LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

# *Jaunajam matematikui*

# 3

**2000–2002 metų**
**Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos**
**užduotys ir jų sprendimai**

Danieliaus leidykla

Vilnius, 2002

UDK 51(079)
Ja712

**Leidinio sudarytojai:**

Antanas APYNIS
Eugenijus STANKUS
Juozas ŠINKŪNAS

Leidinį recenzavo:

Ona JABLONSKIENĖ
Marytė STRIČKIENĖ

Leidinį redagavo Joana PRIBUŠAUSKAITĖ

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerijos
rekomenduota 2002

ISBN 9955-476-16-8

# TURINYS

# PRATARMĖ

Į skaitytojų rankas atiduodame jau trečią Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos uždavinių knygelę. Į ją sudėjome visą 2000-2002 mokslo metais skelbtą medžiagą. Per šiuos mokslo metus LJMM klausytojai turėjo progą giliau susipažinti su skaičių dalumu, grandininėmis trupmenomis, aritmetiniu, geometriniu, harmoniniu vidurkiais ir jų taikymais bei skaičių sekomis. Taip pat buvo nagrinėtos iracionaliosios bei trigonometrinės lygtys ir nelygybės. Nepamiršome ir geometrijos – moksleiviams buvo pasiūlyta skaičiuoti figūrų plotus, taikyti vektorius planimetrijos uždaviniams spręsti.

Norėtume, kad ši knygelė, kaip ir ankstesnės dvi, būtų skaitoma, padėtų moksleiviams geriau suprasti matematiką ir leistų jiems geriau pasirengti studijoms aukštosiose mokyklose. Manome, kad ji galėtų būti naudinga ir matematikos mokytojams.

Dėkojame straipsnių autoriams už kruopštų užduočių rengimą, kolegei Kristinai Lyndienei, labai rūpestingai rinkusiai bei maketavusiai visą tekstą, ir apskritai visiems, prisidėjusiems prie šios knygelės pasirodymo.

Sudarytojai A. Apynis, E. Stankus, J. Šinkūnas

# Metodinė medžiaga ir užduotys

# STOJAMOJI UŽDUOTIS

**A. Apynis, E. Stankus (Vilniaus universitetas),**
**J. Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)**

**1.** Suprastinkite:

$$\frac{3(ab)^{\frac{1}{2}}-3b}{a-b}+\frac{(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})^3+2a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}.$$

**2.** Iš dviejų miestų $A$ ir $B$ vienas prieš kitą vienu metu išvyko motociklininkas ir dviratininkas. Važiuodami pastoviais greičiais, jie susitiko po 45 min. Per kiek laiko motociklininkas iš miesto $A$ nuvažiavo į miestą $B$, jeigu kelionėje jis užtruko dviem valandomis ilgiau negu dviratininkas, važiuodamas iš $B$ į $A$?

**3.** Išspręskite nelygybę

$$\frac{9}{(x+1)^2}\geq 1.$$

**4.** Įrodykite nelygybę

$$a^2+b^2+1\geq ab+a+b;$$

čia $a$ ir $b$ – bet kokie realieji skaičiai.

**5.** Raskite penkiaženklius skaičius $\overline{34x5y}$ ($x$ – šimtų skaitmuo, $y$ – vienetų skaitmuo), kurie dalijasi iš 36.

**6.** Įrodykite, kad trupmena $\dfrac{2x+3}{5x+7}$ yra nesuprastinama koks bebūtų sveikasis skaičius $x$.

**7.** Apskaičiuokite:

$$\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}.$$

**8.** Raskite daugianario

$$P(x)=(x^2+2x+2)^7+(x^2-3x-3)^7$$

koeficientų prie nelyginių $x$ laipsnių sumą.

**9.** Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2-4y^2-xy+5y=1, \\ x^2+3y^2-xy-4y=-1. \end{cases}$$

**10.** Trapecijos $ABCD$ pagrindas $BC$ yra apskritimo skersmuo. Šis apskritimas liečia pagrindą $AD$ ir eina per trapecijos įstrižainių vidurio taškus. Raskite trapecijos kampus.

# I. SKAIČIŲ DALUMAS

**E. Stankus**
**(Vilniaus universitetas)**

Mokykliniame matematikos kurse sveikųjų skaičių dalumo klausimai plačiai nenagrinėjami. Apsiribojama sveikųjų skaičių kai kuriais dalumo požymiais bei didžiausiu bendruoju dalikliu ir mažiausiu bendruoju kartotiniu. Norėtųsi išplėsti moksleivių žinias sveikųjų skaičių dalumo tema.

Dviejų sveikųjų skaičių suma, skirtumas bei sandauga yra sveikasis skaičius. Tačiau dalijant sveikąjį skaičių iš sveikojo ne visuomet gaunamas sveikasis skaičius. Šiems klausimams nagrinėti ir skirta ši tema.

Sveikuosius skaičius čia žymėsime *a*, *b*, *c*, …, sveikųjų skaičių aibę, kaip įprasta, žymėsime Z, o natūraliųjų – N, t.y. N = {1, 2, 3, …,}.

**Apibrėžimas.** *Sakoma, jog skaičius a dalijasi iš skaičiaus b (žymima:* $b|\,a$*; skaitoma: – b dalija a), jeigu yra toks skaičius c, su kuriuo galioja lygybė* $a = bc$ *(*$a \in Z$*,* $b \in Z$*,* $b \neq 0$*).*

Skaičiai *b* ir *c* vadinami skaičiaus *a dalikliais*.

Pavyzdžiui, skaičius 14 dalijasi iš 7 (žymime $7|14$), 14 dalijasi iš 2 ($2|14$), taip pat $1|14$ ir $14|14$. Natūralieji skaičiai kurie dalijasi tik iš savęs ir iš vieneto, vadinami *pirminiais skaičiais* . Tokie skaičiai yra, pavyzdžiui: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, … pirminių skaičių yra be galo daug. Šį faktą IV a.p.m.e. įrodė Euklidas.

Suformuluosime pagrindines sveikųjų skaičių dalumo savybes, kuriomis dažnai remsimės tolesniuose samprotavimuose.

**Sveikųjų skaičių dalumo savybės:**

1) jei $a \neq 0$, tai $a|a$;

2) jeigu $a|b$ ir $b|c$, tai $a|c$;

3) jei $a|b$ ir $b|a$, tai $|a| = |b|$;

4) jei $a|b$ ir $|a| > |b|$, tai $b = 0$;

5) jeigu $a|b$ ir $a|c$, tai $a|b \pm c$;

6) jei su skaičiais $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ir $b_1, b_2, \ldots, b_n$ galioja lygybė

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

ir apie visus dėmenis, išskyrus vieną, žinoma, jog jie dalijasi iš $a$, tuomet ir šis dėmuo dalijasi iš $a$.

Labai svarbus teiginys, kuris naudingas ne tik tyrinėjant skaičių dalumą, yra **pagrindinė aritmetikos teorema**:

*Bet kuris natūralusis skaičius $n$ vieninteliu būdu išreiškiamas pirminių skaičių sandauga:* $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}$;

čia $p_1, p_2, \dots, p_m$ yra pirminiai skaičiai, rodikliai $k_1, k_2, \dots, k_m$ – kurie nors natūralieji skaičiai.

Kai skaičius $n$ – nedidelis, tai jį išskaidyti pirminiais dauginamaisiais paprasta. Pavyzdžiui, $6 = 2 \cdot 3$, $24 = 2^3 \cdot 3$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $45 = 3^2 \cdot 5$ ir pan. Ieškant natūraliojo skaičiaus skaidinio pirminiais dauginamaisiais, surasti visus jo pirminius daliklius patogu tokiu būdu:

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 320 & 2 \\ 160 & 2 \\ 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 728 & 2 \\ 364 & 2 \\ 182 & 2 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 325 & 5 \\ 65 & 513 \\ 13 & \\ 1 & \end{array}$$

Iš čia matome jog $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $320 = 2^6 \cdot 5$, $728 = 2^3 \cdot 7 \cdot 13$, $325 = 5^2 \cdot 13$. Žinoma, taikant šį pirminių daliklių ieškojimo būdą, pravartu žinoti pagrindinius sveikųjų skaičių dalumo požymius:

1. Skaičius dalijasi iš 2 tik tuomet, jeigu jo paskutinis skaitmuo yra arba 0, arba 2, arba 4, arba 6, arba 8.

2. Skaičius dalijasi iš 3 tik tada, kai jo skaitmenų suma dalijasi iš 3.

*Pastaba.* Taip pat formuluojamas ir dalumo iš 9 požymis: skaičius dalijasi iš 9 tik tada, kai jo skaitmenų suma dalijasi iš 9.

3. Iš 5 dalijasi tik tie skaičiai, kurių paskutinis skaitmuo yra arba 0, arba 5.

4. Tikrinant natūraliojo skaičiaus $n$ dalumą iš 7 bei 13, jį reikia užrašyti formule

$n = 10a + b$ ($0 \le b < 10$).

Skaičius $n$ dalijasi iš 7 tik tuomet, kai skaičius $a - 2b$ dalijasi iš 7. Skaičius $n$ dalijasi iš 13 tik tuomet, kai skaičius $a + 4b$ dalijasi iš 13.

5. Iš 11 dalijasi tiktai tie skaičiai, kurių skaitmenų, esančių nelyginėse vietose, suma arba lygi skaitmenų, esančių lyginėse vietose, sumai, arba skiriasi nuo jos skaičiumi, kuris dalijasi iš 11.

Panašiai formuluojami dalumo požymiai iš 17, 19, 23, 29, 31.

Dalumo iš 2 ir dalumo iš 5 požymių įrodymai paprasti – užtenka pasinaudoti penktąja dalumo savybe (pabandykite įrodyti). To negalėtume tvirtinti apie kitų požymių įrodymus. Norint įrodyti ir šiuos požymius, reikėtų žinoti dalybos su liekana savybes, kurios ir šiaip įdomios.

Sveikojo skaičiaus $a$ dalybos iš $m$ ($m \in \mathrm{N}$) su liekana veiksmas apibrėžiamas lygybe $a = mq + r$, kurioje $q$ – dalmuo ($q \in \mathrm{Z}$), o $r$ – liekana, $0 \le r < m$.

Atskiru atveju, kai $r = 0$, gauname, jog $a$ dalijasi iš $m$ ($m \mid a$).

Būtų nesunku įrodyti, jog bet kuriam sveikajam skaičiui $a$ ir natūraliajam $m$ egzistuoja *vienintelė* sveikųjų skaičių $q$ ir $r$, $0 \le r < m$, pora, su kuria galioja lygybė $a = mq + r$ (įrodykite).

Pavyzdžiui, tegu $a = 25$, $m = 7$. Tuomet $25 = 7 \cdot 3 + 4$, taigi $q = 3$, $r = 4$. Kai $a = -25$, $m = 7$, gausime $-25 = 7 \cdot (-4) + 3$; $q = -4$, $r = 3$.

Dalybos su liekana prireikia ir kasdieniniame gyvenime. Šiemet rugsėjo 27 d. buvo trečiadienis. Norėdami nustatyti, kokia savaitės diena bus po metų, t.y. 2001 m. rugsėjo 27 d., turime dienų skaičių – 365 padalyti iš 7 ir pagal gautąją liekaną nustatyti savaitės dieną. Gauname $365 = 52 \cdot 7 + 1$, todėl ateinančių metų rugsėjo 27 d. bus ketvirtadienis.

**Apibrėžimas.** *Jei dalijant sveikuosius skaičius a ir b iš m gaunamos vienodos liekanos, t.y.* $a = mq_1 + r$ *ir* $b = mq_2 + r$, $0 \le r < m$, *tai rašoma* $a \equiv b \pmod m$ *(skaitoma: a lygsta b moduliu m). Pastaroji išraiška yra lyginys moduliu m.*

**1 pavyzdys.** Tegu $m = 3$. Tuomet vienodas liekanas, lygias 2 ($r = 2$), turi sveikieji skaičiai $3m + 2$, $m \in \mathrm{Z}$:

$$\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \dots .$$

Taigi galime rašyti:

$-7 \equiv 2 \pmod 3$, $-4 \equiv 5 \pmod 3$, $8 \equiv 2 \pmod 3$ ir pan.

Formos $3m + 1$, $m \in \mathrm{Z}$, skaičiai

$$\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots$$

turi liekaną $r = 1$. Vadinasi,

$-8 \equiv 1 (\text{mod } 3)$, $-5 \equiv 1 (\text{mod } 3)$, $10 \equiv 1 (\text{mod } 3)$ ir t.t.

Skaičiai, kurie užrašomi pavidalu $3m$, $m \in \mathrm{Z}$, dalijasi iš 3 ($r = 0$):

$$\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots .$$

Todėl

$$-9 \equiv 0 (\text{mod } 3),\ -6 \equiv 9 (\text{mod } 3),\ 9 \equiv 0 (\text{mod } 3) \text{ ir t.t.}$$

Taigi visi sveikieji skaičiai pagal pasirinktąjį modulį $m = 3$ suskirstomi į tris klases pagal liekanos *r* galimas reikšmes.

Nesunku patikrinti, kad lyginys $a \equiv b (\text{mod } m)$ teisingas tik tuomet, kai $a - b$ dalijasi iš $m$ $(m \mid a - b)$. Pagal lyginio apibrėžimą šį faktą galime užrašyti ir taip:

$a - b \equiv 0 (\text{mod } m)$.

**Lyginių savybės** labai panašios į lygčių savybes. Suformuluosime jas:

1) jei $a \equiv b (\text{mod } m)$, tai $ca \equiv cb (\text{mod } m)$ ir $a + c \equiv b + c (\text{mod } m)$ su bet kuriuo sveikuoju skaičiumi *c*;

2) Jei $a_1 \equiv b_1 (\text{mod } m)$ ir $a_2 \equiv b_2 (\text{mod } m)$, tai $a_1 + a_2 \equiv$ $\equiv b_1 + b_2 (\text{mod } m)$ ir $a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 (\text{mod } m)$;

3) jei $a \equiv b (\text{mod } m)$, tai $a^k \equiv b^k (\text{mod } m)$, $k \in \mathrm{N}$.

Remdamiesi lyginių moduliu *m* apibrėžimu šias savybes pabandykite įrodyti patys.

Panagrinėkime keletą lyginių savybių taikymo pavyzdžių.

**2 pavyzdys.** Raskime liekaną, kurią gausime skaičių $A = 13^{16} - 2^{25} \cdot 5^{15}$ padaliję iš 3.

*Sprendimas.* Atkreipkime dėmesį, kad galioja šitokie lyginiai:

$13 \equiv 1(\text{mod}3)$ (nes $3|13-1$), $2 \equiv -1(\text{mod}3)$ (nes $3|2+1$),

$$5 \equiv -1(\text{mod}3) \text{ (nes } 3|5+1\text{)}.$$

Pagal lyginių trečiąją savybę turėsime:

$$13^{16} \equiv 1(\text{mod}3),\ 2^{25} \equiv (-1)^{25}(\text{mod}3),$$

t.y.

$$2^{25} \equiv -1(\text{mod } 3),\ 5^{15} \equiv -1(\text{mod}3).$$

Pritaikę antrąją savybę, gausime:

$$2^{25} \cdot 5^{15} \equiv (-1) \cdot (-1)(\mathrm{mod}3)\text{, t.y. } 2^{25} \cdot 5^{15} \equiv 1(\mathrm{mod}3).$$

Iš pirmosios savybės išplaukia, jog

$$-2^{25} \cdot 5^{15} \equiv -1(\mathrm{mod}3), \quad 13^{16} - 2^{25} \cdot 5^{15} \equiv 1 - 1(\mathrm{mod}3).$$

Taigi $A \equiv 0(\mathrm{mod}3)$. Kitaip tariant, skaičius $A$ dalijasi iš 3.

Vadinasi, naudojantis lyginių savybėmis galima patikrinti, ar duotasis skaičius dalijasi iš kito skaičiaus, neatliekant dalybos veiksmo ir nesinaudojant dalumo požymiais.

**3 pavyzdys.** Įrodykime, kad su kiekvienu natūraliuoju $n$ skaičius $n^3 + 14n$ dalijasi iš 3.

*Įrodymas. 1 būdas.* Bet kurį natūralųjį skaičių dalijant iš 3, galimos liekanos $r$ reikšmės yra: $r = 0$, $r = 1$ ir $r = 2$. Todėl nagrinėsime kiekvieną atvejį atskirai.

Kai $r = 0$, tai $n = 3k$. Tuomet $n^3 + 14n = (3k)^3 + 14 \cdot 3k$ .Šis skaičius dalijasi iš 3 pagal penktąją dalumo savybę.

Jei $r = 1$, tuomet $n = 3k + 1$ ir

$$n^3 + 14n = (3k+1)^3 + 14 \cdot (3k+1) = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 + 42k + 14 =$$

$$= 3 \cdot (9k^3 + 9k^2 + 17k) + 15.$$

Kadangi pastarosios išraiškos abu dėmenys dalijasi iš 3, tai ir skaičius $n^3 + 14n$ dalijasi iš 3.

Jeigu $r = 2$, tai $n = 3k + 2$ ir

$$n^3 + 14n = (3k+2)^3 + 14 \cdot (3k+2) = 3 \cdot (9k^3 + 18k^2 + 26k) + 36.$$

Pagal tą pačią dalumo savybę darome išvadą, kad skaičius $n^3 + 14n$ ir šiuo atveju dalijasi iš 3.

Taigi su visais natūraliaisiais $n$ skaičius $n^3 + 14n$ dalijasi iš 3.

*2 būdas.* Įrodymas matematinės indukcijos metodu.

Pažymėkime $A(n) = n^3 + 14n$. Nesunku patikrinti, jog skaičius $A(n)$ dalijasi iš 3, jeigu $n = 1$:

$$A(1) = 1^3 + 14 \cdot 1 = 15.$$

Padarykime prielaidą, jog skaičius $A(k)$ dalijasi iš 3 ir įrodykime, jog skaičius $A(k+1)$ dalijasi iš 3. Tuo įsitikinsime pertvarkę išraišką $A(k+1)$:

$A(k+1)=(k+1)^3+14\cdot(k+1)=k^3+3k^2+3k+1+14k+14=$

$k^3+14k+3k^2+3k+15=A(k)+3\cdot(k^2+k+5)$.

Taigi $A(k+1)$ dalijasi iš 3, nes pirmasis dėmuo dalijasi iš 3 (pagal prielaidą), o antrasis dėmuo yra $3\cdot(k^2+k+5)$.

Matematinės indukcijos principas leidžia tvirtinti, jog teiginys „$n^3+14n$ dalijasi iš 3“ yra teisingas su visais natūraliaisiais *n*.

Remdamiesi lyginių bei dalumo savybėmis įrodysime dalumo iš 3 ir 7 požymius.

*Dalumo iš 3 požymio įrodymas.* Tarkime, skaičius *n* yra toks:

$n=\overline{a_k\cdot a_{k-1}\cdot\ldots\cdot a_2\cdot a_1\cdot a_0}$, $k\geq 1$;

čia $a_0$ yra vienetų skaitmuo, $a_1$ – dešimčių skaitmuo, $a_2$ – šimtų skaitmuo ir t.t.

Taigi $n=a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\ldots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0$.

Kadangi

$10\equiv 1(\mathrm{mod}3)$, $10^2\equiv 1(\mathrm{mod}3)$, … , $10^k\equiv 1(\mathrm{mod}3)$,

tai pagal penktąją dalumo savybę gauname, jog

$n=a_k+a_{k-1}+\ldots+a_2+a_1+a_0(\mathrm{mod}3)$.

Kitaip tariant, skaičius *n* ir jo skaitmenų suma dalijant iš 3 turi tą pačią liekaną. Jei skaitmenų suma dalijasi iš 3, tai ir pats skaičius *n* dalijasi iš 3.

*Dalumo iš 7 požymio įrodymas.* Duotąjį skaičių *n* užrašykime pavidalu $n=10a+b$, $0\leq b<10$ ir tarkime, kad šis skaičius dalijasi iš 7, t.y.

$10a+b=7q$, $q\in\mathrm{N}$.

Tada iš 7 dalijasi ir skaičius

$a-2b=50a+5b-7(7a+b)=35q-7(7a+b)$.

Samprotaudami atvirkščia tvarka, iš skaičiaus $a-2b$ dalumo iš 7 galėtume išvesti ir skaičiaus $10a+b$ dalumą iš 7.

# PIRMOJI UŽDUOTIS

**1.** Įrodykite šeštąją dalumo savybę: jei su skaičiais $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ir $b_1, b_2, \ldots, b_n$ galioja lygybė

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

ir apie visus dėmenis, išskyrus vieną, žinoma, jog jie dalijasi iš $a$, tuomet ir šis dėmuo dalijasi iš $a$.

**2.** Raskite skaičių 3663 ir 1443 didžiausią bendrąjį daliklį.

**3.** Įrodykite, jog su visais natūraliaisiais $n$ skaičius $n(n+1)(n+2)$ dalijasi iš 6. Ar šis teiginys galioja, kai $n$ – bet kuris sveikasis skaičius? Atsakymą pagrįskite.

**4.** Įrodykite, jog su visais natūraliaisiais $n$ skaičius $n^7 + 720n$ dalijasi iš 7.

**5.** Įrodykite, jog su bet kuriuo $a \in \mathrm{R}$ ir bet kuriuo $n \in \mathrm{N}$ galioja teiginys:

$$(a^2 - a + 1) \mid (a^{2n+1} + (a-1)^{n+2}) .$$

**6.** Ar skaičius $2^{15} + 3^{15}$ dalijasi iš 13? Atsakymą pagrįskite.

**7.** Raskite liekaną, gaunamą skaičių $13^{16} - 2^{25} \cdot 5^{15}$ dalijant iš 37.

**8.** Raskite liekaną, gaunamą skaičių $(116 + 17^{17})^{21}$ dalijant iš 8.

**9.** Raskite keturženklius skaičius $\overline{x97y}$, kurie dalijasi iš 45.

**10.** Raskite skaičiaus $2^{2000}$ paskutinįjį skaitmenį.

# II. GRANDININĖS TRUPMENOS

**Rimantas Skrabutėnas**
**(Vilniaus pedagoginis universitetas)**

**1.** Formalų „daugiaaukštį“ užrašą

$$[q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots] = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots}} \tag{1}$$

vadinsime *grandinine trupmena* (GT). Skaičiai $q_0, q_1, \ldots, q_n$ vadinami GT elementais.

Mes domėsimės tiktai tokiomis GT, kuriose $q_i$, $i \geq 1$ yra natūralieji skaičiai, o $q_0$ – sveikasis skaičius.

Akivaizdu, kad, kai *natūraliųjų* elementų $q_i$ skaičius yra baigtinis, tai GT yra *racionalusis skaičius*. Tokiu atveju GT vadinsime *baigtine grandinine trupmena* (sutrumpintai – BGT). Kai elementų seka $q_i$, $i = 0, 1, \ldots$ yra begalinė, šitoks apibrėžimas ir išraiška (1) kol kas yra tik formalūs, nes neaiški tokio reiškinio prasmė: neaišku, nei kas pridedama prie $q_i$, nei iš ko kaskart dalijamas vienetas. Tad *begalinės* GT sąvoką patikslinsime kiek vėliau.

BGT aibė sutampa su racionaliųjų skaičių aibe $Q$. Tai išplaukia iš vadinamojo Euklido (arba kitaip: *nuoseklios dalybos*) algoritmo, kuris, savo ruožtu, pagrįstas *dalybos su liekana teorema*, tvirtinančia, kad: *imant bet kokią sveikųjų skaičių $a$ ir $b \neq 0$ porą, galima rasti tokią vienintelę sveikųjų skaičių $q$ ir $r$ porą, su kuria būtų teisinga lygybė:*

$$a = bq + r, \ 0 \leq r < |b|.$$

Sakome, kad skaičius $a$ *padalytas iš skaičiaus* $b$ *su liekana* $r$. Skaičius $q$ vadinamas skaičių $a$ ir $b$ *dalybos nepilnuoju santykiu*. Pvz., jei $a = -13$, $b = 5$, tai $-13 = (-3) \cdot 5 + 2$, todėl nepilnasis santykis $q = -3$, o liekana $r = 2$.

*Euklido algoritmu* vadinamas nuoseklus dalybos su liekana teoremos taikymas: pirmiausia žinomų skaičių $a$ ir $b$ porai, po to – skaičių $b$ ir $r$ (čia $r$ yra $a$ dalybos iš $b$ liekana) porai, toliau skaičių $r$ ir $r_1$ porai ($r_1$ yra $b$ dalybos iš $r$ liekana) ir t.t. Procesas tęsiamas tol, kol gaunama lygi nuliui liekana, sakykime $r_{k+1} = 0$. Gauname lygybes:

$$a = bq_0 + r,\ 0 \le r < |b|,$$
$$b = rq_1 + r_1,\ 0 \le r_1 < r,$$
$$r = r_1 q_2 + r_2,\ 0 \le r_2 < r_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k,\ 0 \le r_k < r_{k-1},$$
$$r_{k-1} = r_k q_{k+1}.$$

Sakome, kad Euklido algoritmą pritaikėme skaičių $a$ ir $b$ porai. Iš šių nelygybių matome, kad liekanos $r, r_1, r_2, \ldots$ nuosekliai mažėja. Kadangi jos yra neneigiami sveikieji skaičiai, tai būtinai po baigtinio žingsnių skaičiaus (ne didesnio už $|b|$) dalybos procesas baigsis. Pavyzdžiui, pritaikykime Euklido algoritmą skaičiams $705$ ir $31$:

$$705 = 22 \cdot 31 + 23,$$
$$31 = 1 \cdot 23 + 8,$$
$$23 = 2 \cdot 8 + 7,$$
$$8 = 1 \cdot 7 + 1$$
$$7 = 7 \cdot 1.$$

**1 teorema**. *Kiekvienas racionalusis skaičius* $t = \frac{a}{b}$ *yra vienareikšmiškai išskleidžiamas BGT, kurios elementai yra nepilnieji santykiai, gauti taikant Euklido algoritmą skaičiams a ir b.*

**1 pavyzdys.** Išskleiskime BGT racionalųjį skaičių $\frac{705}{31}$. Aukščiau pateiktame pavyzdyje gauti nepilnieji santykiai $q_0 = 22$, $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $q_3 = 1$, $q_4 = 7$ ir yra ieškomo skleidinio elementai. Todėl, $\frac{705}{31} = [22, 1, 2, 1, 7]$.

Ir atvirkščiai, – jei duota baigtinė grandininė trupmena, tai, atlikdąmi įprastus algebrinius pertvarkius, lengvai paverčiame ją konkrečiu racionaliuoju skaičiumi.

**2 pavyzdys.**

$$[-2, 1, 2, 5] = -2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5}}} = -2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{5}{11}} = -2 + \frac{11}{16} = -\frac{21}{16}.$$

**2.** Reduktai ir jų savybės.

**Apibrėžimas.** *Nutraukus GT (baigtinę ar begalinę) ties jos $k$- tuoju elementu, gautąjį racionalųjį skaičių*

$$R_k = [q_0, q_1, q_2, ..., q_k] = \frac{P_k}{Q_k}$$

*vadiname tos GT $k$- tosios eilės* (arba: $k$-tuoju) *reduktu*.

Reduktų skaitikliai $P_k$ ir vardikliai $Q_k$ turi daug įdomių savybių, įgalinančių efektyviai taikyti GT .

1. GT $k$-tojo redukto skaitikliai ir vardikliai tenkina rekurenčiąsias formules:

$$P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}, \quad Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}.$$

Papildomai apibrėžus $P_{-1} = 1$ ir $Q_{-1} = 0$ , šios rekurenčiosios formulės galioja su visais $k \geq 1$ .

2. Su visais natūraliaisiais $k$:

$$P_{k-1} Q_k - P_k Q_{k-1} = (-1)^k .$$

3. GT reduktai yra nesuprastinamos trupmenos, kitaip tariant, su visais natūraliaisiais $k$ skaičių $P_k$ ir $Q_k$ didžiausias bendras daliklis yra lygus 1 $(D(P_k, Q_k) = 1)$.

4. Pažymėkime $(R_{2k})$ reduktų su lyginiais numeriais seką $R_2, R_4, R_6, ...,$ o $(R_{2k+1})$ – reduktų su nelyginiais numeriais seką $R_1, R_3, R_5, ....$ Seka $(R_{2k})$ yra didėjanti, o $(R_{2k+1})$ – mažėjanti. Baigtinėje grandininėje trupmenoje paskutinis reduktas (lyginis arba nelyginis) sutampa su išskleistuoju racionaliuoju skaičiumi.

5. Su visais $k$ galioja nelygybės $R_{2k} < R_{2k+1}$ ir $R_{2k} < R_{2k-1}$.

6. Su visais $k$ ir $l$ turime $R_{2k} < R_{2l+1}$ .

7. Jeigu $t$ baigtinė GT, o $R_k$ – jos reduktai, tai su visais $k \leq n-1$

$$| \, t - R_k | \leq |R_{k+1} - R_k| = \frac{1}{Q_k Q_{k+1}} \leq \frac{1}{Q_k^2} \, .$$

Baigtinės ar begalinės GT reduktus patogu apskaičiuoti sudarant lentelę, kurioje reduktų skaitikliai ir vardikliai randami remiantis rekurenčiosiomis formulėmis.

**3 pavyzdys.** Rasime visus mūsų išskleisto skaičiaus $\frac{705}{31} = [22, 1, 2, 1, 7]$ reduktus. Sudarome tokią lentelę:

| $k$ | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_k$ | | **22** | **1** | **2** | **1** | **7** |
| $P_k$ | 1 | 22 | 23 | 68 | 91 | 705 |
| $Q_k$ | 0 | 1 | 1 | 3 | 4 | 31 |

Todėl $R_0 = \frac{22}{1}$, $R_1 = \frac{23}{1}$, $R_2 = \frac{68}{3}$, $R_3 = \frac{91}{4}$, $R_4 = \frac{705}{31}$. Šiuo atveju pats skaičius sutampa su lyginės eilės reduktu $R_4$. Jei turime racionaliojo skaičiaus skleidinį, o norime žinoti patį skaičių, tai paskutinis šitaip apskaičiuotas reduktas ir bus atsakymas. Be to, pagal trečią reduktų savybę, atsakymą gausime nesuprastinamos trupmenos pavidalu.

**4 pavyzdys.** Skaičiui $\beta = [3, 7, 15, 1, 292]$ gausime:

| $k$ | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_k$ | | 3 | 7 | 15 | 1 | 292 |
| $P_k$ | 1 | 3 | 22 | 333 | 355 | 103993 |
| $Q_k$ | 0 | 1 | 7 | 106 | 113 | 33102 |

Todėl $\beta = R_4 = \frac{103993}{33102}$ ir $D(103993, 33102) = 1$ .

**3.** Begalinės GT. Kai užraše (1), elementų seka $(q_k)$ yra begalinė, tai galime kalbėti, apie *reduktų sekos* $(R_k)$ *ribą. Ta riba* $\alpha$ (jeigu ji egzistuoja) *vadinama* GT (1) *reikšme ir rašoma*

$$\alpha = [q_0, q_1, q_2, \dots, q_k, \dots] = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \dots}} .$$

Pasirodo, kad yra teisinga tokia teorema.

**2 teorema**. *Begalinės GT reduktų seka* $(R_k)$ *visada turi ribą.*

Svarbu yra tai , kad baigtine ar begaline GT galima užrašyti *bet kokį realųjį* skaičių.

**3 teorema**. *Bet kokį realųjį skaičių* $\alpha$ *galima vienareikšmiškai išskleisti GT . Ta GT yra baigtinė, kai* $\alpha$ *yra racionalusis ir begalinė, kai* $\alpha$ *irracionalusis skaičius*.

Racionalųjį skaičių $[q_0, q_1, q_2, ..., q_k]$ žymėsime $R_k$ ir, kaip jau sakyta, vadinsime grandininės trupmenos $[q_0, q_1, q_2, ..., \ q_k, ...]$ $k$–tuoju reduktu. Įvestųjų sąvokų prasmė ypač paaiškėja pastebėjus, kad GT reikšmė sutampa su pačiu skaičiumi $\alpha$ .

**4 teorema**. Sekos ( $R_k$ ) riba yra būtent išskleistasis skaičius $\alpha$.

Realiojo skaičiaus $\alpha$ skleidinio GT reduktus įprasta vadinti tiesiog *skaičiaus* $\alpha$ *reduktais*. Jiems yra teisingos visos minėtos reduktų savybės. Ypač svarbi taikymuose yra septintoji savybė:

$$\left| \alpha - R_k \right| \leq \frac{1}{Q_k Q_{k+1}} \leq \frac{1}{Q_k^2} \ .$$

*Verta žinoti, kad iracionaliojo skaičiaus* $\alpha$ *lyginės eilės reduktai yra mažesni, o nelyginės eilės, – didesni už* $\alpha$ .

Grandininės trupmenos taikomos aproksimacijoms, t.y. realiojo skaičiaus įvertinimo racionaliaisiais skaičiais uždaviniuose. GT taip pat naudojamos sprendžiant lyginius bei diofantines (neapibrėžtąsias) lygtis. Diofantinėmis lygtimis vadinamos lygtys su keliais nežinomaisiais, kai jos sprendžiamos ieškant sveikųjų sprendinių (Diofantas iš Aleksandrijos – graikų matematikas, gyvenęs II-III amžiuje). Pavyzdžiui, paprasčiausios diofantinės lygties su sveikaisiais koeficientais $a, b, c$

$$ax + by = c$$

bendrasis sprendinys, kai $D(a, b) = 1$, apskaičiuojamas pagal formules:

$$x = (-1)^{n-1} cQ_{n-1} + bt \, ; \qquad y = (-1)^n cP_{n-1} - at \ .$$

Čia $R_{n-1} = \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ yra skaičiaus $\dfrac{a}{b}$ skleidinio BGT priešpaskutinis reduktas, o $t \in Z$ .

**5 pavyzdys.** Neapibrėžtosios lygties $705x + 31y = 3$ *bendrasis sprendinys* yra aibė, sudaryta iš sveikųjų skaičių porų

$$\left((-1)^{4-1} \cdot 3 \cdot 4 + 31\,t, \ (-1)^4 3 \cdot 91 - 705\,t\right) =$$
$$= (-12 + 31\,t, \ 273 - 705\,t), \quad t \in Z,$$

kadangi $c=3$, o 3 pavyzdyje jau esame radę, kad šiuo atveju $n=4$, $R_3=\frac{91}{4}$.

**4.** Periodinės GT. Daugumai realiųjų skaičių skleidimas grandininėmis trupmenomis nėra paprastas uždavinys. Yra gauti tik atskirų iracionaliųjų skaičių, ar skaičių tipų skleidiniai. Pvz., apskaičiuota virš 200 000 skaičiaus $\pi$ skleidinio GT elementų. 4-to pavyzdžio skaičius $\beta=[3, 7, 15, 1, 292]$ kaip tik ir pateikia pirmuosius penkis $\pi$ skleidinio elementus. Kadangi $q_4=292$ yra gana didelis skaičius, tai iš 7-tosios reduktų savybės išplaukia, kad jau $R_2=\frac{333}{106}$ (ypač $R_3=\frac{355}{113}$) yra labai tikslūs skaičiaus $\pi$ artiniai.

Kaip matėme, skleidžiant GT didesnių problemų nekelia tik racionalieji skaičiai. Yra dar viena, gana siaura iracionaliųjų skaičių klasė, – *kvadratinės iracionalybės*, kurių skleidinys vadinamosiomis *periodinėmis* GT gaunamas palyginti paprastai.

**Apibrėžimas.** *Begalinė GT* $\alpha=[q_0, q_1, q_2,..., q_n,...]$ *vadinama periodine, jei egzistuoja tokie natūralieji skaičiai* $m$ *ir* $h$, *kad su bet kuriuo* $k \ge m$ *galioja lygybė* $q_{k+h}=q_k$.

Mažiausiąjį iš tokių natūraliųjų skaičių $h$ įprasta vadinti GT *periodo ilgiu*.

Sutrumpintai rašome

$$\alpha=[q_0, q_1, q_2,..., q_{m-1}, \overline{q_m,..., q_{m+h-1}}].$$

Galima kalbėti apie *grynai periodines* ir *mišrias periodines* begalines GT: jei $m$ = 0, tai GT vadinama *grynai periodine*.

**Apibrėžimas.** *Realųjį, bet neracionalųjį kvadratinės lygties* $ax^2+bx+c=0$ *su sveikaisiais koeficientais a, b, c sprendinį* $\alpha$ *vadinsime kvadratine iracionalybe.*

**6 pavyzdys.** Skaičiai $\sqrt{7}$ ir $1+\sqrt{3}$ yra kvadratinės iracionalybės, nes yra, atitinkamai, kvadratinių lygčių $x^2-7=0$ ir $x^2-2x-2=0$ šaknys.

**7 pavyzdys.** Pademonstruosime realiojo skaičiaus skleidimo GT algoritmą (juo, beje, remiasi ir 3 teoremos įrodymas) skleisdami *kvadratinę iracionalybę* $\sqrt{2}$. Kadangi kiekvienas realusis skaičius $x$

vienareikšmiškai užrašomas savo *sveikosios* ir *trupmeninės* dalių suma ($x = [x] + \{x\}$, $0 \le \{x\} < 1$), tai, tuo vadovaudamiesi, nuosekliai gauname:

$$\sqrt{2} = \left[\sqrt{2}\right] + \left\{\sqrt{2}\right\} = 1 + \left(\sqrt{2} - 1\right) = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2} - 1}}.$$

Toliau: $$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 = 2 + \left(\sqrt{2} - 1\right) = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2} - 1}} = \ldots$$

ir procesas ima kartotis. Tad: $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \ldots] = [1, \overline{2}]$. Šiuo atveju, $m = h = 1$.

Apskaičiavę $R_1 = \frac{3}{2}$, $R_2 = \frac{7}{5}$, $R_3 = \frac{17}{12}$, $R_4 = \frac{41}{27}$ pastebime, kad jau $R_3$ yra gana tikslus skaičiaus $\sqrt{2}$ artinys, nes pagal reduktų septintąją savybę: $\left|\sqrt{2} - \frac{17}{12}\right| < \frac{1}{12 \cdot 27} < 0{,}0031$.

Pasirodo, kad šitoks $\sqrt{2}$ skleidimo rezultatas nėra atsitiktinumas. Dar 1770 m. Ž. Lagranžas įrodė, kad periodinių begalinių GT aibė sutampa su kvadratinių iracionalybių aibe.

**6 teorema (Lagranžo).** *Kiekvienos periodinės GT reikšmė yra lygi kvadratinei iracionalyb*ei. *Ir atvirkščiai*: *kiekviena kvadratinė iracionalybė išskleidžiama periodine* (*grynąja ar mišriąja*) *GT*.

Jeigu norime pagal turimą skaičiaus $\alpha$ skleidinį *grynai periodine* GT $\alpha = [q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{h-1}, q_0, q_1, \ldots, q_{h-1}, \ldots]$

surasti kvadratinę irracionalybę, kurią tas skleidinys išreiškia, tai patogiausia tai daryti naudojantis formule

$$\alpha = \frac{\alpha P_{h-1} + P_{h-2}}{\alpha Q_{h-1} + Q_{h-2}}; \qquad (2)$$

čia $h$ yra periodo ilgis.

Ši formulė išplaukia iš formalios išraiškos, kuri, grynai periodinės GT atveju, atrodo taip: $\alpha = [q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{h-1}, \alpha]$. Pertvarkius (2) formulę , gaunama kvadratinė lygtis $\alpha$ atžvilgiu:

$$Q_{h-1}\alpha^2 + \left(Q_{h-2} - P_{h-1}\right)\alpha - P_{h-2} = 0. \qquad (3)$$

Kai turime skleidinį *mišria periodine* GT su ilgio *m priešperiodžiu*

$$\alpha = [q_0, q_1, q_2, ..., q_{m-1}, q_m, q_{m+1}, ..., q_{m+h-1}, q_m, ..., q_{m+h-1}, ...],$$

tai patogiausia pradžioje iš (3) formulės rasti kvadratinę irracionalybę $\alpha_m$ išreiškiančią *atitinkamą grynai periodinę* GT, o tada jau skaičių $\alpha$ apskaičiuoti iš išraiškos:

$$\alpha = \frac{\alpha_m P_{m-1} + P_{m-2}}{\alpha_m Q_{m-1} + Q_{m-2}} . \tag{4}$$

**8 pavyzdys.** Kai $\alpha = [1, 2, \overline{1, 1, 3}]$, tai $m = 2$, $h = 3$. Tada sudarome lentelę atitinkamai grynai periodinei trupmenai $\alpha_2 = [1, 1, 3, 1, 1, 3, ...]$ apskaičiuoti:

| $k$ | $-1$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $q_k$ | | **1** | **1** | **3** |
| $P_k$ | 1 | 1 | 2 | 7 |
| $Q_k$ | 0 | 1 | 1 | 4 |

Įstatę gautuosius skaičius į (2) formulę, gauname:

$$\frac{7\alpha_2 + 2}{4\alpha_2 + 1} = \alpha_2, \text{ arba } 2\alpha_2^2 - 3\alpha_2 - 1 = 0 .$$

Iš čia $\alpha_2 = \dfrac{3 + \sqrt{17}}{4}$. Dabar apskaičiuojame $\alpha$. Tuo tikslu vėl sudarome lentelę tik dabar jau pagal *priešperiodžio* elementus:

| $k$ | $-1$ | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $q_k$ | | **1** | **2** |
| $P_k$ | 1 | 1 | 3 |
| $Q_k$ | 0 | 1 | 2 |

Pagal (4) formulę gauname atsakymą:

$$\alpha = [1, 2, \overline{1, 1, 3}] = \frac{\alpha_2 \cdot 3 + 1}{\alpha_2 \cdot 2 + 1} = \frac{13 + 3\sqrt{17}}{10 + 2\sqrt{17}} = \frac{7 + \sqrt{17}}{4} .$$

## ANTROJI UŽDUOTIS

**1.** Taikydami Euklido algoritmą, išskleiskite skaičių $-\frac{3523}{1300}$ baigtine grandinine trupmena (BGT).

**2.** Apskaičiavę reduktus, raskite racionalųjį skaičių $r$, išreikštą BGT, jei $r=[-7, 2, 1, 4, 6, 1, 3]$.

**3.** Skaičių $-3\frac{41}{119}$ išskleidę BGT, raskite jo visų eilių reduktus. Patikrinkite lygybę $P_{k-1}Q_k - P_kQ_{k-1} = (-1)^k$, kai $k=3$.

**4.** Suprastinkite racionalųjį skaičių $\frac{11929}{12877}$, skleisdami jį BGT. Raskite jo visų eilių reduktus ir išdėstykite juos *didėjimo* tvarka.

**5.** Pakeiskite trupmeną $-\frac{437}{702}$ tokiu jos reduktu su mažiausiu vardikliu, kad padaryta paklaida neviršytų 0,002.

**6.** Panaudodami grandinines trupmenas , išspręskite neapibrėžtąją lygtį $12x+31y=436$. Raskite jos *atskirąjį* sprendinį $(x_0, y_0)$, jei žinoma, kad $x_0$ reiškia žmogaus gimimo dieną, o $y_0$ – gimimo mėnesį.

**7.** Skaičių $\sqrt{23}$ išskleiskite GT. Raskite tokį jo reduktą $R_k$ su mažiausiu vardikliu, kad galiotų įvertis

$$\left|\sqrt{23}-R_k\right| \le 0{,}001 .$$

**8.** Skleisdami GT, raskite kvadratinės lygties $x^2-5x+3=0$ mažesniosios šaknies racionalųjį artinį 0,002 tikslumu.

**9.** Raskite kvadratinę irracionalybę $\alpha$, jei žinoma, kad $\alpha = [-3, 2, 1, 4, 1, 4, 1, 4, ...] = [-3, 2, \overline{1, 4}]$.

**10.** Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais skaičiais $n$

$$\sqrt{n^2+2}=[n,\, n,\, 2n,\, n,\, 2n,\, n,\, 2n,\, n,\, \ldots]=[n,\, \overline{n,\, 2n}].$$

# III. VIDURKIAI

**Vladas Vitkus**
**(Vilniaus „Minties“ gimnazija)**

**Apibrėžimai:**

1. Neneigiamų realiųjų skaičių $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ *aritmetiniu vidurkiu* vadinamas skaičius $A = \dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

2. Neneigiamų realiųjų skaičių $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ *geometriniu vidurkiu* vadinamas skaičius $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n}$.

3. Teigiamų realiųjų skaičių $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ *harmoniniu vidurkiu* vadinamas skaičius $H = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + \dots + \dfrac{1}{a_n}}$.

4. Neneigiamų realiųjų skaičių $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ *kvadratiniu vidurkiu* vadinamas skaičius $K = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2}{n}}$.

**1 pavyzdys.** Apskaičiuokime ir palyginkime keturių teigiamų skaičių 1; 2; 2; 4 vidurkius $A$, $G$, $H$, $K$.

*Sprendimas*.

$$A = \frac{1+2+2+4}{4} = \frac{9}{4} = 2{,}25; \quad G = \sqrt[4]{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4} = \sqrt[4]{2^4} = 2;$$

$$H = \frac{4}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{4}{\frac{9}{4}} = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9};$$

$$K = \sqrt{\frac{1^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

Gavome $1\frac{7}{9} < 2 < 2{,}25 < 2{,}5$, t.y. $H < G < A < K$.

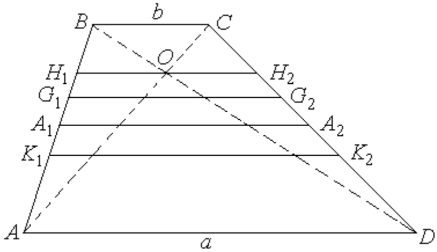
Jeigu visi keturi skaičiai būtų lygūs, tai ir visi vidurkiai būtų lygūs.

Galima įrodyti, kad bet kurių teigiamų realiųjų skaičių vidurkiams galioja tokios nelygybės: $H \le G \le A \le K$.

Tada dviejų teigiamų skaičių $a$ ir $b$ vidurkiams galioja tokios nelygybės:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ .$$

Šias nelygybes galima pavaizduoti geometriškai.



1 pav.

Turime trapeciją $ABCD$, kurios pagrindai $AD = a$, $BC = b$; $O$ – įstrižainių susikirtimo taškas.

Tada

1) Harmoninis vidurkis $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ lygus ilgiui atkarpos $H_1H_2$, kuri lygiagreti su trapecijos pagrindais ir eina per tašką $O$.

2) Geometrinis vidurkis $\sqrt{ab}$ lygus ilgiui atkarpos $G_1G_2$, kuri yra lygiagreti su trapecijos pagrindais ir duotąją trapeciją dalija į dvi panašias trapecijas $BCG_2G_1$ bei $G_1G_2DA$.

3) Aritmetinis vidurkis $\frac{a+b}{2}$ lygus trapecijos vidurinei linijai $A_1A_2$.

4) Kvadratinis vidurkis $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ lygus ilgiui atkarpos $K_1K_2$, kuri yra lygiagreti su pagrindais ir trapeciją $ABCD$ dalija į dvi lygiaplotes trapecijas.

Kadangi $H_1H_2 < G_1G_2 < A_1A_2 < K_1K_2$, tai

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ .$$

Visos nelygybės yra griežtos, nes trapecijos pagrindai yra nelygūs.

Vidurinės mokyklos matematikos kurse dažniausiai taikomas aritmetinis ir geometrinis vidurkiai.

**Teorema (Koši nelygybė).** Kai $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ – bet kurie neneigiami skaičiai, tai

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}\ .$$

Dėl sunkumo šios teoremos įrodymo nepateikiame, bet panagrinėsime atskirus jos atvejus, imdami pavyzdžiuose du, keturis, o užduotyse – tris, aštuonis skaičius.

**2 pavyzdys.** Įrodykime, kad dviejų neneigiamų skaičių aritmetinis vidurkis ne mažesnis už jų geometrinį vidurkį, t.y. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, kai $a \geq 0$ ir $b \geq 0$. Nustatykime, kada galimas lygybės ženklas.

*Įrodymas.* Imame skirtumą:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0\ .$$

Vadinasi,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\ . \qquad (1)$$

Iš įrodymo matyti, kad nelygybėje $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ lygybės ženklas galimas tada ir tik tada, kai jis galimas nelygybėje $\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0,$ t.y., kai $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = 0.$ O taip bus, kai $a = b.$

Kaip išvados iš (1) nelygybės kartais naudingos ir tokios nelygybės:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}\ , \qquad (2)$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab\ , \qquad (3)$$

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \qquad (4)$$

$$ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right). \qquad (5)$$

**3 pavyzdys.** Įrodykime, kad keturių neneigiamų skaičių aritmetinis vidurkis ne mažesnis už jų geometrinį vidurkį, t.y. $\frac{a+b+c+d}{4} \geq$ $\geq \sqrt[4]{abcd}$. Nustatykime, kada galimas lygybės ženklas.

*Įrodymas.* Kadangi $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ir $\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd}$, tai

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}.$$

Skaičių $\sqrt{ab}$ ir $\sqrt{cd}$ aritmetinis vidurkis ne mažesnis už jų geometrinį vidurkį: $\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$.

Vadinasi, $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$.

Jei teisingas bent vienas sąryšis $a \neq b$, $c \neq d$, $ab \neq cd$, tai nelygybė yra griežta. Lygybė galima tik tada, kai $a = b$, $c = d$, $ab = cd$. Iš čia $a^2 = c^2$; $a = c$. Taigi lygybė galima tada ir tik tada, kai $a = b = c = d$.

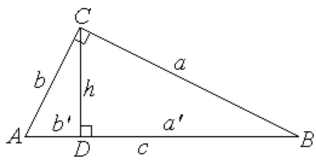
Su dviejų skaičių aritmetiniu ir geometriniu vidurkiais susiduriame ir mokydamiesi geometrijos. Jau žinome, kad trapecijos vidurinė linija yra jos pagrindų aritmetinis vidurkis.

**4 pavyzdys.** Stačiajame trikampyje aukštinė, nuleista į įžambinę, yra geometrinis vidurkis statinių projekcijų įžambinėje, o kiekvienas statinis yra geometrinis vidurkis visos įžambinės ir to statinio projekcijos įžambinėje.

$h = \sqrt{a'b'}$;

$a = \sqrt{ca'}$;

$b = \sqrt{cb'}$.



2 pav.

Įrodykime lygybę $h = \sqrt{a'b'}$.

Statieji trikampiai $ADC$ ir $BDC$ yra panašūs, nes $\angle A = \angle BCD =$ $= 90^\circ - \angle B$. Iš šių trikampių panašumo:

$$\frac{a'}{h}=\frac{h}{b'}\ ;\ h^2=a'b'\ ;\ h=\sqrt{a'b'}\ .$$

(1)–(5) nelygybės kartais sėkmingai gali būti panaudojamos ieškant didžiausios (mažiausios) reiškinio reikšmės arba įrodant kitas nelygybes.

**5 pavyzdys.** Raskime didžiausią dviejų teigiamų kintamųjų sandaugos reikšmę, jeigu jų suma yra pastovi.

*Sprendimas.* Tegu $a$ ir $b$ – du teigiamas reikšmes įgyjantys kintamieji, be to, $a+b=C$, čia $C$ – pastovus skaičius. Kai $a\neq b$, pagal (4) nelygybę $ab<\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, t.y. $ab<\left(\frac{C}{2}\right)^2$.

Kai $a=b$, turime $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, t.y. $ab=\left(\frac{C}{2}\right)^2$.

Vadinasi, kai kintamieji $a$ ir $b$ yra lygūs, sandauga įgyja didžiausią reikšmę, lygią $\left(\frac{C}{2}\right)^2$.

**6 pavyzdys.** Įrodykime nelygybę

$$a+b+c\geq\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}\quad (a\geq 0,\ b\geq 0,\ c\geq 0).$$

*Sprendimas.* Pasinaudoję (1) nelygybe, gauname:

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\ ;\ \frac{a+c}{2}\geq\sqrt{ac}\ ;\ \frac{b+c}{2}\geq\sqrt{bc}\ .$$

Šias tris nelygybes panariui sudėję turėsime:

$$a+b+c\geq\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}\ .$$

Sprendžiant lygtis, kartais naudinga nauju kintamuoju pažymėti į lygtį įeinančių reiškinių aritmetinį vidurkį.

**7 pavyzdys.** Išspręskime lygtį $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$.

*Sprendimas.* Įvedame naują kintamąjį $y$:

$$y=\frac{x+(x+1)+(x+2)+(x+3)}{4}=x+1{,}5\ .$$

Tada

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=$$

$$=(y-1{,}5)(y-0{,}5)(y+0{,}5)(y+1{,}5)=(y^2-0{,}25)(y^2-2{,}25).$$

Sprendžiame lygtį $y^4-2{,}5y^2+0{,}5625=24$.

Pažymėję $y^2 = z \ \ (z \geq 0)$, gauname

$z^2 - 2{,}5z - 23{,}4375 = 0$; $z = 6{,}25$ arba $z = -3{,}75$ (netinka);

$y^2 = 6{,}25$; $y = \pm 2{,}5$; $x = y - 1{,}5$; $x_1 = -4$, $x_2 = 1$.

*Ats.:* $-4$; $1$.

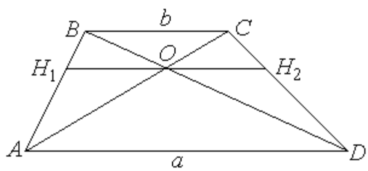
Harmoninis vidurkis praverčia skaičiuojant vidutinį greitį. Sakykime, kad automobilio greitis važiuojant iš $A$ į $B$ yra $v_1$ km/h, o grįžtant iš $B$ į $A$ – $v_2$ km/h. Tada vidutinis automobilio greitis $v$ visame kelyje yra skaičių $v_1$ ir $v_2$ harmoninis vidurkis, t.y. $v = \dfrac{2}{\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2}}$.

Patikrinkite, ar tikrai taip yra. Formulė atrodytų panašiai, jeigu vienodo ilgio kelionės atstumų, įveikiamų skirtingais greičiais, būtų ir daugiau negu du.

## TREČIOJI UŽDUOTIS

**1.** Įrodykite 4 pavyzdyje pateiktas lygybes $a = \sqrt{ca'}$, $b = \sqrt{cb'}$. Pasinaudodami šiomis lygybėmis išveskite Pitagoro teoremos formulę.

**2.** Duota trapecija $ABCD$. Per jos įstrižainių susikirtimo tašką $O$ nubrėžta atkarpa $H_1H_2$, lygiagreti su trapecijos pagrindais. Įrodykite, kad harmoninis vidurkis $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}$ yra lygus atkarpos $H_1H_2$ ilgiui. Čia $a$ ir $b$ trapecijos pagrindų ilgiai.



3 pav.

**3.** Raskite mažiausią dviejų teigiamų kintamųjų sumą, jeigu jų sandauga yra pastovi.

**4.** Iš granito reikia iškirsti stačiakampio gretasienio formos postamentą, kurio aukštis lygus pagrindo įstrižainei, o pagrindo plotas – 4 m$^2$. Koks turi būti pagrindo ilgis ir plotis, kad postamento visas paviršius būtų mažiausias?

**5.** Išspręskite lygtį $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=120$.

**6.** Pirmąjį viso kelio trečdalį automobilis nuvažiavo 54 km/h greičiu, antrąjį – 45 km/h greičiu, o trečiąjį – 60 km/h greičiu. Raskite vidutinį automobilio greitį. (Atsakymą pateikite 0,1 km/h tikslumu.)

**7.** Įrodykite 1 pavyzdyje pateiktą nelygybę $\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, kai $a \ge 0$, $b \ge 0$.

**8.** Įrodykite, kad trijų neneigiamų skaičių aritmetinis vidurkis ne mažesnis už jų geometrinį vidurkį, t.y. $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$. Kada galioja lygybė? (Pasinaudokite 3 pavyzdyje įrodyta nelygybe ir imkite $d=\frac{a+b+c}{3}$).

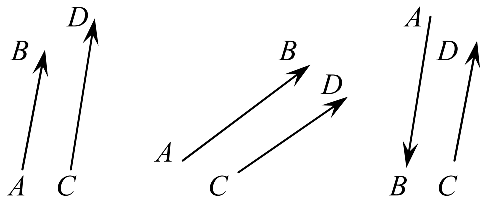
**9.** Įrodykite, kad bet kurių aštuonių neneigiamų skaičių $b_1$, $b_2$, $b_3$, … , $b_7$, $b_8$ aritmetinis vidurkis nemažesnis už jų geometrinį vidurkį.

**10.** Įrodykite nelygybę $a^4+b^4+c^4 \ge abc(a+b+c)$

# IV. VEKTORIAI

**Edmundas Mazėtis**
**(Vilniaus pedagoginis universitetas)**

**1.** Priminsime kai kuriuos teiginius, žinomus iš mokyklinės geometrijos kurso. *Vektoriumi* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ (arba kryptine atkarpa) vadinama atkarpa $AB$, kurioje yra nurodyti fiksuoti jos pradžios ir galo taškai. Du vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ yra vadinami a) *kolineariais,* ($\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$), jei tiesės $AB$ ir $CD$ yra lygiagrečios; b) *vienakrypčiais* ($\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$), jei spinduliai $AB$ ir $CD$ yra vienodos krypties ir c) *priešpriešiais* ($\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$), jei spinduliai $AB$ ir $CD$ yra priešingų krypčių (1 pav.).

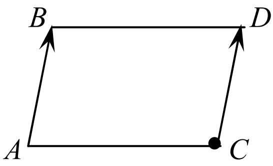



$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$

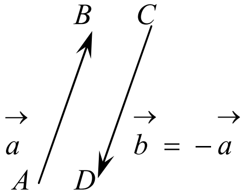
1 pav.

Vektorius, kurio pradžios ir galo taškai sutampa, yra vadinamas *nuliniu vektoriumi* $\vec{O}$. Nulinis vektorius yra kolinearus bet kuriam vektoriui. *Vektoriaus* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *moduliu* $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$ vadinamas atkarpos $AB$ ilgis, nulinio vektoriaus modulis lygus nuliui.

Vienakrypčiai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vadinami *lygiais*, jei jų moduliai lygūs. Iš šio apibrėžimo išplaukia, kad vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$, nepriklausantys vienai tiesei, yra lygūs tada ir tik tada, kai keturkampis $ABCD$ yra lygiagretainis (2 pav.).

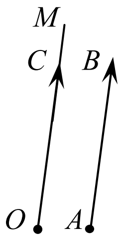



2 pav.



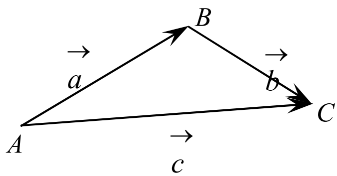

3 pav.

Priešpriešiai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, kurių moduliai lygūs, vadinami *priešingaisiais* vektoriais. Kiekvienam vektoriui $\vec{a}$ egzistuoja jam priešingas vektorius, kuris žymimas $-\vec{a}$ (3 pav.).




4 pav.

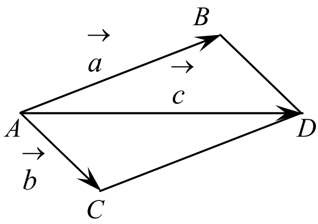
Sakykime, kad $O$ – bet koks plokštumos taškas, $\vec{a} = \vec{AB}$ – koks nors tos plokštumos vektorius. Nubrėžkime spindulį $OM$, vienakryptį spinduliui $AB$ ir jame raskime vienintelį tašką $C$, kad atkarpos $AB$ ir $OC$ būtų lygios (4 pav.). Tuomet vektoriai $\vec{AB}$ ir $\vec{OC}$ yra lygūs. Sakome, kad *vektorius* $\vec{a}$ *yra atidėtas nuo taško* $O$. Jei du vektoriai $\vec{a} = \vec{OA}$ ir $\vec{b} = \vec{OB}$ atidėti nuo vieno taško $O$, tai kampas $AOB$ yra vadinamas *kampu tarp vektorių* $\vec{a}$ ir $\vec{b}$. Jei $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, tai kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, lygus 0, o jei $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, – tai 180°.




5 pav.

2. Sakykime, kad turime du vektorius $\vec{a}$ ir $\vec{b}$. Atidėkime nuo taško $A$ vektorių $\vec{AB} = \vec{a}$, o nuo taško $B$ – vektorių $\vec{BC} = \vec{b}$. Tuomet vektorius $\vec{c} = \vec{AC}$ yra vadinamas *vektorių* $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *suma*: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ arba $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ (vektorių sudėties trikampio taisyklė; 5 pav.).

Jei vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nekolinearūs, tai atidėję nuo taško $A$ vektorius $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ir $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, nubrėžiame lygiagretainį $ABDC$ (6 pav.) Tuomet $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (vektorių sudėties lygiagretainio taisyklė).



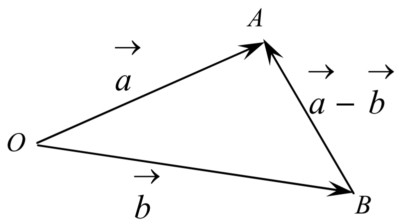

6 pav.

Vektorių sudėtis pasižymi šiomis savybėmis:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, 2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$,

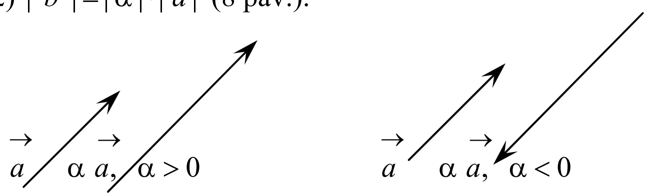
3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$, 4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

*Vektorių* $\vec{a}$ *ir* $\vec{b}$ *skirtumu* $\vec{a} - \vec{b}$ yra vadinamas vektorius, lygus vektoriaus $\vec{a}$ ir vektoriaus $-\vec{b}$, priešingo vektoriui $\vec{b}$, sumai: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Jei $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ atidėti nuo vieno taško $O$, tai $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ (7 pav.).




7 pav.

*Skaičiaus* $\alpha$ *ir vektoriaus* $\vec{a}$ *sandauga* yra vadinamas vektorius $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, pasižymintis savybėmis: 1) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, jei $\alpha > 0$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, jei $\alpha < 0$, 2) $|\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$ (8 pav.).




8 pav.

Skaičiaus 0 ir vektoriaus $\vec{a}$ sandauga laikysime nulinį vektorių $\vec{0}$. Skaičiaus $\alpha$ ir vektoriaus $\vec{a}$ sandaugą žymėsime taip: $\alpha \cdot \vec{a}$. Taigi $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$.

Vektoriaus daugyba iš skaičiaus pasižymi šiomis savybėmis:

1) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, 2) $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$,

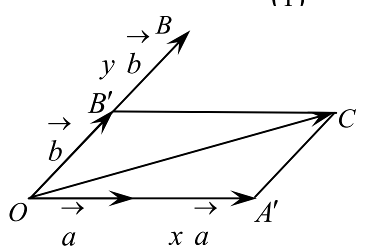
3) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$, 4) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearūs tada ir tik tada, kai yra toks skaičius $\alpha$, kad $\vec{b} = \alpha\vec{a}$. Jei $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, tai $\alpha = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, jei $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, tai $\alpha = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

**1 teorema.** Sakykime, kad $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ – du nekolinearūs plokštumos vektoriai. Tuomet bet kurį plokštumos vektorių $\vec{c}$ vieninteliu būdu galime išreikšti vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, t. y., rasti tokius skaičius $x$ ir $y$, kad būtų teisinga lygybė

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{a} \tag{1}$$

*Įrodymas*. Tegu $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ (9 pav.). Per tašką $C$ brėžiame tiesę $CB'$, lygiagrečią tiesei, kurioje yra vektorius $\vec{a}$, ir tiesę $CA'$, lygiagrečią tiesei, kurioje yra vektorius



9 pav.

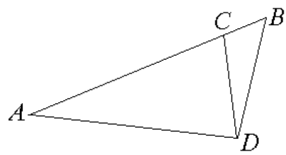
$\vec{b}$. Pagal vektorių sudėties taisyklę $\vec{OC} = \vec{OA'} + \vec{OB'}$. Kadangi $\vec{OA'} = x\,\vec{a}$, o $\vec{OB'} = y\,\vec{b}$, tai $\vec{c} = x\,\vec{a} + y\,\vec{b}$.

**2 teorema.** Sakykime, kad atkarpoje $AB$ yra taškas $C$, dalijantis atkarpą $AB$ santykiu $AC : CB = \alpha : \beta$. Tuomet bet kokiam plokštumos taškui $O$ yra teisinga lygybė

$$\vec{OC} = \frac{\alpha\,\vec{OB} + \beta\,\vec{OA}}{\alpha + \beta}$$

*Įrodymas.* Sakykime, kad $AC : CB = \alpha : \beta$ (10 pav.), t. y., $\vec{AC} = \frac{\alpha}{\beta}\vec{CB}$. Tuomet bet kokiam plokštumos taškui $O$ teisinga lygybė

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + \frac{\alpha}{\beta}\vec{CB}.$$



10 pav.

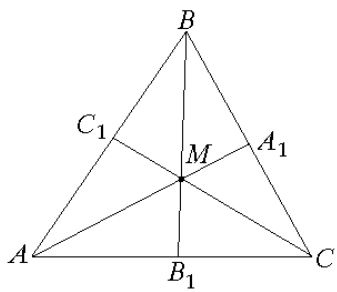
Kadangi $\vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC}$, tai $\vec{OC} = \vec{OA} + \frac{\alpha}{\beta}\vec{OB} - \frac{\alpha}{\beta}\vec{OC}$, arba

$(\alpha + \beta)\,\vec{OC} = \beta\,\vec{OA} + \alpha\,\vec{OB}$, ką ir reikėjo įrodyti.

**1 pavyzdys.** Trikampio $ABC$ pusiaukraštinės susikerta taške $M$. Įrodysime, kad bet kokiam plokštumos taškui $O$ teisinga lygybė $\vec{OM} = \frac{1}{3}\left(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}\right)$.

Kadangi trikampio $ABC$ pusiaukraštinės $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ susikerta taške $M$ ir $AM : MA_1 = BM : MB_1 = CM : MC_1 = 2 : 1$ (11 pav.), tai pagal 2 teoremą bet kokiam plokštumos taškui $O$ teisinga lygybė

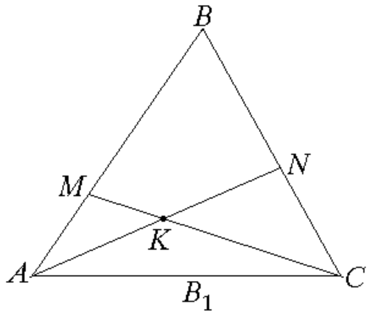
$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + 2\,\vec{OA_1}}{3}.$$



11 pav.

Kadangi įrodytoji lygybė teisinga bet kuriam plokštumos taškui *O*, tai ji teisinga ir kai taškai *O* ir *M* sutampa. Taigi, gavome, kad $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=\vec{O}$; čia taškas *M* yra trikampio $ABC$ pusiaukraštinių sankirtos taškas.

**2 pavyzdys.** Trikampio $ABC$ kraštinėje $AB$ yra taškas *M*, o kraštinėje $BC$ – taškas *N*, be to, $AM:MB=2:5$, $BN:NC=4:3$. Tiesės $AN$ ir $CM$ kertasi taške *K*. Rasime santykį $AK:KN$ (12 pav.).



12 pav.

Sakykime, kad $AK:KN=x$, tuomet pagal 2 teoremą

$$\vec{CK}=\frac{\vec{CA}+x\vec{CN}}{1+x}.$$

Kadangi $CN:NB=3:4$, tai $\vec{CN}=\frac{3}{7}\vec{CB}$. Taigi

$$\vec{CK}=\frac{\vec{CA}+\frac{3}{7}x\vec{CB}}{1+x} \qquad (2)$$

Kita vertus, vektoriai $\vec{CK}$ ir $\vec{CM}$ kolinearūs, t.y.,

$$\vec{CK}=y\vec{CM}=\frac{y}{7}(5\vec{CA}+2\vec{CB}) \qquad (3)$$

Vektorius $\vec{CK}$ (2) ir (3) lygybėmis išreikštas tais pačiais nekolineariais vektoriais $\vec{CA}$ ir $\vec{CB}$. Pagal 1 teoremą šios išraiškos turi sutapti, t. y., turi būti teisingos lygybės $\frac{1}{1+x}=\frac{5y}{7}$, $\frac{3x}{1+x}=\frac{2y}{7}$. Iš čia gauname, kad $x=\frac{14}{15}$. Taigi $AK:KN=14:15$.

3. Sakykime, kad plokštumoje duoti du vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, kampo tarp jų didumas $\varphi$. Skaičius, lygus vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ modulių sandaugai, padaugintai iš kosinuso kampo tarp jų, yra vadinamas vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *skaliarine sandauga*:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi .$$

Vektorių skaliarinė daugyba pasižymi šiomis savybėmis:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,

2) $\alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \alpha\, \vec{a} \cdot \vec{b}$,

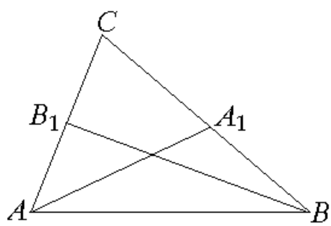
3) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$,

4) $\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a} > 0$, jei $\vec{a} \neq 0$ ir $\vec{a}^{\,2} = 0$ tada ir tik tada, kai $\vec{a} = \vec{0}$.

Iš skaliarinės sandaugos apibrėžimo išplaukia, kad vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ statmeni tada ir tik tada, kai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui. Be to, kampas $\varphi$ tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, randamas pagal formulę $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, o vektoriaus $\vec{a}$ modulis skaičiuojamas taip $|a| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}$ .

**3 pavyzdys.** Į didesnę trikampio kraštinę nubrėžiama mažesnė pusiaukraštinė. Įrodysime tai.

Sakykime, kad trikampio $ABC$ kraštinė $CB$ didesnė už kraštinę $AC$ (13 pav.). Įrodysime, kad į ją nubrėžta pusiaukraštinė $AA_1$ trumpesnė už pusiaukraštinę



13 pav.

$BB_1$. Akivaizdu, kad $\vec{AA_1} = \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CB}$, $\vec{BB_1} = \vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CA}$. Pakėlę abi šias lygybes skaliariškai kvadratu, gauname

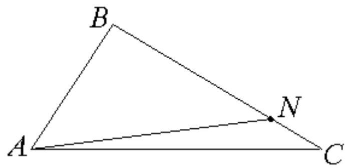
$$\vec{AA_1}^2 = \vec{AC}^2 + \vec{AC}\cdot\vec{CB} + \frac{1}{4}\vec{CB}^2, \quad \vec{BB_1}^2 = \vec{BC}^2 + \vec{BC}\cdot\vec{CA} + \frac{1}{4}\vec{CA}^2.$$

Kadangi $\vec{AC}\cdot\vec{CB} = \vec{BC}\cdot\vec{CA}$, tai iš šių lygybių išplaukia

$$\vec{AA_1}^2 - \vec{BB_1}^2 = \frac{3}{4}\vec{AC}^2 - \frac{3}{4}\vec{CB}^2.$$

Kadangi $CB > AC$, tai , t.y., $\vec{AA_1}^2 - \vec{BB_1}^2 < 0$, vadinasi, $\vec{AA_1}^2 < \vec{BB_1}^2$, o tai reiškia, kad $AA_1 < BB_1$.

**4 pavyzdys.** Trikampio $ABC$ kraštinės $AB$ ir $AC$ lygios atitinkamai 4 ir 8, kampas $A$ lygus $60^\circ$, taškas $N$ dalija kraštinę $BC$ santykiu: $BN : NC = 3 : 1$. Rasime atkarpos $AN$ ilgį (14 pav.).



14 pav.

Kadangi $BN : NC = 3 : 1$, tai pagal 2 teoremą $\vec{AN} = \frac{1}{4}\left(\vec{AB} + 3\vec{AC}\right)$.

Pakėlę šią lygybę skaliariškai kvadratu, gausime

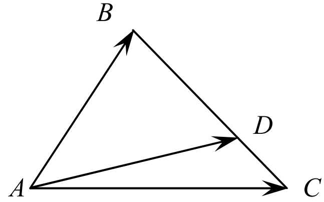
$$\vec{AN}^2 = \frac{1}{16}\left(\vec{AB}^2 + 6\,\vec{AB}\cdot\vec{AC} + 9\vec{AC}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(|\vec{AB}|^2 + 6\cdot|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|\cdot\cos 60^\circ + 9|\vec{AC}|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(4^2 + 6\cdot 4\cdot 8\cdot\frac{1}{2} + 9\cdot 8^2\right) = 43.$$

Taigi, $|\vec{AN}| = \sqrt{\vec{AN}^2} = \sqrt{43}$.

**5 pavyzdys.** Trikampio $ABC$ kraštinių ilgiai $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Kraštinėje $BC$ yra taškas $D$ ir $BD : DC = \lambda$. Rasime atkarpos $AD$ ilgį (15 pav.).



15 pav.

Kadangi $BD : DC = \lambda$, tai pagal 2 teoremą $\vec{AD} = \dfrac{\vec{AB} + \lambda \vec{AC}}{1+\lambda}$. Keliame šią lygybę skaliariškai kvadratu ir gauname

$$\vec{AD}^2 = \frac{1}{(1+\lambda)^2}\left(\vec{AB}^2 + 2\lambda \vec{AB}\cdot\vec{AC} + \lambda^2 \vec{AC}^2\right).$$

Kadangi $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = |\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|\cos A = bc\cos A$, o pagal kosinusų teoremą $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, tai $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \dfrac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - a^2\right)$. Tuomet

$$\vec{AD}^2 = \frac{1}{(1+\lambda)^2}\left(c^2 + \lambda\left(b^2 + c^2 - a^2\right) + \lambda^2 b^2\right),$$

t.y., $|\vec{AD}| = \sqrt{\dfrac{c^2 + \lambda b^2}{1+\lambda} - \dfrac{\lambda a^2}{(1+\lambda)^2}}$.

Gautoji lygybė yra vadinama *Stiuarto formule.* Jos atskiri atvejai yra pusiaukraštinės $AD$ (kai $\lambda = 1$), pusiaukampinės $AD$ (kai $\lambda = \dfrac{a}{b}$) ilgių išraiškos.

## KETVIRTOJI UŽDUOTIS

**1.** Penkiakampio $ABCDE$ kraštinių $AB$, $BC$, $CD$ ir $DE$ vidurio taškai yra atitinkamai $M$, $P$, $N$ ir $Q$. Atkarpų $MN$ ir $PQ$ vidurio taškai yra $K$ ir $L$. Įrodykite, kad tiesės $AE$ ir $KL$ lygiagrečios ir raskite santykį $AE : KL$.

**2.** Atkarpų $AB$ ir $CD$ vidurio taškai $P$ ir $Q$. Įrodykite, kad atkarpų $AC$, $BD$ ir $PQ$ vidurio taškai yra vienoje tiesėje.

**3.** Trapecijos $ABCD$ šoninių kraštinių $AD$ ir $BC$ vidurio taškai yra $M$ ir $N$. Ar tiesės $AN$ ir $CM$ yra lygiagrečios?

**4.** Trikampio $ABC$ kraštinėse $AB$ ir $AC$ yra taškai $M$ ir $N$, be to, $AM : MB = 3 : 2$, $AN : NC = 1 : 4$. Tiesės $CM$ ir $BN$ kertasi taške $P$. Raskite santykius $BP : PN$ ir $CP : PM$.

**5.** Jei trikampio $ABC$ pusiaukraštinės lygiagrečios trikampio $A'B'C'$ kraštinėms, tai trikampio $A'B'C'$ pusiaukraštinės lygiagrečios trikampio $ABC$ kraštinėms. Įrodykite.

**6.** Lygiagretainio kraštinių ilgiai yra 2 ir 3, kampas tarp jų lygus 60°. Raskite kampą tarp lygiagretainio įstrižainių.

**7.** Kvadrato $ABCD$ kraštinės $AD$ vidurys yra taškas $E$, taškas $F$ yra įstrižainėje $AC$ ir $AF : FC = 3$. Įrodykite, kad tiesės $EF$ ir $FB$ yra statmenos.

**8.** Kvadrato $ABCD$ kraštinėse $AB$ ir $CD$ yra taškai $M$ ir $N$, be to, $AM : MB = 1 : 2$, $CN : ND = 5 : 1$. Tiesė $MN$ kerta įstrižainę $AC$ taške $P$. Raskite kampą $APD$.

**9.** Trapecijos įstrižainių kvadratų suma lygi jos šoninių kraštinių kvadratų sumai, sudėtai su pagrindų ilgių dviguba sandauga. Įrodykite.

**10.** Trikampis $ABC$ – lygiakraštis, kraštinėse $AC$ ir $AB$ yra taškai $D$ ir $E$, be to, $DC = 2AD$, $AE = 2EB$. Tiesės $BD$ ir $CE$ susikerta taške $Q$. Raskite kampą $AQC$.

# **IV.** PLOKŠČIŲJŲ FIGŪRŲ PLOTAI

**Juozas Šinkūnas**
**(Vilniaus pedagoginis universitetas)**

Griežtai apibrėžiant plokščios figūros plotą reikia remtis realiųjų skaičių teorija, ribų teorija bei apibrėžtiniu integralu. Čia apsiribosime tik daugiakampių plotų skaičiavimu, remiantis vidurinės mokyklos matematikos vadovėliuose pateiktomis žiniomis apie figūrų plotus. Priminsime keletą plotų skaičiavimo formulių:

1. Stačiakampio, kurio kraštinės $a$ ir $b$, plotas lygus $a \cdot b$.

2. Lygiagretainio, kurio pagrindas $a$, o aukštinė $h$, plotas lygus $a \cdot h$.

3. Jeigu trikampio $ABC$ kraštinės yra $AB = c$, $BC = a$ ir $CA = b$, pusperimetris $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, $R$ - apibrėžto apie trikampį $ABC$ apskritimo spindulys, $r$ - įbrėžto į šį trikampį apskritimo spindulys, tai

a) $S = \dfrac{1}{2} a \cdot h_a = \dfrac{1}{2} b \cdot h_b = \dfrac{1}{2} c \cdot h_c$;

b) $S = \dfrac{1}{2} a \cdot b \sin C = \dfrac{1}{2} b \cdot c \sin A = \dfrac{1}{2} a \cdot c \sin B$;

c) $S = \dfrac{abc}{4R}$;

d) $S = p\,r$;

e) $S = \sqrt{p\,(p-a)(p-b)(p-c)}$ - ši formulė vadinama Herono formule.

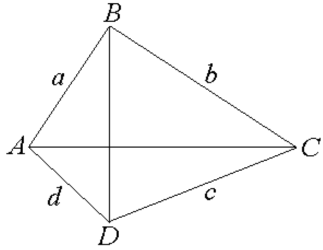
4. Trapecijos, kurios pagrindai $a$ ir $b$, o aukštinė $h$, plotas lygus $\dfrac{a+b}{2} \cdot h$.

5. Bet kokio daugiakampio plotas skaičiuojamas jį suskaidžius į trikampius ar į figūras, kurių plotus jau mokame skaičiuoti.

6. Jeigu daugiakampiai $ABCD...$ ir $A_1B_1C_1D_1...$, yra panašūs, tai $S_{ABCD...} = k^2 S_{A_1B_1C_1D_1...}$; čia $k$ - panašumo koeficientas.

Išspręsime keletą pavyzdžių.

**1 pavyzdys.** Senovės Egipte iškilojo keturkampio formos žemės sklypo $ABCD$ plotas $S$ buvo skaičiuojamas pagal formulę $S=\dfrac{AB+CD}{2}\cdot\dfrac{BC+AD}{2}$. Palyginsime taip apskaičiuotą keturkampio plotą su tiksliu šio sklypo plotu.



1 pav.

*Sprendimas.* Sakykime $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$.

Tada $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}a\cdot b\sin B\le\dfrac{a\,b}{2}$,

$S_{BCD}\le\dfrac{1}{2}b\,c$, $S_{CDA}\le\dfrac{cd}{2}$, $S_{DAB}\le\dfrac{a\,d}{2}$.

Sudėję šias nelygybes, gauname:

$$2S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{BCD}+S_{CDA}+S_{DAB}\le$$
$$\le\frac{ab+cb+ad+cd}{2}=\frac{(a+c)(b+d)}{2}.$$

Taigi $S_{ABCD}\le\dfrac{AB+CD}{2}\cdot\dfrac{BC+DA}{2}$.

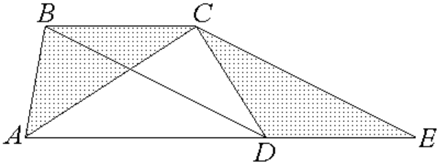
**2 pavyzdys.** Rasime trapecijos, kurios pagrindai lygūs 89 cm ir 142 cm, o įstrižainės – 120 cm ir 153 cm, plotą.

*Sprendimas*. Nubrėžiame tiesę $CE$, lygiagrečią $BD$. Keturkampis $BCED$ – lygiagretainis, todėl $BD=CE=153$ cm, $BC=DE=89$ cm. Vadinasi,

$$p=p_{ACE}=\frac{AC+CE+AD+DE}{2}=252,$$
$$p-AC=132,\ p-CE=99,\ p-AE=21.$$

Kadangi užtušuotų trikampių plotai yra lygūs, tai

$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=S_{ACD}+S_{CDE}=S_{ACE}.$$

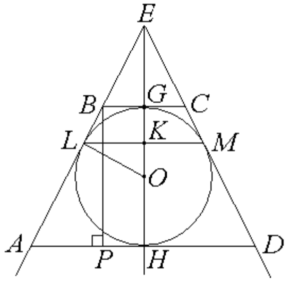


2 pav.

Taigi

$$S_{ABCD} = S_{ACE} = \sqrt{252 \cdot 132 \cdot 99 \cdot 21} = 8316 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

**3 pavyzdys.** Į kampą įbrėžtas spindulio $R$ apskritimas. Apskritimo styga, jungianti lietimosi taškus, lygi $a$. Lygiagrečiai šiai stygai nubrėžtos dvi apskritimo liestinės, kurios nuo kampo atkerta trapeciją. Rasime trapecijos plotą.



3 pav.

*Sprendimas.* Nubrėžkime kampo $E$ pusiaukampinę $OE$ ir jos susikirtimo su $BC$, $LM$ ir $AD$ taškus pažymėkime atitinkamai $G$, $K$ ir $H$. Kadangi $KL = KM$, tai $GB = GC$, $HA = HD$. Iš čia išplaukia, kad trapecija $ABCD$ yra lygiašonė ($AB = AL + LB = HA + GB = HD + GC = DM + MC = DC$). Taigi

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot GH = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot GH = AB \cdot GH .$$

Iš taško $B$ nubrėžę statmenį $BP$, gauname du panašius trikampius:

$$\Delta BPA \sim \Delta LKO \; (\angle LOK = \angle BAP, \; \angle LKO = \angle BPA = 90^\circ)$$

Iš čia:

$$\frac{LK}{LO} = \frac{BP}{AB}, \text{ t. y. } \frac{a/2}{R} = \frac{2R}{AB}, \; AB = \frac{4R^2}{a} .$$

Taigi

$$S_{ABCD} = \frac{4R^2}{a} \cdot 2R = \frac{8R^3}{a} .$$

**1 pratimas.** Trapecijos pagrindų ilgiai yra $a$ ir $b$. Raskite atkarpos, lygiagrečios pagrindams ir dalijančios trapecijos plotą pusiau, ilgį.

**4 pavyzdys.** Rasime trikampio, kurio plotas 84 cm$^2$, o kraštinės – trys paeiliui einantys natūralieji skaičiai, perimetrą.

*Sprendimas.* Sakykime trikampio kraštinių ilgiai yra $a = x - 1$, $b = x$, $c = x + 1$. Tada $p = \frac{3x}{2}$, $p - a = \frac{x+2}{2}$, $p - b = \frac{x}{2}$, $p - c = \frac{x-2}{2}$.

Pagal Herono formulę:

$$\sqrt{\frac{3x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x+2}{2}\cdot\frac{x-2}{2}}=84.$$

Iš čia $x^4-4x^2-37632=0$, $x=14$. Taigi trikampio kraštinės lygios 13, 14, 15 ir $P=42$.

Trikampiai, kurių kraštinių ilgiai ir plotas išreikšti natūraliaisiais skaičiais, vadinami *Herono trikampiais*, o šių kraštinių ilgių rinkiniai - *Herono trejetais*. Pavyzdžiui, trikampis, kurio kraštinės 13, 14, 15 yra Herono trikampis, o skaičių trejetas (13; 14; 15) – Herono trejetas.

Pastebėsime, kad Pitagoro trejetas (natūralieji skaičiai $a$, $b$, $c$, tenkinantys lygybę $a^2+b^2=c^2$) yra Herono trejetas. Herono trikampį galima gauti iš dviejų Pitagoro trikampių, turinčių po vieną lygų statinį, juos suglaudus lygiaisiais statiniais.

Pavyzdžiui, Herono trikampį (13; 14; 15) galima gauti iš dviejų Pitagoro trikampių $(5;12;13)$ ir $(9;12;15)$. Iš Pitagoro trikampių $(5;12;13)$ ir $(35;12;37)$ gaunamas Herono trikampis $(40;13;37)$, o iš Pitagoro trikampių $(9;40;41)$ ir $(42;40;58)$ gaunamas Herono trikampis $(51;41;58)$.

**2 pratimas.** Pagal formulę $(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)$, $m,n\in \mathrm{N}$ Pitagoro trikampiams $(8;15;17)$, $(7;24;25)$, $(16;63;65)$ pasirinkite po tokį Pitagoro trikampį, kad būtų galima sudaryti 3 Herono trikampius.

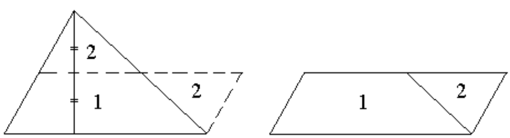
Du daugiakampiai vadinami *lygiadaliais*, jeigu vieną daugiakampį galime supjaustyti į dalis taip, kad iš tų dalių būtų galima sudėti kitą daugiakampį.

Lygiadalių figūrų pavyzdžiai:

a)

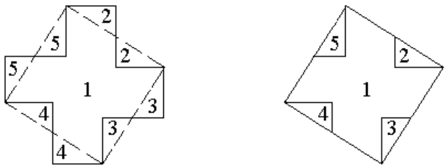

4 pav.

b)




5 pav.

c)



6 pav.

Nesunku įsitikinti, kad: jei daugiakampiai $D_1$ ir $D_2$ yra lygiadaliai, daugiakampiai $D_2$ ir $D_3$ yra lygiadaliai, tai daugiakampiai $D_1$ ir $D_3$ taip pat yra lygiadaliai.

Akivaizdu, kad du lygiadaliai daugiakampiai yra lygiapločiai. Teisingas ir atvirkščias teiginys:

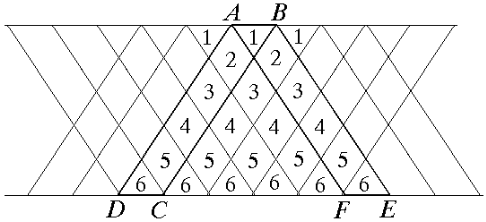
**Bojai[1]- Gervino[2] teorema.** Du daugiakampiai, kurių plotai yra lygūs, yra lygiadaliai.

Šios teoremos neįrodinėsime. Ją pailiustruosime pavyzdžiais.

Pastebėsime, kad briaunainiams analogiška teorema neteisinga, t.y. lygiatūriai briaunainiai ne visada yra lygiadaliai. Pavyzdžiui, tetraedras ir jam lygiatūris kubas nėra lygiadaliai (tai įrodė M.Denas[3] 1901 m.).

**5 pavyzdys.** Įsitikinkime, kad du lygiagretainiai $ABCD$ ir $ABEF$, kurie turi vienodus pagrindus ir vienodas aukštines, yra lygiadaliai.

*Sprendimas*. Tiesėje $AB$ atidėkime atkarpas, lygias atkarpai $AB$ ir per dalijimo taškus nubrėžkime tieses, lygiagrečias tiesėms $AD$ ir $AF$ Jos abu lygiagretainius padalins į vienodą lygų dalių skaičių. Lygios dalys pažymėtos vienodais skaičiais.



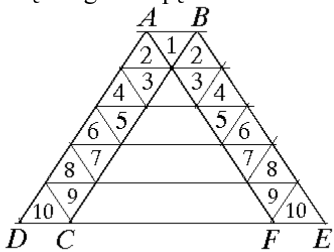

7 pav.

[1] F. Bolyai (1775-1856) - vengrų matematikas.

[2] P. Gervien – vokiečių matematikas

[3] M.Dehn (1878–1952) – vokiečių matematikas.

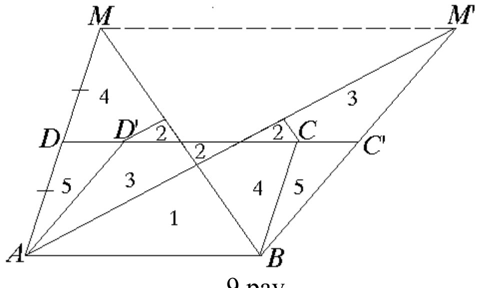
*Pastaba*. Šiuos lygiagretainius į lygias dalis galima padalyti ir kitaip. Brėžinyje nubrėžtos tiesės yra lygiagrečios atitinkamoms lygiagretainio kraštinėms. Taip dalijant gavome daugiau dalių. Labai įdomūs (ir sunkūs) uždaviniai: duotąjį daugiakampį padalyti į mažiausią dalių skaičių, iš kurių būtų galima sudėti kitą lygiaplotį daugiakampį. Čia mes tokių uždavinių nespręsime.




8 pav.

**6 pavyzdys.** Įsitikinkime, kad du trikampiai $AMB$ ir $AM'B$, turintys lygius pagrindus ir aukštines, yra lygiadaliai.

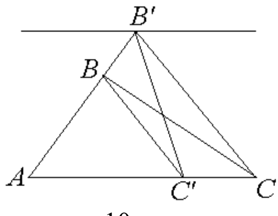
*Sprendimas*. Nubrėžkime lygiagretainį $ABCD$, lygiaplotį (lygiadalį) trikampiui $AMB$ ir lygiagretainį $ABC'D'$ lygiaplotį (lygiadalį) trikampiui $ABM'$. Abu lygiagretainiai yra lygiadaliai, tai lygiadaliai yra ir trikampiai. Tų trikampių lygios dalys pažymėtos vienodais skaičiais.




9 pav.

**7 pavyzdys.** Bet kokiam trikampiui $ABC$ nubrėšime lygiadalį trikampį.

*Sprendimas.* Nubrėžiame tiesę, lygiagrečią pagrindui $AC$ ir nekertančią trikampio kraštinių. Randame šios tiesės ir tiesės $AB$ susikirtimo tašką $B'$. Nubrėžiame atkarpą $B'C$ ir atkarpą $BC'$, lygiagrečią $B'C$. Trikampis $AB'C'$ yra lygiadalis trikampiui $ABC$.




10 pav.

Iš tikrųjų,

$$\Delta ABC = \Delta ABC' + \Delta BCC',$$

o

$$\Delta AB'C' = \Delta ABC' + \Delta BC'B'.$$

Kadangi trikampiai $BCC'$ ir $BC'B'$ yra lygiadaliai (6 pavyzdys), tai lygiadaliai ir trikampiai $ABC$ ir $AB'C'$.

**3 pratimas.** Duotajam trikampiui $ABC$ nubrėžkite lygiadalį trikampį $AB'C'$, kurio aukštinė būtų trumpesnė už trikampio $ABC$ aukštinę.

**8 pavyzdys.** Tiese, einančia per keturkampio $ABCD$ viršūnę $A$, jo plotą padalinsime santykiu $m:n$.

*Sprendimas.* Pirmiausia nubrėžiame trikampį $ABD_1$, lygiaplotį keturkampiui $ABCD$. Per viršūnę $D$ brėžiame tiesę $DD_1$, lygiagrečią $AC$. Akivaizdu, kad $S_{ABD_1} = S_{ABCD}$. Kraštinę $BD_1$ padalijame santykiu $m:n$ (brėžinyje 3:1). Tiesė $AM_1$ – trikampio $ABD_1$ plotą dalija santykiu $m:n$. Per tašką $M_1$ brėžiame tiesę, lygiagrečią $AC$. Ji kerta kraštinę $DC$ taške $M$.

Kadangi

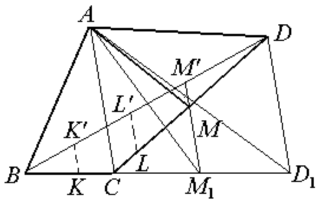
$$S_{ACM_1} = S_{ACM},$$

tai $S_{AM_1D_1} = S_{ACD_1} - S_{ACM_1} =$

$= S_{ACD} - S_{ACM} = S_{AMD}$.

Taigi

$S_{ABCM} : S_{AMD} = S_{ABM_1} : S_{AM_1D_1} = m:n$.

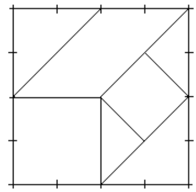


11 pav.

Pastebėkime, kad santykiu $m:n$ buvo galima dalinti ne atkarpą $BD_1$, o įstrižainę $BD$ ir per dalijimo tašką $M'$ išvesti tiesę, lygiagrečią $AC$, kuri kerta kraštinę $CD$ taške $M$. Tiesė $AM$ keturkampio $ABCD$ plotą dalija santykiu $m:n$.

Mokėdami keturkampio plotą padalyti santykiu $m:n$, galima tiesėmis, einančiomis per vieną keturkampio viršūnę, keturkampio plotą padalyti į keletą lygiapločių dalių.

Pavyzdžiui, įstrižainę $BD$ padalinę į keturias lygias dalis $BK' = K'L' = L'M' = M'D$ ir išvedę tieses $K'K$, $L'L$ ir $M'M$, lygiagrečias įstrižainei $AC$, gausime, kad tiesės $AK$, $AL$ ir $AM$ keturkampį $ABCD$ padalija į 4 lygiaplotes dalis.



12 pav.

**4 pratimas.** Iš kartono lapo iškirpkite kvadratą ir jį sukarpykite kaip parodyta brėžinyje. Sumaišę šias dalis, pabandykite:

1) sudėti kvadratą (nežiūrėdami į brėžinį);

2) sudėti stačiakampį (ne kvadratą!).

**5 pratimas.** Nubrėžkite iškiląjį keturkampį *ABCD* ir kraštinėje *AB* pažymėkite tašką *D*. Tiese, einančia per tašką *D*, keturkampio plotą padalinkite pusiau.

## PENKTOJI UŽDUOTIS

**1.** Ant stačiojo trikampio, kurio statiniai lygūs $a$ ir $b$, visų kraštinių į trikampio išorę nubrėžti kvadratai. Kvadratų viršūnės, nesutampančios su trikampio viršūnėmis, nuosekliai sujungtos atkarpomis. Raskite gautojo šešiakampio plotą. Apskaičiuokite šešiakampio plotą, kai $a = 5$ cm, $b = 12$ cm.

**2.** Per trikampio $ABC$ kraštinės $AC$ tašką $D$ nubrėžtos tiesės, lygiagrečios kraštinėms $AB$ ir $BC$. Jos kerta trikampio kraštines $BC$ ir $AB$ atitinkamai taškuose $E$ ir $F$. Raskite lygiagretainio $DFBE$ plotą, jeigu trikampių $AFD$ ir $DEC$ plotai lygūs $S_1$ ir $S_2$ .

**3.** Trikampyje $ABC$, kurio kraštinės $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, nubrėžtos kampų $A$ ir $C$ pusiaukampinės $AD$ ir $CE$. Raskite trikampių $ABC$ ir $AED$ plotų santykį. Apskaičiuokite šį santykį, kai $a = 20$ cm, $b = 28$ cm, $c = 21$ cm.

**4.** Taškai $E$, $F$, $G$ ir $H$ yra atitinkamai lygiagretainio $ABCD$ kraštinių $AB$, $BC$, $CD$ ir $DA$ vidurio taškai. Raskite figūros, apribotos tiesėmis $AF$, $BG$, $GH$ ir $DE$, plotą, jeigu lygiagretainio $ABCD$ plotas lygus $S$.

**5.** Į lygiašonę trapeciją, kurios kampas prie pagrindo lygus 60°, įbrėžtas apskritimas. Kokiu santykiu tiesė, jungianti trapecijos šoninių kraštinių lietimosi su apskritimu taškus, dalija trapecijos plotą?

**6.** Apie statųjį trikampį apibrėžto ir į jį įbrėžto apskritimų spindulių santykis yra 5:2. Raskite trikampio plotą, jeigu vieno statinio ilgis lygus $a$.

**7.** Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainė $AC$ lygi 78 cm, o $BD$ – 50 cm. 1) Raskite lygiagretainio kraštines, jeigu jo plotas lygus 1680 $\text{cm}^2$; 2) Įsitikinkite, kad trikampis $AOD$ yra Herono trikampis. Raskite du Pitagoro trikampius, iš kurių galima sudėti trikampį $AOD$.

**8.** Nubraižykite 5 cm × 6 cm stačiakampį ir jį padalinkite į dalis, iš kurių būtų galima sudėti tokio pat ploto kvadratą.

*Nurodymas.* Pirmiausia stačiakampį padalinkite į tokias dalis, iš kurių būtų galima sudėti lygiaplotį lygiagretainį, turintį vieną kraštinę, lygią kvadrato kraštinei. Kvadrato kraštinė yra stačiakampio kraštinių geometrinis vidurkis.

**9.** Nubraižykite bet kokį trikampį $ABC$. Ilgiausioje kraštinėje $AB$ pažymėkite tašką $D$. Per šį tašką nubrėžkite dvi tieses, kurios trikampio plotą dalintų į 3 lygiaplotes dalis. Išnagrinėkite atvejus:

a) $AD = \frac{1}{3}AB$; b) $AD = \frac{1}{2}AB$;

c) $AD < \frac{1}{3}AB$; d) $\frac{1}{3}AB < AD < \frac{2}{3}AB$.

**10.** Trys gyvenvietės $A$, $B$ ir $C$ sujungtos tiesiais keliais (atkarpomis $AB$, $BC$, ir $AC$). Prie kelio atkarpos $AB$ glaudžiasi kvadratinis laukas su kraštine $\frac{1}{2}AB$, prie kelio atkarpos $BC$ glaudžiasi kvadratinis laukas su kraštine $BC$, o prie kelio atkarpos $AC$ – stačiakampio formos miškas. Raskite miško plotą, jeigu jo ilgis lygus $AC$, plotis yra 4 km ir jo plotas 20 $\text{km}^2$ didesnis už abiejų laukų plotų sumą.

*Nurodymas.* Remkitės trikampio nelygybe $b \le a + c$.

# VI. IRACIONALIOSIOS LYGTYS IR NELYGYBĖS

**Stefa Staknienė**
**(Vilniaus Gabijos gimnazija)**

Pradėdami nagrinėti šią temą bei spręsti užduotis, atsiverskime mokyklinį vadovėlį ir prisiminkime $n$ – tojo laipsnio šaknų savybes.

Sakykime, $a \geq 0$, o $n$ – natūralusis skaičius, $n \geq 2$. Neneigiamas realusis skaičius $x$, su kuriuo galioja lygybė $x^n = a$, vadinamas $n$-ojo laipsnio šaknimi iš $a$ ir žymimas $\sqrt[n]{a}$.

Kai $a < 0$, o $n$ – nelyginis natūralusis skaičius, $n \geq 3$, tai neigiamas skaičius $x$, su kuriuo galioja lygybė $x^n = a$, vadinamas taip pat $n$-ojo laipsnio šaknimi iš $a$ ir žymimas $\sqrt[n]{a}$.

Vadinasi, nelyginio laipsnio šaknys turi prasmę su bet kuria pošaknio reikšme, o lyginio – tik su neneigiama.

Jeigu lygtyje yra reiškinys su nežinomuoju po šaknies ženklu arba toks reiškinys keliamas trupmeniniu laipsniu, tai lygtį vadiname iracionaliąja. Iracionaliųjų lygčių pavyzdžiai:

$$\sqrt{11x - 1} + \sqrt{2 - x^2} = 2,$$

$$\sqrt{2 + x} - 3x = x + \pi,$$

$$x^{\frac{1}{7}} = 1.$$

Išspręsti iracionaliąją lygtį reiškia rasti visas kintamojo $x$ reikšmes, su kuriomis ji tampa teisinga lygybe arba įrodyti, kad tokių reikšmių nėra.

**1 pavyzdys.** Įrodykime, kad lygtis

$$\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x + 3} = 0$$

sprendinių neturi..

*Sprendimas.* Remdamiesi šaknų savybėmis gauname, kad lygtis apibrėžta su $x \geq -\frac{3}{2}$. Kadangi su kiekvienu tokiu $x$ šaknis $\sqrt{2x+3}$ yra neneigiama, o $\sqrt{x+3}$ teigiama, tai jų suma su visais $x \geq -\frac{3}{2}$ bus didesnė už nulį. Vadinasi, lygtis sprendinių neturi.

Dažnai tenka spręsti iracionaliąsias lygtis $\sqrt{f(x)} = g(x)$. Sutikę tokią lygtį, neskubėkime kelti abiejų pusių kvadratu, nes tokiu būdu iš lygties $f(x) = g^2(x)$ rasime ne tik lygties $\sqrt{f(x)} = g(x)$ sprendinius, bet ir lygties $\sqrt{f(x)} = -g(x)$ sprendinius. Aišku, kad lygtis $\sqrt{f(x)} = g(x)$ ekvivalenti šiai sistemai:

$$\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

**2 pavyzdys.** Išspręskime lygtį $\sqrt{-3x+3} = x-1$.

*Sprendimas*.

$$\sqrt{-3x+3} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-3x = (x-1)^2, \\ x-1 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0, \\ x \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ arba } x = -2, \\ x \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

*Ats.:* 1.

Toks sprendimo būdas tinka visoms pavidalo $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$, $n \in N$, lygtims, nes

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^{2n}(x). \end{cases}$$

Kitas iracionaliųjų lygčių sprendimo būdas yra kintamojo keitimas. Keitinys ypač naudingas, kai vietoje iracionaliosios lygties gauname kvadratinę.

**3 pavyzdys.** Išspręskime lygtį

$$\sqrt{2x^2 + 5x - 2} - \sqrt{2x^2 + 5x - 9} = 1.$$

*Sprendimas*. Pažymėkime $2x^2 + 5x - 2 = t$. Tada gauname lygtį $\sqrt{t} = \sqrt{t-7} + 1$. Keliame abi puses kvadratu:

$$t = t - 7 + 2\sqrt{t-7} + 1, \ \sqrt{t-7} = 3, \ t = 16.$$

Tuomet

$$2x^2 + 5x - 2 = 16,\ 2x^2 + 5x - 18 = 0,\ x_1 = 2,\ x_2 = -4{,}5.$$

Patikrinę įsitikiname, kad abi šaknys tenkina lygtį.

*Ats.:* 2; –4,5.

**4 pavyzdys.** Išspręskime lygtį

$$\sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x + 2 - 4\sqrt{x-2}} = 1.$$

*Sprendimas*. Pažymėkime $\sqrt{x-2} = t$.

Tuomet $x = t^2 + 2$ ir duotoji lygtis tampa tokia:

$$\sqrt{t^2 + 2 - 1 - 2t} + \sqrt{t^2 + 2 + 2 - 4t} = 1,$$

$$\sqrt{t^2 - 2t + 1} + \sqrt{t^2 - 4t + 4} = 1,$$

$$\sqrt{(t-1)^2} + \sqrt{(t-2)^2} = 1,$$

$$|t - 1| + |t - 2| = 1.$$

Išsprendę šią lygtį, gauname $1 \le t \le 2$. Kadangi $t = \sqrt{x-2}$, tai

$$1 \le \sqrt{x-2} \le 2,$$

$$1 \le x - 2 \le 4,$$

$$3 \le x \le 6.$$

*Ats.:* $x \in [3; 6]$.

Iracionaliąsias lygtis $\sqrt[n]{a - f(x)} + \sqrt[n]{b + f(x)} = g(x)$ galima spręsti įvedant du kintamuosius $u = \sqrt[n]{a - f(x)}$, $v = \sqrt[n]{b + f(x)}$. Tuomet vietoj lygties sprendžiama lygčių sistema

$$\begin{cases} u + v = g(x), \\ u^n + v^n = a + b. \end{cases}$$

**5 pavyzdys.** Išspręskime lygtį

$$\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{1-2x} = 2.$$

*Sprendimas*. Tegu $u = \sqrt[3]{2x+1}$, $v = \sqrt[3]{1-2x}$. Tada $u^3 + v^3 = 2$. Toliau sprendžiame sistemą:

$$\begin{cases} u + v = 2, \\ u^3 + v^3 = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2, \\ (u+v)(u^2 - uv + v^2) = 2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 2 - u, \\ u^2 - 2u + 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2 - u, \\ u = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1, \\ u = 1. \end{cases}$$

Kintamąjį $x$ randame iš sistemos:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{2x+1} = 1, \\ \sqrt[3]{1-2x} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

*Ats.:* $0$.

Lygtį $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \varphi(x)$ galima spręsti abi puses keliant kubu. Gauname

$$f(x) + g(x) + 3\sqrt[3]{f(x)g(x)}\left(\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)}\right) = \varphi^3(x),$$

$$f(x) + g(x) + 3\sqrt[3]{f(x)g(x)}\ \varphi(x) = \varphi^3(x).$$

**6 pavyzdys.** Išspręskime lygtį $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$.

*Sprendimas*. Abi lygties puses pakėlę kubu, gauname:

$$2x - 1 + x - 1 + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\ \left(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}\right) = 1,$$

$$3x - 2 + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 1,$$

$$3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 3 - 3x,$$

$$\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 1 - x,$$

$$(2x-1)(x-1) = (1-x)^3.$$

Iš čia $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Patikrinę įsitikiname, kad $x_1 = 0$ nėra duotosios lygties sprendinys.

*Ats.:* 1.

Sprendžiant iracionaliąsias nelygybes kartais jos keičiamos ekvivalenčiomis racionaliųjų nelygybių sistemomis. Norėdami išvengti klaidų, turime atsižvelgti į nelygybės apibrėžimo sritį.

**7 pavyzdys.** Išspręskime nelygybę $(x-1)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$.

*Sprendimas*. Kintamojo reikšmės, su kuriomis nelygybė turi prasmę, tenkina sąlygą $x^2 - x - 2 \geq 0$. Iš čia gauname $x \leq -1$ arba $x \geq 2$. Kai $x - 1 \geq 0$, nelygybė tenkinama su $x \in [2; +\infty)$. Kai $x - 1 < 0$, nelygybė galioja taške $x = -1$.

*Ats.:* $\{-1\} \cup [2; +\infty)$.

Sprendžiant iracionaliąsias nelygybes galima pasinaudoti šiais ekvivalentumo sąryšiais:

- $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}$, $n \in N$, $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) < g(x); \end{cases}$
- $\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)}$, $n \in N$, $\Leftrightarrow$ $f(x) < g(x)$;
- $\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x)$, $n \in N$, $\Leftrightarrow$ $f(x) < g^{2n+1}(x)$;
- $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$, $n \in N$, $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2n}(x) \end{cases}$ arba $\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases}$
- $\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x)$, $n \in N$, $\Leftrightarrow$ $f(x) > g^{2n+1}(x)$.

**8 pavyzdys.** Išspręskime nelygybę $\sqrt{x+2} > \sqrt{8-x^2}$.

*Sprendimas.*

$$\sqrt{x+2} > \sqrt{8-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 8-x^2 \geq 0, \\ x+2 > 8-x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 8, \\ x^2 + x - 6 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}, \\ x < -3 \text{ arba } x > 2. \end{cases}$$

*Ats.:* $2 < x \leq 2\sqrt{2}$.

**9 pavyzdys.** Išspręskime nelygybę $\sqrt{x+5} < 1-x$.

*Sprendimas.*

$$\sqrt{x+5} < 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 \geq 0, \\ 1-x \geq 0, \\ x+5 < (1-x)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5, \\ x \leq 1, \\ x^2 - 3x - 4 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 1, \\ x < -1 \text{ arba } x > 4. \end{cases}$$

*Ats.:* $x \in [-5; -1)$.

## ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

**1.** Įrodykite, kad lygtis $(x+1)(5-x)(\sqrt{x-8}+2)=4$ sprendinių neturi.

**Išspręskite lygtis:**

**2.** $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$.

**3.** $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

**4.** $\left(1+\dfrac{9}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+4\left(\dfrac{x}{x+9}\right)^{\frac{1}{2}}=4$ **.**

**5.** Raskite $a$, $b$, $c$ reikšmes, su kuriomis lygtis $\sqrt{x+a\sqrt{x}+b}+\sqrt{x}=c$ turi be galo daug sprendinių.

**6.** Įrodykite, kad nelygybė $\sqrt{\sqrt{x+1}}+\sqrt{\sqrt{x+1}+3}<\sqrt{2\sqrt{x+1}+2}$ sprendinių neturi.

**Išspręskite nelygybes:**

**7.** $\sqrt{5x^2+10x+1}\geq 7-x^2-2x$.

**8.** $\sqrt[3]{\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{7}{x+2}}<\sqrt[3]{\dfrac{6}{x-1}}$.

**9.** $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}<\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x-4}$.

**10.** $\dfrac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\geq 2$.

# VII. TRIGONOMETRINĖS LYGTYS IR NELYGYBĖS

**Antanas Apynis, Eugenijus Stankus**
**(Vilniaus universitetas)**

Pirmiausia siūlytume perskaityti mokyklinių matematikos vadovėlių skyrelius, kuriuose išdėstyta trigonometrija. Čia apsiribosime tik kai kuriais trigonometrinių lygčių bei nelygybių analizės atvejais.

## 1. TRIGONOMETRINIŲ LYGČIŲ SPRENDIMAS

Prisiminkime, kad sprendžiant bet kurią trigonometrinę lygtį ji pakeičiama viena ar keliomis paprasčiausiomis trigonometrinėmis lygtimis arba įrodoma, kad ji sprendinių neturi. Nuosekliai laikantis ekvivalentumo reikalavimų pertvarkant reiškinius gautųjų sprendinių tikrinti nereikia (nebent norima išvengti apsirikimo klaidų).

Trigonometrinės lygties sprendinių aibė (atsakymas) paprastai užrašoma viena arba keliomis formulėmis. Rašant atsakymą reikėtų išvengti sprendinių pasikartojimo. Pavyzdžiui, gavę kurios nors trigonometrinės lygties sprendinių aibę, išreikštą formulėmis $x = \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$, bei $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$, turėtume pastebėti, kad sprendiniai $x = \pi m$, $m \in Z$, kartojasi – jie gaunami pagal pirmąją formulę, kai $k = 3m$ ir pagal antrąją formulę, kai $n = 2m$. Pašalinę sprendinius $x = \pi m$, $m \in Z$, iš aibės, užrašytos pirmąja formule, gautume atsakymą $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$; $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. Atsisakę bendrųjų sprendinių, gaunamų pagal antrąją formulę, turėtume tokį atsakymą: $x = \frac{\pi}{3}k$, $k \in Z$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. Žinoma, visais trim atvejais yra užrašyta ta pati sprendinių aibė.

Kartais trigonometrinės lygties sprendinių aibę, užrašytą keliomis formulėmis, nesunku išreikšti viena formule. Pavyzdžiui, sprendinius $x = \pi k$, $k \in Z$, ir $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, galima užrašyti viena formule

$x = \frac{\pi}{2} m$, $m \in Z$.

Norėtume atkreipti dėmesį, kad nagrinėjant trigonometrinės lygties sprendinių aibę neretai gelbsti sprendinių vaizdavimas abscisių ašies taškais arba vienetinio apskritimo taškais.

Trigonometrinės lygtys dažniausiai sprendžiamos *skaidant dauginamaisiais arba keičiant kintamąjį.*

**1 pavyzdys.** Išspręskime trigonometrinę lygtį

$$2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0.$$

*Sprendimas.* Kadangi $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, tai gauname ekvivalenčią lygtį $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. Šią lygtį galima išspręsti ir skaidant dauginamaisiais, ir keičiant kintamąjį.

a) Reiškinį $2\cos^2 x - \sin x - 1$ išskaidykime dauginamaisiais:

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = (\sin^2 x - 1) + (\sin^2 x + \sin x) = (\sin x + 1)(2\sin x - 1)$.

Taigi

$$2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \text{ arba}$$
$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z, \text{ arba } x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$

b) Kintamojo keitimo būdu duotąją lygtį sprendžiame taip:

$$2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin x, \\ 2t^2 + t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin x, \\ t = -1 \text{ arba } t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -1 \text{ arba } \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z, \text{ arba } x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$

*Ats.:* $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, arba $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

**2 pavyzdys.** Išspręskime trigonometrinę lygtį

$$\frac{\sin^3 x + \sin 2x - \sin x}{\sin 3x} = 0 .$$

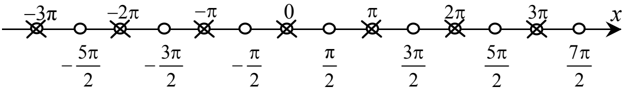
*Sprendimas*. Taikykime skaidymo dauginamaisiais metodą:

$$\frac{\sin^3 x + \sin 2x - \sin x}{\sin 3x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin 2x - \sin x(1 - \sin^2 x)}{\sin 3x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x - \sin x \cdot \cos^2 x}{\sin 3x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sin 2x - \sin 2x \cdot \cos x}{2\sin 3x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x(2 - \cos x)}{2\sin 3x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \sin 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi k}{2}, \ k \in Z, \\ x \neq \dfrac{\pi n}{3}, \ n \in Z . \end{cases}$$

Lygties sprendinių aibę užrašykime glausčiau. Tuo tikslu taškus $x = \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$, pažymėkime skaičių tiesėje skrituliukais (žr. 1 pav.) ir išbraukime taškus $x = \dfrac{\pi\, n}{3}$, $n \in Z$. Nesunku suvokti, kad likusius taškus (lygties sprendinius) galima užrašyti formule $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$.




1 pav.

*Ats.:* $\dfrac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$.

Keičiant kintamąjį siekiama gauti kuo paprastesnę lygtį naujojo kintamojo atžvilgiu.

**3 pavyzdys.** Išspręskime lygtį

$$\sin x + \cos x = 1 .$$

*Sprendimas.* **1.** Iš pradžių aptarkime galimybę pasinaudoti keitiniu $t = \sin x$. Remdamiesi tapatybe $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, tada gautume $\cos x = \sqrt{1 - t^2}$ arba $\cos x = -\sqrt{1 - t^2}$ priklausomai nuo *x*. Taigi turėtume spręsti dvi iracionaliąsias lygtis kintamojo $t$ atžvilgiu: $t+\sqrt{1-t^2}=1$ ir $t-\sqrt{1-t^2}=1$.

Dėl analogiškų sunkumų turėtume atsisakyti ir keitinio $t=\cos x$.

**2.** Pabandykime pritaikyti keitinį

$$u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}, \tag{1}$$

turėdami mintyje, kad jis galioja, kai $x\neq(2k+1)\pi$, $k\in\mathrm{Z}$ (kai $\cos\frac{x}{2}\neq 0$). Šis keitinys paprastai vadinamas universaliuoju.

Pasinaudoję žinomomis formulėmis

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \text{ ir } \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

gauname sinuso ir kosinuso išraiškas kintamuoju $u$:

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\ \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}. \tag{2}$$

Kintamojo $x$ reikšmės $x=(2k+1)\pi$, $k\in\mathrm{Z}$, netenkina lygties $\sin x+\cos x=1$, todėl visą sprendimą galima užrašyti taip:

$$\sin x+\cos x=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x+\cos x=1\\ \cos\frac{x}{2}\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\\ \frac{2u}{1+u^2}+\frac{1\text{-}u^2}{1+u^2}=1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}u=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\\ u\,(u-1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\\ u=0 \text{ arba } u=1\end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2}=0 \text{ arba } \operatorname{tg}\frac{x}{2}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=2\pi n,\ n\in\mathrm{Z}, \text{ arba } x=\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathrm{Z}.$$

Taigi atsakymas toks: $2\pi n$, $n\in\mathrm{Z}$; $\frac{\pi}{2}+2\pi m$, $m\in\mathrm{Z}$.

**3.** Duotąją lygtį suveskime į *homogeninę antrojo laipsnio* lygtį, taikydami pusės argumento sinuso ir kosinuso formules. Sprendimą galima užrašyti taip:

$$\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}, \\ u - u^2 = 0. \end{cases}$$

Atkreipkime dėmesį, kad universaliojo keitinio taikymas sprendimo pabaigoje visai natūralus.

Žinoma, lygtį

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = 0$$

galima išspręsti ir be keitinio – išskaidžius dauginamaisiais.

*Pastaba.* Pavyzdyje nagrinėtą lygtį galima išspręsti ir taip:

$$\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{4}\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z, \Leftrightarrow x = 2\pi n,\ n \in Z$, arba $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in Z$.

Čia pritaikėme *papildomo argumento* metodą, kuris labai naudingas sprendžiant tiesines sinuso ir kosinuso atžvilgiu trigonometrines lygtis

$$a\sin x + b\cos x = c \qquad (3)$$

($a$, $b$ ir $c$ – kurie nors realieji skaičiai).

Papildomo argumento metodo schema tokia (kai $b \neq 0$):

$$a\sin x + b\cos x = c \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x =$$

$$= \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi, \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi, \\ \sin\varphi\sin x + \cos\varphi\cos x = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi, \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi, \\ \cos(x-\varphi) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

Iš čia $\mathrm{tg}\varphi = \frac{a}{b}$. Taigi $x = \varphi \pm \arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$; $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{a}{b}$. Jei $b = 0$, tai (3) lygtis iš tikrųjų yra $a\sin x = c$. Jos sprendimas akivaizdus.

Aišku, kad taikant papildomo argumento metodą kampą $\varphi$ galima rasti ir iš šių sąlygų: $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$ ir $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$.

Tada $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$ (kai $a \neq 0$) ir $\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

t.y. $\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Vadinasi, (3) lygties sprendinių aibę galima užrašyti formule $x = -\mathrm{arctg}\frac{b}{a} + (-1)^n \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n$, $n \in \mathrm{Z}$.

Gana dažnai tenka spręsti *antrojo laipsnio homogenines trigonometrines lygtis* (jau buvo užsiminta nagrinėjant 3 pavyzdį). Jų bendrasis pavidalas yra

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0 \qquad (4)$$

($a, b, c-$ kurie nors realieji skaičiai). Kai $a \neq 0$, tai ši lygtis ekvivalenti lygčiai $a\mathrm{tg}^2 x + b\mathrm{tg}x + c = 0$, kurią galima išspręsti pritaikius keitinį $u = \mathrm{tg}x$. Kai $a = 0$, tai (4) lygtis ekvivalenti lygčiai $\cos x(b\sin x + c\cos x) = 0$. Jos sprendimo schema taip pat aiški.

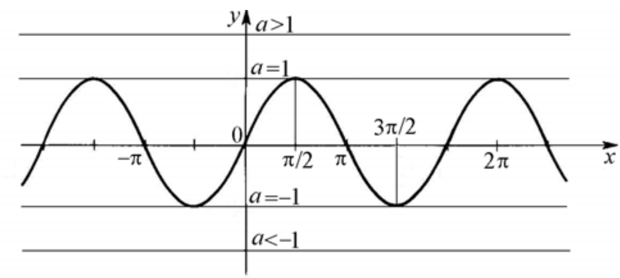
## 2. TRIGONOMETRINIŲ NELYGYBIŲ SPRENDIMAS.

Pirmiausia panagrinėkime paprasčiausių trigonometrinių nelygybių $f(x) < a$, $f(x) \le a$, $f(x) > a$, $f(x) \ge a$, $a \in \mathrm{R}$,

sprendimą. Čia $f(x) = \sin x$ arba $f(x) = \cos x$, arba $f(x) = \mathrm{tg}x$, arba $f(x) = \mathrm{ctg}x$. Užrašyti tokių nelygybių sprendinių aibes lengviausia naudojantis trigonometrinių funkcijų grafiniu vaizdavimu. Išsamiau paanalizuokime porą išvardintųjų nelygybių atvejų.

**1 pavyzdys.** Išspręskime nelygybę $\sin x < a$.

*Sprendimas.* Nubrėžkime funkcijos $y = \sin x$ grafiką – sinusoidę ir tiesę $y = a$ (žr. 2 pav.).




2 pav.

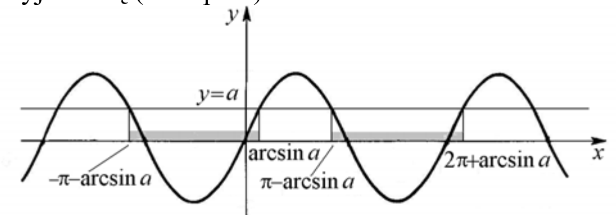
Iš grafiko matome:

1) kai $a > 1$, tai nelygybę $\sin x < a$ tenkina visi realieji skaičiai, t.y. $x \in \mathrm{R}$;

2) kai $a = 1$ (tuomet turime nelygybę $\sin x < 1$), nelygybės sprendinių aibę sudaro visi realieji skaičiai išskyrus $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathrm{Z}$;

3) kai $a \le -1$, nelygybė sprendinių neturi.

Tegu dabar $-1 < a < 1$. Tuomet tiesė $y = a$ kirsis su sinusoide daugelyje taškų (žr. 3 pav.).




3 pav.

Nelygybės $\sin x < a$ sprendinių aibė pavaizduota užtušuotomis realiųjų skaičių tiesės dalimis. Belieka šiuos intervalus užrašyti formulėmis:

$$-\pi - \arcsin a + 2k\pi < x < \arcsin a + 2k\pi\,,\ k \in Z\,. \qquad (5)$$

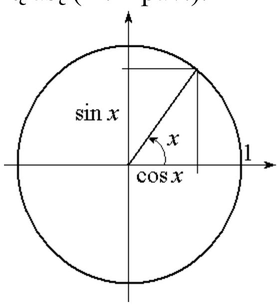
**2 pavyzdys.** Išspręskime nelygybę $\sin x < \dfrac{1}{2}$.

*Sprendimas.* Pasinaudoję grafiku arba tiesiog (5) formule, galime iš karto užrašyti atsakymą:

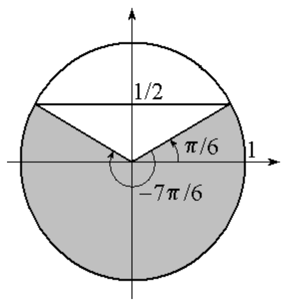
$$-\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi\,,\ k \in Z\,,$$

t.y.
$$-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi\,,\ k \in Z\,.$$

*Pastaba.* Sprendžiant trigonometrines nelygybes galima naudotis ir vienetiniu apskritimu. Jame kampo $x$ sinuso reikšmė $\sin x$ sutampa su spindulio projekcija į ordinačių ašį, o $\cos x$ yra šio spindulio projekcija į abscisių ašį (žr. 4 pav.).




4 pav.



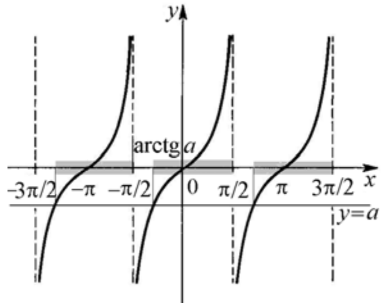

5 pav.

Tuomet visus tokius kampus, su kuriais galioja, pavyzdžiui, nelygybė $\sin x < \frac{1}{2}$, nesunkiai matome iš 5 pav. Taigi $-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathrm{Z}$.

**3 pavyzdys.** Išspręskime nelygybę

$$\mathrm{tg}x \geq a .$$

*Sprendimas.* Nubrėžkime funkcijų $y = \mathrm{tg}x$ ir $y = a$ grafikus (žr. 6 pav.).




6 pav.

Realiųjų skaičių aibės intervalai, kuriuose $\mathrm{tg}x \geq a$, užtušuoti. Tai intervalai

$$\left[\mathrm{arctg}\, a + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k \in \mathrm{Z}.$$

*Ats.:* $\mathrm{arctg}\, a + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathrm{Z}$.

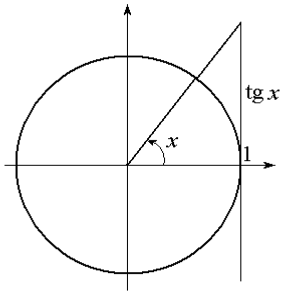
**4 pavyzdys.** Išspręskime nelygybę

$$\mathrm{tg}x \geq -\sqrt{3} .$$

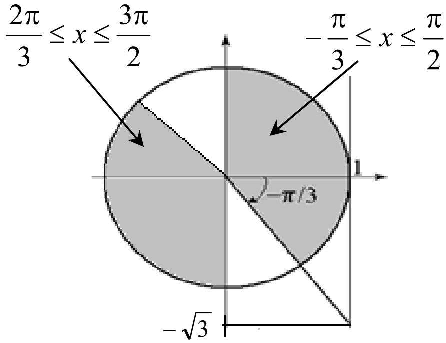
*Sprendimas.* Iš grafiko matome, kad intervalai, kuriuose galioja nelygybė yra tokie:

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi , \ k \in \mathrm{Z}.$$

*Pastaba.* Žinome, kad kampo $x$ tangentą galima pavaizduoti ir naudojant vienetinį apskritimą (žr. 7 pav.).




7 pav.




8 pav.

Todėl nagrinėtos trigonometrinės nelygybės $\mathrm{tg}x \ge -\sqrt{3}$ sprendinių aibę galima parašyti remiantis brėžiniu (žr. 8 pav.).

**5 pavyzdys.** Išspręskime nelygybę $\cos 3x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$**.**

*Sprendimas.* Pažymėkime $t = 3x$ ir pirmiau išspręskime nelygybę $\cos t \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$. Gausime $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le t \le \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z$. Tada

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le 3x \le \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in Z;$$

$$-\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, \ k \in Z.$$

Sudėtingesnių trigonometrinių nelygybių sprendimas suvedamas į paprasčiausių trigonometrinių nelygybių ar jų sistemų sprendimą. Dar pora pavyzdžių.

**6 pavyzdys.** Išspręskime nelygybę

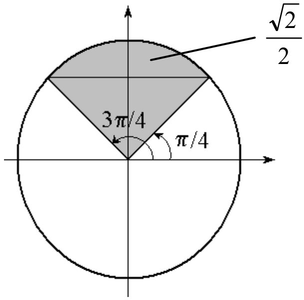
$$1 - \sin x + \cos x < 0.$$

*Sprendimas.* $1 - \sin x + \cos x < 0 \Leftrightarrow \sin x - \cos x > 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) > 1 \Leftrightarrow 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pažymėję $t = x - \frac{\pi}{4}$, gauname nelygybę $\sin t > \frac{\sqrt{2}}{2}$.




9 pav.

Remdamiesi brėžiniu (žr. 9 pav.) nustatome, kad

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < t < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z.$$

Įrašę $t = x - \frac{\pi}{4}$, gauname:

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi,\ k \in Z.$$

**7 pavyzdys.** Išspręskime nelygybę

$$2\cos^2 x - 3\sin x > 0.$$

*Sprendimas.* Pertvarkę nelygybę, gauname

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 < 0.$$

Pažymėkime $u = \sin x$ ir spręskime kvadratinę nelygybę:

$$2u^2 + 3u - 2 < 0 \Leftrightarrow 2\left(u - \frac{1}{2}\right)(u + 2) < 0 \Leftrightarrow -2 < u < \frac{1}{2}.$$

Taigi turime išspręsti nelygybių sistemą $\begin{cases} \sin x < \frac{1}{2}, \\ \sin x > -2. \end{cases}$

Antrosios nelygybės sprendinių aibė – visa realiųjų skaičių tiesė, o pirmosios – intervalai $\left(-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right),\ k \in Z$.

Taigi $-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z$.

# SEPTINTOJI UŽDUOTIS

Išspręskite šias trigonometrines lygtis:

**1.** $3\sin^2 2x + 7\cos 2x = 3$;

**2.** $\sin 4x \cdot \cos x \cdot \mathrm{tg} 2x = 0$;

**3.** $\dfrac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\cos^2 x - \cos x} = 0$;

**4.** $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos 2x$;

**5.** $\sin\left(\dfrac{3\pi}{5} + x\right) = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{5} - \dfrac{x}{2}\right)$.

Išspręskite šias trigonometrines nelygybes:

**6.** $|\sin x| > |\cos x|$;

**7.** $4\cos x - \sin 2x > 0$;

**8.** $\sqrt{2\sin x} < 1$;

**9.** $\cos^2 x + \sin x \cos x \geq 1$;

**10.** $|\sin x| \cos x > \dfrac{1}{4}$.

# VIII. SEKOS

**Gediminas Stepanauskas**
**(Vilniaus universitetas)**

**1.** *Skaičių seką* mes suprantame kaip sunumeruotus skaičius

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Indeksas $n$ žymi nario $a_n$ vietą sekoje. Taigi $a_1$ yra pirmasis sekos narys, $a_2$ – antrasis sekos narys, $a_n$ – $n$-tasis arba *bendrasis sekos narys*. Sekos, turinčios baigtinį skaičių narių, vadinamos *baigtinėmis sekomis*. Vienaženklių lyginių natūraliųjų skaičių seka $2, 4, 6, 8$ turi keturis narius ir yra baigtinė. Įdomesnės yra *begalinės sekos*. Dažnai seka ir suprantama kaip begalinė seka.

**2.** Sekos gali būti apibrėžiamos labai įvairiai. Vienas iš būdų nusakyti seką yra jos $n$-tojo nario, kaip natūraliojo argumento funkcijos, apibrėžimas. Sekos, kurios $n$-tasis narys $a_n = n^2$, pirmieji penki nariai yra lygūs $1, 4, 9, 16, 25,$ o dešimtasis narys yra lygus $100$.

Tačiau, jei parašyti keli pirmieji sekos nariai, nėra jokios galimybės užrašyti sekos $n$-tojo nario formulės. Pavyzdžiui, sekos

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots$$

$n$-tasis narys galėtų būti $2n$, bet jis galėtų būti taip pat ir toks:

$$2n + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5), \tag{1}$$

arba net

$$2n + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) f(n). \tag{2}$$

Čia $f(n)$ galėtų būti bet kokia argumento $n$ funkcija. Taigi į klausimą „Koks yra šeštas sekos $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ narys?“ negali būti logiškai atsakyta. Jis galėtų būti lygus 12, bet, jeigu naudotume (1) formulę, jis būtų lygus 132. Iš tikrųjų, šeštasis šios sekos narys, tinkamai parinkus (2) formulėje funkciją $f(n)$, galėtų būti bet koks skaičius.

**3. Rekurenčiosios sekos.** Panagrinėkime pavyzdį.

**1 pavyzdys.** Tegul sekos $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ nariai yra susieti lygybe

$$a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}, \tag{3}$$

teisinga visiems natūraliesiems $n > 2$. Be to, tegul $a_1 = 0$, $a_2 = 1$.

Iš (3) formulės $n = 3$, gausime, kad $a_3 = 3a_2 - a_1 = 3,$ kai $n = 4$, tai $a_4 = 3a_3 - a_2 = 8$, ir t.t. Taip skaičiuodami galime surasti bet kurį konkretų sekos narį.

Sekos, kurių $n$-tasis narys yra kokia nors prieš jį einančių narių funkcija, vadinamos *rekurenčiosiomis sekomis*. Rekurenčiosios sekos apibrėžime slypi indukcinė idėja. Žinodami keletą pirmųjų sekos narių ir $n$-tojo sekos nario ryšį su prieš jį einančiais nariais (rekurentinę formulę) galime surasti norimą sekos narį.

Rekurentinės formulės ypač patogios skaičiavimuose, kuriuose naudojami kompiuteriai.

**4. Monotoninės sekos.** Skaičių seka $a_1, a_2, a_3, ...$ vadinama *monotoniškai didėjančia*, jei visiems $n$

$$a_{n+1} > a_n,$$

*monotoniškai mažėjančia*, jei visiems $n$

$$a_{n+1} < a_n.$$

Seka vadinama *monotoniškai nedidėjančia*, atitinkamai *monotoniškai nemažėjančia*, jei visiems $n$

$$a_{n+1} \le a_n,$$

atitinkamai

$$a_{n+1} \ge a_n.$$

Visos šios keturių rūšių sekos vadinamos tiesiog *monotoninėmis sekomis*. Jos pasižymi ypatingomis savybėmis, yra svarbios ribų teorijoje.

**2 pavyzdys.** Įrodysime, kad seka, kurios bendrasis narys

$$a_n = \left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^n, \ a > 0, \ a \ne 1,$$

yra monotoniškai didėjanti.

Tirkime gretimų narių santykį

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^{n+1}}{\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^n} = \frac{a^2+1}{2a}. \qquad (4)$$

Pasinaudodami akivaizdžia nelygybe

$$(a-1)^2 > 0\text{, kai } a \neq 1,$$

turėsime, kad

$$a^2 - 2a + 1 > 0$$

arba

$$a^2 + 1 > 2a.$$

Pastarąją nelygybę padalinę iš $2a$ $(a > 0)$, gausime

$$\frac{a^2+1}{2a} > 1.$$

Dabar iš (4) lygybės išplaukia, kad

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

arba

$$a_{n+1} > a_n,$$

nes $a_n > 0$. Taigi seka $a_1, a_2, \ldots$ yra monotoniškai didėjanti.

Labai svarbios sekos yra progresijos. Jas toliau ir nagrinėsime.

**5. Aritmetinė progresija.** Skaičių seka $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ vadinama *aritmetine progresija*, jei visiems $n$

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Čia $d$ yra pastovus skaičius ir vadinamas *progresijos skirtumu*.

**6. Geometrinė progresija.** Skaičių seka $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ vadinama *geometrine progresija* jei visiems $n$

$$a_{n+1} = a_n q.$$

Čia $q$ yra nelygus nuliui pastovus skaičius. Jis vadinamas *progresijos vardikliu*.

Aritmetinių ir geometrinių progresijų savybės moksleiviams turėtų būti gana gerai žinomos, todėl jų detaliau čia nenagrinėsime. Plačiau susipažinsime su bendresnėmis aritmetinėmis progresijomis.

**7. Sekos $r$-tieji skirtumai.** Nagrinėkime skaičių seką

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots \qquad 5)$$

Pažymėję

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n,\ n = 1, 2, \ldots, \qquad (6)$$

turėsime naują seką

$$\Delta\, a_1, \Delta\, a_2, \Delta\, a_3, \dots, \Delta\, a_n, \Delta\, a_{n+1}, \dots \tag{7}$$

Šios sekos nariai vadinami pradinės (5) sekos *pirmosios eilės* arba *pirmaisiais skirtumais*. Jeigu pažymėsime

$$\Delta^2\, a_n = \Delta\, a_{n+1} - \Delta\, a_n\,,\ n = 1, 2, \dots, \tag{8}$$

tai gausime dar vieną seką

$$\Delta^2 a_1, \Delta^2 a_2, \Delta^2\, a_3, \dots, \Delta^2 a_n, \Delta^2 a_{n+1}, \dots \tag{9}$$

Pastarosios sekos nariai vadinami (5) sekos *antrosios eilės* arba *antraisiais skirtumais*. Bendrai, *r-tosios eilės* arba *r-taisiais* pradinės (5) sekos *skirtumais* vadinami $(r-1)$-osios eilės skirtumų pirmosios eilės skirtumai. Taigi

$$\begin{aligned} &\Delta^r\, a_1 = \Delta^{r-1}\, a_2 - \Delta^{r-1}\, a_1, \\ &\Delta^r\, a_2 = \Delta^{r-1}\, a_3 - \Delta^{r-1}\, a_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &\Delta^r\, a_n = \Delta^{r-1}\, a_{n+1} - \Delta^{r-1}\, a_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &r = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \tag{10}$$

**3 pavyzdys.** Sekos

$$1, 8, 27, 64, 125, \dots, n^3, \dots$$

pirmieji skirtumai yra tokie:

$$7, 19, 37, 61, \dots, (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1, \dots;$$

antrieji skirtumai:

$$12, 18, 24, \dots, 3\,(n+1)^2 + 3\,(n+1) + 1 - (3n^2 + 3n + 1) = 6n + 6, \dots;$$

tretieji skirtumai:

$$6, 6, \dots, 6\,(n+1) + 6 - (6n + 6) = 6, \dots;$$

aukštesnių eilių skirtumai:

$$0, 0, \dots, 0, \dots$$

Gana paprastai iš (6), (8) ir (10) gauname, kad

$$a_2 = a_1 + \Delta\, a_1,$$

$$a_3 = a_2 + \Delta\, a_2 = (a_1 + \Delta\, a_1) + (\Delta a_1 + \Delta^2 a_1) = a_1 + 2\Delta\, a_1 + \Delta^2 a_1,$$

$$a_4 = a_1 + 3\Delta\, a_1 + 3\Delta^2 a_1 + \Delta^3 a_1$$

ir t.t. Be įrodymo (galima įrodyti matematinės indukcijos būdu) pateiksime ( $n+1$ )-ojo (5) sekos nario išraišką per skirtumų sekų pirmuosius narius:

$$a_{n+1} = a_1 + C_n^1 \Delta\, a_1 + C_n^2 \Delta^2 a_1 + C_n^3 \Delta^3 a_1 + ... + C_n^{n-1} \Delta^{n-1} a_1 + \Delta^n a_1 \quad (11)$$

Čia koeficientai $C_n^k$ yra Niutono binomo koeficientai. Jie skaičiuojami naudojant formulę

$$C_n^k = \frac{n\,(n-1)\,...\,(n-k+1)}{k!}.$$

Su (5) seka susiekime kitą seką, (5) sekos pirmųjų $n$ narių sumų seką:

$$S_0, S_1, S_2, ..., S_{n-1}, S_n, ... \quad (12)$$

Čia $S_0 = 0$ (pridėtas dėl patogumo), $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, … , $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, … . Šios sekos pirmaisiais skirtumais bus (5) sekos nariai:

$$\Delta\, S_0 = a_1,\ \Delta\, S_1 = a_2,\ \dots,\ \Delta\, S_n = a_n,\ \dots$$

Aišku, kad (12) sekos $r$ -tieji skirtumai bus (5) sekos ( $r-1$ )-aisiais skirtumais. Naudodami (11) formulę (12) sekai, galime užrašyti

$$S_n = S_0 + C_n^1 \Delta\, S_0 + C_n^2 \Delta^2 S_0 + C_n^3 \Delta^3 S_0 + ... + C_n^{n-1} \Delta^{n-1} S_0 + \Delta^n S_0 =$$
$$= C_n^1\, a_1 + C_n^2 \Delta a_1 + C_n^3 \Delta^2 a_1 + ... + C_n^{n-1} \Delta^{n-2} a_1 + \Delta^{n-1} a_1. \quad (13)$$

Gautoji formulė gali būti pritaikyta sekų pirmiesiems $n$ nariams susumuoti. Mes ją pritaikysime specialioms sekoms, $r$-tos eilės aritmetinėms progresijoms. Matematikoje $r$-tieji sekų skirtumai plačiai taikomi apytiksliame skaičiavime.

**8. *r*-tosios eilės aritmetinės progresijos.** Seka, kurios visi $r$-tieji skirtumai yra lygūs, ir tai nėra teisinga mažesnės eilės skirtumams, vadinama *r-tosios eilės aritmetine progresija*. Taigi pirmosios eilės aritmetinė progresija yra tai, ką mes formaliai vadiname aritmetine progresija. 3 pavyzdyje išnagrinėta kubų seka yra trečios eilės aritmetinė progresija. *r-t*osios eilės aritmetinės progresijos $(r+1)$-ieji ir aukštesnieji skirtumai yra lygūs nuliui. Todėl tokios progresijos pirmųjų $n$ narių sumos (13) formulė yra užrašoma taip:

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta a_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^2 a_1 + \dots + \\ + \frac{n(n-1)\dots(n-r)}{(r+1)!}\Delta^r a_1. \qquad (14)$$

**4 pavyzdys.** Raskime 3 pavyzdyje nagrinėtos kubų sekos pirmųjų $n$ narių sumą.

Kadangi kubų seka yra trečiosios eilės aritmetinė progresija, tai, paėmę (14) formulėje $r = 3$, turėsime

$$S_n = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + \dots + n^3 =$$
$$= n + \frac{n(n-1)}{2}7 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}12 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}6 =$$
$$= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

**5 pavyzdys.** Raskime sekos

$$2, 6, 12, 20, \dots, n(n+1), \dots$$

pirmųjų $n$ narių sumą.

Šios sekos pirmieji skirtumai:

$$4, 6, 8, \dots, (n+1)(n+2) - n(n+1) = 2n + 2, \dots;$$

antrieji skirtumai:

$$2, 2, \dots, 2(n+1) + 2 - (2n+2) = 2, \dots$$

Taigi turime antrosios eilės aritmetinę progresiją. Iš (14) formulės randame

$$S_n = 2 + 6 + 12 + \dots + n(n+1) =$$
$$= n \cdot 2 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 4 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot 2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

## AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

**1.** Sugalvokite bent dvi skirtingas sekas (užrašykite bendrojo sekos nario formules), kurių pirmieji trys nariai yra 1, 3, 7.

**2.** Tegul sekos $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ nariai tenkina rekurentinį sąryšį

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + a_{n-3}, \; n = 4, 5, \dots .$$

Be to, tegul $a_3 = 1$, $a_5 = 1$, $a_6 = 0$. Raskite pirmąjį sekos narį $a_1$.

**3.** Įrodykite, kad seka, kurios bendrasis narys $a_n = \dfrac{2n+3}{6n-5}$, yra monotoniškai mažėjanti.

**4.** Kokią sąlygą turi patenkinti teigiami skaičiai $a, b, c$ ir $d$, kad seka, kurios bendrasis narys

$$a_n = \frac{an+b}{cn+d},$$

būtų monotoniškai didėjanti?

**5.** Sekos pirmųjų $n$ narių suma užrašoma formule $S_n = 2n^2 + 3n$, teisinga visiems $n \geq 1$.

1. Raskite dešimtąjį šios sekos narį.
2. Įrodykite, kad ši seka yra aritmetinė progresija.

**6.** Tegu $P_1 = \sqrt{x}$, $P_2 = \sqrt[3]{x}$, $P_3 = \sqrt[4]{x}$.

1. Kokia turi būti $x$ reikšmė, kad skaičiai $P_1$, $P_2$, $P_3$ sudarytų aritmetinę progresiją?
2. Kokia turi būti $x$ reikšmė, kad skaičiai $P_1$, $P_2$, $P_3$ sudarytų geometrinę progresiją?
3. Kokia turi būti $x$ reikšmė, kad skaičiai $P_1$, $P_2$, $P_3$ sudarytų aritmetinę progresiją?

**7.** Lygiašonio trikampio $ABC$ $(AC = BC)$ kampas prie pagrindo $\angle ABC = 75^\circ$, o šoninė kraštinė $AC = a$. Kraštinėje $BC$ pažymėti taškai $D_1$, $D_3$, $D_5$, … ,$D_{2n-1}$, … , o kraštinėje $AC$ taškai $D_2$, $D_4$, $D_6$, … ,$D_{2n}$, … taip, kad atkarpos $AD_1$, $D_2D_3$, $D_4D_5$, $D_{2n-2}D_{2n-1}$, … yra statmenos kraštinei $BC$, o atkarpos $D_1D_2$, $D_3D_4$, $D_5D_6$, … , $D_{2n-1}D_{2n}$, … yra statmenos kraštinei $AC$. Raskite:

a) laužtės $AD_1D_2D_3$ ilgį;

b) laužtės $AD_1D_2...D_n$ ilgį;

c) begalinės laužtės $AD_1D_2...D_n...$ ilgį.

**8.** 1. Ar galima iš skaičių $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ išrinkti tokius, kad jie sudarytų begalinę geometrinę progresiją, kurios suma lygi $\frac{1}{5}$?

2. Ar galima iš skaičių $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ išrinkti tokius, kad jie sudarytų begalinę geometrinę progresiją, kurios suma lygi $\frac{1}{15}$?

**9.** Raskite sumą

$$4 + 14 + 36 + \ldots + n(n^2 + 3).$$

**10.** Rutuliai dedami sluoksniais vieni ant kitų taip, kad gautas kūnas yra taisyklingos trikampės piramidės formos. Paskutiniame sluoksnyje (viršūnėje) yra vienas rutulys, priešpaskutiniame – trys rutuliai, dar žemiau – 6 rutuliai ir t.t. Kiek iš viso rutulių reikės pastatyti tokiai piramidei:

a) kuri turi 18 sluoksnių;
b) kuri turi *n* sluoksnių?

# BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

**A.Apynis, E.Stankus (Vilniaus universitetas),**
**J.Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)**

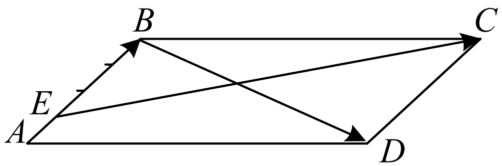
**1.** Kokias liekanas galima gauti skaičių $n^2$ ($n$ – natūralusis skaičius) padalijant iš 5?

**2.** Išspręskite nelygybę $\sqrt{x} \le x - 2$.

**3.** Į lygiašonį trikampį ABC ($AC = BC$) įbrėžto apskritimo centras aukštinę $CD$ dalija į dvi 5 cm ir 3 cm ilgio dalis imant nuo viršūnės Raskite trikampio $ABC$ plotą.

**4.** Raskite lygties $3\cos 2x - 11\cos x + 7 = 0$ sprendinį, priklausantį intervalui $[\pi; 2\pi]$.

**5.** Brėžinyje pavaizduotas lygiagretainis $ABCD$. Taškas $E$ kraštinę $AB$ dalija santykius 1:3. Apskaičiuokite vektorių $\overrightarrow{EC}$ ir $\overrightarrow{BD}$ skaliarinę sandaugą, jeigu $|\overrightarrow{AB}| = 4$, $|\overrightarrow{AD}| = 5$, kampas tarp $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$ lygus $60^\circ$.




# Užduočių sprendimai

# STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

**1.** *Ats.* 3.

**2.** Sakykime, $S$ – atstumas (km) tarp miestų $A$ ir $B$, o $t$ – motociklininko kelionės laikas (h). Tuomet $t+2$ – dviratininko kelionės laikas.

Per 45 minutes motociklininkas nuvažiavo $\frac{3}{4}\cdot\frac{S}{t}$ km, o dviratininkas – $\frac{3}{4}\cdot\frac{S}{t+2}$ km. Sudarome lygtį

$$S=\frac{3}{4}\cdot\frac{S}{t}+\frac{3}{4}\cdot\frac{S}{t+2}.$$

Kadangi $S>0$, tai ši lygtis ekvivalenti lygčiai $\frac{1}{t}+\frac{1}{t+2}=\frac{4}{3}$.

Ją išsprendę randame: $t_1=1$, Antroji šaknis netinka pagal kintamojo $t$ prasmę. Taigi motociklininkas kelionėje užtruko 1 h.

*Ats.:* 1 h.

**3.** *Ats.* $[-4;-1)\cup(-1;2]$.

**4.** Įrodomąją nelygybę padauginkime iš 2:

$2a^2+2b^2+2\geq 2ab+2a+2b$ ir pertvarkykime šitaip:

$$a^2-2ab+b^2+a^2-2a+1+b^2-2b+1\geq 0,$$

t. y.

$$(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\geq 0.$$

Ši nelygybė, todėl ir įrodomoji, teisinga su visomis $a$ ir $b$ reikšmėmis. Kai $a=b=1$, gauname lygybę.

**5.** Šie skaičiai turi dalytis iš 4 ir 9. Skaičius dalijasi iš 4, jeigu du jo paskutiniai skaitmenys sudaro skaičių, kuris dalijasi iš 4. Vadinasi, $y$ gali būti arba 2, arba 6. Skaičius dalijasi iš 9, jeigu jo skaitmenų suma dalijasi iš 9. Taip yra tik tuomet, kai: 1) $y=2$, $x=4$; 2) $y=6$, $x=0$; 3) $y=6$, $x=9$. Taigi tik trys skaičiai 34452, 34056, 34956 dalijasi iš 36.

*Ats.:* 34452, 34056, 34956.

**6.** *1 būdas*. Tarkime, kad trupmena suprastinama. Tuomet yra toks natūralusis skaičius $r$, $r \neq 1$, ir tokie sveikieji skaičiai $q$ ir $p$, su kuriais galioja lygybės $5x + 7 = qr$, $2x + 3 = pr$. Eliminavę $x$, gauname $\frac{1}{r} = 5p - 2q$. Kairėje pusėje yra trupmena, o dešinėje – sveikasis skaičius. Lygybė negalima, todėl prielaida neteisinga. Taigi trupmena nesuprastinama.

*2 būdas*. Tarus, kad trupmena $\frac{2x+3}{5x+7}$ suprastinama, būtų suprastinama ir trupmena $\frac{5x+7}{2x+3} = 2 + \frac{x+1}{2x+3}$. Tuomet turėtų būti suprastinama ir trupmena $\frac{2x+3}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}$. Tačiau trupmena $\frac{1}{x+1}$ – nesuprastinama, kai $x \in Z$, $x \neq -1$. Taigi trupmena $\frac{2x+3}{5x+7}$, $x \neq -1$ – nesuprastinama. Kai $x = -1$, duotoji trupmena, aišku, nesuprastinama.

**7.** Remdamiesi formulėmis $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, duotąjį reiškinį (pažymėkime jį $I$) pertvarkome taip:

$$I = \left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{8}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos\frac{3\pi}{8}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos\frac{5\pi}{8}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos\frac{7\pi}{8}}{2}\right)^2 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{5\pi}{8} + \cos\frac{7\pi}{8}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} + \frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2} + \frac{1+\cos\frac{5\pi}{4}}{2} + \frac{1+\cos\frac{7\pi}{4}}{2}\right) =$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}\right)+$$

$$+\frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{7\pi}{4}\right)=\frac{3}{2},$$

nes $\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}=0$

$\left(\cos\frac{7\pi}{8}=-\cos\frac{\pi}{8}, \cos\frac{5\pi}{8}=-\cos\frac{3\pi}{8}\right)$ ir

$\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{7\pi}{4}=0$.

*Ats.:* $\frac{3}{2}$.

**8.** $P(1)$ yra visų daugianario koeficientų suma, o $P(-1)$ yra koeficientų sumos prie $x$ lyginių laipsnių ir koeficientų sumos prie nelyginių $x$ laipsnių skirtumas. Sakykime, $a$ – koeficientų prie lyginių $x$ laipsnių suma, o $b$ – koeficientų prie nelyginių $x$ laipsnių suma. Tuomet

$$\begin{cases} a+b=P(1), \\ a-b=P(-1). \end{cases}$$

Iš čia $b=\frac{P(1)-P(-1)}{2}$. Kadangi

$$P(1)=(1^2+2+2)^7+(1^2-3-3)^7=5^7+(-5)^7=0,$$

$$P(-1)=[(-1)^2-2+2]^7+[(-1)^2+3-3]^7=1^7+1^7=2,$$

tai $b=\frac{0-2}{2}=-1$.

*Ats.:* $-1$.

**9.** Pirmąją sistemos lygtį padauginę iš (–1) ir sudėję su antrąja lygtimi, gauname sistemą

$$\begin{cases} x^2-4y^2-xy+5y=1, \\ 7y^2-9y=-2, \end{cases}$$

kuri ekvivalenti duotajai.

Iš antrosios lygties randame:

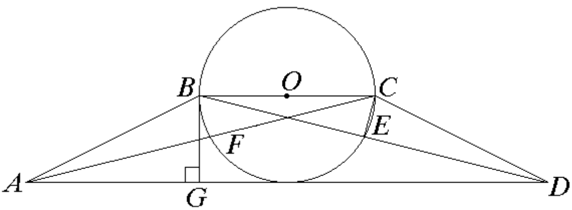
$$y_1 = \frac{2}{7},\ y_2 = 1.$$

Kai $y = y_1 = \frac{2}{7}$, iš pirmosios lygties gauname lygtį $49x^2 - 14x + 5 = 0$, kuri neturi sprendinių.

Kai $y = y_2 = 1$, gauname lygtį $x^2 - x = 0$, kurios sprendiniai yra $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Vadinasi, duotosios sistemos sprendiniai yra $(0;1)$ ir $(1;1)$.

*Ats.:* (0; 1), (1; 1).

**10.** Atkarpa $CE$ yra trikampio $BCD$ pusiaukraštinė. Kadangi $\angle BEC = 90^\circ$ (kampas įbrėžtas į apskritimą ir remiasi į skersmenį), tai $CE$ – trikampio $BCD$ aukštinė. Taigi trikampis




$BCD$ yra lygiašonis: $BC = CD$. Analogiškai įsitikiname, kad $AB = BC$. Vadinasi, trapecija yra lygiašonė. Kadangi trapecijos aukštinė $BG$ lygi $\frac{1}{2}BC$ arba $\frac{1}{2}AB$, tai stačiajame trikampyje $AGB$ turėsime: $\angle BAG = 30^\circ$, $\angle ABG = 60^\circ$. Tuomet $\angle ABC =$ $= 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$, Taigi trapecijos kampai yra: $\angle BAD =$ $= \angle CDA = 30^\circ$, $\angle ABC = \angle BCD = 150^\circ$.

*Ats.:* $30^\circ$, $150^\circ$, $150^\circ$, $30^\circ$.

# PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

**1.** Tarkime $a_2, \ldots, a_m$ ir $b_1, b_2, \ldots, b_n$ dalijasi iš *a*, t.y.

$$a_2 = aq_2, \ldots, a_m = aq_m,\ b_1 = al_1, b_2 = al_2, \ldots, b_n = al_n .$$

Tuomet ir $a_1$ dalijasi iš *a*. Iš tikrųjų, iš lygybės

$$a_1 + aq_2 + \ldots + aq_m = al_1 + alb_2 + \ldots + al_n$$

išreiškę $a_1$, gauname:

$$a_1 = a(l_1 + l_2 + \ldots + l_n - q_2 - \ldots - q_m) = aq .$$

**2.** Kadangi $3663 = 3^2 \cdot 11 \cdot 37$, o $1443 = 3 \cdot 13 \cdot 37$, tai šių skaičių didžiausias bendras daliklis $d = 3 \cdot 37 = 111$.

**3.** Iš dviejų paeiliui einančių sveikųjų skaičių vienas yra lyginis, kitas – nelyginis. Taigi tarp trijų skaičių *n*, $n+1$ ir $n+2$ ($n \in \mathrm{Z}$) mažiausiai vienas yra lyginis. Vadinasi, sandauga $n(n+1)(n+2)$ dalijasi iš 2.

Iš trijų paeiliui einančių sveikųjų skaičių *n*, $n+1$ ir $n+2$ vienas dalijasi iš 3, kito liekana dalijant iš 3 lygi 1, o trečiojo liekana dalijant iš 3 lygi 2 (žr. 1 pavyzdį iš skyrelio „Skaičių dalumas“). Taigi sandauga $n(n+1)(n+2)$, kai $n \in \mathrm{Z}$, dalijasi iš 3.

Kadangi skaičius $n(n+1)(n+2)$ ($n \in \mathrm{Z}$) dalijasi ir iš 2, ir iš 3, tai jis dalijasi iš 6.

Skaičiaus $n(n+1)(n+2)$ dalumą iš 6 galima įrodyti ir taikant matematinės indukcijos metodą.

Su $n = 1$ skaičius $n(n+1)(n+2) = 6$ dalijasi iš 6. Tarkime, kad $k(k+1)(k+2)$ dalijasi iš 6. Įrodysime, kad $k(k+1)(k+2)(k+3)$ dalijasi iš 6. Iš tikrųjų pertvarkę reiškinį taip

$$k(k+1)(k+2)(k+3) = k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2),$$

gausime, kad abu pastarosios sumos dėmenys, taigi ir pati suma, dalijasi iš 6 (pirmasis dėmuo pagal prielaidą, o antrasis yra dviejų paeiliui einančių natūraliųjų skaičių sandauga, padauginta iš 3).

Pagal matematinės indukcijos principą skaičius $n(n+1)(n+2)$ su visais $n \in \mathrm{N}$ dalijasi iš 6.

Įrodant šį teiginį sveikųjų skaičių aibėje, atkreipkime dėmesį, kad teiginys akivaizdus su $n=0$, $n=-1$ ir $n=-2$. Kai $n \le -3$, vėl taikykime matematinės indukcijos metodą. Tuo tikslu pažymėkime

$$A(n)=(-n-2)(-n-1)(-n), \ n=1,2,\dots .$$

Su $n=1$ skaičius $A(1)=(-3)\cdot(-2)\cdot(-1)=-6$ dalijasi iš 6. Tarkime, kad $A(k)=(-k-2)(-k-1)(-k)$ dalijasi iš 6. Įrodysime, jog skaičius $A(k+1)=(-k-3)(-k-2)(-k-1)$ dalijasi iš 6. Pertvarkykime reiškinį:

$$A(k+1)=(-k-2)(-k-1)(-k)-3(-k-2)(-k-1).$$

Abu šio skirtumo dėmenys dalijasi iš 6, taigi $A(k+1)$ dalijasi iš 6. Vadinasi, pagal matematinės indukcijos principą skaičius $A(n)$ su visais $n=1,2,\dots.$ dalijasi iš 6, taigi $n(n+1)(n+2)$ su $n \le -3$ dalijasi iš 6.

Sujungę išvadas, gauname: $n(n+1)(n+2)$ dalijasi iš 6 su visais $n \in \mathrm{Z}$.

**4.** Teiginys įrodomas matematinės indukcijos metodu. Kai $n=1$, gauname $7\,|\,721$ (teisinga).

Tegu $7\,|\,k^7+720k$. Įrodysime, jog

$$7\,|\,((k+1)^7+720(k+1)).$$

Iš tikrųjų:

$$(k+1)^7+720(k+1)=$$
$$=k^7+7k^6+21k^5+35k^4+35k^3+21k^2+7k+1+720k+720=$$
$$=k^7+720k+7(k^6+3k^5+5k^4+7k^3+3k^2+k+103).$$

Pagal matematinės indukcijos principą darome išvadą:

$$7\,|\,n^7+720n, \text{ kai } n \in \mathrm{N}.$$

**5.** Taikome matematinės indukcijos metodą. Pažymėkime

$$A(n)=a^{2n+1}+(a-1)^{n+2}.$$

Kai $n=1$, turėsime:

$$(a^2-a+1)\,|\,(a^3+(a-1)^3).$$

Tai teisinga, nes

$$a^3+(a-1)^3=a^3+a^3-3a^2+3a-1=2a^3-3a^2+3a-1=$$
$$=(a^2-a+1)\cdot(2a-1).$$

Tarkime, kad teiginys galioja, kai $n=k$, t.y.

$$(a^2-a+1)\,|\,(a^{2k+1}+(a-1)^{k+2}).$$

Įrodysime, jog

$$(a^2-a+1)\,|\,(a^{2k+3}+(a-1)^{k+3}).$$

Tuo tikslu pertvarkysime reiškinį:

$$A(k+1)=a^{2k+3}+(a-1)^{k+3}=$$
$$=a^{2k+3}-a^{2k+1}(a-1)+a^{2k+1}(a-1)+(a-1)^{k+3}=$$
$$=a^{2k+1}\cdot(a^2-a+1)+(a-1)\cdot(a^{2k+1}+(a-1)^{k+2}).$$

Kadangi reiškinio $A(k+1)$ abu dėmenys dalijasi iš $a^2-a+1$, tai $A(k+1)$ dalijasi iš $a^2-a+1$. Darome išvadą:

$$(a^2-a+1)\,|\,A(n)$$

su visais $n\in\mathrm{N}$.

**6.** Kadangi $2^5=32\equiv 6 \pmod{13}$, tai iš lyginių savybių išplaukia, jog

$$2^{10}\equiv 36\equiv -3 \pmod{13},$$
$$2^{15}\equiv -18\equiv 8 \pmod{13}. \qquad (1)$$

Panašiai gausime:

$$3^5=243\equiv -4 \pmod{13},$$
$$3^{15}\equiv -64\equiv 1 \pmod{13}. \qquad (2)$$

Panariui sudėję (1) ir (2) lyginius, turėsime:

$$2^{15}+3^{15}\equiv 9 \pmod{13}.$$

Vadinasi, skaičių $2^{15}+3^{15}$ dalydami iš 13, gausime liekaną 9. Taigi $2^{15}+3^{15}$ nesidalija iš 13.

**7.** Skaičiuodami įsitikiname šių lyginių teisingumu:

$$13^2 = 169 \equiv 21 \pmod{37},$$

$$13^4 = 21^2 = 441 \equiv -3 \pmod{37},$$

$$13^8 \equiv 9 \pmod{37},$$

$$13^{16} \equiv 81 \equiv 7 \pmod{37}; \qquad (3)$$

$$2^5 = 32 \equiv -5 \pmod{37},$$

$$2^{25} \equiv -3125 \equiv -17 \pmod{37}; \qquad (4)$$

$$5^5 = 3125 \equiv 17 \pmod{37},$$

$$5^{15} \equiv 4913 \equiv -8 \pmod{37}. \qquad (5)$$

Tuomet iš (3), (4) ir (5) lyginių turėsime:

$$13^{16} - 2^{25} \cdot 5^{15} \equiv 7 - (-17) \cdot (-8) = -129 \equiv 19 \pmod{37}.$$

Taigi ieškomoji liekana yra 19.

**8.** Kadangi $16 \equiv 4 \pmod 8$, $17 \equiv 1 \pmod 8$, $17^{17} \equiv 1 \pmod 8$, tai

$$116 \equiv 4 \pmod 8,$$

$$(116 + 17^{17})^3 \equiv 125 \equiv 5 \pmod 8,$$

$$(116 + 17^{17})^{21} \equiv 5 \pmod 8.$$

Vadinasi, ieškomoji liekana lygi 5.

**9.** Ieškomąjį keturženklį skaičių pažymėkime $\overline{x97y}$. Kad šis skaičius dalytųsi iš 45, jis turi dalytis iš 5 ir iš 9. Skaičius dalijasi iš 5, kai jo paskutinis skaitmuo yra 0 arba 5. Jeigu $y = 0$, tai skaitmenų suma $x + 9 + 7 + 0 = 16 + x$ turi dalytis iš 9. Gauname $x = 2$. Kai $y = 5$, tai skaitmenų suma $x + 9 + 7 + 5 = x + 21$ dalijasi iš 9 tik tuomet, kai $x = 6$. Taigi ieškomasis skaičius yra 2970 arba 6975.

**10.** Norėdami surasti skaičiaus paskutinįjį skaitmenį, turėsime apskaičiuoti liekaną, gaunamą dalijant šį skaičių iš 10. Taigi surasime liekaną, kuri gaunama $2^{2000}$ dalijant iš 10:

$2^5 = 32 \equiv 2 \pmod{10}$,

$2^{10} \equiv 4 \pmod{10}$,

$2^{40} \equiv 256 \equiv 6 \equiv -4 \pmod{10}$,

$(2^{40})^{50} \equiv (-4)^{50} \pmod{10}$;

$(-4)^2 = 16 \equiv -4 \pmod{10}$,

$(-4)^{16} \equiv -4 \pmod{10}$,

$(-4)^{32} \equiv -4 \pmod{10}$,

$(-4)^{48} \equiv 16 \equiv -4 \pmod{10}$,

$(-4)^{50} \equiv 16 \equiv 6 \pmod{10}$.

Vadinasi, $2^{2000} \equiv 6 \pmod{10}$. Taigi paskutinysis skaičiaus $2^{2000}$ skaitmuo yra 6.

## ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

**1.** Taikydami Euklido algoritmą skaičiams $-3523$ ir $1300$, gauname:

$$-3523 = (-3)\cdot 1300 + 377,$$

$$1300 = 3\cdot 377 + 169,$$

$$377 = 2\cdot 169 + 39,$$

$$169 = 4\cdot 39 + 13,$$

$$39 = 3\cdot 13 .$$

*Ats.* $-\dfrac{3523}{1300} = [-3, 3, 2, 4, 3]$.

**2.** Sudarome lentelę:

| $k$ | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_k$ | | **–7** | **2** | **1** | **4** | **6** | **1** | **3** |
| $P_k$ | 1 | –7 | –13 | –20 | –93 | –578 | –671 | –2591 |
| $Q_k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 14 | 87 | 101 | 390 |

*Ats.* $r = R_6 = -\dfrac{2591}{390}$.

**3.** Pirmiausiai randame GT elementus:

$$-3\frac{41}{119} = -4 + \frac{78}{119},$$
$$119 = 1 \cdot 78 + 41,$$
$$78 = 1 \cdot 41 + 37,$$
$$41 = 1 \cdot 37 + 4,$$
$$37 = 9 \cdot 4 + 1,$$
$$4 = 4 \cdot 1.$$

Taigi $-3\dfrac{41}{119} = [-4, 1, 1, 1, 9, 4]$.

Dabar sudarome lentelę:

| $k$ | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_k$ | | **–4** | **1** | **1** | **1** | **9** | **4** |
| $P_k$ | 1 | –4 | –3 | –7 | –10 | –97 | –398 |
| $Q_k$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 29 | 119 |

*Ats.* $R_0 = -4$, $R_1 = -3$, $R_2 = -\dfrac{7}{2}$, $R_3 = -\dfrac{10}{3}$, $R_4 = -\dfrac{97}{29}$, $R_5 = -3\dfrac{41}{119} = -\dfrac{398}{119}$.

Kadangi $P_2 = -7$, $Q_2 = 2$, $P_3 = -10$, $Q_3 = 3$, tai, kai $k = 3$, gausime:

$$P_2 Q_3 - P_3 Q_2 = (-7) \cdot 3 - (-10) \cdot 2 = -21 + 20 = -1 = (-1)^3.$$

**4.** Randame GT elementus:

$$11929 = 0\cdot 12877 + 11929\ ,$$
$$12877 = 1\cdot 11929 + 948\ ,$$
$$11929 = 12\cdot 948 + 553\ ,$$
$$948 = 1\cdot 553 + 395\ ,$$
$$553 = 1\cdot 395 + 158\ ,$$
$$395 = 2\cdot 158 + 79\ ,$$
$$158 = 2\cdot 79$$

Tad $\dfrac{11929}{12877} = [0, 1, 12, 1, 1, 2, 2]$. Sudarome lentelę:

| $k$ | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_k$ | | **0** | **1** | **12** | **1** | **1** | **2** | **2** |
| $P_k$ | 1 | 0 | 1 | 12 | 13 | 25 | 63 | 151 |
| $Q_k$ | 0 | 1 | 1 | 13 | 14 | 27 | 68 | 163 |

*Ats.* $r = \dfrac{151}{163}$ . $R_0 = 0$ , $R_2 = \dfrac{12}{13}$, $R_4 = \dfrac{25}{27}$, $R_6 = \dfrac{151}{163}$, $R_5 = \dfrac{63}{68}$, $R_3 = \dfrac{13}{14}$, $R_1 = 1$.

**5.** Kadangi, $r = [-1, 2, 1, 1, 1, 5, 1, 1, 1, 4]$, tai sudarę reduktų lentelę

| $k$ | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_k$ | | **–1** | **2** | **1** | **1** | **1** | **5** | **1** | **1** | **1** | **4** |
| $P_k$ | 1 | –1 | –1 | –2 | –3 | –5 | –28 | –33 | –61 | –94 | –437 |
| $Q_k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 45 | 53 | 98 | 151 | 702 |

ir pasinaudoję 7-tąja reduktų savybe, konstatuojame, kad

$$|r - R_5| < \frac{1}{45\cdot 53} = \frac{1}{2385} < 0{,}002\ .$$

*Ats.* $r \cong R_5 = -\dfrac{28}{45}$.

**6.** Išskleidę skaičių $\frac{12}{31}$ BGT, gauname: $\frac{12}{31} = [0, 2, 1, 1, 2, 2]$. Taigi $n = 5$. Apskaičiuojame reduktus:

| $k$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_k$ | | **0** | **2** | **1** | **1** | **2** | **2** |
| $P_k$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 5 | 12 |
| $Q_k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 13 | 31 |

Priešpaskutinis reduktas $R_4 = \frac{5}{13}$, todėl bendrasis duotosios lygties sprendinys yra:

$$\left((-1)^4 436 \cdot 13 + 31t\,,\ (-1)^5 436 \cdot 5 - 12t\right) = \left(5668 + 31t\,,\ -2180 - 12t\right),$$
$$t \in Z\,.$$

Lieka parinkti sveikąjį skaičių $t$ taip, kad galiotų: $1 \le x_0 \le 31$ ir $1 \le y_0 \le 12$. Tinka vienintelė reikšmė $t = -182$.

Tada $x_0 = 26, y_0 = 4$.

*Ats.* $\left(5668 + 31t\,,\ -2180 - 12t\right)$, $t \in Z$; balandžio 26-oji.

**7.** $\sqrt{23} = 4 + (\sqrt{23} - 4) \Rightarrow q_0 = 4$;

$$\frac{1}{\sqrt{23} - 4} = \frac{\sqrt{23} + 4}{7} = 1 + \frac{\sqrt{23} - 3}{7} \Rightarrow q_1 = 1;$$

$$\frac{7}{\sqrt{23} - 3} = \frac{\sqrt{23} + 3}{2} = 3 + \frac{\sqrt{23} - 3}{2} \Rightarrow q_2 = 3;$$

$$\frac{2}{\sqrt{23} - 3} = \frac{\sqrt{23} + 3}{7} = 1 + \frac{\sqrt{23} - 4}{7} \Rightarrow q_3 = 1;$$

$$\frac{7}{\sqrt{23} - 4} = \sqrt{23} + 4 = 8 + (\sqrt{23} - 4) \Rightarrow q_4 = 8;$$

$$\frac{1}{\sqrt{23} - 4} = \frac{\sqrt{23} + 4}{7} = 1 + \frac{\sqrt{23} - 3}{7} \Rightarrow q_5 = 1,$$

ir elementai pradeda kartotis. Taigi

$$\sqrt{23} = [4, 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8, ...] = [4, \overline{1, 3, 1, 8}]\,.$$

Lentelėje imsime tiek skleidinio elementų, kad pasiektume nurodytą tikslumą.

| $k$ | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_k$ | | **4** | **1** | **3** | **1** | **8** | **1** | …… |
| $P_k$ | 1 | 4 | 5 | 19 | 24 | 211 | …… | …… |
| $Q_k$ | 0 | 1 | 1 | 4 | 5 | 44 | 49 | …… |

Kadangi

$$Q_3 \cdot Q_4 = 5 \cdot 44 < 1000,$$

o jau

$$Q_4 \cdot Q_5 = 44 \cdot 49 = 2156 > 1000,$$

tai užduoties sąlygas tenkina $R_4$.

*Ats.* $\sqrt{23} = [4, \overline{1, 3, 1, 8}]$; $\sqrt{23} \cong R_4 = \dfrac{211}{44}$.

**8.** Mažesnioji šaknis yra iracionalusis skaičius $x_1 = \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$.

Jo skleidinys yra: $x_1 = [0, 1, 2, \overline{3}]$. Reduktai: $R_0 = 0$, $R_1 = 1$, $R_2 = \dfrac{2}{3}$, $R_3 = \dfrac{7}{10}$, $R_4 = \dfrac{23}{33}$, $R_5 = \dfrac{76}{109}$, … . Užduoties sąlygą tenkina reduktas $R_4$, nes $33 \cdot 109 > 500$.

*Ats.* $x_1 = [0, 1, 2, \overline{3}]$; $x_1 \cong R_4 = \dfrac{23}{33}$.

**9.** $m = 2, h = 2$. Rasime iracionalųjį skaičių $\beta$, kuris išreiškiamas atitinkama grynai periodine GT. Pagal lentelę

| $k$ | –1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $q_k$ | | **1** | **4** |
| $P_k$ | 1 | 1 | 5 |
| $Q_k$ | 0 | 1 | 4 |

sudarome kvadratinę lygtį $\beta$ apskaičiuoti:

$$4\beta^2 - 4\beta - 1 = 0 \Rightarrow \beta = \frac{1+\sqrt{2}}{2} .$$

Dabar iš lentelės pagal priešperiodžio elementus

| $k$ | $-1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $q_k$ | | **–3** | **2** |
| $P_k$ | 1 | –3 | –5 |
| $Q_k$ | 0 | 1 | 2 |

randame, kad : $\alpha = \dfrac{-5\beta - 3}{2\beta + 1} = \dfrac{-5 \cdot \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} - 3}{2 \cdot \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} + 1} = \dfrac{-5\sqrt{2} - 11}{2(\sqrt{2}+2)} =$

$$= \frac{(-5\sqrt{2} - 11)(\sqrt{2} - 2)}{2(-2)} = \frac{\sqrt{2}}{4} - 3.$$

*Ats.* $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4} - 3$ .

**10.** Kadangi

$$n < \sqrt{n^2 + 2} < \sqrt{n^2 + 2n + 1} < n + 1 \ , \qquad (*)$$

tai $q_0 = n$. Tada

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + 2} - n} = \frac{\sqrt{n^2 + 2} + n}{2} = n + \frac{\sqrt{n^2 + 2} - n}{2} \Rightarrow q_1 = n \ ,$$

nes, pagal ($*$) įvertį, $0 < \dfrac{\sqrt{n^2 + 2} - n}{2} < \dfrac{1}{2}$ .

Toliau

$$\frac{2}{\sqrt{n^2 + 2} - n} = \sqrt{n^2 + 2} + n = 2n + \left(\sqrt{n^2 + 2} - n\right) \Rightarrow q_2 = 2n$$

ir elementai pradeda kartotis. Taigi

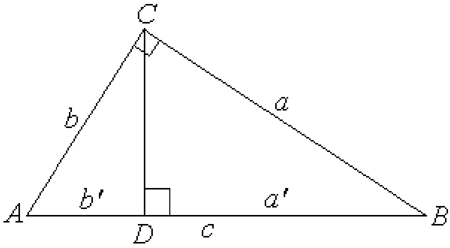
$$\sqrt{n^2 + 2} = [n, n, 2n, n, 2n, n, 2n, n, ...].$$

# TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

**1.** $\Delta\, ACB \sim \Delta\, BDC$, nes $\angle ACB = \angle BDC = 90º$ ir $\angle B$ – bendras. Iš šių trikampių panašumo:

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{a'};\; a^2 = ca';$$

$$a = \sqrt{ca'}.$$



1 pav.

$\Delta ACB \sim \Delta ADC$, nes $\angle ACB = \angle ADC = 90º$ ir $\angle A$ – bendras. Iš šių trikampių panašumo:

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{b'};\quad b^2 = cb';\quad b = \sqrt{cb'}.$$

Sudėję panariui lygybes $a^2 = ca'\ ir\ b^2 = cb'$, gauname:

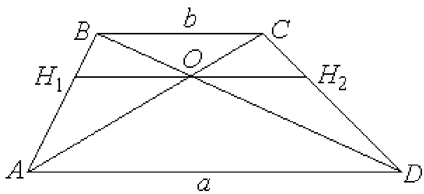
$$a^2 + b^2 = ca' + cb' = c(a' + b') = c^2.$$

Gavome Pitagoro teoremos formulę:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

**2.** $\Delta\, H_1BO \sim \Delta\, ABD$, nes $H_1O \parallel AD$. Iš šių trikampių panašumo: $\dfrac{H_1O}{AD} = \dfrac{BH_1}{AB}$.

$\Delta H_1AO \sim \Delta ABC$, nes $H_1O \parallel BC$. Iš šių trikampių panašumo: $\dfrac{H_1O}{BC} = \dfrac{AH_1}{AB}$.



2 pav.

Gautas dvi lygybes panariui sudedame: $\dfrac{H_1O}{AD} + \dfrac{H_1O}{BC} = 1.$

Iš čia $H_1O \cdot \left(\dfrac{1}{AD} + \dfrac{1}{BC}\right) = 1$ arba

$$H_1O = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \qquad (1)$$

Analogiškai gautume

$$OH_2 = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \tag{2}$$

(1) ir (2) lygybes panariui sudedame: $H_1H_2 = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

**3.** Tegul $a$ ir $b$ – du teigiamas reikšmes įgyjantys kintamieji, be to, $ab = C$, čia $C$ – pastovus skaičius.

Kai $a \neq b$, pagal (2) nelygybę (žr. 2 pavyzdį):

$$a+b > 2\sqrt{ab}, \text{ t.y. } a+b > 2\sqrt{C}.$$

Kai $a = b$, turime $a+b = 2\sqrt{ab}$, t.y. $a+b = 2\sqrt{C}$.

Vadinasi, suma įgyja mažiausią reikšmę, lygią $2\sqrt{C}$, kai kintamieji $a$ ir $b$ yra lygūs.

**4.** Tegul postamento pagrindo kraštinių ilgiai yra $x$ ir $y$. Tada postamento aukštis lygus $\sqrt{x^2+y^2}$, o jo paviršiaus plotas:

$$S = 2(x+y)\cdot\sqrt{x^2+y^2}+8,$$

be to $xy = 4$.

Pasinaudoję 2 pavyzdžio (2) ir (3) nelygybėmis, gauname:

$$x+y \geq 2\sqrt{xy} = 4; \quad x^2+y^2 \geq 2xy = 8,$$

o iš čia $\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{8}$.

Vadinasi,

$$S \geq 2\cdot 4\cdot\sqrt{8}+8 = 8+16\sqrt{2}(\text{m}^2).$$

Be to, lygybė galios, kai $x = y = 2$. Tada pagrindo perimetras $2(x + y)$ ir postamento aukštis $\sqrt{x^2+y^2}$ įgyja mažiausias reikšmes.

Taigi postamento visas paviršius bus mažiausias, kai pagrinde turėsime kvadratą, kurio kraštinės ilgis 2 m.

**5.** Įvedame naują kintamąjį

$$y = \frac{(x-1)+(x-2)+(x-3)+(x-4)}{4} = x - 2{,}5.$$

Tada

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = (y+1{,}5)(y+0{,}5)(y-0{,}5)(y-1{,}5) =$$
$$= (y^2 - 0{,}25)(y^2 - 2{,}25).$$

Sprendžiame lygtį $y^4 - 2{,}5y^2 + 0{,}5625 = 120$. Pažymime $y^2 = z$ ($z \geq 0$). Gauname

$$z^2 - 2{,}5z - 119{,}4375 = 0,$$
$$z = \frac{2{,}5 \pm 22}{2},$$
$$z_1 = 12{,}25;$$
$$z_2 = -9{,}75 \text{ (netinka)};$$
$$y^2 = 12{,}25,$$
$$y = \pm 3{,}5,$$
$$x - 2{,}5 = -3{,}5 \quad \text{arba} \quad x - 2{,}5 = 3{,}5;$$
$$x = -1 \quad \text{arba} \quad x = 6.$$

*Ats.:* –1; 6.

**6.** Vidutinis automobilio greitis lygus

$$\frac{3}{\frac{1}{54} + \frac{1}{45} + \frac{1}{60}} \approx 52{,}3 \text{ (km/h)}.$$

**7.** Pagal 2 pavyzdžio (3) nelygybę

$$2ab \leq a^2 + b^2, \text{ arba } a^2 + b^2 + 2ab \leq 2a^2 + 2b^2, \text{ arba}$$
$$\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4} \leq \frac{a^2 + b^2}{2},$$
$$\text{arba } \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}, \text{ arba } \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Lygybė galioja tik tada, kai $a = b$.

**8.** Pasinaudojame 3 pavyzdyje įrodyta nelygybe

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}, \text{ kai } a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0,\ d \geq 0.$$

Paėmę $d = \dfrac{a+b+c}{3}$, turime

$$\frac{a+b+c+\dfrac{a+b+c}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{abc \cdot \frac{a+b+c}{3}},$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{abc \cdot \frac{a+b+c}{3}}.$$

Abi nelygybės puses pakėlę ketvirtuoju laipsniu, gauname:

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geq abc \cdot \frac{a+b+c}{3}, \quad \text{o iš čia} \quad \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc,$$

$$\text{arba} \quad \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Lygybės ženklas galimas tik tada, kai $a = b = c$.

**9.** Remdamiesi 3 pavyzdžiu, turime:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}. \qquad (1)$$

Tegul

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{b_1 + b_2}{2}, \quad a_2 = \frac{b_3 + b_4}{2}, \\ a_3 &= \frac{b_5 + b_6}{2}, \quad a_4 = \frac{b_7 + b_8}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Įrašę $a_1, a_2, a_3, a_4$ reikšmes iš (2) į (1) gauname:

$$\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_7 + b_8}{8} \geq \sqrt[4]{\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)\left(\frac{b_3 + b_4}{2}\right)\left(\frac{b_5 + b_6}{2}\right)\left(\frac{b_7 + b_8}{2}\right)} \qquad (3)$$

Kadangi

$$\frac{b_1 + b_2}{2} \geq \sqrt{b_1 b_2}, \quad \frac{b_3 + b_4}{2} \geq \sqrt{b_3 b_4},$$

$$\frac{b_5 + b_6}{2} \geq \sqrt{b_5 b_6}, \quad \frac{b_7 + b_8}{2} \geq \sqrt{b_7 b_8},$$

tai

$$\sqrt[4]{\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)\left(\frac{b_3+b_4}{2}\right)\left(\frac{b_5+b_6}{2}\right)\left(\frac{b_7+b_8}{2}\right)} \geq \sqrt[4]{\sqrt{b_1 b_2}\,\sqrt{b_3 b_4}\,\sqrt{b_5 b_6}\,\sqrt{b_7 b_8}}\,. \qquad (4)$$

Toliau iš (3) ir (4) gauname:

$$\frac{b_1+b_2+\ldots+b_7+b_8}{8} \geq \sqrt[4]{\sqrt{b_1 b_2}\,\sqrt{b_3 b_4}\,\sqrt{b_5 b_6}\,\sqrt{b_7 b_8}}, \text{ arba}$$

$$\frac{b_1+b_2+\ldots+b_7+b_8}{8} \geq \sqrt[8]{b_1 b_2 \ldots b_7 b_8}\,.$$

Samprotaudami kaip ir 3 pavyzdyje, įsitikiname, kad lygybė galima tik tada, kai $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_8$ .

**10.** Sudėję panariui nelygybes

$$\frac{a^4+b^4}{2} \geq a^2b^2, \quad \frac{b^4+c^4}{2} \geq b^2c^2, \quad \frac{a^4+c^4}{2} \geq a^2c^2,$$

gauname

$$a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2. \qquad (1)$$

Kadangi

$$\left.\begin{aligned} \frac{a^2b^2+b^2c^2}{2} &\geq \sqrt{a^2b^2\cdot b^2c^2} = b^2|ac| \geq ab^2c, \\ \frac{a^2b^2+a^2c^2}{2} &\geq \sqrt{a^2b^2\cdot a^2c^2} = a^2|bc| \geq a^2bc, \\ \frac{b^2c^2+a^2c^2}{2} &\geq \sqrt{b^2c^2\cdot a^2c^2} = |ab|c^2 \geq abc^2, \end{aligned}\right\}$$

tai

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 \geq ab^2c+a^2bc+abc^2,$$

arba

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 \geq abc(a+b+c). \qquad (2)$$

Iš (1) ir (2) gauname $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$.

Lygybė galioja tik tada, kai $a = b = c$ .

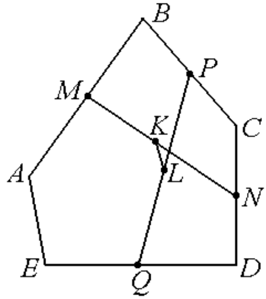
# KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

**1.** $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right)=$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)=$$



1 pav.

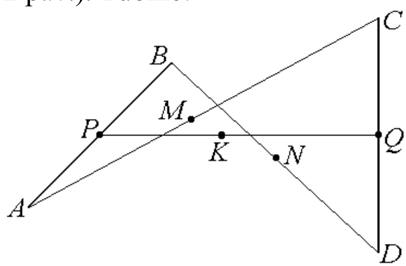
$=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$. Iš čia $\overrightarrow{KL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$ taigi $KL \parallel AE$ ir $AE : KL = 4$.

**2.** Sakykime, kad atkarpos *AC* vidurio taškas *M*, atkarpos *BD* – taškas *N*, o atkarpos *PQ* – taškas *K*. (žr. 2 pav.). Tuomet

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right),$$

$$\overrightarrow{MK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)=$$



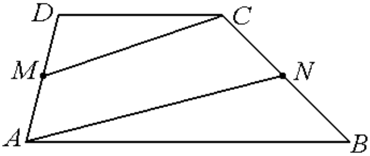
2 pav.

$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right)+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right),$$

nes $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$.

Iš čia $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MK} \Rightarrow M, N, K$ yra vienos tiesės taškai.

**3.** Sakykime, kad $\overrightarrow{DC} = \lambda \overrightarrow{AB}$. Tuomet (žr. 3 pav.)



3 pav.

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right),$$

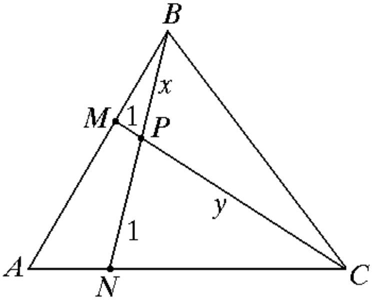
$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}\right) = \frac{1}{2}\left(-\lambda \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right).$$

Jei $AN \| CM$, tai $\overrightarrow{CM} = x\overrightarrow{AN}$, t.y. $x = -1$ ir $x = -\lambda$. Iš čia $\lambda = 1$ ir $ABCD$ – lygiagretainis.

Jei $ABCD$ – lygiagretainis, tai $\lambda = 1$ ir $\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{CM}$. Taigi, $AN \| CM$.

*Ats.*: jei trapecija $ABCD$ nėra lygiagretainis, tai tiesės $AN$ ir $CM$ nelygiagrečios, jei lygiagretainis – lygiagrečios.

**4.** Sakykime, kad (žr. 4 pav.) $BP : PN = x$. Tuomet



4 pav.

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AN}}{1+x} = \frac{\overrightarrow{AB} + \frac{x}{5}\overrightarrow{AC}}{1+x}.$$

Jei $CP : PM = y$, tuomet

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AM}}{1+y} = \frac{\overrightarrow{AC} + \frac{3y}{5}\overrightarrow{AB}}{1+y}.$$

Dėl $\overrightarrow{AP}$ išraiškos vienaties gauname

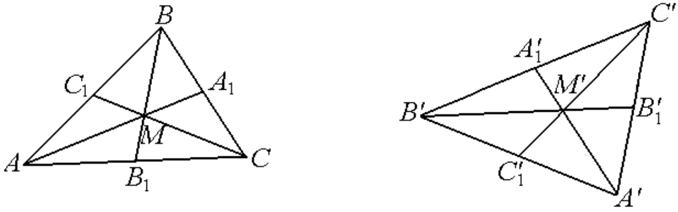
$$\frac{1}{1+x} = \frac{3y}{5(1+y)} \text{ ir } \frac{x}{5(1+x)} = \frac{1}{1+y}.$$

Padaliję vieną lygybę iš kitos, turime $\frac{5}{x} = \frac{3}{5}y$, $x = \frac{25}{3y}$ Iš čia

$$\frac{1}{1+x} = \frac{3y}{3y+25} \text{ ir } \frac{3y}{3y+25} = \frac{3y}{5+5y}, \text{ t.y. } y = 10. \text{ Tuomet } x = \frac{5}{6}.$$

*Ats.:* $BP : PN = 5 : 6$, $CP : PM = 10 : 1$.

**5.** Sakykime, kad $M$ ir $M'$ atitinkamai trikampių $ABC$ ir $A'B'C'$ pusiaukraštinių sankirtos taškai (žr. 5 pav.).




5 pav.

Jei $AA_1 \| B'C'$, $BB_1 \| C'A'$, $CC_1 \| A'B'$, tai $\vec{AM} = \lambda \vec{B'C'}$, $\vec{BM} = \mu \vec{C'A'}$, $\vec{CM} = \nu \vec{A'B'}$. Iš lygybės $\vec{AM} + \vec{BM} + \vec{CM} = \vec{0}$ gauname $\lambda \vec{B'C'} + \mu \vec{C'A'} + \gamma \vec{A'B'} = \vec{0}$, t.y. $\vec{B'C'} = -\frac{\mu}{\lambda}\vec{C'A'} - \frac{\gamma}{\lambda}\vec{A'B'}$.

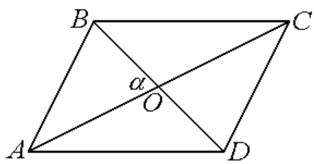
Kita vertus, $\vec{B'C'} = \vec{B'A'} + \vec{A'C'}$. Dėl $\vec{B'C'}$ išraiškos vienaties $\frac{\mu}{\lambda} = 1$, $\frac{\gamma}{\lambda} = 1$. Iš čia gauname $\mu = \lambda = \gamma$. Todėl

$$\vec{A'A'_1} = \frac{1}{2}\left(\vec{A'B'} + \vec{A'C'}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}\vec{CM} - \frac{1}{\lambda}\vec{BM}\right) = \frac{1}{2\lambda}\vec{CB},$$

t.y. $A'A'_1 \| BC$. Analogiškai teiginį įrodome ir kitoms pusiaukraštinėms.

**6.** Pagal sąlygą $AB = 2$, $AD = 3$, $\angle A = 60^\circ$ (žr. 6 pav.). Kampą $\alpha$ tarp įstrižainių rasime iš formulės

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{BD}}{|\vec{AC}| \cdot |\vec{BD}|}.$$




6 pav.

Kadangi $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$,

$\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB}$, $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \vec{AD}^{\,2} - \vec{AB}^{\,2} = 5$,

$$|\vec{AC}| = \sqrt{\vec{AC}^{\,2}} = \sqrt{\vec{AB}^{\,2} + 2\,\vec{AB}\cdot\vec{AD} + \vec{AD}^{\,2}} =$$

$$= \sqrt{2^2 + 2\cdot 2\cdot 3\cdot \frac{1}{2} + 3^2} = \sqrt{19}\,;$$

$$|\vec{BD}| = \sqrt{\vec{BD}^{\,2}} = \sqrt{\vec{AD}^{\,2} - 2\,\vec{AD}\cdot\vec{AB} + \vec{AB}^{\,2}} =$$

$$= \sqrt{3^2 - 2\cdot 2\cdot 3\cdot \frac{1}{2} + 2^2} = \sqrt{7}\,,$$

tai

$$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{19\cdot 7}} = \frac{5}{\sqrt{133}}\,.$$

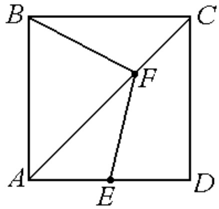
*Ats.:* $\arccos\dfrac{5}{\sqrt{133}}$.

**7.** Kadangi $\vec{AF} = 3\vec{FC} = \dfrac{3}{4}\vec{AC}$,

$$\vec{EF} = \vec{AF} - \vec{AE} = \frac{3}{4}\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AD} = \frac{3}{4}\left(\vec{AB} + \vec{AD}\right) - \frac{1}{2}\vec{AD} = \frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD}\,,$$

$$\vec{BF} = \vec{AF} - \vec{AB} = \frac{3}{4}\left(\vec{AB} + \vec{AD}\right) - \vec{AB} =$$

$$= -\frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD},$$



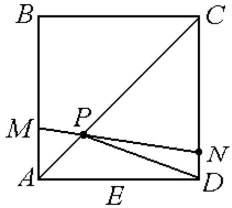
7 pav.

tai $\vec{EF}\cdot\vec{BF} = -\dfrac{3}{16}\vec{AB}^{\,2} + \dfrac{3}{16}\vec{AD}^{\,2} = 0$,

nes $AB = AD$. Taigi $EF \perp FB$. (Žr. 7 pav.)

**8.** Sakykime, kad $MP : PN = x$, $AP : AC = y$. Tada (žr. 8 pav.)

$$\vec{AP} = \frac{\vec{AM} + x\,\vec{AN}}{1+x} = \frac{\frac{1}{3}\vec{AB} + x\left(\vec{AD} + \frac{1}{6}\vec{DC}\right)}{1+x} = \frac{\left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}\right)\vec{AB} + x\,\vec{AD}}{1+x}\,.$$



8 pav.

Bet $\vec{AP} = y\,\vec{AC} = y\left(\vec{AB} + \vec{AD}\right)$.

Todėl $y = \dfrac{\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$,

$\dfrac{1}{6}x - x = -\dfrac{1}{3}$ ir $x = \dfrac{2}{5}$. Tada $y = \dfrac{2}{7}$ ir

$\vec{AP} = \dfrac{2}{7}\left(\vec{AB} + \vec{AD}\right)$. Taigi $\vec{PD} = \vec{PA} + \vec{AD} = -\dfrac{2}{7}\vec{AB} + \dfrac{5}{7}\vec{AD}$.

Vadinasi,

$$\cos\angle APD = \frac{\vec{PA}\cdot\vec{PD}}{|\vec{PA}|\cdot|\vec{PD}|} = \frac{\frac{4}{49}\vec{AB}^2 - \frac{10}{49}\vec{AD}^2}{\sqrt{\frac{8}{49}\vec{AB}^2}\sqrt{\frac{29}{49}\vec{AB}^2}} =$$

$$= -\frac{6}{\sqrt{8\cdot 29}} = -\frac{6}{\sqrt{232}} - \frac{3}{\sqrt{58}},$$

$$\cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{58}}.$$

*Ats.:* $\arccos\left(-\dfrac{3}{\sqrt{58}}\right)$.

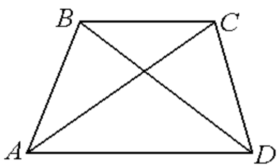
**9.** Lygybes $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$, $\vec{BD} = \vec{CD} - \vec{CB}$ pakėlę skaliariškai kvadratu ir sudėję, gauname

$$\vec{AC}^2 + \vec{BD}^2 = \vec{AB}^2 + 2\,\vec{AB}\cdot\vec{BC} + \vec{BC}^2 + \vec{CD}^2 - 2\,\vec{CD}\cdot\vec{CB} + \vec{CB}^2 =$$

$$= \vec{AB}^2 + \vec{CD}^2 + 2\,\vec{BC}\cdot(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}) =$$

$$= \vec{AB}^2 + \vec{CD}^2 + 2\,\vec{BC}\cdot\vec{AD} =$$

$$= AB^2 + CD^2 + 2BC\cdot AD,$$



9 pav.

nes $\vec{BC}\cdot\vec{AD}=|\vec{BC}|\cdot|\vec{AD}|$.

Taigi $AC^2+BD^2=AB^2+CD^2+2AB\cdot AD$. (Žr. 9 pav.)

**10.** Pagal sąlygą $AD:DC=1:2$, $AE:EB=2:1$ (žr. 10 pav.).

Sakykime, kad $\vec{CQ}=x\,\vec{CE}$, $\vec{BQ}=y\,\vec{BD}$.

Tada $\vec{AQ}=\vec{AC}+\vec{CQ}=\vec{AC}+x\,\vec{CE}=\vec{AC}+\frac{x}{3}(\vec{CA}+2\,\vec{CB})=$

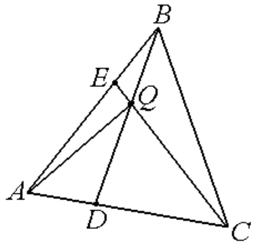
$$=\vec{AC}\left(1-\frac{x}{3}\right)+\frac{2}{3}x(\vec{AB}-\vec{AC})=(1-x)\,\vec{AC}+\frac{2}{3}x\,\vec{AB}$$

ir

$$\vec{AQ}=\vec{AB}+\vec{BQ}=\vec{AB}+y\,\vec{BD}=\vec{AB}+\frac{y}{3}(2\,\vec{BA}+\vec{BC})=$$

$$=\vec{AB}+\frac{y}{3}(-2\,\vec{AB}+\vec{AC}-\vec{AB})=(1-y)\,\vec{AB}+\frac{y}{3}\vec{AC}.$$

Todėl $\begin{cases}1-x=\dfrac{y}{3},\\ \dfrac{2}{3}x=1-y.\end{cases}$ Iš čia $x=\dfrac{6}{7}$, tuomet




10 pav.

$$\vec{QA}=-\vec{AQ}=-\frac{1}{7}\vec{AC}-\frac{4}{7}\vec{AB},$$

$$\vec{QC}=-x\,\vec{CE}=-\frac{x}{3}(\vec{CA}+2\,\vec{CB})=$$

$$=-\frac{x}{3}(-\vec{AC}+2\,\vec{AB}-2\,\vec{AC})=-\frac{x}{3}(-3\,\vec{AC}+2\,\vec{AB})=\frac{6}{7}\vec{AC}^2-\frac{4}{7}\vec{AB}.$$

Kadangi $\vec{QA}\cdot\vec{QC}=\dfrac{1}{49}\left(-6\,\vec{AC}^{\,2}+4\,\vec{AC}\cdot\vec{AB}-24\,\vec{AB}\cdot\vec{AC}+16\,\vec{AB}^{\,2}\right)=$

$$=\frac{1}{49}|\vec{AB}|^2\left(-6+4\cdot\frac{1}{2}-24\cdot\frac{1}{2}+16\right)=0,\ \text{tai}\ \angle AQC=90^\circ.$$

*Ats.:* 90°.

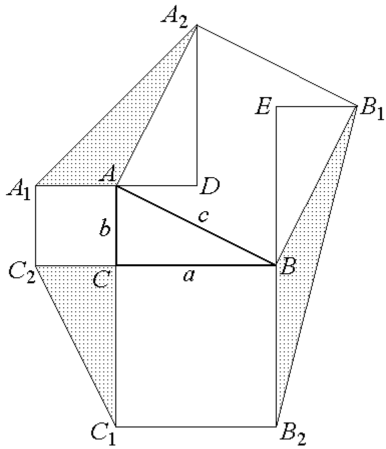
# PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

**1.** Šešiakampis $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ sudarytas iš stačiojo trikampio $ABC$, trijų kvadratų $ABB_1A_2$, $BCC_1B_2$, $ACC_2A_1$ ir trijų trikampių $A_1AA_2$, $B_1BB_2$ ir $C_1CC_2$. Šio šešiakampio plotą apskaičiuosime, kai žinosime anksčiau minėtų trijų trikampių plotus. Nubrėžiame trikampiams $A_1AA_2$ ir $B_1BB_2$ aukštines $A_2D$, $B_1E$. Kadangi $\Delta AA_2D = \Delta ABC$ ($AB = AA_2 = c$ – kvadrato kraštinės, $\angle AA_2D = \angle ABC$ – kampas su atitinkamai statmenomis kraštinėmis), tai $A_2D = BC = a.$ Vadinasi,

$$S_{A_1AA_2} = \frac{1}{2}A_1A \cdot A_2D = \frac{1}{2}b \cdot a.$$

Analogiškai galima įsitikinti, kad $\Delta BB_1E = \Delta BAC$. Taigi $B_1E = AC = b$ ir $S_{B_1BB_2} =$

$$= \frac{1}{2}BB_2 \cdot B_1E = \frac{1}{2}a \cdot b.$$




1 pav.

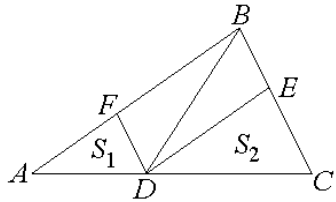
Akivaizdu, kad $S_{C_1CC_2} = = \frac{1}{2}CC_1 \cdot CC_2 = \frac{1}{2}a \cdot b$.

Šešiakampio $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ plotas $S$ lygus $S = a^2 + b^2 + c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}a \cdot b = = (a+b)^2 + (a^2 + b^2)$. Kai $a = 5$ cm, $b = 12$ cm, $S = 17^2 + 25 + 144 = 458\,(\text{cm}^2)$.

*Ats.* 458 cm$^2$.

**2.** Nubrėžkime lygiagretainio $DFBE$ įstrižainę $BD$. Trikampių $AFD$ ir $FBD$ pagrindai $AF$ ir $FB$ yra vienoje tiesėje, o aukštinė bendra. Tokių trikampių plotų santykis lygus jų pagrindų ilgių santykiui.

Taigi $\dfrac{S_{FBD}}{S_{AFD}} = \dfrac{FB}{AF}$.



2 pav.

Analogiškai $\dfrac{S_{BED}}{S_{ECD}} = \dfrac{BE}{EC}$. Pastebėję, kad $S_{FBD} = S_{BED} = \dfrac{1}{2} S_{DFBE}$ ir sudauginę aukščiau gautas lygybes, turime:

$$\frac{\frac{1}{4} S_{DFBE}^2}{S_{AFD} \cdot S_{ECD}} = \frac{FB \cdot BE}{AF \cdot EC}.$$

Kadangi $\Delta AFD \sim \Delta DEC$ (lygūs atitinkami kampai), tai $\dfrac{AF}{DE} = \dfrac{FD}{EC}$.

Iš čia

$$AF \cdot EC = DE \cdot FD = FB \cdot BE.$$

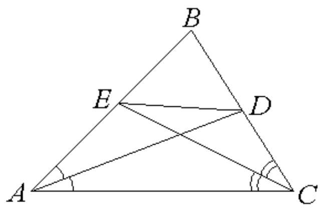
Vadinasi,

$$\frac{S_{DFBE}^2}{4S_1 \cdot S_2} = \frac{FB \cdot BE}{FB \cdot BE} = 1 \text{ ir } S_{DFBE}^2 = 4S_1 \cdot S_2,$$

t. y. $S_{DFBE} = 2\sqrt{S_1 \cdot S_2}$.

*Ats.:* $S_{DFBE} = 2\sqrt{S_1 \cdot S_2}$.

**3.** Pagal trikampio pusiaukampinių savybę: $\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{BC}{BE}$, t.y. $\dfrac{b}{AE} = \dfrac{a}{c - AE}$ Iš čia: $AE = \dfrac{bc}{a+b}$. Analogiškai įrodoma, kad $BD = \dfrac{ac}{b+c}$. Taigi



3 pav.

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{BD}{BC} = \frac{c}{b+c}, \quad \frac{S_{AED}}{S_{ABD}} = \frac{AE}{AB} = \frac{b}{a+b}.$$

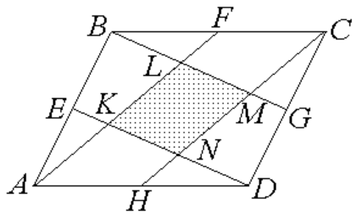
Vadinasi, $\dfrac{S_{ABC}}{S_{AED}} = \dfrac{(a+b)(b+c)}{bc}$. Kai $a = 20$ cm, $b = 28$ cm, $c = 21$ cm, $S_{ABC}/S_{AED} = 4$.

*Ats.:* $(a+b)(b+c)/bc$ ; 4.

**4.** 1. adangi $AF \parallel CH$, $DE \parallel BG$, tai keturkampiai *AFCH*, *BGDE ir KLMN* yra lygiagretainiai.

2. Kadangi $AK = KL$ (nes *EK* – trikampio *BAL* vidurinė linija), $MN = MC$ (nes *MG* – trikampio *NCD* vidurinė linija), $MC = 2FL$ (nes *FL* – trikampio *MBC* vidurinė linija), tai $AK = KL = MN = 2FL$ ir $KL = \dfrac{2}{5}AF$.

3. $S_{KLMN} = \dfrac{2}{5}S_{AFCH}$.



4 pav.

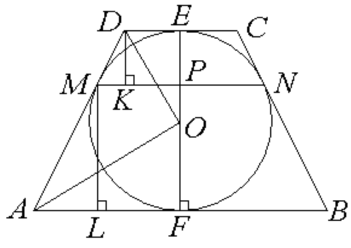
4. Kadangi

$$S_{AFCH} = \frac{1}{2}S_{ABCD},$$

tai $S_{KLMN} = \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{2}S_{ABCD} = \dfrac{1}{5}S$.

*Ats.:* $S_{KLMN} = \dfrac{1}{5}S$.

**5.** Brėžinyje pavaizduota lygiašonė trapecija *ABCD*, $\angle DAB = 60^\circ$, *O* – įbrėžto į šią trapeciją apskritimo centras, *MN* – atkarpa, jungianti apskritimo ir šoninių kraštinių lietimosi taškus. *DK* – trapecijos *MDCN* aukštinė, o *ML* – trapecijos *AMNB* aukštinė, o *EF* – trapecijos *ABCD* aukštinė. Kadangi $\angle DAF = 60^\circ$, tai $\angle DMK = 60^\circ$ ir $\angle ADC = 120^\circ$. Tada $\angle ODE = 60^\circ$, nes *DO* – kampo *ADE* pusiaukampinė. Sakykime, $DE = a$, $AF = b$, $OF = R$,



5 pav.

$MP = c$, $DK = h$, $ML = H$. Iš stačiųjų trikampių *DOE*, *AOF*, *MKD* ir *ALM* randame:

$DE = a = R\text{ctg}60^\circ = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$, $AF = b = R\text{ctg}30^\circ = R\sqrt{3}$,

$MP = c = MK + KP = a\cos 60^\circ + a = \dfrac{3}{2}a = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$,

$DK = h = a\sin 60^\circ = \dfrac{R\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R}{2}$,

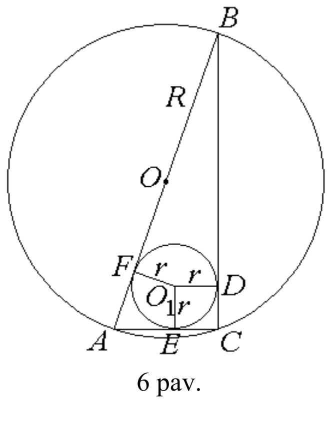
$ML = H = AM\sin 60^\circ = b\sin 60^\circ = R\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3R}{2}$.

Vadinasi,

$$\frac{S_{MNCD}}{S_{ABNM}} = \frac{(a+c)h}{(b+c)H} = \frac{\left(\dfrac{R\sqrt{3}}{3} + \dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \dfrac{R}{2}}{\left(R\sqrt{3} + \dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \dfrac{3R}{2}} = \frac{\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}\right) \cdot \dfrac{1}{2}}{\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) \cdot \dfrac{3}{2}} = \frac{5}{27}.$$

*Ats.:* $\dfrac{5}{27}$.

**6.** Sakykime, $R$ ir $r$ – apibrėžto ir įbrėžto apskritimų spinduliai, o $BC = a$ ir $BD = x$. Tada $BF = x$, $AF = 2R - x = AE$, $AC = 2R - x + r$. Iš stačiojo trikampio *ACB:* $AC^2 + BC^2 = AB^2$, t.y. $(2R + r - x)^2 + a^2 = 4R^2$. Kadangi $\dfrac{R}{r} = \dfrac{5}{2}$, t.y. $R = \dfrac{5}{2}r$ ir $x = a - r$, tai pagal Pitagoro teoremą trikampiui *ACB* galima užrašyti



6 pav.

$$(7r - a)^2 + a^2 = 25r^2, \text{ t.y. } 12r^2 - 7ar + a^2 = 0.$$

Šios kvadratinės lygties sprendiniai: $r_1 = \dfrac{a}{3}$, $r_2 = \dfrac{a}{4}$.

Taigi

$$AC_1 = 5r_1 - a + r_1 + r_1 = 7 \cdot \frac{a}{3} - a = \frac{4a}{3};$$

$$AC_2 = 5r_2 - a + r_2 + r_2 = 7 \cdot \frac{a}{4} - a = \frac{3a}{4} \text{ ir}$$

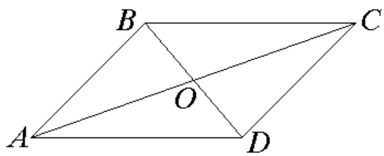
$$S_{ABC_1} = \frac{1}{2} a \cdot 4 \frac{a}{3} = \frac{2a^2}{3}; \ S_{ABC_2} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{3a}{4} = \frac{3a^2}{8}.$$

*Ats.:* $\left\{ \frac{2a^2}{3}; \ \frac{3a^2}{8} \right\}$.

**7.** 1. Paveikslėlyje $ABCD$ – lygiagretainis, $O$ – įstrižainių susikirtimo taškas. Pagal sąlygą $AC = 78$ cm, $BD = 50$ cm, tai

$AO = \frac{1}{2} AC = 39$ cm, o

$OD = \frac{1}{2} BD = 25$ cm.




7 pav.

Sakykime, $AD = x$.

$S_{AOD} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = 420$ cm$^2$.

Pagal Herono formulę: $\sqrt{\frac{64+x}{2} \cdot \frac{x-14}{2} \cdot \frac{x+14}{2} \cdot \frac{64-x}{2}} = 420$. Šią lygtį pakėlę kvadratu ir atlikę keletą veiksmų, gauname: $x^4 - 4292x^2 + 3625216 = 0$. Šios lygties sprendiniai yra: $x_1 = 56$ (cm), $x_2 = 34$ (cm). Taigi lygiagretainio kraštinė $AD = 56$ cm, o $AB = 34$ cm.

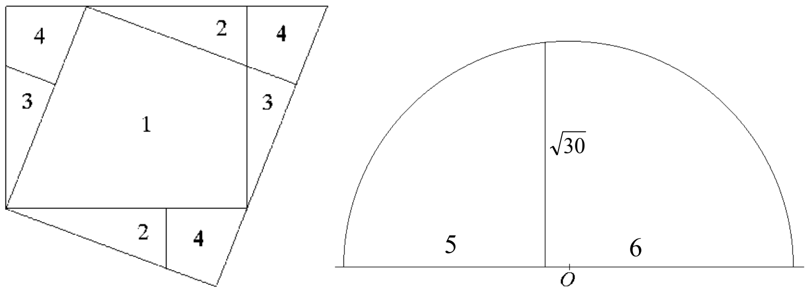
2. Trikampis $AOD$ yra Herono trikampis, nes jo kraštinės $AO = 39$ cm, $OD = 25$ cm ir $AD = 56$ cm yra natūralieji skaičiai ir plotas $S = 420$ (cm$^2$) – taip pat natūralusis skaičius.

Pagal formulę $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$, kai $n = 1$, $m = 2$ gauname Pitagoro trikampį $(3; 4; 5)$, o kai $n = 2$, $m = 3$ gauname Pitagoro trikampį $(5; 12; 13)$. Pirmojo trikampio kraštines padauginę iš 5, o antrojo iš 3, gauname du Pitagoro trikampius

$(15; 20; 25)$ ir $(15; 36; 39)$, iš kurių galima sudėti Herono trikampį $(56; 25; 39)$.

*Ats.:* 34 cm, 56 cm; $(15; 20; 25)$ ir $(15; 36; 39)$.

**8.** *1 būdas.* 1. Pirmiausia nubrėžiame kvadrato, lygiapločio duotajam stačiakampiui, kraštinę. (Tiesėje atidedame dvi 5 cm ir 6 cm ilgio atkarpas ir randame jų geometrinį vidurkį.*8 pav.*)




8 pav.

2. Nubrėžiame lygiagretainį, kurio viena kraštinė lygi kvadrato kraštinei, t. y. $\sqrt{30}$ cm, lygiaplotį stačiakampiui.

3. Nubrėžiame kvadratą, lygiaplotį lygiagretainiui (o tuo pačiu ir stačiakampiui).

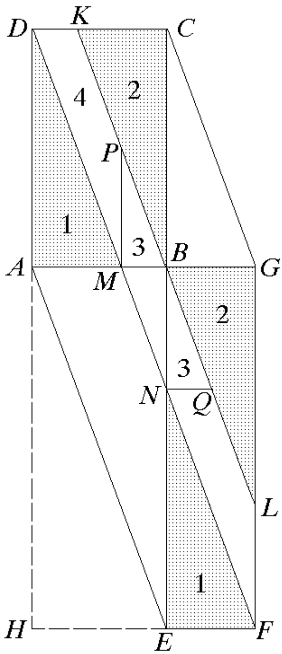
4. Lygios stačiakampio, lygiagretainio ir kvadrato dalys pažymėtos vienodais skaičiais.

*2 būdas.* Įrodysime bendresnę teoremą: du lygiapločiai stačiakampiai yra lygiadaliai.

Brėžinyje pavaizduoti du lygiapločiai stačiakampiai *ABCD* ir *BEFG*, tai yra $AB \cdot BC = BE \cdot BG$.

1. Nubrėžiame tieses *CG*, *DF* ir *AE*. Kadangi $\dfrac{AB}{BE} = \dfrac{BG}{BC}$, tai $AE \parallel CG$.

2. Kadangi $BA = EH$, $BG = EF$,




9 pav.

$BE = AH$, $BC = AD$, tai $\dfrac{EH}{AH} = \dfrac{EF}{AD}$. Vadinasi, $DF \parallel AE$.

3. Nubrėžkime tieses $KL \parallel DF$, $MP \parallel AD$, $NQ \parallel BG$; čia taškai $M$ ir $N$ yra tiesės $DF$ susikirtimo su stačiakampių kraštinėmis $AB$ ir $BE$ taškai, o tiesė $KL$ eina per tašką $B$. $\Delta DAM = \Delta NEF$, nes $AD = NE$ ir $AM = EF$ kaip atitinkamų lygiagretainių priešingosios kraštinės ir $\angle DAM = \angle NEF = 90^\circ$. Analogiškai įrodoma, kad

$$\Delta BCK = \Delta BGL \text{ ir } \Delta PMB = \Delta BNQ.$$

4. Trapecija *DKPM* lygi trapecijai *NQLF*, nes jų atitinkamos kraštinės lygios, lygūs ir atitinkami kampai.

Gavome, kad stačiakampiai *ABCD* ir *BGFE* padalyti lygiagrečiomis tiesėmis į lygias figūras. Remdamiesi šia teorema, padalykite stačiakampį $5\text{ cm} \times 6\text{ cm}$ į 4 dalis, iš kurių būtų galima sudėti lygiaplotį kvadratą.

**9.** a) $AD = \frac{1}{3}AB$. Nesunku įsitikinti, kad trikampiai *ADC*, *CDE* ir *DEB* yra lygiapločiai.

b) $AD = \frac{1}{2}AB$. Kraštines *AC* ir *BC* padalykime į 3 lygias dalis. $S_{AED} = S_{EDFC} = S_{DFB}$.

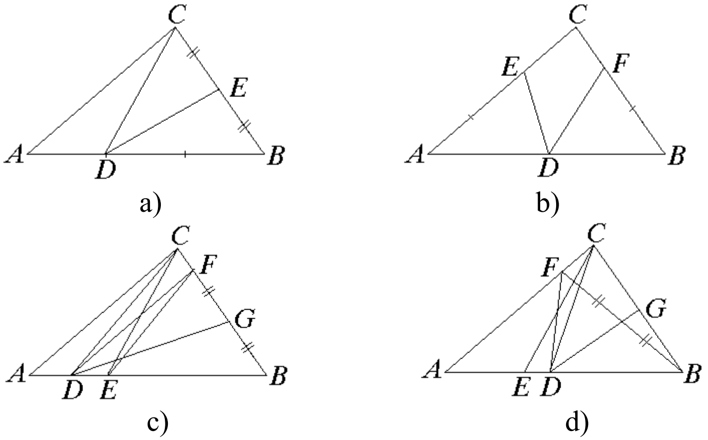
c) $AD < \dfrac{1}{3}AB$. Viršūnę *C* sujungiame atkarpomis su tašku *D* ir su tašku *E* ($AE = \dfrac{1}{3}AB$). Iš taško *D* brėžiame tiesę *EF*, lygiagrečią *CD*. $S_{ADFC} = S_{ACE} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}$ (žr. 7 pavyzdį).

Dabar atkarpą *BF* padaliję pusiau, gauname du trikampius *DFG* ir *DGB*, kurių plotai lygūs $\dfrac{1}{3}S_{ABC}$.

d) $\frac{1}{3}AB < AD < \frac{2}{3}AB$. $AE = \dfrac{1}{3}AB$. Tašką *C* sujungiame su taškais *E* ir *D* atkarpomis. Per tašką *E* brėžiame tiesę $EF \parallel CD$.

$S_{ADF} = S_{ACE} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}$ (žr. 7 pavyzdį).

Keturkampio *DFCB* įstrižainę *FB* padalijame pusiau ir nubrėžiame tiesę *DG*, kuri keturkampio *DFCB* plotą dalija pusiau (žr. 8 pavyzdį). Taigi $S_{AFD} = S_{DFCG} = S_{DGB} = \frac{1}{3} S_{ABC}$.




10 pav.

**10.** Sakykime, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Pagal uždavinio sąlygą $4b = 20 + \frac{c^2}{4} + a^2$ arba $b = \frac{1}{4}\left(20 + \frac{c^2}{4} + a^2\right)$. Pasinaudoję trikampio nelygybe $b \le a + c$, gauname: $\frac{1}{4}\left(20 + \frac{c^2}{4} + a^2\right) \le a + c$ arba $20 + \frac{c^2}{4} + a^2 - 4a - 4c \le 0$. Iš čia $\left(\frac{c}{2} - 4\right)^2 + (a-2)^2 \le 0$. Gautoji nelygybė teisinga tik tada, kai $\frac{c}{2} - 4 = 0$ ir $a - 2 = 0$, t.y., kai $c = 8$ (km), o $a = 2$ (km). Kadangi

$$b = \frac{1}{4}\left(20 + \frac{8^2}{4} + 2^2\right) = 10 \text{ (km)},$$

tai miško plotas $S = 4 \cdot 10 = 40$ (km$^2$). Pastebėsime, kai $b = a + c$, t. y. visos trys gyvenvietės *A*, *B* ir *C* yra vienoje tiesėje.

*Ats.:* 40 km$^2$.

# ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

**1.** Lygties kairioji pusė apibrėžta su $x \geq 8$. Kai $x \in [8; +\infty)$, gauname

$$x+1>0,\ 5-x<0 \text{ ir } \sqrt{x-8}+2>0.$$

Todėl sandauga $(x+1)(5-x)(\sqrt{x-8}+2)$ yra neigiama visoje apibrėžimo srityje. Taigi duotoji lygtis sprendinių neturi.

**2.** Keliame abi lygties puses kubu. Gauname

$$\sqrt[3]{x(2x-3)}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}\right)=3(x-1).$$

Šaknų sumą skliausteliuose pakeičiame dešiniąja duotosios lygties puse, t. y. šaknimi $\sqrt[3]{12(x-1)}$, o lygtį

$$\sqrt[3]{x(2x-3)}\cdot\sqrt[3]{12(x-1)}=3(x-1)$$

– ekvivalenčia jai lygtimi

$$\sqrt[3]{x-1}\left(\sqrt[3]{12x(2x-3)}-3\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)=0.$$

Vadinasi, $x=1$ arba $\sqrt[3]{12x(2x-3)}=3\sqrt[3]{(x-1)^2}$. Spręsdami pastarąją lygtį, abi puses keliame kubu ir gauname kvadratinę lygtį $x^2-6x+9=0$, turinčią (vieną) sprendinį $x=3$. Belieka patikrinti, ar $x=1$ ir $x=3$ tenkina duotąją lygtį.

*Ats.:* 1; 3.

**3.** Pasinaudoję keitiniu $t=\sqrt{x-1}$, gauname lygtį

$$\sqrt{(t-2)^2}+\sqrt{(t-3)^2}=1, \text{ arba } |t-2|+|t-3|=1.$$

Intervaluose $(-\infty; 2)$ ir $(3; +\infty)$ ši lygtis sprendinių neturi, o intervale $[2; 3]$ ji yra tapatybė. Taigi

$$2\leq t\leq 3,\ 2\leq\sqrt{x-1}\leq 3,\ 4\leq x-1\leq 9,\ 5\leq x\leq 10.$$

*Ats.:* $5\leq x\leq 10$.

**4.** Turime iracionaliąją lygtį

$$\sqrt{1+\frac{9}{x}}+4\sqrt{\frac{x}{x+9}}=4\,.$$

Naudodami keitinį

$$t=\sqrt{1+\frac{9}{x}}\,,$$

gauname lygtį

$$t+\frac{4}{t}=4\,,\ \text{arba}\ \ t^2-4t+4=0\,.$$

Ji turi vieną sprendinį $t=2$ . Taigi $\sqrt{1+\frac{9}{x}}=2$ ir $x=3$ .

*Ats.:* $x=3$ .

**5.** $\sqrt{x+a\sqrt{x}+b}+\sqrt{x}=c \Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{x}, \\ \sqrt{t^2+at+b}=c-t \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{x}, \\ t^2+at+b=(c-t)^2, \\ 0\le t\le c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{x}, \\ (a+2c)t=c^2-b, \\ 0\le t\le c. \end{cases}$$

Iš pastarosios sistemos gauname, kad duotoji lygtis turi be galo daug sprendinių tik tada, kai $a+2c=0,$ $c^2-b=0$ , $c>0$ , t. y. $a=-2c$ , $b=c^2$ , $c>0$ .

*Ats.:* $a=-2c$ , $b=c^2$ , $c>0$ .

**6.** $\sqrt{\sqrt{x+1}}+\sqrt{\sqrt{x+1}+3}<\sqrt{2\sqrt{x+1}+2} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{x+1},\ x\ge -1, \\ \sqrt{t}+\sqrt{t+3}<\sqrt{2t+2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{x+1},\ x\ge -1, \\ \left(\sqrt{t}+\sqrt{t+3}\right)^2<\left(\sqrt{2t+2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{x+1},\ x\ge -1, \\ 2t+3+2\sqrt{t(t+3)}<2t+2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{x+1}, \ \ x \geq -1, \\ 1 + 2\sqrt{t(t+3)} < 0. \end{cases}$$

Pastaroji nelygybė sprendinių neturi, todėl ir duotoji nelygybė neturi sprendinių.

**7.** $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} \geq 7 - x^2 - 2x \Leftrightarrow \sqrt{5(x^2 + 2x) + 1} \geq 7 - (x^2 + 2x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2 + 2x, \\ \sqrt{5t+1} \geq 7 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2 + 2x, \\ 7 - t < 0, \\ 5t + 1 \geq 0 \end{cases} \text{arba} \begin{cases} t = x^2 + 2x, \\ 7 - t \geq 0, \\ 5t + 1 \geq (7-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2 + 2x, \\ t > 7 \end{cases} \text{arba} \begin{cases} t = x^2 + 2x, \\ t \leq 7, \\ t^2 - 19t + 48 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + 2x > 7 \quad \text{arba}$$

$3 \leq x^2 + 2x \leq 7 \Leftrightarrow x^2 + 2x \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -3$ arba $x \geq 1$.

*Ats.:* $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

**8.** Duotoji nelygybė ekvivalenti nelygybei

$$\frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2} < \frac{6}{x-1} \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 15x - 25}{(x+1)(x+2)(x-1)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x + \frac{5}{4}\right)(x-5)}{(x+1)(x+2)(x-1)} < 0.$$

Išsprendę pastarąją nelygybę, gauname:

$$x \in (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{5}{4}; -1\right) \cup (1; 5).$$

*Ats.:* $(-\infty; -2) \cup \left(-\frac{5}{4}; -1\right) \cup (1; 5)$.

**9.** $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}<\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x-4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = x-1 \geq -0{,}2, \\ \sqrt{2t+1}+\sqrt{3t+1}<\sqrt{4t+1}+\sqrt{5t+1}. \end{cases}$$

Kai $t>0$, pastaroji nelygybė galioja, nes $\sqrt{2t+1}<\sqrt{4t+1}$ ir $\sqrt{3t+1}<\sqrt{5t+1}$.

Kai $t=0$, ši nelygybė negalioja.

Intervale $[-0{,}2;\,0)$ ji taip pat neturi sprendinių, nes

$$\sqrt{2t+1}>\sqrt{4t+1}\,,\ \ \sqrt{3t+1}>\sqrt{5t+1}$$

ir

$$\sqrt{2t+1}+\sqrt{3t+1}>\sqrt{4t+1}+\sqrt{5t+1}\,.$$

Vadinasi, duotąją nelygybę tenkina tik tos $x$ reikšmės, su kuriomis $x-1>0$, t.y. $x>1$.

*Ats.:* $(1;+\infty)$.

**10.** $\dfrac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\geq 2 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2-x}+2x-3}{x}\geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=2-x\geq 0, \\ \dfrac{\sqrt{t}-2t+1}{2-t}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2-x\geq 0, \\ \dfrac{2t-\sqrt{t}-1}{t-2}\geq 0. \end{cases}$$

Kai $t>1$, tai $t>\sqrt{t}$ ir $2t-\sqrt{t}-1>0$. Todėl

$$t-2>0 \Rightarrow t>2 \Rightarrow x<0\,.$$

Kai $0\leq t\leq 1$, tai $t-2<0$. Todėl

$$2t-\sqrt{t}-1\leq 0\,.$$

Išsprendę šią nelygybę, gauname

$$0\leq t\leq 1 \Rightarrow 0\leq 2-x\leq 1 \Rightarrow 1\leq x\leq 2\,.$$

*Ats.:* $(-\infty;\,0)\cup[1;\,2]$.

# SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

**1.** $3\sin^2 2x + 7\cos 2x = 3 \Leftrightarrow 3(1-\cos^2 2x) + 7\cos 2x = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 2x(7 - 3\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in Z$.

*Ats.:* $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in Z$.

**2.** $\sin 4x \cdot \cos x \cdot \mathrm{tg} 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos x \cdot \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi$, $k \in Z \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in Z$.

*Ats.:* $\dfrac{k\pi}{2}$, $k \in Z$.

**3.** $\dfrac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\cos^2 x - \cos x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0, \\ \cos^2 x - \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x - 1)\left(\sin x - \dfrac{1}{2}\right) = 0, \\ \cos x(\cos x - 1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x - \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$.

*Ats.:* $(-1)^k \dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in Z$.

**4.** $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) = 2\cos^2 x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ 2\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos x = 2\cos^2 x \ \Leftrightarrow\ \cos x - 2\cos^2 x = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \cos x(1-2\cos x)=0 \ \Leftrightarrow\ \cos x = 0 \quad \text{arba} \quad \cos x = \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z, \text{arba}\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ n\in Z.$$

*Ats.:* $\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z;\ \pm\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ n\in Z.$

**5.** $\sin\left(\frac{3\pi}{5}+x\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{x}{2}\right)\ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ \sin\left(\frac{3\pi}{5}+x\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{5}-\frac{x}{2}\right)\right)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \sin\left(\frac{3\pi}{5}+x\right)=2\cos\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{x}{2}\right)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \sin 2\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{x}{2}\right)=2\cos\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{x}{2}\right)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2\cos\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\sin\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{x}{2}\right)-1\right)=0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \cos\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{x}{2}\right)=0 \text{ arba } \sin\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{x}{2}\right)=1\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \cos\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{x}{2}\right)=0\ \Leftrightarrow\ \frac{3\pi}{10}+\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z,\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x=\frac{2\pi}{5}+2k\pi,\ k\in Z, \Leftrightarrow\ x=\frac{2(1+5k)}{5}\pi,\ k\in Z.$$

*Ats.:* $\frac{2(1+5k)}{5}\pi,\ k\in Z.$

**6.** Pakėlę abi nelygybės puses kvadratu, gausime:

$\sin^2 x > \cos^2 x \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x < 0 \Leftrightarrow \cos 2x < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z, \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi,$
$k \in Z.$

*Ats.:* $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z.$

**7.** $4\cos x - \sin 2x > 0 \Leftrightarrow \cos x \cdot (2 - \sin x) > 0 \Leftrightarrow \cos x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z.$

*Ats.:* $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z.$

**8.** $\sqrt{2\sin x} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \sin x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left[2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right],\ k \in Z.$

*Ats.:* $x \in \left[2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right],\ k \in Z.$

**9.** $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x \geq 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\sin x \cos x \geq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \cos 2x + \sin 2x \geq 2 \Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x \geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{4}) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z, \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z.$

*Ats.:* $k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z.$

**10.** $|\sin x|\cos x > \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x \ge 0,\\ \sin x\cos x > \dfrac{1}{4}\end{cases}$ arba $\begin{cases}\sin x < 0,\\ -\sin x\cos x > \dfrac{1}{4}.\end{cases}$

Išspręskime nelygybę $\sin x\cos x > \dfrac{1}{4}$:

$$\sin x\cos x > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,$$

$k \in Z$, $\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{12} + k\pi < x < \dfrac{5\pi}{12} + k\pi$, $k \in Z$.

Tuomet $\begin{cases}\sin x \ge 0,\\ \sin x\cos x > \dfrac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2n\pi \le x \le \pi + 2n\pi, n \in Z,\\ \dfrac{\pi}{12} + k\pi < x < \dfrac{5\pi}{12} + k\pi, k \in Z,\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{12} + 2m\pi < x < \dfrac{5\pi}{12} + 2m\pi$, $m \in Z$.

Analogiškai nagrinėkime antrąją sistemą:

$-\sin x\cos x > \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2x < -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z, \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{7\pi}{12} + k\pi < x < \dfrac{11\pi}{12} + k\pi$, $k \in Z$.

Tuomet

$\begin{cases}\sin x < 0,\\ -\sin x\cos x > \dfrac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\pi + 2m\pi < x < 2\pi + 2m\pi,\ m \in Z,\\ \dfrac{7\pi}{12} + k\pi < x < \dfrac{11\pi}{12} + k\pi,\ k \in Z,\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{7\pi}{12} + (2n+1)\pi < x < \dfrac{11\pi}{12} + (2n+1)\pi$, $n \in Z$.

*Ats.:* $\dfrac{\pi}{12} + 2m\pi < x < \dfrac{5\pi}{12} + 2m\pi$, $m \in Z$;

$\dfrac{7\pi}{12} + (2n+1)\pi < x < \dfrac{11\pi}{12} + (2n+1)\pi$, $n \in Z$.

# AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

**1.** Tokios sekos galėtų būti:

$$1, 3, 7, 13, ..., n^2 - n + 1, ...;$$

$$1, 3, 7, 19, ..., n^3 - 5n^2 + 10n - 5, ...$$

**2.** Rekurentiniame sąryšyje

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + a_{n-3}, \ n = 4, 5, ...$$

paėmę $n = 6$, turėsime

$$a_6 = a_5 + 2a_4 + a_3 \text{ arba } 0 = 1 + 2a_4 + 1,$$

$$a_4 = -1.$$

Turėdami $a_3$, $a_4$, $a_5$, panašiu būdu galime rasti $a_2$:

$$a_5 = a_4 + 2a_3 + a_2 \text{ (imame } n = 5\text{)},$$

$$1 = -1 + 2 + a_2,$$

$$a_2 = 0.$$

Taip pat surandame ir $a_1$:

$$a_4 = a_3 + 2a_2 + a_1 \ (n = 4),$$

$$-1 = 1 + 0 + a_1,$$

$$a_1 = -2.$$

*Ats.:* –2.

**3.** Gretimų narių skirtumas

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+3}{6(n+1)-5} - \frac{2n+3}{6n-5} = \frac{-28}{(6n+1)(6n-5)}$$

yra neigiamas, kai $n = 1, 2, 3, ...$ Taigi visada

$$a_{n+1} - a_n < 0 \text{ arba } a_{n+1} < a_n.$$

Seka $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ yra mažėjanti.

**4.** Seka yra monotoniškai didėjantis tada ir tik tada, kai gretimų narių skirtumai $a_{n+1} - a_n$ yra teigiami. Šie skirtumai mūsų nagrinėjamai sekai yra tokie:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a(n+1)+b}{c(n+1)+d} - \frac{an+b}{cn+d} = \frac{ad-bc}{(cn+c+d)(cn+d)}\,.$$

Kadangi $a, b, c, d$ yra teigiami skaičiai, tai $a_{n+1} - a_n$ bus teigiami, kai $ad > bc$.

*Ats.:* $ad > bc$.

**5.** 1. Dešimtasis sekos narys

$$a_{10} = S_{10} - S_9 = (2\cdot 10^2 + 3\cdot 10) - (2\cdot 9^2 + 3\cdot 9) = 41\,.$$

*Ats.:* 41.

2. Seka yra aritmetinė progresija tada ir tik tada, kai gretimų narių skirtumai yra pastovūs:

$$a_{n+1} - a_n = d\,,\ n = 1, 2, ...$$

Bendrasis sekos narys

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2n^2 + 3n) - (2(n-1)^2 + 3(n-1)) = 4n + 1\,.$$

Todėl

$$a_{n+1} - a_n = (4(n+1)+1) - (4n+1) = 4\,,\ n = 1, 2, ...$$

Taigi seka $a_1, a_2, ..., a_n = 4n+1, ...$ yra aritmetinė progresija.

**6.** 1. Skaičiai $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{x}$ sudaro aritmetinę progresiją, kai gretimų narių skirtumai sutampa:

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt{x} = \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x}\,. \qquad (1)$$

Pažymėkime $\sqrt[12]{x} = t$, tuomet vietoje (1) lygties turėsime lygtį

$$t^4 - t^6 = t^3 - t^4\,.$$

Ją pertvarkę, gauname

$$t^4(1-t^2) = t^3(1-t)\,,\quad t^4(1-t)(1+t) - t^3(1-t) = 0\,,$$

$$t^3(1-t)(t^2+t-1) = 0\,.$$

Jos sprendiniai

$$t_1 = 0\,,\ t_2 = 1\,,\ t_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\,.$$

Atitinkamai

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_{3,4} = \left(\frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}\right)^{12} = 161 \mp 72\sqrt{5}.$$

*Ats.:* 0; 1; $161 \mp 72\sqrt{5}$.

2. Skaičiai $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{x}$ sudaro geometrinę progresiją, kai gretimų narių santykiai sutampa:

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}. \qquad (2)$$

Iš (2) lygybės turime $\frac{1}{\sqrt[6]{x}} = \frac{1}{\sqrt[12]{x}}$. Pakėlę 12-tuoju laipsniu, o po to padauginę iš $x^2$ ($x \neq 0$, nes seka 0, 0, 0 geometrine progresija nelaikoma), gausime $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$, $x = 1$.

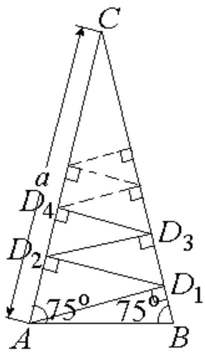
Patikrinę, įsitikiname, kad tai tikrai yra (2) lygties sprendinys.

*Ats.:* 1.

3. Iš a) ir b) dalies išplaukia, kad skaičiai $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{x}$ sudarys kartu ir aritmetinę, ir geometrinę progresiją, kai $x = 1$.

*Ats.:* 1.

**7.** Iš stačiojo trikampio $AD_1C$ išplaukia, kad $AD_1 = \frac{a}{2}$.




Trikampis $AD_1D_2$ taip pat status ir $\angle AD_1D_2 = 30^\circ$. Taigi $D_1D_2 = AD_1 \cos 30^\circ = \frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Samprotaudami lygiai taip pat, gausime, kad

$$D_2D_3 = D_1D_2 \cos 30^\circ = \frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2,$$

$$D_3D_4 = D_2D_3\cos 30^\circ = \frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3,$$

…………………………………… ,

$$D_{n-1}D_n = D_{n-2}D_{n-1}\cos 30^\circ = \frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1},$$

…………………………………………..

Todėl

a) laužtės $AD_1D_2D_3$ ilgis

$$AD_1D_2D_3 = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a(7+2\sqrt{3})}{8};$$

b) laužtės $AD_1D_2 \ldots D_n$ ilgis (naudojame baigtinės geometrinės progresijos narių sumos formulę)

$$AD_1D_2\ldots D_n = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \ldots + \frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} =$$

$$= \frac{\frac{a}{2}\left(1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\left(1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)}{2-\sqrt{3}} = a\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right);$$

c) begalinės laužtės $AD_1D_2\ldots D_n\ldots$ ilgis (naudojame begalinės nykstamosios geometrinės progresijos narių sumos formulę)

$AD_1D_2\ldots D_n\ldots =$

$$= \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \ldots + \frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} + \ldots = \frac{\frac{a}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = a\left(2+\sqrt{3}\right).$$

*Ats.:* a) $\frac{a(7+2\sqrt{3})}{8}$; b) $a\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)$; c) $a\left(2+\sqrt{3}\right)$.

**8.** Pažymėkime pasirinktos geometrinės progresijos pirmąjį narį $a_1 = \frac{1}{2^k}$ (čia $k$ gali būti lygus 1, 2, 3, …), o vardiklį $q = \frac{1}{2^m}$ (čia $m$ taip pat gali būti vienas iš natūraliųjų skaičių $1, 2, 3, \ldots$). Sudarytosios progresijos nariai bus uždavinio sąlygoje duotosios sekos nariai (kai kuriuos iš jų praleidžiant arba, kai $k = m = 1$, imant visus). Gautosios geometrinės progresijos narių suma

$$S = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+m}} + \frac{1}{2^{k+2m}} + \ldots + \frac{1}{2^{k+(n-1)m}} + \ldots =$$

$$= \frac{\frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2^m}} = \frac{2^m}{2^k(2^m - 1)}.$$

1. Prilyginkime gautą sumą $\frac{1}{5}$:

$$\frac{2^m}{2^k(2^m - 1)} = \frac{1}{5}.$$

Tai ekvivalentu lygybei

$$2^k(2^m - 1) = 2^m \cdot 5. \qquad (3)$$

Kadangi nei 5, nei $2^m - 1$ nesidalija iš 2, tai dvejetų rodikliai turi sutapti, t.y. $k = m$. Vietoje (3) lygybės turėsime

$$2^m - 1 = 5, \qquad 2^m = 6.$$

Matome, kad pastaroji lygtis sprendinių, kai $m$ gali įgyti tik natūraliąsias reikšmes, neturi.

2. Sumą $S$ prilyginę $\frac{1}{15}$, turėsime

$$\frac{2^m}{2^k(2^m - 1)} = \frac{1}{15}, \qquad 2^k(2^m - 1) = 2^m \cdot 15.$$

Nesunku gauti, kad šios lygties sprendiniais bus skaičiai $k = m = 4$.

*Ats.:* 1. Negalima;

2. Galima.

**9.** Duotosios sekos pirmieji skirtumai:

$$10, 22, 40, \dots, (n+1)((n+1)^2+3)-n(n^2+3)=3n^2+3n+4, \dots;$$

antrieji skirtumai:

$$12, 18, \dots, 3(n+1)^2+3(n+1)+4-(3n^2+3n+4)=6n+6, \dots;$$

tretieji skirtumai:

$$6, \dots, 6(n+1)+6-(6n+6)=6, \dots$$

Tretieji skirtumai yra pastovūs, todėl turime trečiosios eilės aritmetinę progresiją. Jos pirmųjų $n$ narių suma

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta a_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^2 a_1 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\Delta^3 a_1 = n\cdot 4 + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot 10 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot 12 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cdot 6 = \\ = \frac{n^4+2n^3+7n^2+6n}{4} = \frac{n(n+1)(n^2+n+6)}{4}.$$

*Ats.:* $\dfrac{n(n+1)(n^2+n+6)}{4}$.

**10.** Paskutiniame piramidės sluoksnyje (viršūnėje) yra 1 rutulys, prieš-paskutiniame – 3 rutuliai, dar žemiau – 6 rutuliai, dar žemiau – 10 rutulių ir t.t. Jeigu n-tojo sluoksnio rutulių skaičių pažymėsime $a_n$, tai $n+1$-ojo sluoksnio rutulių skaičius $a_{n+1}=a_n+n+1$. Turime seką, kurios nariai – piramidės sluoksnių rutulių skaičiai:

$$1, 3, 6, 10, \dots, a_n, \dots \qquad (4)$$

Šios sekos pirmieji skirtumai:

$$2, 3, 4, \dots, a_{n+1}-a_n = n+1, \dots;$$

antrieji skirtumai:

$$1, 1, \dots, (n+1)+1-(n+1)=1, \dots$$

Kadangi antrieji skirtumai pastovūs, tai (4) seka yra antrosios eilės aritmetinė progresija. Jos pirmųjų $n$ narių suma

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}\Delta a_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\Delta^2 a_1 =$$

$$= n \cdot 1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot 1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Piramidėje, turinčioje 18 sluoksnių, bus $S_{18} = 1140$ rutulių.

*Ats.:* a) 1140; b) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

## BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

**1.** 0; 1; 4; **2.** $[4; +\infty)$; **3.** 48; **4.** $\frac{5\pi}{3}$; **5.** 10,5.

Baigiamąją užduotį skaitytojui siūlome išspręsti savarankiškai.