reikšmės sutampa skaičiuojant pagal abi formules. Vadinasi, funkcija $f(x)$ mažėja intervale (–∞; 3] ir didėja intervale [3; +∞). Todėl mažiausią reikšmę ji įgyja taške $x=3$:

$$f_{\text{maž}}=f(3)=3.$$

Ats.: 3.

9. Kai $a<0$, ši lygtis sprendinių neturi. Kai $a=0$, ji turi dvi šaknis: $x_1=-1$ ir $x_2=5$. Kai $a>0$, šios lygties sprendinių aibę sudaro lygčių $x^2-4x-5=a$ ir $x^2-4x-5=-a$ sprendiniai. Pirmosios lygties diskriminantas yra teigiamas: $D=36+4a$, todėl ji turi dvi šaknis su kiekviena teigiama a reikšme. Vadinasi, lygtis

$\left| x^2 - 4x - 5 \right| = a$ šiuo atveju ($a > 0$) gali turėti dvi šaknis tik tada, kai lygties $x^2 - 4x - 5 = -a$ diskriminantas $D = 36 - 4a$ neigiamas, t.y. kai $a > 9$.

Ats.: $a = 0$ arba $a > 9$.

10. Kadangi $\left| x^2 - 1 \right| + \left| x^2 - 4 \right| > 0$ su visais realiaisiais skaičiais *x*, tai $mx > 0$. Kai $|x| = 1$, gauname $mx = 3$. Šiai lygčiai tinka dvi sveikųjų skaičių *x* ir *m* poros: (–1; –3) ir (1; 3).

Kai $|x| \geq 2$, gauname lygtį $2x^2 - 5 = mx$. Vadinasi, turi galioti lygybė $x(2x - m) = 5$ su sveikaisiais skaičiais *x* ir *m* ($|x| \geq 2$). Aišku, jog taip gali būti tik dviem atvejais: 1) $x = -5$ ir $2x - m = -1$; 2) $x = 5$ ir $2x - m = 1$. Pirmuoju atveju gauname porą (–5; –9), o antruoju – porą (5; 9).

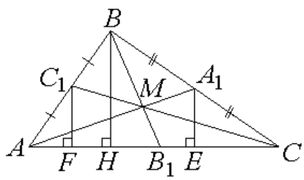
Ats.: (–1; –3), (1; 3), (–5; –9), (5; 9).

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Kadangi $C_1F \perp AC$, $BH \perp AC$, $A_1E \perp AC$, tai tiesės C_1F, BH ir A_1E yra lygiagrečios. Akivaizdu, kad $HB_1 = HC - B_1C = = HC - \frac{1}{2}AC = 6 - 5 = 1$ (cm) (*žr.* 1 pav.). Taigi pusiaukraštinės BB_1 projekcija į tiesę AC lygi 1 cm. Pagal Talio teoremos 1-ąją išvadą:: $AF = FH$, $HE = EC$. Kita vertus,

$HE = \frac{1}{2}HC = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ (cm),

$FH = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ (cm). Vadinasi,



1 pav.

$AE = AH + HE = 4 + 3 = 7$ (cm), $FC = FH + HC = 2 + 6 = 8$ (cm).

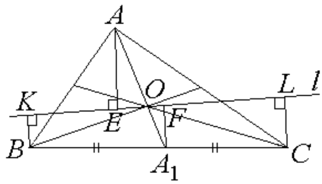
Ats.: 1 cm, 7 cm, 8 cm.

2. Iš taško A_1 nubrėžiame statmenį (*žr.* 2 pav.) A_1F į tiesę KL. A_1F – trapecijos $BKLC$ vidurinė linija, todėl $A_1F = \dfrac{BK + LC}{2} = \dfrac{b+c}{2}$.

Kadangi $\Delta AEO \sim \Delta A_1OF$ ($\angle AEO = \angle A_1FO = 90^\circ$, $\angle AOE = = \angle A_1OF$ – kryžminiai), tai $\dfrac{AE}{A_1F} = \dfrac{AO}{OA_1}$. Kita vertus, $\dfrac{AO}{OA_1} = \dfrac{2}{1}$ (O – pusiaukraštinių susikirtimo taškas!). Taigi $\dfrac{AE}{A_1F} = \dfrac{2}{1}$, t.y.

$$AE = 2A_1F = 2 \cdot \frac{b+c}{2} = b + c.$$

Ats.: $b + c$.



2 pav.

Pastaba. Brėžinyje tiesės KL kerta trikampio ABC kraštines AB ir AC. Ši tiesė gali kirsti ir kraštines AC ir BC.

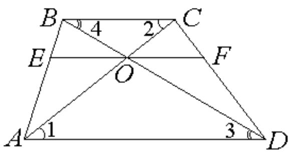
3. $\Delta AOD \sim \Delta BOC$, nes $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ (*žr.* 3 pav.). Todėl $\dfrac{OC}{OA} = \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{a}{b}$. Pagal Talio teoremos išvadą:

$$\frac{BE}{EA} = \frac{CF}{FD} = \frac{OC}{OA} = \frac{a}{b}.$$

Į 3-me pavyzdyje gautą formulę vietoje λ įrašę $\dfrac{a}{b}$, gauname:

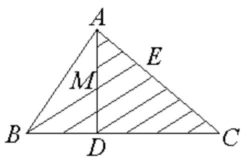
$$EF = \frac{a + \frac{a}{b} \cdot b}{1 + \frac{a}{b}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Ats.: $\dfrac{2ab}{a+b}$.



3 pav.

4. Atkarpą AD padalijame į 5 dalis ir per dalijimo taškus nubrėžiame tieses, lygiagrečias tiesei BE. Jos atkarpą BD padalijo į 2 lygias dalis. Kadangi $DC = 2BD$, tai atkarpą DC padalijame į 4 lygias dalis ir per dalijimo



4 pav.

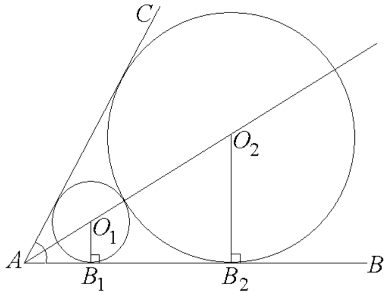
taškus išvedame tieses, lygiagrečias tiesei *BE*. Gavome, kad atkarpa *AE* yra padalyta į 3, o atkarpa *EC* į 6 lygias dalis. Taigi $AE:EC=3:6$, t.y. $AE:EC=1:2$. Akivaizdu, kad $S_{MECD}=S_{BEC}-S_{BMD}$. Kadangi

$$S_{BEC}=\frac{2}{3}S_{ABC},\ S_{BMD}=\frac{2}{5}S_{ABD}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}S_{ABC}=\frac{2}{15}S_{ABC},$$

tai $S_{MECD}=\frac{2}{3}S_{ABC}-\frac{2}{15}S_{ABC}=\frac{8}{15}S_{ABC}$.

Vadinasi, $S_{MECD}:S_{ABC}=8:15$.

5. Įbrėžtų į kampą besiliečiančių apskritimų centrai O_1 ir O_2 yra kampo *A* pusiaukampinėje, Iš centrų išveskime statmenis O_1B_1 ir O_2B_2 į kampo kraštinę *AC*. O_1B_1 ir O_2B_2 – šių apskritimų spinduliai: $O_1B_1=r$, $O_2B_2=R$. Kadangi $O_1B_1\parallel O_2B_2$, tai pagal



5 pav.

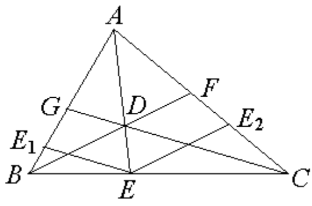
Talio teoremą $\frac{O_2B_2}{O_2A}=\frac{O_1B_1}{O_1A}$. $\angle O_2AB_2=30^\circ$, tai $O_1A=2O_1B_1=2r$; be to,

$O_2A=O_1A+O_1O_2=2r+r+R=3r+R$. Taigi $\frac{R}{3r+R}=\frac{r}{2r}$.

Iš čia $R=3r$.

Ats.: $\frac{R}{r}=3$.

6. Iš taško *E* nubrėžkime tiesę, lygiagrečią tiesei *CG* ir tiesę, lygiagrečią tiesei *BF* (*žr.* 6 pav.). Jos trikampio *ABC* kraštines kerta taškuose E_1 ir E_2. Trikampiams E_1AE ir *GAD* pritaikius Talio teoremos išvadą,



6 pav.

gauname: $\frac{ED}{AD} = \frac{E_1G}{AG}$. Bet $\frac{E_1G}{GB} = \frac{CE}{BC} = \frac{CE}{CE(1+n)} = \frac{1}{n+1}$, todėl $\frac{ED}{AD} = \frac{\frac{1}{n+1}GB}{AG} = \frac{1}{(n+1)\cdot m}$. Iš trikampių EAE_2 ir DAF, gauname $\frac{FE_2}{AF} = \frac{DE}{AD} = \frac{1}{(n+1)\cdot m}$.

Kadangi $\frac{FE_2}{FC} = \frac{BE}{BC} = \frac{BE}{BE\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{n}{n+1}$, tai $FE_2 = \frac{n}{n+1}FC$ ir

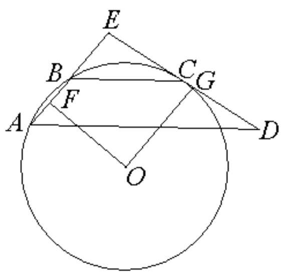
$\frac{FE_2}{AF} = \frac{\frac{n}{n+1}FC}{AF} = \frac{1}{(n+1)\cdot m}$. Iš čia $\frac{FC}{AF} = \frac{1}{nm}$.

7. Pratęskime šonines trapecijos kraštines AB ir CD, kurios susikerta taške E (*žr.* 7 pav.). Sakykime $BE = x$, o $EC = y$. Pagal Talio teoremą:

1) $\frac{BE}{EA} = \frac{BC}{AD}$, t.y. $\frac{x}{x+5} = \frac{26}{39}$. Iš čia $x = 10$ cm.

2) $\frac{EC}{ED} = \frac{BC}{AD}$, t.y. $\frac{y}{y+12} = \frac{26}{39}$. Iš čia $y = 24$ cm.

Nesunku įsitikinti, kad trikampis BEC yra statusis: $BC^2 = BE^2 + EC^2$. Iš apskritimo centro O nubrėžkime į kraštines AB ir CD statmenis OF ir OG. Be to, $OG = R$, nes CD yra liestinė. Kadangi keturkampis $OFEG$ – stačiakampis, tai $OG = EF$.



7 pav.

Kita vertus, $BF = \frac{1}{2}AB = 2{,}5$ (cm).

Todėl $EF = EB + BF = 10 + 2{,}5 = 12{,}5$ (cm).

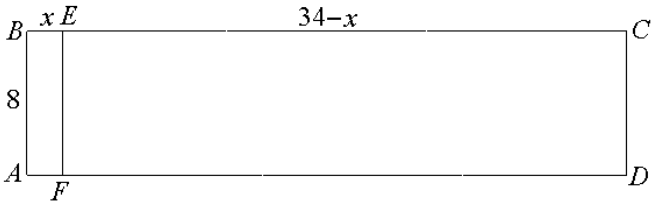
Ats.: 12,5 cm.

8. Sakykime $BE = x$. Tuomet $EC = 34 - x$. (*Žr.* 8 pav.) Laikysime, kad $EF < EC$. Iš stačiakampių panašumo turime: $\frac{x}{8} = \frac{8}{34 - x}$, t.y. $x^2 - 34x + 64 = 0$. Šios lygties sprendiniai: $x_1 = 2$, $x_2 = 32$.

Kai $x_1 = 2$, $EC = 32 > FE = 8$.

Kai $x_2 = 32$, $EC = 2 < FE$.

Taigi $BE = 2$ cm, $EC = 32$ cm, o $S_{ABEF} = 8 \cdot 2 = 16$ (cm^2), $S_{ECDF} = 8 \cdot 32 = 256$ (cm^2).



8 pav.

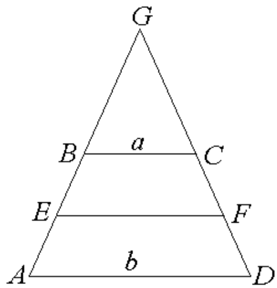
9. Trapecijos šonines kraštines pratęskime (*žr.* 9 pav.). Jos susikerta taške G. Sakykime $S_{BGC} = x$, $S_{BCFE} = S_{AEFD} = S$. Iš trikampių EGF ir BGC bei AGD ir BGC panašumo išplaukia:

$$\frac{EF^2}{a^2} = \frac{S + x}{x}, \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{2S + x}{x}.$$

Iš antrosios lygybės randame:

$x = \frac{2a^2 S}{b^2 - a^2}$. Šią x reikšmę įrašę į pirmąją lygybę, gauname:

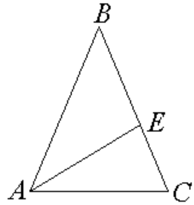
$$EF^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}, \text{ t.y. } EF = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$



9 pav.

Ats.: $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

10. *I būdas*. Sakykime $\frac{AB}{AC} = x$. Iš trikampių ABC ir ACE panašumo gauname: $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CE} = x$. Iš čia $CE = \frac{AC}{x}$. Kadan



10 pav.

$$BE = AB - \frac{AC}{x} = x \cdot AC - \frac{AC}{x} = AC\left(x - \frac{1}{x}\right),$$

tai pagal kampo A pusiaukampinės savybę:

$\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC}$, t.y. $\dfrac{AC\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\frac{AC}{x}} = x$. Iš čia: $x^2 - x - 1 = 0$. Skaičius Φ yra vienintelė teigiama šios lygties šaknis. Taigi $x = \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

2 būdas. Apskaičiuokime trikampių ABC ir CAE kampus. Kadangi abu trikampiai yra panašūs, o trikampis ABC – lygiašonis, tai $\angle ABC = \angle CAE = \frac{1}{2}\angle CAB$. Sakykime, kad $\angle ABC = x$, tuomet $\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA = x + 2x + 2x = 180^\circ$, $x = 36^\circ$. Taigi $\angle ABC = 36^\circ$, $\angle BAC = 72^\circ$, $\angle BCA = 72^\circ$, $\angle CAE = 36^\circ$, $\angle AEC = 72^\circ$. Iš trikampio ABC viršūnės nubrėžę statmenį į AC, turėsime: $\dfrac{\frac{1}{2}AC}{AB} = \sin 18^\circ$, t.y. $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2\sin 18^\circ}$. Taigi norint rasti santykį AB:AC, reikia apskaičiuoti $\sin 18^\circ$. Remsimės formule: $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$. Kai $\alpha = 18^\circ$, $\sin 54^\circ = 3\sin 18^\circ - -4\sin^3 18^\circ$. Kita vertus, $\sin 54^\circ = = \sin(90^\circ - 36^\circ) = \cos 36^\circ$. Kadangi $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, tai $\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$. Vadinasi, $3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ = = 1 - 2\sin^2 18^\circ$. Sakykime $\sin 18^\circ = y$. Tuomet turime kubinę lygtį: $4y^3 - 2y^2 - 3y + 1 = 0$. Pastebėję, kad šis lygties sprendinys yra $y = 1$, kairiąją lygties pusę išskaidome dauginamaisiais: $(y-1)(4y^2+2y-1)=0$. Gautoji lygtis turi 3 sprendinius: $y_1=1$, $y_2=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, $y_3=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{4}$. Kadangi $0<\sin 18^\circ<1$, tai $\sin 18^\circ = =\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Vadinasi,

$$\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2\frac{\sqrt{5}-1}{4}}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\Phi .$$

Analogiškai įrodoma, kad ir $\dfrac{AC}{CE}=\Phi$.

PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Nelyginiai natūralieji skaičiai yra 1, 3, 5, 7, 9, … .

Pažymėkime $a_1=1=2\cdot 1-1$, $a_2=3=2\cdot 2-1$, $a_3=5=2\cdot 3-1$, … , $a_n=2\cdot n-1$, … .

Įrodykime, jog bet kuris nelyginis natūralusis skaičius a_n gali būti išreikštas jo eilės numeriu n formule: $a_n=2\cdot n-1$, $n=1, 2, 3, ...$. Ši išvada teisinga, kai $n=1$.Tarkime, kad išvada teisinga, kai $n = k$. Įrodysime, kad ji teisinga ir su $n = k+1$.

Iš tikrųjų $a_{k+1}=a_k+2=(2k-1)+2=2(k+1)-1$. Taigi formulė $a_n=2\cdot n-1$ teisinga su visomis natūraliosiomis n reikšmėmis.

Ats.: $2n-1$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

2. Reikia apskaičiuoti $S_n=1^2+2^2+3^2+...+n^2$.

Skaičiuojame:

$S_1=1$, $S_2=1^2+2^2=5$, $S_3=S_2+3^2=14$, $S_4=30$, $S_5=55$.

Visas šias reikšmes galima rasti pagal formulę

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Tarkime, kad $S_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Įrodysime, kad

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Iš tikrųjų

$$S_{k+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Ats.: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Kai $n = 1$, gauname $1^2 = (-1)^{n+1}\frac{1(1+1)}{2}$. Ši lygybė teisinga.

Tegu ši lygybė teisinga, kai $n = k$. Įrodysime lygybės teisingumą su $n = k+1$, t.y.

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^k (k+1)^2 = (-1)^{k+2}\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Iš tikrųjų

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{k-1} k^2 + (-1)^k (k+1)^2 =$$

$$= (-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k (k+1)^2 =$$

$$= (-1)^k (k+1)\left(-\frac{k}{2} + k + 1\right) = (-1)^{k+2}\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

4. Apskaičiavę

$$S_1 = 1 \cdot 1! = 1,$$

$$S_2 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 5,$$

$$S_3 = S_2 + 3 \cdot 3! = 23,$$

$$S_4 = 119.$$

Pastebime, kad $S_1 = 2!-1 = 1$, $S_2 = 3!-1$, $S_3 = 4!-1$, $S_4 = 5!-1$ ir formuluojame hipotezę:

$$S_n = (n+1)!-1.$$

Pagrįskime hipotezės teisingumą remdamiesi matematinės indukcijos principu. Kai $n = 1$, ji teisinga. Tarkime, kad

$$S_k = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + k \cdot k! = (k+1)!-1.$$

Įrodysime, jog

$$S_{k+1} = (k+2)!-1.$$

Iš tikrųjų:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! = \\ &= (k+1)!-1 + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+2)!-1 \end{aligned}.$$

5. Kai $n = 1$, turime $1 + x = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Kadangi $x \neq 1$, tai lygybė teisinga.

Tarkime, kad lygybė $1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^k = \dfrac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$ teisinga (indukcijos prielaida). Įrodysime, kad lygyb galioja , kai $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^k + x^{k+1} &= \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} + x^{k+1} = \\ &= \frac{x^{k+1} - 1 + x^{k+2} - x^{k+1}}{x - 1} = \frac{x^{k+2} - 1}{x - 1}. \end{aligned}$$

6. Imkime pirmųjų trijų natūraliųjų skaičių kubų sumą $1^3 + 2^3 + 3^3$. Ši suma dalijasi iš 9. Vadinasi, teiginys teisingas, kai pirmasis iš trijų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių yra 1.

Tarkime, kad suma $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ dalijasi iš 9. Įrodysime, kad suma $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$ dalijasi iš 9. Šią sumą užrašykime taip:

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 =$$

$$= (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27 =$$
$$= k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + 9(k^2 + 3k + 3).$$

Ją sudaro du dėmenys $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ ir $9(k^2 + 3k + 3)$. Abu dėmenys dalijasi iš 9.

7. Viena tiesė dalija plokštumą į dvi dalis. Tarkime, kad teiginys teisingas, kai turime k tiesių, t.y. k tiesių plokštumą dalija į $2k$ dalių. Įrodysime, kad $k+1$ tiesių dalija plokštumą į $2k+2$ dalių.

Pažymėkime ($k+1$)-ąją tiesę raide T. Ji eina per k tiesių susikirtimo tašką ir nesutampa nei su viena iš jų. Tiesė T yra tarp kurių nors dviejų iš k tiesių ir jų sudaromus kryžminius kampus dalija į dvi dalis. Taigi nubrėžus ($k+1$)-ąją tiesę T prisideda dvi plokštumos dalys. Turėjome $2k$ plokštumos dalių, gauname $2k+2$ dalis.

8. Kai $n=1$, turime $u_1 = 2^1 + 1 = 3$. Tarkime, kad lygybė $u_n = 2^n + 1$

teisinga su $n \le k$. Įrodysime, kad galioja lygybė $u_{k+1} = 2^{k+1} + 1$:

$$u_{k+1} = 3u_k - 2u_{k-1} = 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) =$$
$$= 3 \cdot 2^k - 2^k + 3 - 2 = (3-1)2^k + 1 = 2^{k+1} + 1.$$

9. Mažiausias natūralusis skaičius, su kuriuo galioja nelygybė, yra 7 (tuo įsitikiname tiesiog tikrindami). Matyt, nelygybė teisinga su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi n, didesniu už 6. Siekdami tai įrodyti, taikysime matematinės indukcijos metodą. Iš pradžių pažymėkime $n = 6 + m$ ir nagrinėkime nelygybę

$$2^{6+m} > (6+m)^2 + 4(6+m) + 5.$$

Atlikę veiksmus, turėsime tokią nelygybę:

$$64 \cdot 2^m > m^2 + 16m + 65. \qquad (*)$$

Įrodysime, kad ji teisinga su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi m.

Kai $m = 1$, ši nelygybė galioja.

Tegu ($*$) nelygybė galioja, kai $m = k$, t.y.

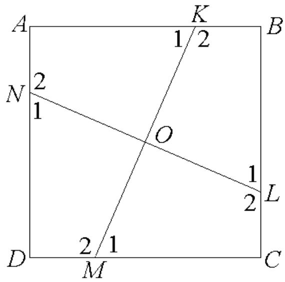
$$64 \cdot 2^k > k^2 + 16k + 65.$$

Pasinaudoję šia prielaida, gausime:

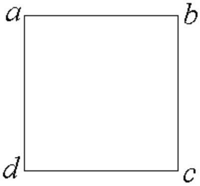
$$64 \cdot 2^{k+1} = 2 \cdot (64 \cdot 2^k) > 2 \cdot (k^2 + 16k + 65) =$$
$$= ((k+1)^2 + 16(k+1) + 65 + (k^2 + 14k + 48) >$$
$$> (k+1)^2 + 16(k+1) + 65 .$$

Taigi ($*$) nelygybė galioja su visais natūraliaisiais skaičiais m.

10. Kai $n = 1$, tvirtinimas akivaizdus – kvadratą galime sukarpyti bet kaip, ir gautąsias dalis vėl sudėti taip pat. Todėl pažymėkime $n = 1 + m$ ir patikrinkime teiginio teisingumą, kai $m = 1$, t.y. kai turime du kvadratus – *ABCD* ir *abcd*. Kvadrato *ABCD* kraštinę pažymėkime raide *X*, o kvadrato *abcd* – raide *x* ir tegu $X \geq x$. Kvadrato *ABCD* kraštinėse atidėkime



1 pav.



2 pav.

atkarpas $AK = BL = CM = DN = \dfrac{X + x}{2}$ ir kirpkime kvadratą per atkarpas *KM* ir *LN*. Jos susikerta stačiu kampu, o taškas *O* yra kvadrato *ABCD* centras, nes $\angle 1 + \angle 2 = \pi$,

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \frac{\pi}{2}, \text{ be to pavyzdžiui,}$$

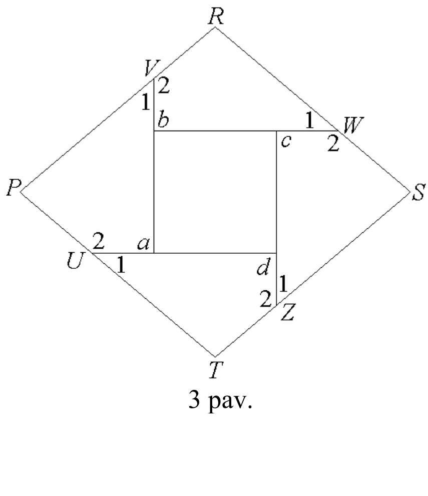
$$DN = \frac{X}{2} + \frac{x}{2}, \quad NA = \frac{X}{2} - \frac{x}{2}.$$

Kvadratą *ABCD* padalinome į 4 dalis, kurias sudėkime ant mažojo kvadrato abcd taip, kaip parodyta piešinyje. Gautoji figūra *PRST* bus kvadratas, nes $\angle 1 + \angle 2 = \pi$;

$$\angle P = \angle R = \angle S = \angle T = \frac{\pi}{2};$$

$PR = RS = ST = TP$.

Tarkime, kad $m = k$, t.y., tegu



3 pav.

(1+*k*) kvadratų $K_1, K_2, \ldots, K_{1+k}, K_{2+k}$, juos tinkamai sukarpius, taip pat galima sudėti kvadratą.

Pagal prielaidą iš kvadratų $K_1, K_2, \ldots, K_{1+k}$, juos tinkamai sukarpius galima sudėti kvadratą. Pažymėkime jį K^*. Dabar turime du kvadratus K^* ir K_{2+k}. Kaip reikia juos sukarpyti, kad sudėtume kvadratą, jau žinome. Taigi teiginys teisingas ir su $m = k + 1$. Pagal indukcijos principą teiginys galioja su visais natūraliaisiais *m*, tuo pačiu ir su visais natūraliaisiais *n*.

ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Lygtis $\left(5x + \dfrac{x+4}{x+1}\right)(x+1) = 3$ yra ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} 5x(x+1) + x + 4 = 3, \\ x \neq -1 \end{cases}$$

ir turi vienintelį sprendinį $-\dfrac{1}{5}$. Įrašę šią reikšmę į lygtis a) ir b), įsitikiname, kad ji nėra jų sprendinys. Todėl nei a), nei b) negali būti ekvivalenčios duotajai lygčiai. Lygtis c) turi du sprendinius -1 ir $-\dfrac{1}{5}$, tai ji irgi neekvivalenti duotajai.

Ats. Nė viena iš lygčių a), b), c) neekvivalenti duotajai.

2. Suradę lygties apibrėžimo sritį, įsitikiname, kad ji yra $\varnothing$. Taigi, duotoji lygtis sprendinių neturi.

3. Pagal 4 teoremą lygtis ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} x^3 - 4x + 3 = 11 - 4x, \\ 11 - 4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x \leq 2\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ats. $x = 2$.

4. Pasinaudoję nurodyta tapatybe ir pačia lygtimi, gausime:

$$2x-1+x-1+3\sqrt[3]{2x-1}\cdot\sqrt[3]{x-1}\cdot 1=1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x-1}\cdot\sqrt[3]{x-1}=1-x\,.$$

Pakėlę pastarosios lygties abi puses trečiuoju laipsniu, gausime du sprendinius $x=1$ ir $x=0$.

Patikrinę įsitikiname, kad tik $x=1$ yra lygties sprendinys.

Ats. $x=1$.

5. Lygties apibrėžimo sritis: $x>0$, $x\neq\frac{1}{10}$, $x\neq\frac{1}{4}$, $x\neq 2$. Lygtyje būtų paranku pereiti prie logaritmo pagrindu *x*. Apibrėžimo sritis leidžia tai daryti, atskirai ištyrus $x=1$ atvejį, nes logaritmo pagrindas negali būti 1. Įrašę į lygtį $x=1$, matome, kad ši reikšmė yra sprendinys.

Kai $x\neq 1$:

$$\frac{10}{2\log_x 2+1}+\frac{21}{4\log_x 2+1}-\frac{6}{1-\log_x 2}=0\,.$$

Pažymėję $\log_x 2=y$, turime

$$\frac{10}{2y+1}+\frac{21}{4y+1}+\frac{6}{y-1}=0\,.$$

Išsprendę lygtį gauname du sprendinius:

$$y_1=-\frac{5}{13}\ \text{ir}\ y_2=\frac{1}{2}\,.$$

Tada

$$\frac{1}{\log_2 x}=-\frac{5}{13},\ \frac{1}{\log_2 x}=\frac{1}{2}\,.$$

$$\log_2 x=-\frac{13}{5},\ \log_2 x=2\,.$$

$$x=2^{-\frac{13}{5}},\ x=4\,.$$

$$x=\frac{1}{4\sqrt[5]{8}},\ x=4\,.$$

Ats.: $x_1=\frac{1}{4\sqrt[5]{8}}$, $x_2=1$, $x_3=4$.

6. $\big|\,|x-2|-2\,\big|<1 \Leftrightarrow -1<|x-2|-2<1 \Leftrightarrow 1<|x-2|<3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<x-2<3, \\ -3<x-2<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3<x<5, \\ -1<x<1. \end{array}\right.$$

Ats. $(-1;\,1)\cup(3;\,5)$.

7. Nelygybė $\left|x^2-5x+1\right|<2x-5$ ekvivalenti (pagal 7 teoremą) sistemai

$$\begin{cases} x^2-5x+1<2x-5, \\ x^2-5x+1>-2x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+6<0, \\ x^2-3x-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in(1;\,6), \\ x\in(-\infty;\,-1)\cup(4;\,+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x\in(4;\,6).$$

Ats. (4; 6).

8. Nelygybė $\sqrt{\dfrac{x^3+8}{x}}>x-2$ ekvivalenti (11 teorema) sistemų visumai

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x^3+8}{x}\ge 0, \\ x-2<0, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x^3+8}{x}>(x-2)^2, \\ x-2\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-\infty;\,-2]\cup(0;\,+\infty), \\ x\in(-\infty;\,2), \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x^2-x+2}{x}>0, \\ x\ge 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in(-\infty;\,-2]\cup(0;\,2), \\ x\in[2;\,+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty;\,-2]\cup(0;\,+\infty).$$

Ats. $(-\infty;\,-2]\cup(0;\,+\infty)$.

9. Nelygybės $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x} \le \sqrt{3x-1}+\sqrt{2\,(2x-1)}$ apibrėžimo sritis yra $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$ ir ji ekvivalenti nelygybei

$$\sqrt{2x}-\sqrt{2(2x-1)} \le \sqrt{3x-1}-\sqrt{x+1}\,.$$

Pastarąją pertvarkome:

$$\frac{2x-2(2x-1)}{\sqrt{2x}+\sqrt{2(2x-1)}} \le \frac{3x-1-(x+1)}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{x+1}}$$

ir gauname nelygybę

$$\frac{2(1-x)}{\sqrt{2x}+\sqrt{2(2x-1)}} \le \frac{2(x-1)}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{x+1}}\,.$$

Pastaroji akivaizdžiai teisinga, kai $x \ge 1$ (mažesnė pusė neigiama, o didesnė teigiama) ir neteisinga, kai $\frac{1}{2} \le x < 1$.

Ats. $[1;+\infty)$.

10. Nelygybės $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x+18) < 2\log_{\frac{1}{3}}(x-4)$ apibrėžimo sritis $(4;+\infty)$, todėl ji ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} x^2-6x+18 > (x-4)^2, \\ x-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-1, \\ x>4 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x>4\,.$$

Ats. $(4;+\infty)$.

SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tegu $A_k = \left\{ \omega : \sum_{j=0}^{n} \omega_j = k \right\}$, $k = 0, 1, \ldots, n+1$. Akivaizdu, kad $A_k \cap A_j = \emptyset$, $k \neq j$ ir $\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k = \Omega$. Iš kombinatorikos žinome, kad $|A_k| = \binom{n+1}{k}$. Todėl

$$\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\}) = \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{\omega\in A_k} P(\{\omega\}) = \sum_{k=0}^{n+1} |A_k|\, p^k (1-p)^{n+1-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} = (p + (1-p))^{n+1} = 1.$$

Priešpaskutinėje lygybėje naudojomės Niutono binomo formule.

2. Turime, kad

$$P(\{\omega\}) = p^{\sum_{j=0}^{n} \omega_j} (1-p)^{n+1-\sum_{j=0}^{n} \varpi_j} =$$

$$= p^{\varpi_0} (1-p)^{1-\omega_0} \ldots p^{\omega_n} (1-p)^{1-\omega_n}$$

ir

$$\sum_{\omega_j=0}^{1} p^{\omega_j} (1-p)^{1-\omega_j} = 1 - p + p = 1, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Todėl

$P(A_k(i_k)) = P(\{\omega : \omega_k = i_k\}) =$

$$= \sum_{\omega_0=0}^{1} \ldots \sum_{\omega_{k-1=0}}^{1} \ldots \sum_{\omega_{k+1}=0}^{1} \ldots \sum_{\omega_n=0}^{1} [p^{\omega_0} (1-p)^{1-\omega_0} \cdot \ldots \cdot p^{\omega_{k-1}} (1-p)^{1-\omega_{k-1}}.$$

$$\cdot\, p^{i_k}(1-p)^{1-i_k} \cdot p^{\omega_{k+1}}(1-p)^{1-\omega_{k+1}} \ldots p^{\omega_n}(1-p)^{1-\omega_n}\,] =$$

$$= p^{i_k}(1-p)^{1-i_k} \sum_{\omega_0=0}^{1} p^{\omega_0}(1-p)^{1-\omega_0} \cdot \ldots \cdot \sum_{\omega_{k-1}=0}^{1} p^{\omega_{k-1}}(1-p)^{1-\omega_{k-1}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\omega_{k+1}=0}^{1} p^{\omega_{k+1}}(1-p)^{1-\omega_{k+1}} \cdot \ldots \cdot \sum_{\omega_n=0}^{1} p^{\omega_n}(1-p)^{1-\omega_n} = p^{i_k}(1-p)^{1-i_k}.$$

Analogiškai randame, kad

$$P\left(A_{j_1}(i_{j_1}) \cap \ldots \cap A_{j_l}(i_{j_l})\right) = P\left(\{\omega : \omega_{j_1} = i_{j_1}, \ldots, \omega_{j_l} = i_{j_l}\}\right) =$$

$$= p^{i_{j1}}(1-p)^{1-i_{j1}} \ldots p^{i_{jl}}(1-p)^{1-i_{jl}} = P\left(A_{j_1}(i_{j_1})\right) \ldots P\left(A_{j_l}(i_{j_l})\right)$$

su visais $\{j_1, \ldots, j_l\} \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$.

3. Tegu

$$U_k = \sum_{\omega_0=0}^{1} \sum_{\omega_1=0}^{1} \ldots \sum_{\omega_n=0}^{1} p_0(\omega_0)\, p(\omega_0, \omega_1) \ldots p(\omega_{k-1}, \omega_k),$$

$k = 0, 1, \ldots$.

Tada

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = U_n .$$

Matematinės indukcijos būdu įrodysime, kad $U_k = 1$ su visais $k = 0, 1, \ldots$.

Turime, kad

$$U_0 = p_0(0) + p_0(1) = 1$$

ir

$$\sum_{\omega_k=0}^{1} p(\omega_{k-1}, \omega_k) = p(\omega_{k-1}, 0) + p(\omega_{k-1}, 1) = 1.$$

Priimdami, jog $U_{k-1} = 1$, gausime

$$U_k = \sum_{\omega_0=0}^{1} \sum_{\omega_1=0}^{1} \dots \sum_{\omega_{k-1}=0}^{1} \Big[p_0(\omega_0)\, p(\omega_0, \omega_1) \dots p(\omega_{k-2}, \omega_{k-1}) \cdot$$

$$\cdot \sum_{\omega_k=0}^{1} p(\omega_{k-1}, \omega_k) \Big] = U_{k-1} = 1.$$

4. Iš prielaidos išplaukia, kad

$$p_0(0) = 1 - p_0(1) = 1 - p, \quad p(i, 0) = 1 - p(i, 1) = 1 - p,$$

Todėl

$$p_0(\omega_0) = p^{\omega_0} (1-p)^{1-\omega_0} \quad \text{ir} \quad p(\omega_{k-1}, \omega_k) = p^{\omega_k} (1-p)^{1-\omega_k} ,$$

o tuo pačiu

$$P(\{\omega\}) = p_0(\omega_0)\, p(\omega_0, \omega_1) \dots p(\omega_{n-1}, \omega_n) =$$

$$= p^{\sum_{j=0}^{n} \omega_j} (1-p)^{n+1-\sum_{j=0}^{n} \omega_j} .$$

5. Formulę $|\Omega| = 2^{n+1}$ žinome iš kombinatorikos. Kai $p = \frac{1}{2}$,

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{2^k} (1-p)^{n+1-k} = \frac{1}{2^{n+1}} = |\Omega|^{-1}.$$

6. Imame baigčių aibę

$$\Omega = \left\{ \omega : \omega = (\omega_1, \dots, \omega_5),\ \omega_j \in \{0, 1\},\ j = 1, \dots, 5,\ \sum_{j=1}^{5} \omega_j = 2 \right\},$$

kur $\omega_j = 1$ reiškia, kad *j*-ajame bandyme ištrauktas baltas rutulys, o $\omega_j = 0$ reiškia, kad *j*-ajame bandyme ištrauktas juodas rutulys. Aibė Ω turi dešimt elementų. Tegu

$$A_k(i_k) = \{\omega : \omega_k = i_k\}, \quad A(i_1, \dots, i_k) = \{\omega : \omega_1 = i_1, \dots, \ \omega_k = i_k\},$$

$$k = 1, \dots, 5, \ \sum_{j=1}^{5} i_j = 2 .$$

Tikimybės $P(\{\omega\})$ turi būti tokios, kad

$$P(A_1(i_1)) = \left(\frac{2}{5}\right)^{i_1}\left(\frac{3}{5}\right)^{1-i_1};$$

$$P(A_2(i_2) \mid A_1(i_1)) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^{i_2}\left(\frac{3}{4}\right)^{1-i_2}, & \text{kai } i_1 = 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{kai } i_1 = 0; \end{cases}$$

$$P(A_3(i_3) \mid A_1(i_1, i_2)) = \begin{cases} 1, & \text{kai } i_1 + i_2 = 2, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{i_3}\left(\frac{2}{3}\right)^{1-i_3}, & \text{kai } i_1 + i_2 = 1, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{i_3}\left(\frac{1}{3}\right)^{1-i_3}, & \text{kai } i_1 + i_2 = 0; \end{cases}$$

$$P(A_4(i_4) \mid A_1(i_1, i_2, i_3)) = \begin{cases} 1, & \text{kai } i_1 + i_2 + i_3 = 0 \text{ arba } 2, \\ \frac{1}{2}, & \text{kai } i_1 + i_2 + i_3 = 1 \end{cases}$$

ir

$$P(A_5(i_5) \mid A_1(i_1, i_2, i_3, i_4)) = 1.$$

Kadangi

$$\{(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)\} = A_1(i_1) \cap A_2(i_2) \cap A_3(i_3) \cap A_4(i_4) \cap A_5(i_5),$$

tai iš sandaugos formulės ir duotų sąlyginių tikimybių randame, kad koks bebūtų $\omega \in \Omega$ $P(\{\omega\}) = \frac{1}{10}$.

Vadinasi, traukimo iš urnos be grąžinimo schemą aprašo klasikinis tikimybių modelis. Bet

$$|A_1(1)| = |A_2(1)| = |A_3(1)| = |A_4(1)| = |A_5(1)| = 4$$

ir tokiu būdu

$$P(A_j(1)) = \frac{2}{5}, \; j = 1, \dots, 5.$$

7. Imame baigčių aibę
$$\Omega=\left\{\omega:\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3),\,\omega_j\in\{0,1\},\ j=1,2,3\right\}$$
iš aštuonių elementų, kur $\omega_j=0$ reiškia, kad j-tasis kontaktas yra išjungtas, o $\omega_j=1$ reiškia,

kad j-tasis kontaktas yra sujungtas, $P\big(\{\omega\}\big)=\dfrac{1}{8}$, $\omega\in\Omega$.

Tegu A yra įvykis, kad lemputė nedega. Turime, kad $A=\Omega\setminus\{1,1,1\}$ ir $P(A)=\dfrac{7}{8}$. Tegu
$$A_1=\left\{(0,0,0),(0,1,1),(0,0,1),(0,1,1)\right\},\ A_2=\left\{(1,0,1),(1,0,0)\right\},$$
$$A_3=\left\{(1,1,0)\right\},\ A_4=\left\{(1,1,1)\right\}.$$
Akivaizdu, kad
$$A_j\cap A_k=\varnothing,\ j\neq k\text{, ir } A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4=\Omega,$$
$$P(A_1)=\frac{1}{2},\ P(A_2)=\frac{1}{4},\ P(A_3)=P(A_4)=\frac{1}{8},\ P(A\mid A_j)=1,$$
$$j=1,2,3,\ P(A\mid A_4)=0.$$
Pasinaudoję Bajeso formule, randame, kad
$$P(A_1\mid A)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=\frac{4}{7}.$$

8. Kai $k=1$, tai lygybė akivaizdi. Jei formulė teisinga duotam k, tai
$$\Pi^{k+1}=\Pi^k\Pi=\begin{pmatrix}1&0\\1-q&q^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1-q&q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1-q^{k+1}&q^{k+1}\end{pmatrix}.$$

9. Kai $k=2$, tai $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. Todėl su bet kokiu $k\geq 1$ turėsime, jog
$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^{2k}=\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^2\right]^k=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Toliau

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2k} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Būsenų aibę žymėsime $\{1, 2\}$, kur 1 reiškia giedrą dieną, o 2 reiškia ūkanotą dieną. Tada pradinių tikimybių vektorius $p_0 = (1, 0)$, o $p_2 = p_0 \Pi^2$. Kadangi

$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}44 & 0{,}56 \\ 0{,}28 & 0{,}72 \end{pmatrix}, \text{ tai}$$

$$p_2 = (p_2(1), p_2(2)) = (1, 0) \begin{pmatrix} 0{,}44 & 0{,}56 \\ 0{,}28 & 0{,}72 \end{pmatrix} = (0{,}44 \;\; 0{,}56).$$

Vadinasi ieškoma tikimybė $p_2(1) = 0{,}44$.

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Pasirinkę koordinačių sistemą kaip nurodyta užduotyje, turime

$$A(1;\, 0),\; A_1(a;\, 0),\; B(0;\, 1),\; B_1(0;\, b),\; C(1;\, 1),\; C_1(a;\, b).$$

Tiesės A_1B lygtis: $\dfrac{x-a}{0-a} = \dfrac{y-0}{1-0} \Leftrightarrow x + ay = a$;

Tiesės AB_1 lygtis: $\dfrac{x-1}{0-1} = \dfrac{y-0}{b-0} \Leftrightarrow bx + y = b$;

Tiesės CC_1 lygtis: $\dfrac{x-1}{a-1} = \dfrac{y-1}{b-1} \Leftrightarrow x(b-1) - y(a-1) = b - a$.

Nesunku įsitikinti, kad lygčių sistema

$$\begin{cases} x + ay = a, \\ bx + y = b, \\ x(b-1) - y(a-1) = b - a \end{cases}$$

turi vienintelį sprendinį $x = \dfrac{a(1-b)}{1-ab}$, $y = \dfrac{b(1-a)}{1-ab}$. Taigi visos 3 tiesės kertasi viename taške $\left(\frac{a(1-b)}{1-ab}; \frac{b(1-a)}{1-ab}\right)$.

2. Pasirinkę koordinačių sistemą kaip nurodyta uždavinyje, turime:

1) $A_1\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $B_1\left(0; \frac{1}{2}\right)$, $C_1\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

2) Taško P koordinatės $(x_P; y_P)$ tenkina lygybes $\frac{x_P + x}{2} = \frac{1}{2}$ ir $\frac{y_P + y}{2} = \frac{1}{2}$. Iš čia $P(1-x; 1-y)$.

Taško Q koordinatės $(x_Q; y_Q)$ tenkina lygybes $\frac{x_Q + x}{2} = 0$ ir $\frac{y_Q + y}{2} = \frac{1}{2}$. Iš čia $Q(-x; 1-y)$.

Taško R koordinatės $(x_R; y_R)$ tenkina lygybes $\frac{x_R + x}{2} = \frac{1}{2}$ ir $\frac{y_R + y}{2} = 0$. Iš čia $R(1-x; -y)$.

3) Atkarpos AP vidurio taško L koordinatės yra:
$x_L = \frac{x_A + x_P}{2} = \frac{0 + 1 - x}{2} = \frac{1-x}{2}$;
$y_L = \frac{y_A + y_P}{2} = \frac{0 + 1 - y}{2} = \frac{1-y}{2}$.

Analogiškai įsitikiname, kad atkarpos BQ vidurio taško K koordinatės yra $x_K = \frac{1-x}{2}$ ir $y_K = \frac{1-y}{2}$, o atkarpos CR vidurio taško T koordinatės: $x_T = \frac{1-x}{2}$, $y_T = \frac{1-y}{2}$.

Matome, kad taškų L, K ir T koordinatės sutampa. Taigi AP, BQ ir CR susikerta viename taške, kurio koordinatės $\left(\frac{1-x}{2}; \frac{1-y}{2}\right)$.

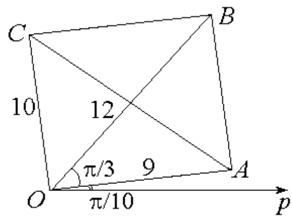
3. $S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OBC} - S_{OAC}$.

Remdamiesi formule

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} r_A \cdot r_B \sin(\varphi_B - \varphi_A),$$

gauname:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{10}\right) = 54 \sin\frac{7\pi}{30};$$



1 pav.

$$S_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{3}\right) = 60 \sin\frac{4\pi}{15};$$

$$S_{OAC} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{10}\right) = 45 \sin\frac{\pi}{2} = 45.$$

Taigi

$$S_{ABC} = 54 \sin\frac{7\pi}{30} + 60 \sin\frac{4\pi}{15} - 45 \approx 54 \cdot 0{,}67 + 60 \cdot 0{,}74 - 45 =$$

$= 35{,}58$ (kv. vienetų).

Pagal atstumo tarp dviejų taškų formulę

$$AB = \sqrt{9^2 + 12^2 - 2 \cdot 9 \cdot 12 \cos\frac{7\pi}{30}} = \sqrt{225 - 216 \cos\frac{7\pi}{30}} \approx 8{,}03,$$

$$BC = \sqrt{12^2 + 10^2 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cos\frac{4\pi}{15}} = \sqrt{244 - 240 \cos\frac{4\pi}{15}} \approx 9{,}13,$$

$$AC = \sqrt{9^2 + 10^2} = \sqrt{181} \approx 13{,}45.$$

Todėl perimetras lygus

$$AB + BC + AC \approx 30{,}71.$$

4. Kadangi $OA = a$, $OB = a\sqrt{3}$, $OC = 2a$, $OD = a\sqrt{3}$.

$$\angle AOB = \frac{\pi}{6},\ \angle AOC = \frac{\pi}{3},\ \angle AOD = \frac{\pi}{2},\ \angle AOE = \frac{2\pi}{3},$$

tai taisyklingojo šešiakampio viršūnių polinės koordinatės yra:

$$A(a; 0),\ B\left(a\sqrt{3}; \frac{\pi}{6}\right),\ C\left(2a; \frac{\pi}{3}\right),\ D\left(a\sqrt{3}; \frac{\pi}{2}\right),\ E\left(a; \frac{2\pi}{3}\right),$$

O (0; neapibėžtas).

5. Kadangi $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\cos\theta$, $z = \rho\cos\theta$, tai

$$x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta =$$

$$= \rho^2\sin^2\theta\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho^2\sin^2\theta.$$

Kūgio lygtis sferinėse koordinatėse yra:

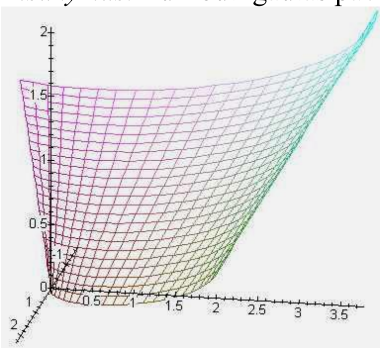
$\rho^2\sin^2\theta = 3\rho^2\cos^2\theta$, t.y. $\mathrm{tg}^2\theta = 3 \Rightarrow \mathrm{tg}\,\theta = \sqrt{3}$ arba $\mathrm{tg}\,\theta = -\sqrt{3}$.

Iš šių lygčių

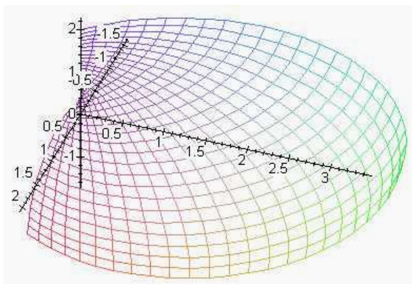
$$\theta_1 = \mathrm{arctg}\,\sqrt{3} = \frac{\pi}{3},\ \theta_2 = \pi + \mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{2\pi}{3}\ \text{(nes } 0 \le \theta \le \pi\text{)}.$$

Ats.: Kūgio lygtis: $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, kai $z \ge 0$; $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$, kai $z \le 0$.

6. *Atsakymas.* Turi būti gautas paviršius,pavaizduotas 1 paveiksle.



2 pav.



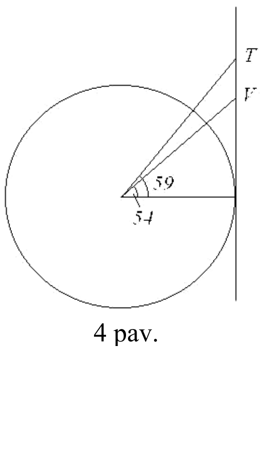
3 pav.

7. *Atsakymas.* Turi būti gautas paviršius, pavaizduotas 3 paveiksle.

8. *Atsakymas.* Iš pateikiamo 3 brėžinio matyti, kad atstumą VT (tarp Vilniaus ir Talino) cilindrinėse koordinatėse galima apskaičiuoti pagal formulę:

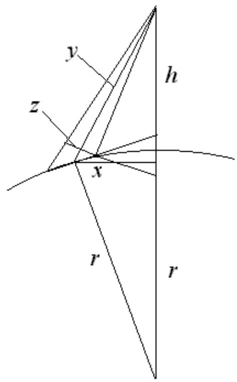
$$VT = R(\mathrm{tg}59 - \mathrm{tg}54).$$

Gauname $VT = 1813$ km. Tuo tarpu Žemės paviršiumi matuojamas atstumas sudarys $\pi R\dfrac{59-54}{180} = \dfrac{\pi R}{36}$, t. y. apie 549,5 km.



4 pav.

9. *Atsakymas.* Šį uždavinį sprendžiant, reikia 4 brėžinį papildyti:



5 pav.

Dabar, naudodamiesi abiejų brėžinių žymėjimais, sprendžiame taip. Lengva rasti atkarpos x ilgį: $x = r\sin\varphi$. Atkarpos y ilgį apskaičiuojame labai panašiai:

$$y = \frac{h + r\,(1 - \cos\varphi)}{\cos\theta} = (h + r(1 - \cos\varphi))\sec\theta;$$

čia $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$. Pastebime, kad atkarpa z ir atkarpa ρ_C sudaro kampą $\varphi + \theta$. Todėl atkarpos z (esančios skleistinio kamo viduje ir perkeltos į atkarpos y pradžią) ilgis yra $z = \gamma(h + r(1 - \cos\varphi)\sec\theta)$. Dabar, nekeisdami atkarpos z ilgio, perkelkime ją ten, kur ji pavaizduota brėžinyje, ir apskaičiuokime skenuojamos juostos plotį:

$$\rho_C = \gamma[h + r(1 - \cos\vartheta)]\sec\theta\sec(\vartheta + \varphi).$$

Pastaba. Toks atkarpos z kilnojimas yra labai tipiškas Žemės paviršiaus skaičiavimuose. Jis duoda apytikrį, bet užtat lengvai suprantamą rezultatą.

10. Atstumas tarp šių taškų Žemės paviršiumi matuojant yra $\dfrac{\pi R}{6}$, ir nepriklauso nuo platumos (pažymėkime ją kampu φ). Atstumas tarp šių taškų cilindrinėse koordinatėse yra $R(\mathrm{tg}(\varphi + \frac{\pi}{6}) - \mathrm{tg}\varphi)$, o jų santykis:

$$\left(R(\mathrm{tg}(\varphi + \frac{\pi}{6}) - \mathrm{tg}\varphi) - \frac{\pi R}{6}\right) : \frac{\pi R}{6} = \left((\mathrm{tg}(\varphi + \frac{\pi}{6}) - \mathrm{tg}\varphi) - \frac{\pi}{6}\right) : \frac{\pi}{6}.$$

Šį santykį galima pakeisti, naudojant standartinius trigonometrinių funkcijų pertvarkymus:

$$\left(\left(\left(\mathrm{tg}(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) - \mathrm{tg}\varphi\right) - \frac{\pi}{6}\right) : \frac{\pi}{6} = \left(\frac{1 + \mathrm{tg}^2\varphi}{\sqrt{3} - \mathrm{tg}\varphi} - \frac{\pi}{6}\right) : \frac{\pi}{6}.$$

Pastarąjį santykį galima nesudėtingai įvertinti:

$$\frac{1 + \mathrm{tg}^2\varphi}{\sqrt{3} - \mathrm{tg}\varphi} - \frac{\pi}{6} > \frac{\pi}{120}, \text{ arba } \frac{1 + \mathrm{tg}^2\varphi}{\sqrt{3} - \mathrm{tg}\varphi} > \frac{21\pi}{120}.$$

Naudodami kvadratinių nelygybių sprendimo būdus, ir įvertinę koeficientų apytikres reikšmes, gauname nelygybę:

$$\mathrm{tg}^2\varphi + 0{,}549778714\,\mathrm{tg}\varphi + 0{,}047755333 < 0\,.$$

Ši nelygybė teisinga, jei $\mathrm{tg}\varphi = -0{,}44164914$ arba $\mathrm{tg}\varphi = -0{,}10812957$. Tai reiškia, kad platuma turi būti į pietus nuo ekvatoriaus, o kampas 30 laipsnių turi būti atidedamas į šiaurę nuo šios platumos.

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

1. 0; 2. (2;6); 3. 6; 8; 10; 4. 44; 5. 0,97.