LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Jaunajam matematikui

5

2002–2004 metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Danielius leidykla

Vilnius, 2004

UDK 51 (079)
Ia712

Leidinio sudarytojai:
Antanas APYNIS
Eugenijus STANKUS
Juozas ŠINKŪNAS

ISBN-9955-476-16-S

TURINYS

PRATARMĖ

Prieš šešerius metus, 1998 metais, buvo atkurta anksčiau – nuo 1969 m. iki 1989 m. – veikusi Lietuvos jaunųjų matematikų neakivaizdinė mokykla. Mokyklos tikslai: padėti Lietuvos moksleiviams gilinti matematikos žinias; skatinti moksleivius dirbti savarankiškai; padėti jiems susidaryti tvirtus matematikos pagrindus studijoms aukštosiose mokyklose; organizuoti moksleivių matematikos uždavinių sprendimo konkursus; teikti informaciją apie tarptautinius konkursus ir skatinti juose dalyvauti; supažindinti moksleivius su įdomesniais matematikos taikymais.

Dabartinė Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla (LJMM) šiemet išleido penktąją laidą. Ją baigė 357 mokiniai. Iš viso per penkerius metus LJMM baigimo pažymėjimai buvo įteikti 1567 mokiniams. Daugelis iš jų sėkmingai studijuoja arba jau baigė aukštąsias mokyklas.

Siekdami populiarinti matematiką kasmet leidžiame LJMM knygeles „Jaunajam matematikui“. Šioje, jau penktojoje, yra išdėstytos visos aštuonios 2002-2004 LJMM mokslo metų temos (teorinė medžiaga, užduotys ir jų sprendimai): planimetrijos uždaviniai; antrosios eilės kreivės; skaičių dalikliai; šifrai ir skaičiai; tiesinių lygčių sistemos; algebrinės lygtys; brėžimo uždaviniai; sudėtis, atimtis ir daugyba bei dalyba kampu.

Paskutiniuose šios knygelės puslapiuose skaitytojas ras visose ankstesnėse LJMM knygelėse „Jaunajam matematikui“ išdėstytų temų pavadinimus.

Nuoširdžiai dėkojame straipsnių autoriams ir redaktorei Joanai Pribušauskaitei.

Ši knygelė yra didelis ir nuoširdus kolegės Kristinos Lyndienės darbas renkant ir maketuojant tekstą, – nuoširdus ačiū jai.

Antanas Apynis,
Eugenijus Stankus,
Juozas Šinkūnas

Metodinė medžiaga ir užduotys

STOJAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Su kuriomis a reikšmėmis funkcija $f(x) = x^2 - 2ax$ intervale $[0; 3]$ įgyja mažiausią reikšmę, lygią –4?

2. Apskaičiuokite parabolės $y = 3x^2 + 6x$ ir tiesės $y = 6 - x$ susikirtimo taškų koordinates. Kuriuose koordinačių plokštumos ketvirčiuose yra šie taškai?

3. Trikampio kraštinės yra a, b ir c, o kampai prieš jas atitinkamai A, B ir C. Įrodykite, kad

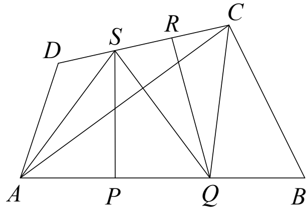
$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc} = \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}.$$

4. Raskite du natūraliuosius triženklius skaičius, vienas iš kurių būtų 5 kartus didesnis už kitą, o jų suma dalytųsi iš 498.

5. Duotas natūralusis skaičius n. Įrodykite, kad skaičių $n(n-1)$ ir $(n+1)^2$ skaitmenų sumos yra skirtingos.

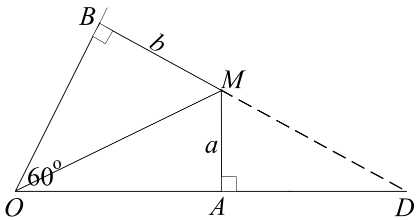
6. Įrodykite, kad $x - 2y \le 200$, kai $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 10$.

7. Taškai P ir Q dalija iškilojo keturkampio $ABCD$ kraštinę AB į tris lygias dalis: $AP = PQ = QB$. Taškai R ir S irgi dalija kraštinę CD į tris lygias dalis: $CR = RS = SD$. Apskaičiuokite keturkampio $PSRQ$ plotą, jeigu keturkampio $ABCD$ plotas lygus 24 cm^2.



1 pav.

8. Duotas 60° didumo kampas. Taškas *M*, esantis kampo viduje, yra nutolęs nuo kampo kraštinių atstumais *a* ir *b*. Raskite atstumą nuo taško *M* iki kampo viršūnės.



2 pav.

9. Trikampės piramidės sienos yra tarpusavyje statmenos, o jų plotai lygus a^2, b^2 ir c^2. Raskite piramidės tūrį.

10. Bėgdamas į viršų judančiu eskalatoriumi Linas suskaičiavo 30 laiptelių, o tuo pačiu greičiu bėgdamas žemyn – 150 laiptelių. Kiek laiptelių suskaičiuotų Linas, jeigu eskalatorius nejudėtų?

I. PLANIMETRIJOS UŽDAVINIAI

Ona Jablonskienė
(Vilniaus Žirmūnų gimnazija)

Šioje temoje panagrinėsime įbrėžtuosius ir apibrėžtuosius trikampius bei keturkampius.

Pirmiausia prisiminkime šias apskritimo liestinių savybes.

Liestinės teorema. Lietimosi taške apskritimo liestinė yra statmena jo spinduliui.

Liestinės teoremos išvada. Apskritimo liestinių, nubrėžtų iš vieno taško, atkarpos iki lietimosi taškų yra lygios.

Sprendžiant uždavinius praverčia žinios apie įbrėžtuosius ir apibrėžtuosius trikampius.

1. Jei S yra trikampio plotas, o p – jo pusperimetris, tai įbrėžtojo apskritimo spindulį r galima apskaičiuoti pagal formulę $r = \frac{S}{p}$.

2. Įbrėžto į trikampį apskritimo centras yra jo pusiaukampinių susi– kirtimo taškas.

3. Apibrėžto apie trikampį apskritimo centras yra kraštinių vidurio statmenų susikirtimo taškas.

4. Apibrėžto apie statųjį trikampį apskritimo centras yra įžambinės vidurio taškas.

5. Jei S – trikampio plotas, a, b, c – jo kraštinių ilgiai, tai apibrėžto apskritimo spindulį R galima apskaičiuoti pagal formulę $R = \frac{abc}{4S}$ arba pagal formulę $R = \frac{a}{2\sin A}$ (kai žinomas kampas A tarp trikampio kraštinių b ir c).

Atkreipkime dėmesį, kad apibrėžto apie lygiašonį trikampį apskritimo centras yra aukštinėje nuleistoje į pagrindą arba jos tęsinyje. Ieškant tokio apskritimo spindulio ar trikampio elementų kartais pravartu pratęsti aukštinę iki susikirtimo su apskritimu ir gautąjį tašką sujungti su pagrindo galu.

Dar paminėsime porą keturkampio savybių.

1. Apibrėžto apie apskritimą keturkampio priešingų kraštinių ilgių sumos yra lygios.

2. Įbrėžto į apskritimą keturkampio priešingų kampų sumos lygios 180°.

Įbrėžtųjų ir apibrėžtųjų trikampių bei keturkampių savybių taikymą planimetrijos uždaviniams spręsti pademonstruosime keliais pavyzdžiais.

Sprendžiant uždavinius patogu naudoti „išlankstymo metodą“, kuris remiasi liestinės teoremos išvada.

1 pavyzdys. Į trikampį įbrėžtas apskritimas. Nubrėžtos trys jo liestinės, kurios nukerta nuo duoto trikampio tris mažus trikampius. Mažųjų trikampių perimetrai sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas yra 4. Raskime šiuos perimetrus, jeigu duotojo trikampio perimetras lygus 42.

Sprendimas. Patogu naudoti „išlankstymo metodą“ (žr. 1 pav.). Remdamiesi liestinės teoremos išvada gauname: $SK = SD$, $EN = NH$, $HR = FR$, $PF = KP$, $KS = SD$, $LQ = LD$. Todėl trikampių LBM, NCR ir PAS perimetrai „išsilanksto“ į trikampio ABC perimetrą, t.y.

$$P_{ABC} = P_{LBM} + P_{NCR} + P_{PAS}.$$

Kadangi mažųjų trikampių perimetrai sudaro progresiją, tai

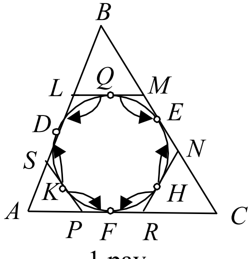
$$P_{NCR} + 4 + P_{NCR} + P_{NCR} - 4 = 42,$$

$$P_{NCR} = 14,$$

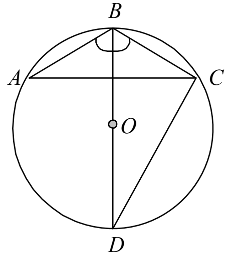
$$P_{LBM} = 14 + 4 = 18,$$

$$P_{PAS} = 14 - 4 = 10.$$

Ats.: $10, 14, 18$.



1 pav.



2 pav.

2 pavyzdys. Lygiašonio trikampio ABC šoninė kraštinė lygi 5, kampas prie viršūnės lygus 120°. Raskime apie trikampį apibrėžto skritulio plotą.

Sprendimas. Brėžiame *BD* ir *DC*. Todėl (žr. 2 pav.) trikampis *BCD* status. Kampas *CBD* lygus 60°. Kampas *BDC* lygus 30°.

$$BD = 2BC\ ,\ BD = 10\ ,\ BO = 5\ .\ S_{sk} = \pi BO^2 = 25\pi\ .$$

Ats.: 25π.

3 pavyzdys. Jeigu keturkampio kraštinės sudaro geometrinę progresiją, tai į tokį keturkampį negalima įbrėžti apskritimo. Įrodykime tai.

Sprendimas. Tegu keturkampio kraštinės lygios x, $x \cdot q$, $x \cdot q^2$, $x \cdot q^3$. Jei į tokį keturkampį būtų galima įbrėžti apskritimą, tai gautume:

$$x + xq^2 = xq + xq^3\ ,$$

$$xq^3 - xq^2 + xq - x = 0\ ,$$

$$(1 + q^2) \cdot (1 - q) = 0\ ,$$

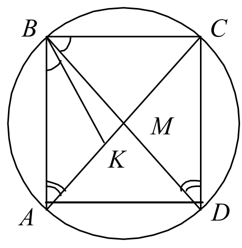
$$q = 1\ .$$

Kai $q = 1$, kraštinės nesudaro geometrinės progresijos. Gavome prieštaravimą sąlygai.

4 pavyzdys. Įbrėžto į apskritimą keturkampio $ABCD$ priešingų kraštinių sandaugų suma lygi jo įstrižainių sandaugai, t.y.

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AC$$

(Ptolomėjaus teorema).



3 pav.

Įrodymas. Atidedame kampą ABK, lygų kampui MBC (žr. 3 pav.). Trikampis ABK panašus į trikampį BCD, nes kampas ABK lygus kampui MBC, kampas BAC lygus kampui BDC (remiasi į lanką BC).

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AK}{CD}\ ,$$

$$AB \cdot CD = BD \cdot AK\ . \qquad (1)$$

Trikampis BCK panašus į trikampį ABD, todėl

$$\frac{BC}{KC} = \frac{BD}{AD},$$

$$AD \cdot BC = BD \cdot KC\ . \qquad (2)$$

Sudedame (1) ir (2) lygybes:

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD \cdot (AK + KC)\ ,$$

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD \cdot AC\ .$$

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Į lygiašonį trikampį, kurio pagrindas 12, įbrėžtas apskritimas. Trys jo liestinės nukerta nuo duotojo trikampio tris mažus trikampius. Jų perimetrų suma lygi 48. Raskite duotojo trikampio šoninę kraštinę.

2. Į trikampį įbrėžtas apskritimas, kurio spindulys *r*. Apskritimo liestinės lygiagrečios su trikampio kraštinėmis. Į susidariusius trikampius įbrėžtų apskritimų spinduliai lygūs 2, 3 ir 4. Raskite *r*.

3. Į trikampį, kurio perimetras lygus 20, įbrėžtas apskritimas. Jo liestinės atkarpa, esanti tarp trikampio kraštinių, lygi 2,4 ir lygiagreti su pagrindu. Raskite trikampio pagrindą.

4. Trikampio, kurio vienas kampas lygus kitų dviejų skirtumui, mažesniosios kraštinės ilgis – vienetas. Kvadratų, nubrėžtų ant kitų dviejų kraštinių, plotų suma 2 kartus didesnė už skritulio, apibrėžto apie trikampį, plotą. Raskite ilgiausią trikampio kraštinę.

5. Į lygiašonį trikampį įbrėžto skritulio centras dalija aukštinę santykiu 12:5. Šio trikampio šoninė kraštinė lygi 60. Raskite pagrindą.

6. Apskritime, apibrėžtame apie lygiakraštį trikampį *ABC*, laisvai pasirinktas taškas *M*. Įrodykite, kad didžiausioji iš atkarpų *MA, MB* ir *MC* lygi kitų dviejų sumai.

7. Į apskritimą įbrėžtas keturkampis, kurio kampai lygūs 120°, 90°, 60°, 90°. Keturkampio plotas lygus $9\sqrt{3}$, o įstrižainės viena kitai statmenos. Raskite apskritimo spindulį.

8. Trikampyje ABC nubrėžta pusiaukampinė AK. Įbrėžto į trikampį ABK ir apibrėžto apie trikampį ABC apskritimų centrai sutampa. Raskite trikampio ABC kampus.

9. Į lygiašonį trikampį įbrėžto apskritimo spindulys r lygus $\frac{3}{2}$, o apie jį apibrėžto apskritimo spindulys R lygus $\frac{25}{8}$. Raskite trikampio kraštines, jei žinoma, kad jos yra sveikieji skaičiai.

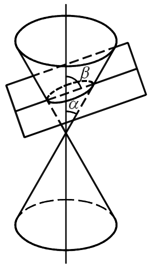
10. Apie apskritimą apibrėžtas keturkampis, kurio dvi gretimos kraštinės lygios 5 ir 12. Jos sudaro statų kampą. Raskite kitas dvi kraštines, jeigu kampas tarp jų lygus 60°.

2. ANTROSIOS EILĖS KREIVĖS

Vidmantas Pekarskas
(Kauno technologijos universitetas)

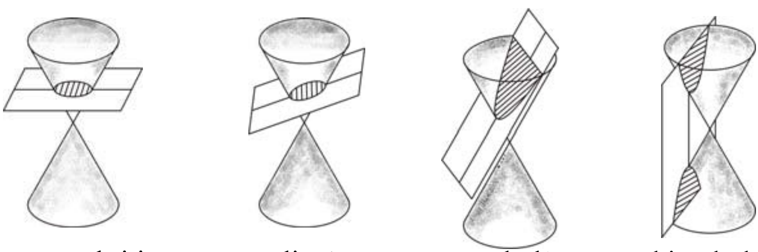
1. KŪGIO PJŪVIAI

Jau senovės Graikijoje buvo žinomi *kūgio pjūviai* – kreivės, kurios gaunamos apskritojo kūgio paviršių perkirtus įvairios padėties plokštumomis. Kampą tarp kūgio ašies ir sudaromosios pažymėkime α, o tarp ašies ir kertančiosios plokštumos – β (1 pav.).



1 pav.

Kai $\beta = 90°$, tai pjūvyje gaunamas *apskritimas* (2 pav., a). Kai $\beta > \alpha$, tai plokštuma kerta visas vienos kūgio šakos sudaromąsias ir pjūvyje gaunama uždara kreivė, kuri vadinama *elipse* (2 pav., b). Kai $\beta = \alpha$, tai kertančioji plokštuma yra lygiagreti kūgio sudaromajai ir kerta tik vieną jo šaką (2 pav., c). Gaunama kreivė vadinama *parabole*. Kai $\beta < \alpha$, tai kertančioji plokštuma kerta abi kūgio šakas ir pjūvyje gaunama kreivė, kuri vadinama *hiperbole* (2 pav., d).



apskritimas a) elipsė b) parabolė c) hiperbolė d)

2 pav.

Jei kertančiąją plokštumą, kuri iš pradžių yra statmena kūgio ašiai, suktume apie fiksuotą kūgio ir kertančiosios plokštumos susikirtimo tašką, tai matytume, jog apskritimas virsta elipse, paskui antroji elipsės viršūnė nutolsta į begalybę ir elipsė virsta parabole, o po to, kai plokštuma perkerta ir antrąją kūgio šaką, pjūvyje gaunama hiperbolė.

2. APSKRITIMAS, ELIPSĖ, HIPERBOLĖ, PARABOLĖ

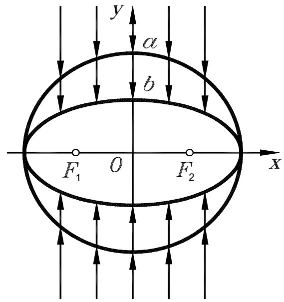
Iš devintos klasės kurso jau žinote, kad *apskritimas*, kurio centras $C(x_0, y_0)$, o spindulys lygus *a*, apibūdinamas lygtimi

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2 .$$

Kai apskritimo centras yra koordinačių pradžia ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$), tai jo lygtis yra tokia:

$$x^2 + y^2 = a^2 . \qquad (1)$$

Kreivė (3 pav.), kuri gaunama iš šio apskritimo sąspūdžiu išilgai ašies *Oy*, nusakomu formulėmis $x' = x$, $y' = \frac{b}{a} y$ $(a > b)$, yra *elipsė*. Įrašę į (1) lygtį $x = x'$ ir $y = \frac{a}{b} y'$, gauname elipsės lygtį



3 pav.

$$x'^2 + \frac{a^2}{b^2} y'^2 = a^2 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

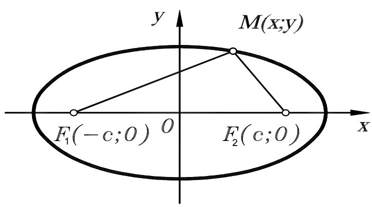
Pažymėję, kaip įprasta, koordinates raidėmis *x* ir *y*, gavome, kad elipsės lygtis yra tokia:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \qquad (2)$$

čia *a* ir *b* vadinamos *didžiąja* ir *mažąja pusašėmis*.

Kadangi $a > b$, pažymėkime $c^2 = a^2 - b^2$. Taškai $F_1(-c; 0)$ ir $F_2(c; 0)$ vadinami elipsės *židiniais*. Jie pasižymi įdomia savybe: atstumų nuo jų iki bet kurio elipsės taško $M(x, y)$ (4 pav.) suma yra pastovi ir lygi 2*a*:

$$F_1M + F_2M = 2a .$$



4 pav.

Įrodydami šią savybę, pasinaudosime atstumo tarp dviejų taškų $M_1(x_1; y_1)$ ir $M_2(x_2; y_2)$ formule:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} .$$

Tuomet

$$F_1M=\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

$$F_2M=\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Kadangi iš (2) lygties turime $y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$, tai

$$F_1M=\sqrt{(x+c)^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=\sqrt{x^2+2cx+c^2+b^2-\frac{x^2b^2}{a^2}}=$$

$$=\sqrt{x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)+2cx+c^2+b^2}=\sqrt{\frac{x^2c^2}{a^2}+2cx+a^2}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}x+a\right)^2}=$$

$$=\left|\frac{c}{a}x+a\right|=\frac{c}{a}x+a,$$

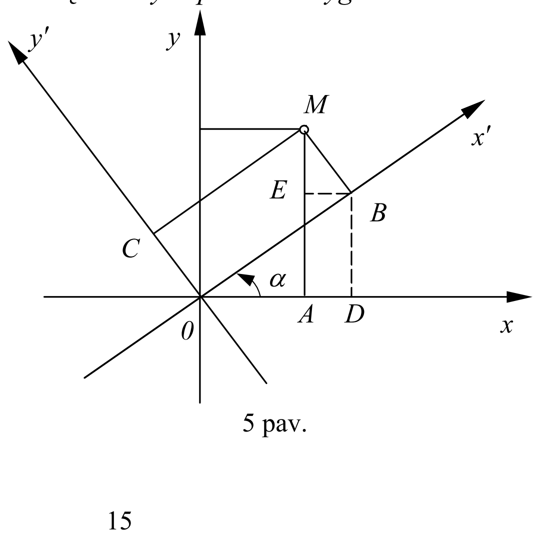
nes $\frac{c}{a}<1$, $|x|\le a$. Analogiškai gautume, kad $F_2M=a-\frac{c}{a}x$.

Todėl

$$F_1M+F_2M=2a. \tag{3}$$

(3) lygybė dažnai vartojama kaip elipsės apibrėžimas, kuris skambėtų taip: *elipse vadinama geometrinė vieta taškų, kurių atstumų nuo dviejų pastovių plokštumos taškų suma yra pastovi ir lygi* 2*a*.

Prieš pradėdami nagrinėti hiperbolę, išnagrinėkime koordinačių sistemos transformaciją, kuri vadinama posūkiu. Tarkime, kad pasukę ašis Ox ir Oy kampu α (5 pav.), gavome naują koordinačių sistemą $x'Oy'$. Sakykime, kad taško M koordinatės senoje sistemoje yra x ir y, o naujoje – x' ir y'.



5 pav.

Taigi
$$x = OA, \quad y = AM,$$
$$x' = OB, \quad y' = OC.$$

Rasime ryšį, kuris susieja koordinates x, y su koordinatėmis x', y'.

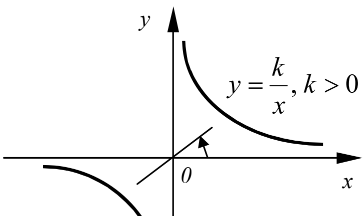
Kadangi $OA = OD - AD = OD - EB$, $\dfrac{OD}{OB} = \cos\alpha$,
$$\frac{EB}{MB} = \frac{EB}{OC} = \cos(90^\circ - \alpha),$$
tai
$$OA = OB\cos\alpha - OC\sin\alpha,$$
$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha.$$

Analogiškai iš sąlygų $AM = ME + AE = ME + BD$,
$$\frac{ME}{MB} = \sin(90^\circ - \alpha), \quad \frac{BD}{OB} = \sin\alpha,$$
gautume $AM = MB\cos\alpha + OB\sin\alpha$, $y = y'\cos\alpha + x'\sin\alpha$.

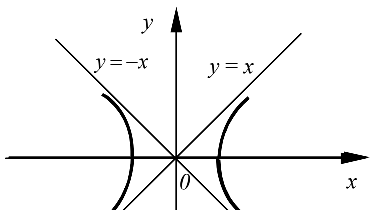
Gavome tokias posūkio formules
$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Nors šias formules išvedėme, kai taškas M yra pirmajame ketvirtyje, jos yra teisingos ir visais kitais atvejais.

Mokykloje *hiperbole* yra vadinamas atvirkštinio proporcingumo funkcijos $y = \dfrac{k}{x}$ grafikas (6 pav.). Hiperbolės šakos neribotai artėja prie viena kitai statmenų tiesių (koordinačių ašių), vadinamų *asimptotėmis.*



6 pav.



7 pav.

Jei koordinačių ašis *Ox* ir *Oy* pasuktume 45° kampu (hiperbolę palikdami vietoje) ta kryptimi, kaip parodyta 6 pav., o paskui visą brėžinį vėl pasuktume 45° kampu į dešinę, tai gautume kreivę, pavaizduotą 7 pav. Įrašę į posūkio formules $\alpha = 45^\circ$, gauname

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x' - y'\right),$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x' + y'\right).$$

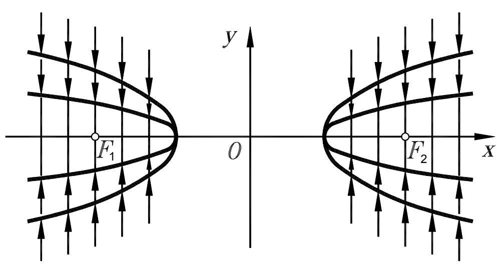
Šias x ir y reikšmes įrašome į hiperbolės lygtį $y = \frac{k}{x}$ ir atlikę veiksmus gauname lygtį $x'^2 - y'^2 = 2k$. Kai $k > 0$, tai $2k > 0$ ir galima pažymėti $2k = a^2$. Pažymėję koordinates, kaip įprasta, raidėmis x ir y, gauname, kad 7 pav. pavaizduotos hiperbolės lygtis yra

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Senosios koordinačių ašys užima ketvirčių pusiaukampinių padėtį. Todėl hiperbolės $x^2 - y^2 = a^2$ asimptočių lygtys yra $y = \pm x$.

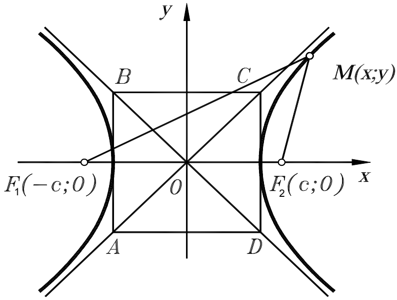
Sąspūdžiu, nusakomu formulėmis $x' = x,\ y' = \frac{b}{a} y$, hiperbolė $x^2 - y^2 = a^2$ transformuojama į hiperbolę (8 pav.), kurios lygtis

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$



8 pav.

o jos asimptotės į tieses $y = \pm \frac{b}{a} x$, kurios yra stačiakampio $ABCD$ pusiaukampinės (9 pav.). Dydis a vadinamas jos *realiąja pusaše*, b – *menamąja pusaše*.

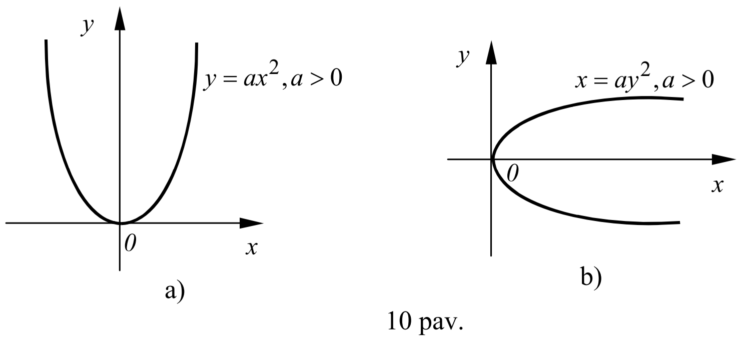


9 pav.

Pažymėkime $c^2 = a^2 + b^2$. Taškai $F_1(-c;0)$ ir $F_2(c;0)$ vadinami hiperbolės *židiniais*. Jie irgi pasižymi įdomia savybe: atstumų nuo jų iki bet kurio hiperbolės taško M skirtumo modulis yra pastovus ir lygus $2a$:

$$\left| F_1M - F_2M \right| = 2a . \tag{4}$$

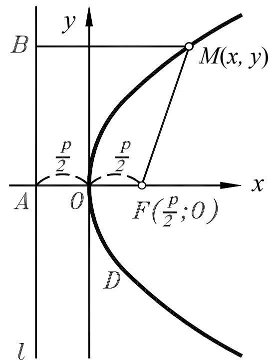
Įrodymas analogiškas kaip ir elipsės atveju. Ši savybė dažnai vartojama kaip hiperbolės apibrėžimas.



10 pav.

Iš devintos klasės kurso irgi žinote, jog funkcija $y = ax^2$ apibrėžia *parabolę* (10 pav., a). Nesunku suvokti, kad lygtis $x = ay^2$ irgi apibrėžia parabolę, kurios simetrijos ašis yra Ox (10 pav., b).

Lygtį $x = ay^2$ parašykime taip: $y^2 = \frac{1}{a}x$. Pažymėkime $\frac{1}{a} = 2p$. Tuomet turėsime įprastą parabolės lygtį $y^2 = 2px$. Taškas $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ (11 pav.) vadinamas parabolės *židiniu*, o tiesė l, kurios lygtis $x = -\frac{p}{2}$, parabolės *direktrise*. Dydis p ($p > 0$) vadinamas parabolės *parametru*. Parabolės taškams būdinga tokia savybė: bet kurio jos taško M atstumas iki židinio yra lygus jo atstumui iki direktrisės: $FM = MB$. Ši lygybė išplaukia iš sąlygų:



11 pav.

$$FM = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|,\ MB = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

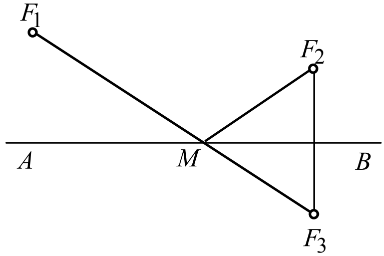
Kai parabolės židinys yra taškas $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$, o direktrisė $y = -\frac{p}{2}$, tai parabolės lygtis yra $x^2 = 2py$.

Kadangi kintamieji x ir y (abu ar vienas jų) apskritimo, elipsės, hiperbolės ir parabolės lygtyse yra pakelti antruoju laipsniu, tai šios kreivės ir vadinamos *antrosios eilės kreivėmis*.

3. ELIPSĖS, HIPERBOLĖS IR PARABOLĖS OPTINĖS SAVYBĖS

Panagrinėsime labai įdomias antrosios eilės kreivių, ypač parabolės, optines savybes, kurios jau buvo žinomos senovės geometrams. Manoma, kad garsiausias senovės matematikas Archimedas nepasiekusioje mūsų knygoje „Katoptrika" ir nagrinėjo veidrodžių savybes, kurios būtent ir siejasi su optinėmis antrosios eilės kreivių savybėmis.

Pirmiausia išspręsime tokį uždavinį. Sakykime, kad vienoje tiesės *AB* pusėje pažymėti du taškai F_1 ir F_2 (12 pav.).



12 pav.

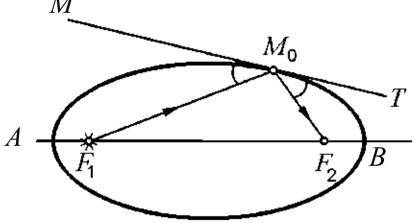
Reikia rasti tokį tiesės *AB* tašką, kad atstumų nuo jo iki taškų F_1 ir F_2 suma būtų mažiausia. Uždavinį išspręsime, pažymėję tašką F_3, simetrišką taškui F_2 tiesės *AB* atžvilgiu ir suradę tiesių F_1F_3 ir *AB* susikirtimo tašką *M.* Iš tikrųjų taškas *M* yra ieškomasis, nes $F_2M = F_3M$ ir

$$F_1M + F_2M = F_1M + F_3M = F_1F_3,$$

o F_1F_3 ir yra trumpiausias atstumas tarp F_1 ir F_3.

Iš šio uždavinio gausime svarbią išvadą. Kadangi *AB* yra trikampio F_2MF_3 simetrijos ašis, tai kampai F_2MB ir BMF_3 yra lygūs. Kadangi kampai F_1MA ir BMF_3 yra kryžminiai, todėl jie irgi yra lygūs. Vadinasi, lygūs yra kampai F_1MA ir F_2MB. Todėl taškas *M* yra tas taškas, kuriame spindulio, išeinančio iš taško F_1 ir atsispindėjusio nuo tiesės *AB,* kritimo kampas lygus atspindžio kampui.

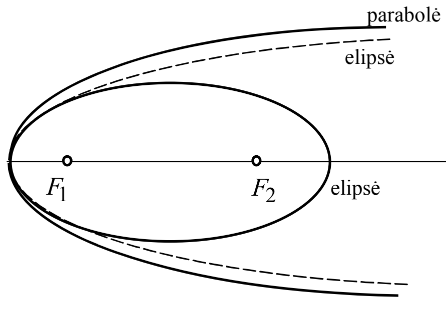
Dabar imkime elipsinį veidrodį ir jo židinyje F_1 patalpinkime šviesos šaltinį. Per bet kurį elipsės tašką M_0 nubrėžkime liestinę M_0T (13 pav.). Atstumų nuo bet kurio kito tiesės M_0T taško, pavyzdžiui, *M*, iki židinių F_1 ir F_2 suma $F_1M + F_2M$ būtų didesnė, negu ta pati suma imant tašką M_0 (nes taškas M_0 yra elipsės taškas, o taškas *M* yra elipsės išorėje). Taigi



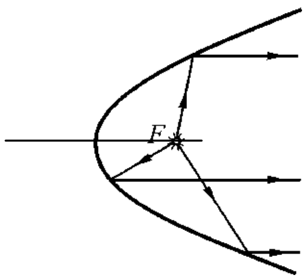
13 pav.

taškas M_0 turi anksčiau minėtą minimalumo savybę. Todėl kampai F_1M_0M ir TM_0F_2 yra lygūs. O tai reiškia, kad spindulys, išėjęs iš taško F_1 ir atspindėjęs nuo elipsės liestinės taške M_0 (taigi nuo pačios elipsės), praeis per tašką F_2. Tai ir yra optinė elipsės savybė.

Dabar tarkime, kad taškas F_1 kaip ir taškas A nejuda, o taškas F_2 tiese F_1F_2 tolsta į begalybę. Tuomet elipsė virsta parabole (14 pav.). Tačiau, kaip ir prieš tai, spinduliai, išėję iš taško F_1, susirenka taške F_2, „nutolusiame į begalybę“. Taigi spinduliai, ateinantys iš F_2, virsta spinduliais, „ateinančiais iš begalybės“, todėl jie yra lygiagretūs parabolės simetrijos ašiai. Atsispindėję nuo parabolės, jie susirenka židinyje. Išsiaiškinome tokią optinę parabolės savybę. Sakykime, kad parabolės židinyje patalpintas taškinis šviesos šaltinis. Tuomet visi spinduliai, išėję iš židinio F ir atsispindėję nuo veidrodinio parabolės paviršiaus, bus lygiagretūs parabolės simetrijos ašiai (15 pav.).



14 pav.



15 pav.

Gautoji optinė parabolės savybė taikoma technikoje konstruojant teleskopus, parabolines antenas, automobilių žibintus, lazerius ir kt.

Dabar galime paaiškinti, kodėl taškas F buvo pavadintas židiniu. Saulės spinduliai, atėję iš labai toli, parabolinį veidrodį pasieks lygiagrečiuoju pluoštu, o atsispindėję nuo jo paviršiaus, susirinks viename taške, kuriame temperatūra pasidarys labai aukšta, todėl visai natūralu tokį tašką vadinti židiniu. Rusų ir anglų kalboje židiniai vadinamai fokusais, mat lotyniškai *focus* ir yra židinys. Vokiečiai židinį vadina Brennpunkt, kurio pažodinis vertimas yra „degantis taškas”.

16 pav.

Kaip panaudota parabolinio veidrodžio savybė statyboje, iliustruoja 16 pav. Prancūzijoje Pirėnų kalnų kurorte Font Romeu yra pastatytas viešbutis, kurio viena siena yra veidrodinė, ir atsispindėję nuo jos spinduliai surenkami saulės spindulių rinktuve, pastatytame židinyje.

ANTROJI UŽDUOTIS

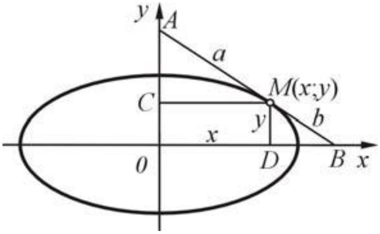
1. Koordinačių sistemoje xOy pažymėti taškai $A\,(-6;\,0)$ ir $B\,(2;\,0)$. Raskite taškų, iš kurių atkarpos OA ir OB matomos vienodu kampu, aibę.

2. Elipsės lygtis $16x^2 + 25y^2 = 400$. Raskite jos pusašes, židinių koordinates ir nubraižykite elipsę.

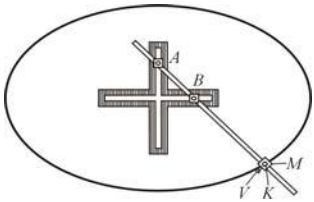
3. Elipsė gaunama iš apskritimo $x^2 + y^2 = a^2$ sąspūdžiu išilgai ašies Oy, nusakomu formulėmis $x' = x,\ y' = \frac{b}{a}y$. Raskite sąspūdžio koeficientą $k = \frac{b}{a}$, kad gautoji elipsė pasižymėtų tokia savybe: atkarpa, jungianti elipsės židinius, matoma iš mažosios ašies galo stačiuoju kampu.

4. Pastoviojo ilgio atkarpa AB (17 pav.) juda taip, kad taškas A slenka ašimi Oy, o taškas B – ašimi Ox. Įrodykite, kad tuomet bet kuris atkarpos AB arba jos tęsinio taškas M nubrėžia elipsę.

Pastaba. Šiame uždavinyje suformuluotas teiginys panaudoja–mas elipsiniame skriestuve (18 pav.). Jį sudaro kryžmė, kurioje padarytos dvi statmenos viena kitai įpjovos. Į jas įstatyti slankikliai A ir B, prie kurių šarnyrais pritvirtinta liniuotė AB. Liniuote slankioja mova M, kurią sraigtas V gali užfiksuoti bet kurioje liniuotės vietoje. Movoje M yra kiaurymė K pieštukui. Judant liniuotei, įstatyto į movą pieštuko galas brėžia elipsę. Kai taškas M juda elipse, tai judant taškui B horizontale, taškas A judės vertikale. Šis principas panaudojamas mechanikoje, norint tiesiaeigį judesį vertikaliąja kryptimi pakeisti tiesiaeigiu judesiu horizontaliąja kryptimi.



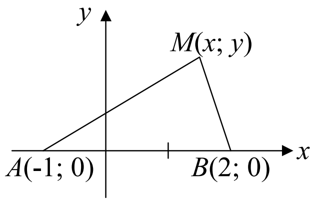
17 pav.



18 pav.

5. Parašykite hiperbolės lygtį, kai jos asimptočių lygtys yra $y = \pm\frac{1}{2}x$, o atstumas tarp židinių lygus 10.

6. Brėžinyje (19 pav.) pavaizduoti taškai $A(-1;0)$ ir $B(2;0)$. Taškas $M(x;y)$ juda taip, kad $\angle MBA = 2\angle MAB$. Suraskite taško M judėjimo trajektoriją.



19 pav.

Nurodymas. Pažymėkite $\angle MAB = \alpha$ ir pasinaudokite formule $\mathrm{tg}2\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$.

7. Apskritimas, kurio centras yra koordinačių pradžios taškas, eina per hiperbolės $x^2 - y^2 = a^2$ židinius. Raskite apskritimo ir hiperbolės asimptočių susikirtimo taškus.

8. Parabolės formos simetriškos vartų arkos aukštis yra 4 m, plotis palei žemę – 3 m. Ar gali pro šiuos vartus įvažiuoti furgonas, kurio ir aukštis, ir plotis yra 2 metrai?

9. Nubraižykite elipsę $x^2 + 4y^2 = 4$ ir parabolę, kurios židinys yra taškas $F(0;\ 1{,}5)$, o direktrisė $x = -1{,}5$. Apskaičiuokite trapecijos, kurios vienas pagrindas yra elipsės didžioji ašis, o kitas – bendra elipsės ir parabolės styga, plotą.

10. Iš parabolės $y^2 = 12x$ židinio paleistas šviesos spindulys, kuris su Ox ašimi sudaro smailų kampą α. Pasiekęs parabolę jis atsispindi. Parašykite tiesės, kurioje yra atsispindėjęs spindulys, lygtį, jei $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$.

3. SKAIČIŲ DALIKLIAI

Gediminas Stepanauskas
(Vilniaus universitetas)

1. Pirminiai ir sudėtiniai skaičiai. Skaičių teorija yra mokslas apie skaičius, jų savybes ir tarpusavio ryšius. Daugiausia dėmesio skaičių teorijoje skiriama natūraliesiems skaičiams, nes jie yra pamatas kitų skaičių aibių: racionaliųjų ir iracionaliųjų, algebrinių ir transcendentinių, realiųjų ir kompleksinių… Svarbią vietą užima pirminiai skaičiai. Priminsime jų apibrėžimą. Natūralieji skaičiai, kurie dalijasi tik iš savęs ir iš vieneto vadinami *pirminiais* (skaičius 1 pirminiu nelaikomas). Šie du dalikliai – pats skaičius ir vienetas, vadinami *trivialiaisiais dalikliais*. Natūralieji skaičiai, kurie turi daugiau kaip du daliklius (ne tik trivialiuosius) – vadinami *sudėtiniais*.

Taigi natūralieji skaičiai skirstomi į tris kategorijas:

1) skaičius 1;

2) pirminiai skaičiai: 2, 3, 5, 7, 11, 13, … ;

3) sudėtiniai skaičiai: 4, 6, 8, 9, 10, 12, … .

Pirminių skaičių reikšmė glūdi pagrindinėje aritmetikos teoremoje:

Kiekvienas sudėtinis skaičius vieninteliu būdu (neatsižvelgiant į daugiklių tvarką) užrašomas pirminių skaičių sandauga.

Štai skaičius 1200 išsiskaido į pirminių skaičių sandaugą tokiu būdu:

$$1200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 . \qquad (1)$$

Apskritai natūralųjį skaičių n išskaidžius daugikliais, vienodus pirminius daugiklius galima pakeisti to pirminio skaičiaus laipsniu ir rašyti

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r} ;$$

čia $p_1, p_2, ..., p_r$ – skirtingi skaičiaus n pirminiai daugikliai, be to, daugiklis p_1 įeina α_1 kartų, p_2 įeina α_2 kartų ir t. t. Toks n skaidinys vadinamas *kanoniniu*.

2. Skaičių dalikliai. Kai žinome skaičiaus n išraišką pirminių skaičių laipsniais, iš karto galime atsakyti į kai kuriuos klausimus. Pavyzdžiui, tarkime, kad d yra vienas iš skaičiaus 1200 daliklių. Tuomet $1200 = d \cdot d_1$.

Iš pateiktojo (1) skaidinio aišku, kad skaičiaus 1200 pirminiais dalikliais gali būti tik skaičiai 2, 3, 5. Be to, dalikliais gali būti 2 su laipsnio rodikliu ne didesniu už 4, 3 – su laipsnio rodikliu nedidesniu už 1, o 5 – su laipsnio rodikliu nedidesniu už 2.

Taigi skaičiaus 1200 galimi dalikliai $d = 2^{\beta_1}3^{\beta_2}5^{\beta_3}$; čia laipsnio rodikliai gali įgyti tokias reikšmes:

$$\beta_1 = 0, 1, 2, 3, 4;\ \ \beta_2 = 0, 1;\ \ \beta_3 = 0, 1, 2.$$

Pirmai reikšmei β_1 parinkti yra 5 galimi būdai, antrai β_2 – 2 būdai, o β_3 – 3 būdai. Panaudoję kombinatorinę daugybos taisyklę, turėsime, kad skaičius 1200 iš viso turi $5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$ skirtingų daliklių.

Apskritai natūraliojo skaičiaus *n*, kurio skaidinys pirminių skaičių laipsniais $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}$, skirtingų daliklių skaičius išreiškiamas formule

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_r + 1). \qquad (2)$$

Funkcija $d(n)$ yra vadinama skaičiaus *n daliklių skaičiumi*. Jos savybės gana svarbios skaičių teorijoje.

1 pavyzdys. Išnagrinėkime skaičius, kurie turi tik 3 daliklius.

Sprendimas. Remiantis (2) formule,

$$3 = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_r + 1).$$

Kadangi 3 yra pirminis skaičius, tai dešinėje pusėje gali būti tik vienas daugiklis, nelygus 1. Vadinasi, $r = 1$, o $\alpha_1 = 2$. Todėl $n = p_1^2$. Taigi tik pirminių skaičių kvadratai turi po 3 daliklius. Mažiausias skaičius, turintis 3 daliklius, yra $n = 2^2 = 4$.

3. Didžiausias bendrasis daliklis. Dviejų natūraliųjų skaičių *a* ir *b* *bendruoju dalikliu* vadinamas natūralusis skaičius *d*, kuris yra ir skaičiaus *a* daliklis, ir skaičiaus *b* daliklis, t.y. $a = d \cdot a_1$, $b = d \cdot b_1$. Pats didžiausias iš bendrų daliklių yra gana svarbus ir vadinamas *didžiausiu bendruoju* skaičių *a* ir *b daliklių* bei žymimas taip: *DBD*(*a*, *b*) arba tiesiog (*a*, *b*). Skaičiai *a* ir *b* vadinami *tarpusavyje pirminiais skaičiais*, jei jų didžiausias bendrasis daliklis yra lygus vienetui, t.y. $(a, b) = 1$.

Nesunku būtų įrodyti, kad *kiekvienas bendrasis skaičių a ir b daliklis d' yra jų didžiausio bendrojo daliklio $d = (a, b)$ daliklis*.

Žinant skaičių a ir b kanoninį skaidinį yra lengva surasti jų didžiausią bendrąjį daliklį. Tereikia paimti pirminių skaičių, kurie įeina ir į a, ir į b kanoninę išraišką, laipsnius su mažesniaisiais rodikliais.

2 pavyzdys. Raskime skaičių 20580 ir 3920 didžiausią bendrąjį daliklį.

Sprendimas. Išskaidykime skaičius 20580 ir 3920 pirminių skaičių laipsniais. Kadangi

$$\begin{array}{r|l} 20580 & 2 \\ 10290 & 2 \\ 5145 & 3 \\ 1715 & 5 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 3920 & 2 \\ 1960 & 2 \\ 980 & 2 \\ 490 & 2 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

tai $20580 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^3$, $3920 = 2^4 \cdot 5 \cdot 7^2$. Todėl

$$(a, b) = 2^{\min\{2, 4\}} 5^{\min\{1, 1\}} 7^{\min\{3, 2\}} = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 = 980 .$$

Ats.: 980.

4. Dalyba su liekana. Euklido algoritmas. Jeigu skaičiai gana dideli, surasti jų kanoninį skaidinį yra nelengva. Skaičių didžiausiam bendrajam dalikliui ieškoti yra ir kitokių būdų. Vieną jų, paremtą Euklido algoritmu, ir panagrinėsime.

1 teorema (dalybos su liekana teorema.) *Bet kuriems natūraliesiems skaičiams a ir b ($a \ge b$) visada galima surasti natūralųjį skaičių q ir neneigiamą sveiką skaičių r $(r < b)$, kad*

$$a = qb + r . \tag{3}$$

Įrodymas. Paimkime skaičiaus b kartotinius b, $2b$, $3b$, … . Galimi du atvejai. Arba skaičius a sutampa su vienu iš šių kartotinių, arba yra tarp kokių nors gretimų kartotinių.

Pirmuoju atveju $a = qb$, ir, aišku, reikia paimti $r = 0$.

Antruoju atveju tarkime, kad a yra tarp kartotinių qb ir $(q+1)b$, t. y. $qb < a < (q+1)b$.
Tuomet $r = a - qb < (q+1)b - qb = b$, o $a = qb + r$. Teorema įrodyta.

Padalinę abi (3) lygybės puses iš b, gausime

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}.$$

Todėl q vadinamas dalybos (skaičiaus a iš skaičiaus b) *dalmeniu*, o r – *liekana*.

2 teorema. *Jeigu* $a = qb + r$, *tai skaičių a ir b didžiausias bendrasis daliklis yra lygus skaičių b ir r didžiausiam bendrajam dalikliui, t. y.*

$$(a, b) = (b, r). \qquad (4)$$

Įrodymas. Pažymėkime $d_0 = (a, b)$, $d_1 = (b, r)$. Reikia įrodyti, kad $d_0 = d_1$.

d_0 yra skaičių a ir b daliklis, todėl

$$r = a - qb = d_0 a_0 - q d_0 b_0 = d_0(a_0 - q b_0).$$

Taigi r dalijasi iš d_0. Kadangi d_0 yra ir skaičiaus r, ir skaičiaus b daliklis, tai jis turi būti ir jų didžiausio bendrojo daliklio $d_1 = (b, r)$ daliklis. Iš čia

$$d_0 \le d_1. \qquad (5)$$

Kita vertus, kadangi

$$a = qb + r = q d_1 b_1 + d_1 r_1 = d_1(q b_1 + r_1),$$

tai d_1 yra skaičiaus a daliklis. Taigi d_1 dalija ir a, ir b. Todėl d_1 turi dalyti ir d_0, ir, aišku, kad

$$d_1 \le d_0. \qquad (6)$$

Iš (5) ir (6) nelygybių išplaukia, kad $d_0 = d_1$.

Teorema įrodyta.

Pastaba. Pirmoje teoremoje reikalaujama, kad r tenkintų nelygybes $0 \le r < b$. Antroje teoremoje r gali būti bet koks sveikasis skaičius. Tai patogu sprendžiant kai kuriuos uždavinius.

Remiantis (4) lygybe, nesunkiai galima rasti dviejų skaičių didžiausią bendrąjį daliklį. Ieškant skaičių a ir b didžiausio bendrojo daliklio, pakanka rasti skaičių b ir r didžiausią bendrąjį daliklį. Pastarasis uždavinys yra lengvesnis, nes skaičiai b ir r yra mažesni už skaičius a ir b. Skaičių b ir r didžiausio bendrojo daliklio galime ieškoti naudodami tą patį metodą. Dalijame skaičių b iš skaičiaus r:

$$b = q_1 r + r_1,\ 0 \le r_1 < r.$$

Remdamiesi (4) lygybe, turime $(a, b) = (b, r) = (r, r_1)$. Toliau tęsdami procesą lygiai tą patį darome su skaičiais r, r_1 ir t. t. Gausime $(a, b) = (b, r) = (r, r_1) = (r_1, r_2) = \ldots$. Kadangi liekanos vis mažėja: $r > r_1 > r_2 > \ldots$, tai liekanų seka pasibaigs. Taip bus, kai gausime $r_{k+1} = 0$. Tada $r_{k-1} = q_{k+1} r_k + 0$, t. y. skaičius r_k yra skaičiaus r_{k-1} daliklis. Vadinasi, $(r_{k-1}, r_k) = r_k$. Todėl
$(a, b) = r_k$.

Aprašytasis didžiausio bendrojo daliklio radimo būdas vadinamas *Euklido algoritmu*. Euklido algoritmas buvo žinomas labai seniai ir pirmą kartą aprašytas Euklido knygoje „Pradmenys“.

Taigi *skaičių a ir b didžiausias bendrasis daliklis yra lygus paskutinei nelygiai nuliui liekanai, gautai taikant Euklido algoritmą skaičiams a ir b.*

3 pavyzdys. Naudodami Euklido algoritmą raskime skaičių 779625 ir 196196 didžiausią bendrąjį daliklį.

Sprendimas. Kadangi

$$\begin{aligned} 779625 &= 3 \cdot 196196 + 191037, \\ 196196 &= 1 \cdot 191037 + 5159, \\ 191037 &= 37 \cdot 5159 + 154, \\ 5159 &= 33 \cdot 154 + 77, \\ 154 &= 2 \cdot 77, \end{aligned}$$

tai paskutinė nelygi nuliui Euklido algoritmo liekana yra lygi 77. Taigi (779625, 196196) =77.

Ats.: 77.

4 pavyzdys. Raskime skaičių $2k$+1 ir $9k$+4 didžiausią bendrąjį daliklį priklausomai nuo k, kai k yra natūralusis skaičius.

Sprendimas. Naudosime Euklido algoritmą. Kadangi

$$9k + 4 = 4 \cdot (2k + 1) + k,\ 2k + 1 = 2 \cdot k + 1,$$

tai iš (4) formulės turime, kad

$$(9k+4,\ 2k+1)=(2k+1,\ k)=(k,\ 1)=1.$$

Taigi skaičių $2k+1$ ir $9k+4$ didžiausias bendrasis daliklis yra lygus 1. Jie yra tarpusavyje pirminiai.

Ats.: 1.

5. Mažiausias bendrasis kartotinis. Skaičius m, kuris dalijasi iš skaičių a ir b, vadinamas šių skaičių *bendruoju kartotiniu*. Pats mažiausias iš skaičių a ir b bendrų kartotinių vadinamas *mažiausiu bendruoju kartotiniu* ir žymimas

$$MBK[a,\ b] \text{ arba tiesiog } [a,\ b].$$

Kaip ir didžiausio bendrojo daliklio atveju, iš skaičių a ir b kanoninių skaidinių lengva surasti jų mažiausią bendrąjį kartotinį. Tereikia paimti visų pirminių skaičių, kurie įeina į skaičių a ir b kanoninius skaidinius, laipsnius su didesniaisiais rodikliais. Taip pat teisinga tokia formulė

$$a\cdot b=(a,\ b)\cdot[a,\ b], \qquad (7)$$

susiejanti mažiausią bendrąjį kartotinį ir didžiausią bendrąjį daliklį.

5 pavyzdys. Raskime skaičių 20580 ir 3920 mažiausią bendrąjį kartotinį.

Sprendimas. 1 būdas. Skaičių 20580 ir 3920 kanoninės išraiškos (žr. 2 pavyzdį) yra tokios:

$$20580=2^2\cdot3\cdot5\cdot7^3,\quad 3920=2^4\cdot5\cdot7^2.$$

Todėl

$$[a,\ b]=2^{\max\{2,\ 4\}}3^{\max\{1,\ 0\}}5^{\max\{1,\ 1\}}7^{\max\{3,\ 2\}}=$$

$$=2^4\cdot3\cdot5\cdot7^3=82320.$$

2 būdas. Žinodami, kad (20580, 3920) = 980 (žr. 2 pavyzdį), iš (7) formulės turime

$$[20580,\ 3920]=\frac{20580\cdot3920}{(20580,\ 3920)}=\frac{80673600}{980}=82320.$$

Ats.: 82320.

6 pavyzdys. Raskime skaičių $2k-1$ ir $9k+4$ mažiausią bendrąjį kartotinį priklausomai nuo k, kai k yra natūralusis skaičius.

Sprendimas. Pirmiausia surasime skaičių $2k-1$ ir $9k+4$ didžiausią bendrąjį daliklį. Naudosimės Euklido algoritmu ir (4) formule. Kadangi

$$9k+4=4\cdot(2k-1)+(k+8),\ 2k-1=2\cdot(k+8)-17,$$

tai $(9k+4,\ 2k–1) = (2k–1,\ k+8) = (k+8,\ 17)$. Skaičių $k+8$ ir 17 didžiausias bendrasis daliklis yra 17, kai $k+8$ yra 17-os kartotinis, t.y. $k+8 = 17l$ arba $k = 17l–8$. Kai $k+8$ nėra 17-os kartotinis, tai skaičių $k+8$ ir 17 didžiausias bendrasis daliklis yra 1.

Mažiausiam bendrajam kartotiniui surasti pasinaudojame (7) formule:

$$[9k+4,\ 2k-1] = \frac{(9k+4)(2k-1)}{(9k+4,\ 2k-1)} = \begin{cases} \dfrac{18k^2-k-4}{17}, \ \text{kai} \ k = 17l-8, \\ 18k^2-k-4, \ \text{kai} \ k \neq 17l-8; \end{cases}$$

čia l – natūralusis skaičius.

Ats.: $\dfrac{18k^2-k-4}{17}$, kai $k = 17l-8$, ir $18k^2-k-4$, kai $k \neq 17l-8$.

Skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bendrieji dalikliai ir bendrieji kartotiniai, o taip pat didžiausias bendrasis daliklis ir mažiausias bendrasis kartotinis apibrėžiami analogiškai kaip ir dviejų skaičių.

Skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bendruoju dalikliu vadinamas skaičius, iš kurio dalijasi visi skaičiai $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pats didžiausias iš tokių skaičių vadinamas *didžiausiu bendruoju dalikliu* ir žymimas

$$DBD(a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ arba } (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bendruoju kartotiniu vadinamas skaičius, kuris dalijasi iš visų skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pats mažiausias iš tokių skaičių vadinamas *mažiausiu bendruoju kartotiniu* ir žymimas

$$MBK[a_1, a_2, \ldots, a_n] \text{ arba } [a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Didžiausiam bendrajam dalikliui ir mažiausiam bendrajam kartoti– niui surasti padeda formulės:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}),\ a_n), \tag{8}$$

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = [[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}],\ a_n]. \tag{9}$$

7 pavyzdys. Raskime skaičių 34125, 377300 ir 88935 didžiausią bendrąjį daliklį ir mažiausią bendrąjį kartotinį.

Sprendimas. Iš (8) išplaukia, kad

$$(34125,\ 377300,\ 88935)=((34125,\ 377300),\ 88935).$$

Todėl pirmiausia surasime skaičių 34125 ir 377300 didžiausią bendrąjį daliklį. Pasinaudoję Euklido algoritmu, turime

$$377300 = 11 \cdot 34125 + 1925,$$
$$34125 = 17 \cdot 1925 + 1400,$$
$$1925 = 1 \cdot 1400 + 525,$$
$$1400 = 2 \cdot 525 + 350,$$
$$525 = 1 \cdot 350 + 175,$$
$$350 = 2 \cdot 175.$$

Taigi (34125, 377300) = 175. Toliau ieškome skaičių 175 ir 88935 didžiausio bendrojo daliklio:

$$88935 = 58 \cdot 175 + 35, \;\; 175 = 5 \cdot 35 .$$

Todėl (34125, 377300, 88935) = 35.
Mažiausiam bendrajam kartotiniui surasti naudosimės (9) formule. Iš jos

[34125, 377300, 88935] = [[34125, 377300], 88935].

Pasinaudoję (4) lygybe, turėsime, kad

$$[34125, 377300] = \frac{34125 \cdot 377300}{(34125, 377300)} = \frac{12875362500}{175} = 73573500.$$

Skaičių 73573500 ir 88935 didžiausiam bendrajam dalikliui surasti vėl naudojame Euklido algoritmą:

$$73573500 = 827 \cdot 88935 + 24255,$$
$$88935 = 3 \cdot 24255 + 16170,$$
$$24255 = 1 \cdot 16170 + 8085,$$
$$16170 = 2 \cdot 8085.$$

Taigi (73573500, 88935) = 8085. Todėl

$$[73573500, 88935] = \frac{73573500 \cdot 88935}{8085} = 809308500.$$

Skaičių 34125, 377300 ir 88935 mažiausias bendrasis kartotinis yra lygus 809308500.

Ats.: (34125, 377300, 88935) = 35,
[34125, 377300, 88935] = 809308500.

6. Aritmetinės funkcijos. Funkcijos, kurių apibrėžimo sritis yra natūraliųjų skaičių aibė, yra vadinamos *aritmetinėmis funkcijomis*. Tokių funkcijų savybės yra ne tik įdomios, bet ir naudojamos kitiems svarbiems skaičių teorijos uždaviniams spręsti. Su viena aritmetine funkcija mes jau susidūrėme. Tai natūraliojo skaičiaus n daliklių skaičius. Susipažinkime su dar pora aritmetinių funkcijų, susijusių su skaičiaus n dalikliais.

Skaičiaus n visus skirtingus daliklius pažymėkime $d_1, d_2, \dots, d_k$. Funkcija

$$\sigma(n) = d_1 + d_2 + \dots + d_k$$

vadinama *daliklių suma*. Pavyzdžiui,

$$\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28\,.$$

Kita aritmetinė funkcija – *Oilerio funkcija* $\varphi(n)$ yra lygi skaičiui natūraliųjų skaičių, nedidesnių už n ir tarpusavyje pirminių su n. Pavyzdžiui, $\varphi(10) = 4$, nes tik keturi skaičiai, ne didesni už 10, yra tarpusavyje pirminiai su 10. Tai 1, 3, 7, 9.

Žinant kai kurias svarbias aritmetinių funkcijų savybes, jų tyrinėji–mas (taip pat ir jų reikšmių apskaičiavimas) pasidaro gerokai lengvesnis. Vieną tokią savybę ir panagrinėkime.

Aritmetinė funkcija $f(n)$ vadinama *multiplikatyviąja*, jei

$$(m, n) = 1 \Rightarrow f(mn) = f(m)f(n)\,.$$

Jeigu funkcija $f(n)$ yra multiplikatyvi ir žinome skaičiaus n skaidinį pirminių skaičių laipsniais, tai iš multiplikatyvumo apibrėžimo išplaukia, kad

$$f(n) = f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}) = f(p_1^{\alpha_1}) f(p_2^{\alpha_2}) \dots f(p_r^{\alpha_r})\,.$$

Taigi norint apskaičiuoti multiplikatyviosios funkcijos $f(n)$ reikš–mę, užtenka žinoti jos reikšmes su $n = p^{\alpha}$, t. y. pirminių skaičių laips–niais.

3 teorema. *Daliklių suma* $\sigma(n)$ *yra multiplikatyvi funkcija.*

Įrodymas. Jeigu m ir n yra tarpusavyje pirminiai skaičiai, t.y. $(m, n) = 1$, tai kiekvieną sandaugos mn daliklį d galime išreikšti sandauga kl; čia k yra m daliklis, o l – n daliklis. Aišku, kad visus sandaugos mn daliklius gausime, kai k perbėgs skaičiaus m daliklius, o l

– skaičiaus n daliklius. Tegul $k_1, k_2, \dots, k_r$ yra visi skirtingi m dalikliai, o $l_1, l_2, \dots, l_s$ – visi skirtingi n dalikliai. Tuomet

$$\begin{aligned}\sigma(mn) = k_1l_1 + k_1l_2 + \dots + k_1l_s + k_2l_1 + k_2l_2 + \dots + k_2l_s + \\ + \dots + k_rl_1 + k_rl_2 + \dots + k_rl_s = \\ = k_1(l_1 + l_2 + \dots + l_s) + k_2(l_1 + l_2 + \dots + l_s) + \\ + \dots + k_r(l_1 + l_2 + \dots + l_s) = \\ = k_1\sigma(n) + k_2\sigma(n) + \dots + k_r\sigma(n) = (k_1 + k_2 + \dots + k_r)\sigma(n) = \\ = \sigma(m)\sigma(n).\end{aligned}$$

Vadinasi, daliklių suma $\sigma(n)$ yra multiplikatyvi funkcija. Teorema įrodyta.

Yra teisingos tokios formulės: $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$, jei $(m, n) = 1$, ir $\sigma(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}) = \sigma(p_1^{\alpha_1})\sigma(p_2^{\alpha_2}) \dots \sigma(p_r^{\alpha_r})$, jei $p_1, p_2, \dots, p_r$ yra skirtingi pirminiai skaičiai. Be to, $\sigma(p^\alpha) = 1 + p + p^2 + \dots + p^\alpha = = \dfrac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}$, jei p yra pirminis skaičius.

8 pavyzdys. Raskime skaičiaus 100 daliklių sumą.

Sprendimas. Skaičiaus 100 daliklių suma

$$\sigma(100) = \sigma(2^2 5^2) = \sigma(2^2)\sigma(5^2) = \frac{2^3 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{5^3 - 1}{5 - 1} = 217.$$

Ats.: 217.

Iš tikrųjų ir daliklių skaičiaus funkcija $d(n)$, ir Oilerio funkcija $\varphi(n)$ yra multiplikatyvios funkcijos. Todėl ir joms yra teisingos analo–giškos formulės. Daliklių funkcijai

$$d(mn) = d(m)d(n),$$

jei $(m, n) = 1$,

$$d(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}) = d(p_1^{\alpha_1})d(p_2^{\alpha_2}) \dots d(p_r^{\alpha_r}),$$

jei $p_1, p_2, \dots, p_r$ yra skirtingi pirminiai skaičiai. Taip pat

$$d(p^\alpha) = \alpha + 1,$$

jei p yra pirminis skaičius, nes p^{α} dalijasi iš $\alpha+1$ skaičiaus: $1, p, p^2, \ldots, p^{\alpha}$.

Oilerio $\varphi(n)$ funkcijai teisingos lygybės:

$$\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n),$$

jei $(m,n)=1$, ir $\varphi(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r})=\varphi(p_1^{\alpha_1})\varphi(p_2^{\alpha_2})\ldots\varphi(p_r^{\alpha_r})$,

jei $p_1, p_2, \ldots, p_r$ yra skirtingi pirminiai skaičiai. Be to, $\varphi(p^{\alpha})= = p^{\alpha}-p^{\alpha-1}$, jei p yra pirminis skaičius.

9 pavyzdys. Raskime skaičių, nedidesnių už 200 ir tarpusavyje pirminių su 200, skaičių.

Sprendimas. Skaičių, ne didesnių už 200 ir tarpusavyje pirminių su 200, skaičius yra lygus

$$\varphi(200)=\varphi(2^3 5^2)=\varphi(2^3)\varphi(5^2)=(2^3-2^2)(5^2-5)=80.$$

Ats.: 80.

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Raskite visus skaičiaus 38500 daliklius.

2. Raskite skaičių 2044 ir 1771 didžiausią bendrąjį daliklį ir mažiausią bendrąjį kartotinį.

3. Raskite skaičių $4k+1$ ir $k-1$ didžiausią bendrąjį daliklį priklausomai nuo k, kai k yra nelygus vienetui natūralusis skaičius.

4. Įrodykite, kad skaičiai $24k+1$ ir $12k-1$ yra tarpusavyje pirminiai su visais natūraliaisiais k.

5. Raskite skaičių 20631, 2640239, 10810 ir 9269 didžiausią bendrąjį daliklį ir mažiausią bendrąjį kartotinį.

6. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių, turintį lygiai 15 skirtingų daliklių.

7. Raskite skaičiaus n^3 daliklių skaičių, jei n^2 turi 15 daliklių, o skaičiaus n kanoninis skaidinys yra tik dviejų skirtingų pirminių skaičių laipsnių sandauga.

8. Raskite skaičiaus 10125 daliklių sumą.

9. Kiek skaičių, ne didesnių už skaičių 10125, turi su skaičiumi 10125 bendrus daliklius didesnius už 1?

10. Tegul $\varphi(n)$ yra Oilerio funkcija lygi skaičiui natūraliųjų skaičių, ne didesnių už n ir tarpusavyje pirminių su n. Įrodykite, kad

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1},$$

kai p^α yra pirminio skaičiaus p laipsnis, $\alpha \geq 1$.

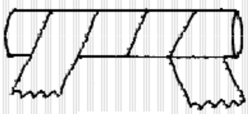
4. ŠIFRAI IR SKAIČIAI

Vilius Stakėnas
(Vilniaus universitetas)

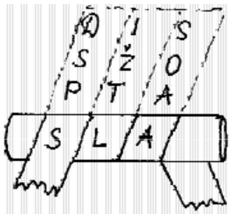
1. SKYTALĖS ŠIFRAS

Graikų istorikas Herodotas rašė, kad apie 400 m. pr. Kr. Spartos karvedžiai slaptiems pranešimams šifruoti naudojo skytalės šifrą. Skytalė graikiškai reiškia lazdelę. Be lazdelės šifrui sudaryti dar reikia popieriaus juostelės (graikai naudojo odos diržus).

Įsivaizduokime, kad ant lazdelės pagal „sraigto liniją“ užvyniojame popieriaus juostelę (1 pav. juostelė apvyniota tris kartus). Šifruojamą tekstą rašysime eilutėmis ant užvyniotos juostelės išilgai lazdelės. Matome, kad 1 pav. eilutėje telpa trys raidės. Eilučių skaičius priklauso nuo lazdelės skersmens.



1 pav.



2 pav.

Tarkime, ant 1 pav. lazdelės galima užrašyti keturias eilutes, taigi iš viso 12 raidžių. Užrašę pirmą eilutę lazdelę pasukame ir užrašome antrą eilutę, po to antrą ir trečią. Šitaip užrašykime, pavyzdžiui, SLAPTASŽODIS, žr. 2 pav.

Nuvynioję juostelę raidė po raidės skaitome, kas ant jos užrašyta:

SPSDLTŽIAAOS.

Tai ir yra mūsų teksto SLAPTASŽODIS šifras.

2. ŠABLONŲ ŠIFRAI

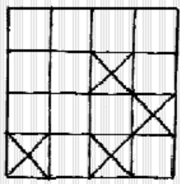
Šį šifrą sugalvojo matematikas ir gydytojas Džirolamo Kardano (1501–1576). Jo idėja labai paprasta. Išsikirpkime į vienodus langelius padalytą stačiakampį, keletą langelių iškirpkime. Tai mūsų šablonas.

Kiek langelių iškirpome, tiek raidžių turintį pranešimą galėsime užšifruoti. Iš popieriaus išsikirpkime tokio pat dydžio kaip šablonas stačiakampį. Uždėkime ant jo šabloną ir į iškirptuosius langelius raidė po raidės įrašykime tekstą. Šabloną nuėmę užpildykime tuščius popierinio stačiakampio langelius bet kokiomis raidėmis. Tekstas, kurį užrašėme ant šio stačiakampio ir yra mūsų pranešimo šifras. Kad jį pamatytume ant stačiakampio reikia uždėti šabloną. Vadinasi mūsų šablonas yra šio šifro raktas.

Naudojant tokį šabloną pranešimas tarsi paslepiamas tarp nereikalingų simbolių. Taigi gaunamas šifras yra ilgesnis už patį pranešimą.

Galime šifravimą su šablonais taip patobulinti, kad šifras būtų tokio pat ilgio kaip pranešimas.

Imkime $(4n)\times(4n)$ $(n \geq 1)$ dydžio šabloną, t.y. kvadratą, kurį gali– ma padalyti į keturis $n \times n$ kvadratus. Išpjaukime šablone lygiai n langelių ir šifruokime su šiuo šablonu taip. Uždėkime šabloną ant popierinio kvadrato ir įrašykime į atidengtus kvadratėlius pirmuosius n simbolius. Po to pasukime šabloną 90° kampu prieš laikrodžio rodyklę ir į atsidengusius naujus langelius įrašykime dar n teksto simbolių. Pakartokime šiuos veiksmus dar du kartus ir įrašykime likusius teksto simbolius. Pranešimo šifras – tekstas, kurį gauname skaitydami popierinio kvadrato eilutėse užrašytus simbolius. Taigi pranešimo šifras sudaromas atitinkamai „išbarstant“ jo simbolius.

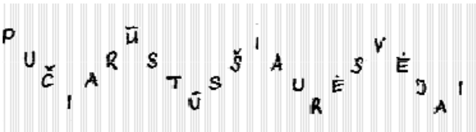


3 pav.

Aišku, kad šitoks šifravimas tik tada pavyks, kai langeliai bus išpjauti pagal tam tikrą taisyklę. Reikia taip išpjauti langelius, kad pasukus šabloną 90°, 180°, 270° laipsnių kampais prieš laikrodžio rodyklę joks popierinio kvadrato langelis neatsidengtų pakartotinai. 3 pav. pavaizduotas vienas toks išpjovimo būdas 16×16 dydžio kvadrate.

3. „GELEŽINKELIO TVORELĖS“ ŠIFRAS

Kad pūgos neužpustytų geležinkelio bėgių palei geležinkelį statomos zigzaginės formos tvorelės. Laužytą, šias tvoreles primenančią liniją šifravimui panaudokime taip: išrašykime pranešimą išilgai tokios linijos, o po to perskaitykime tekstą eilutė po eilutės. Šis tekstas ir bus pranešimo šifras. Jis priklauso nuo to, kokio aukščio tvorelę pasirinkome. Taigi šio šifro raktas – natūralusis skaičius $k > 1$. Pavyzdyje (žr. 4 pav.) parodytas teksto PUČIA RŪSTŪS ŠIAURĖS VĖJAI šifravimas naudojantis ,,geležinkelio tvorelės“ sistema su raktu $k = 4$.



4 pav.

Gautasis šifras:

PŪIVURSŠASĖČATSUĖJIIŪRA.

4. CEZARIO ŠIFRAS

Romos istorijos šaltiniai rašo, kad imperatorius Julius Cezaris šifruodavo savo laiškus labai paprastu būdu: kiekvieną teksto raidę keisdavo ,,trečiąja" jos kaimyne abėcėlėje, t.y. raide, kuri stovi abėcėlėje trimis pozicijomis dešiniau. Paskutiniąsias tris raides tenka keisti atitinkamomis pirmosiomis abėcėlės raidėmis. Šis šifravimo būdas kriptografijoje vadinamas Cezario šifru.

Jeigu naudotume Cezario šifrą lietuviškam tekstui šifruoti, tai raidžių keitimo taisyklė būtų tokia:

Teksto raidė:	A	Ą	B	C	Č	D	E	Ę	Ė	F	G	H	I	Į	Y	J
Šifro raidė:	C	Č	D	E	Ę	Ė	F	G	H	I	Į	Y	J	K	L	M
Teksto raidė:	K	L	M	N	O	P	R	S	Š	T	U	Ų	Ū	V	Z	Ž
Šifro raidė:	N	O	P	R	S	Š	T	U	Ų	Ū	V	Z	Ž	A	Ą	B

Taigi, pavyzdžiui, žodžius JULIUS CEZARIS šifruotume taip: MVOJVU EFĄCTJU.

Šiuolaikinėje kriptografijoje dažnai simboliai keičiami skaičiais. Pakeiskime lietuviškos abėcėlės raides skaičiais ir mes:

Abėcėlės raidė:	A	Ą	B	C	Č	D	E	Ę	Ė	F	G	H	I	Į	Y	J
Eilės numeris:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Abėcėlės raidė:	K	L	M	N	O	P	R	S	Š	T	U	Ų	Ū	V	Z	Ž
Eilės numeris:	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

Dalydami vieną natūralųjį skaičių iš kito gauname dalmenį ir liekaną. Pavyzdžiui, dalydami 13 iš 3 gauname:

$$13 = 4 \cdot 3 + 1,$$

taigi dalmuo yra 4, o liekana 1. Jeigu dalytume, pavyzdžiui, 3 iš 5, gautume dalmenį 0, o liekaną 3, t. y. $3 = 0 \cdot 5 + 3$.

Liekana, kurią gauname dalydami natūralųjį skaičių n iš m yra visada mažesnė už m (ji gali būti lygi 0,1, … , m–1). Susitarkime skaičiaus n dalybos iš m liekaną žymėti $n(\text{mod } m)$.

Dabar Cezario šifrą galima nusakyti labai paprastai. Jeigu nešifruoto pranešimo raidės eilės numeris abėcėlėje yra m tai $e(m)$ pažymėkime atitinkamos šifro raidės eilės numerį abėcėlėje.

Tada šifravimą Cezario šifru galime nusakyti paprasta lygybe:

$$e(m) = (m + 3)(\text{mod } 32).$$

Dabar Cezario galime apibendrinti. Pasirinkime natūralųjį, mažesnį už 32 skaičių k ir susitarkime pranešimo raidę, kurios eilės numeris abėcėlėje yra m keisti raide, kurios eilės numeris $e(m)$ apibrėžiamas lygybe

$$e(m) = (m + k)(\text{mod } 32).$$

Skaičius k yra šio šifro raktas. Pavyzdžiui, jeigu $k = 20$ (galime sakyti, kad raktas yra abėcėlės raidė *O*), tai

$$e(15) = (15 + 20)(\text{mod } 32),$$

$$e(15) = 3,$$

t. y. pranešimo raidę *J* atitinka šifro raidė *C*.

Jeigu Cezario šifru šifruojame naudodamiesi lygybe $e(m) = (m + k)(\text{mod } 32)$, tai pranešimo raidės numerį m ir atitinkamos šifro raidės numerį $e(m)$ sieja lygybė

$$m + k = e(m) + 32 \cdot l,$$

čia l yra sveikas skaičius (jei k yra nedidesnis už 32, tai gali būti tik $l = 0{,}1$).

Galima šifravimą apibrėžti ir, pavyzdžiui, tokia lygybe:

$$e(m) = (k \cdot m)(\text{mod } 32),$$

tačiau tokiu atveju skaičių k (raktą) reikia parinkti taip, kad su skaičiumi 32 jis neturėtų didesnių už 1 bendrųjų daliklių (žr. 7 uždavinio sąlygą.)

5. VIŽENERO ŠIFRAS

Blaise de Vigenere (Vižene) (1523–1596) buvo prancūzų diplomatas. Jis taip pat domėjosi ir kriptografija. Šifras, kurį dabar nagrinėsime, jo vardu pavadintas nelabai pelnytai. Gerokai anksčiau už Vigenere jį jau naudojo kitas žymus Renesanso kriptografas Alberti (1404–1472).

Iš pradžių trumpam sugrįžkime prie Cezario šifro. Užšifruokime, pavyzdžiui, žodį PASLAPTIS Cezario šifru su raktu $k = 5$ (jis atitinka abėcėlės raidę D), naudodami lygybę $e(m) = (m + k)(\text{mod } 32)$. Šifruodami iš pradžių pakeisime teksto raides skaičiais, apskaičiuosime šifro raidžių numerius ir pakeisime juos raidėmis. Šifravimo procedūrą užrašykime tokia lentele:

Tekstas:	P	A	S	L	A	P	T	I	S
Tekstas:	21	0	23	17	0	21	25	12	23
Raktas:	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Šifras:	26	5	28	22	5	26	30	17	28
Šifras	U	D	Ū	R	D	U	Z	L	Ū

Rakto eilutės visi elementai yra vienodi. O jeigu į šią eilutę surašytume nevienodus elementus? Pasirinkime, pavyzdžiui, tris skaičius: 18, 6, 23 ir surašykime juos iš eilės į rakto eilutę, po to dar kartą ir dar. O po to šifruokime naudodami Cezario šifro lygybę $e(m) = (m + k)(\text{mod } 32)$, tačiau imdami k reikšmes iš rakto eilutės:

Tekstas:	P	A	S	L	A	P	T	I	S
Tekstas:	21	0	23	17	0	21	25	12	23
Raktas:	18	6	23	18	6	23	18	6	23
Šifras:	7	6	14	3	6	12	11	18	14
Šifras	Ę	E	Y	C	E	I	H	M	Y

Tai ir yra Vigenere šifras. Šiame pavyzdyje rakto vaidmenį atliko skaičių trejetas 18, 6, 23. Jį galime užrašyti ir kaip trijų raidžių žodį MES. Galėjome pasirinkti nebūtinai tris skaičius. Pasirinkę, pavyzdžiui, keturis skaičius 29, 12, 6, 25, 0 į rakto eilutę būtume rašę skaičius 29, 12, 6, 25, 0, 29, 12, 6, 25, 0, 29. Patį raktą šiuo atveju galėtume prisiminti kaip žodį VIETA.

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Žinoma, kad skytalės skersmuo toks, kad ant užvyniotos juostelės galima užrašyti 3 eilutes. Iššifruokite su šia skytale sudarytą šifrą

DSĄADVRAEBRJABA.

Pavaizduokite šio šifro sudarymą piešiniu, panašiu į 2 pav.

2. Penkių simbolių tekstui šifruoti norime pasigaminti šabloną – 3×5 dydžio stačiakampį. Taigi stačiakampyje yra trys eilutės po penkis langelius. Nutarėme, kad jokie du gretimi tos pačios eilutės langeliai neturi būti išpjauti. Kiek tokių šablonų (šio paprasto šifro raktų) galima pasigaminti? Išnagrinėkite atvejus:

a) šablone nurodyta, kuria puse reikia jį dėti ant šifro ir nurodyta, kuri eilutė pirmoji;

b) šablone nurodyta, kuria puse reikia jį dėti ant šifro, tačiau nenurodyta, kuri eilutė pirmoji;

c) šablone nenurodyta, nei kuria puse reikia jį uždėti ant šifro, nei kuri eilutė pirmoji.

Pastaba. Pirmuoju atveju du šablonus laikome vienodais, jeigu uždėjus vieną jų ant kito nurodytąja puse taip, kad pirmosios šablonų eilutės sutaptų, pirmojo šablono išpjautuosius langelius atitinka antrojo šablono išpjautieji langeliai, neišpjautuosius – neišpjautieji langeliai.

Antruoju atveju du šablonus laikome vienodais, jeigu uždėjus vieną jų ant kito nurodytąja puse bent vienu iš dviejų galimų būdų, išpjautuosius langelius atitinka išpjautieji, neišpjautuosius – neišpjautieji.

Trečiuoju atveju du šablonus laikome vienodais, jei uždėjus vieną jų ant kito bent vienu iš keturių galimų būdų, išpjautuosius langelius atitinka išpjautieji, neišpjautuosius – neišpjautieji.

3. Turime kvadratą, sudarytą iš 16 langelių. Iš jo norime pasigaminti šabloną su 4 langeliais, kad jį sukinėdami galėtume užšifruoti iš 16 simbolių sudarytą tekstą. Kiek tokių skirtingų šablonų galima pasigaminti, jeigu ant šablono nurodyta, kuria puse jį reikia uždėti ant šifro ir kuri šablono eilutė yra pirmoji?

4. Jeigu norime šifravimo šabloną pasigaminti iš $n \times n$ dydžio kvadrato, bet n nesidalija iš 4, tai nepavyks taip išpjauti langelių, kad sukiodami šabloną galėtume užšifruoti n^2 ilgio pranešimą. Teks išpjauti mažiau kaip n langelių; baigę šifruoti galėsime į tuščius popierinio kvadrato langelius įrašyti bet kokius simbolius. Tarkime šabloną norime pasidaryti iš 5×5 dydžio kvadrato. Nubraižykite šablono, kurį naudojant galima užšifruoti 24 simbolių ilgio tekstą, brėžinį.

5. Iššifruokite „geležinkelio tvorelės“ šifrus

a) GNDEYIUYEOAASPRŽUBBTVKIAIOĖ;

b) JŽIKLIOITPATYUMGŪĖRROKTĖROSĘ.

6. Žinoma, kad pranešimas užšifruotas Cezario šifru, naudojant arba lygybę $e(m) = (m + k)(\text{mod } 32)$, arba lygybę $e(m) = = (k \cdot m)(\text{mod } 32)$. Iššifruokite šifrą naudodamiesi tuo, kad žinoma viena pranešimo raidė

Pranešimas:	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	S	*
Šifras:	F	G	O	D	I	U	Š	Ą	O	S	Ę	O	Z	Š	Ą	O

7. Jeigu pranešimą šifruotume Cezario šifru naudodamiesi lygybe $e(m) = (4 \cdot m)(\text{mod } 32)$, atsitiktų taip, kad skirtingos pranešimo raidės būtų keičiamos ta pačia šifro raide, taigi iš šifro pranešimo atkurti nebegalėtume.

a) Tarkime, nepatyręs šifruotojas užšifravo pranešimą Cezario šifru naudodamas lygybę $e(m) = (4 \cdot m)(\text{mod } 32)$. Kokia galėjo būti pranešimo raidė, jeigu ją atitinkanti šifro raidė yra I?

b) Tegu skaičių k ir 32 bendrasis didžiausias daliklis d yra didesnis už vienetą. Tarkime pranešimas šifruojamas Cezario šifru naudojantis lygybe $e(m) = (4 \cdot m)(\bmod 32)$. Įrodykite, kad kiekvienai abėcėlės raidei yra daugiau ta pačia šifro raide keičiamų abėcėlės raidžių.

8. Cezario šifrą galima apibendrinti taip. Pasirinkime nelyginį skaičių k_1 ir bet kokį natūralųjį skaičių k_2; šie skaičiai bus šifro raktas. Teksto raides šifruokime naudodamiesi lygybe $e(m) = (k_1 \cdot m + k_2)(\bmod 32)$. Pavyzdžiui, jei $k_1 = 5$, o $k_2 = 10$, tai raidė E (jos numeris abėcėlėje yra 6) bus keičiama raide, kurios numeris abėcėlėje yra $(5 \cdot 6 + 10)(\bmod 32)$, t.y. raide, kurios eilės numeris 8, taigi raide Ė. Įrodykite, kad šitaip šifruojant skirtingas teksto raides visada atitiks skirtingos šifro raidės, taigi šifrą visada bus galima vienareikšmiškai iššifruoti.

9. Norėdamas, kad šifras būtų saugesnis, šifruotojas tekstą šifravo Cezario šifru naudodamas lygybę $e(m) = (15 \cdot m + 3)(\bmod 32)$, o po to gautąjį šifrą dar kartą užšifravo naudodamasis ta pačia lygybe. Įrodykite, kad teksto šifrą, gautą po dviejų šifravimų galima gauti šifruojant tekstą Cezario šifru vieną kartą ir nurodykite, kokia lygybe reiktų naudotis.

10. Iššifruokite Vigenere šifrą, jei žinoma, kad raktą sudaro trijų raidžių žodis, ir žinomos dvi pranešimo raidės:

Pranešimas:	*	*	*	*	U	*	S	*	*	*
Šifras:	F	L	G	O	H	K	H	T	K	E

Pranešimas:	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Šifras:	Š	U	N	H	O	T	S	G	Ė	E

5. TIESINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS

Antanas Apynis
(Vilniaus universitetas)

1. Tiesinė lygtis ir jos sprendinių aibė. Tiesine lygtimi su n nežinomųjų vadinama tokia lygtis:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b;$$

čia $a_1, a_2, ..., a_n$ ir b yra žinomi realieji skaičiai, o $x_1, x_2, ..., x_n$ – nežinomi realieji skaičiai. Skaičiai $a_1, a_2, ..., a_n$ yra vadinami tiesinės lygties koeficientais, b – laisvuoju nariu, o skaičiai $x_1, x_2, ..., x_n$ – nežinomaisiais (kintamaisiais).

Išspręsti tiesinę lygtį reiškia rasti visus nežinomųjų $x_1, x_2, ..., x_n$ reikšmių rinkinius $(x_1, x_2, ..., x_n)$, su kuriais skaičius $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$ yra lygus skaičiui b. Kiekvienas toks realiųjų skaičių rinkinys yra vadinamas tiesinės lygties *sprendiniu*, o jų visuma – tiesinės lygties *sprendinių aibe*.

1 pavyzdys. Išnagrinėkime tiesinės lygties su dviem nežinomaisiais

$$2x_1 + 5x_2 = 10$$

sprendinių aibę.

Skaičių poros (5; 0), (0; 2), (5+3π; –1, 2π) yra pasirinktosios tiesinės lygties sprendiniai. Aišku, ši lygtis turi ir daugiau sprendinių, – jų yra be galo daug. Nesunku pastebėti, kad vieną sprendinio komponentę galima laisvai pasirinkti, o kitą pritaikyti prie jos, t.y. apskaičiuoti. Pasirinkę, pavyzdžiui, $x_2 = r$, $r \in \mathrm{R}$, sprendinio $(x_1; x_2)$ pirmąją komponentę x_1 galėtume apskaičiuoti iš lygybės $2x_1 + 5r = 10$. Gautume x_1=5–2,5r. Taigi tiesinės lygties su dviem nežinomaisiais $2x_1+5x_2=10$ sprendinių aibę sudaro realiųjų skaičių poros (5–2,5r; r), $r \in \mathrm{R}$.

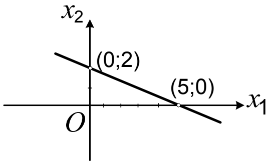
Šiame pavyzdyje laisvai pasirinkę pirmąją sprendinio komponentę, tarkime, $x_1=r$, $r \in \mathrm{R}$, gautume, kad nagrinėjamos tiesinės lygties sprendinių aibę sudaro realiųjų skaičių poros (r; 2–0,4r), $r \in \mathrm{R}$.

Gretinant abu rezultatus yra svarbu suvokti, kad gautosios sprendinių aibės

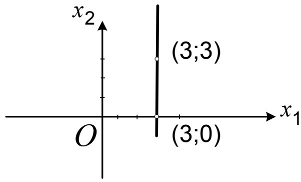
$$\{(5–2{,}5r;\ r):\ r \in \mathrm{R}\} \text{ ir } \{(r;\ 2–0{,}4r):\ r \in \mathrm{R}\}$$

yra lygios, t.y. sutampa.

Iš mokyklinių matematikos vadovėlių jau žinome, kad Dekarto koordinačių plokštumoje tiesinės lygties su dviem nežinomaisiais $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ ($a_1 \neq 0$ arba $a_2 \neq 0$) sprendinius vaizduojantys taškai išsirikiuoja vienoje tiesėje nepalikdami jokių tarpelių. Suvokus šią tiesinės lygties su dviem nežinomaisiais savybę, visai nesunku pavaizduoti grafiškai bet kurios tiesinės lygties su dviem nežinomaisiais sprendinių aibę. Reikia pasirinkti bet kuriuos du sprendinius, pažymėti juos vaizduojančius taškus Dekarto koordinačių plokštumoje ir per šiuos taškus nubrėžti tiesę – sprendinių aibės grafiką. Pavyzdyje nagrinėtos tiesinės lygties $2x_1 + 5x_2 = 10$ sprendinių aibės tiesė L pavaizduota 1 paveiksle.



1 pav.



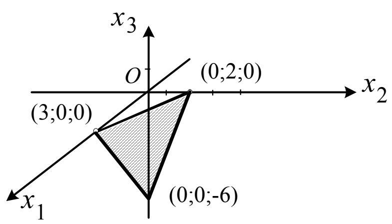
2 pav.

2 pavyzdys. Sprendžiant tiesinę lygtį su dviem nežinomaisiais $3x_1 + 0x_2 = 9$ laisvai pasirinkti galima tik antrąją sprendinio komponentę. Be to, nežinomojo x_2 reikšmė, sakykime, $x_2 = r$, $r \in$R, neturi įtakos pirmajai sprendinio komponentei x_1 – ji būtinai lygi 3, t.y. x_1=3. Taigi tiesinės lygties $3x_1+0x_2=9$ sprendinių aibė yra $\{(3;r)$: $r\in$R$\}$. Šios aibės geometrinis vaizdas (grafikas) Dekarto koordinačių plokštumoje yra tiesė, einanti per taškus (3; 0) ir (3; 3). Ji yra lygiagreti su ordinačių ašimi Ox_2 (žr. 2pav.).

Tiesinės lygties su trimis nežinomaisiais $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=b$, kai nors vienas koeficientas nelygus nuliui, sprendiniai turi du laisvės laipsnius. Tai reiškia, kad dvi sprendinio $(x_1; x_2; x_3)$ komponentes galima pasirinkti laisvai, o trečiąją – apskaičiuoti (pritaikyti prie pasirinktųjų). Pavyzdžiui, tiesinės lygties su trimis nežinomaisiais $2x_1+3x_2–x_3=6$ sprendinių aibę sudaro realiųjų skaičių trejetai $(r_1; r_2; 2r_1+3r_2–6)$, $r_1\in$R, $r_2\in$R. Laisvai pasirinkę antrą ir trečią komponentes, sakykime, $x_2=r_2$, $r_2\in$R, $x_3=r_3$, $r_3\in$R, gautume kitaip užrašytų realiųjų skaičių trejetų aibę – tiesinės lygties $2x_1+3x_2–x_3=6$ sprendinių aibę

$$\{(3–1{,}5r_2+0{,}5r_3; r_2; r_3): r_2\in \mathrm{R}, r_3\in \mathrm{R}\}.$$

Tiesinės lygties su trimis nežinomaisiais sprendinių aibės grafinis vaizdavimas yra šiek tiek sudėtingesnis negu dviejų nežinomųjų atveju. Aišku, kad kiekvieną sprendinį – realiųjų skaičių trejetą (x_1; x_2; x_3) – atitinka kuris nors Dekarto koordinačių erdvės taškas. Nesileisdami į išsamius samprotavimus, pasakysime, kad pavaizdavę visus tiesinės lygties su trimis nežinomaisiais sprendinius, gautume kurią nors plokštumą. Kadangi plokštumos padėtį erdvėje visiškai nusako trys jos taškai, nesantys vienoje tiesėje, tai pakanka pasirinkti tris nagrinėjamos lygties sprendinius, pažymėti juos vaizduojančius Dekarto koordinačių erdvės taškus ir nubrėžti per šiuos taškus (įsitikinus, kad jie nėra vienoje tiesėje!) plokštumą. Ką tik nagrinėtos tiesinės lygties $2x_1+3x_2-x_3=6$ sprendinių aibės grafikas Dekarto koordinačių erdvėje yra plokštuma, einanti per taškus (3; 0; 0), (0; 2; 0), (0; 0; –6) (žr. 3pav.).



3 pav.

Kai tiesinė lygtis $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ turi daugiau kaip tris nežinomuosius ($n \geq 4$), jos sprendiniai grafiškai nevaizduojami.

Norėtume atkreipti skaitytojo dėmesį į vieną, kraštutinį, atvejį, kai tiesinės lygties $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ visi koeficientai lygūs nuliui, t.y. $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$. Tokią lygtį galima užrašyti taip:

$$0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = b.$$

Aišku, kad ši lygtis neturi nė vieno sprendinio, kai $b \neq 0$. Jei $b = 0$, tai kiekvienas realiųjų skaičių rinkinys ($r_1; r_2; ... ; r_n$) yra jos sprendinys. Tiesinė lygtis $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = b$ yra vadinama *tapatybe*.

Tapatybės su vienu nežinomuoju $0x_1 = 0$ sprendinių aibė yra realiųjų skaičių aibė R. Jos grafikas yra realiųjų skaičių tiesė. Tapatybės su dviem nežinomaisiais $0x_1 + 0x_2 = 0$ sprendinių aibės $\{(r_1; r_2)$: $r_1 \in$ R, $r_2 \in$ R$\}$ grafikas yra visa Dekarto koordinačių plokštuma.

2. Veiksmai su tiesinėmis lygtimis. Iš pradžių apibrėžkime tiesinės lygties daugybą iš skaičiaus, tiesinių lygčių sudėtį ir atimtį. Paskui susipažinsime su tiesinių lygčių tiesiniais dariniais. Kad būtų paprasčiau formuluoti apibrėžimus ir kai kuriuos teiginius, kartais nerašysime pačių tiesinių lygčių, o vartosime jas žyminčius simbolius (dažniausiai L, L_i, i=1, 2, …) Norėdami pabrėžti, kad raidė L reikš tiesinę lygtį $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, rašysime tiesiog

$$L:\ a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b.$$

Kai nagrinėsime kelias tiesines lygtis, vartosime papildomus indeksus koeficientams ir laisviesiems nariams užrašyti. Pavyzdžiui, užrašas

$L_i:\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$, i=1, 2, …, m, reikš bet kurią iš tiesinių lygčių L_1, L_2, …, L_m.

Daugyba iš skaičiaus. Tiesinės lygties

$L:\ a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$

ir realiojo skaičiaus λ *sandauga* (žym. λ*L*) yra vadinama tiesinė lygtis su n nežinomųjų $(\lambda a_1)x_1 + (\lambda a_2)x_2 + ... + (\lambda a_n)x_n = \lambda b$.

Pavyzdžiui, padauginę tiesinę lygtį su trimis nežinomaisiais $5x_1 - 4x_2 + x_3 = 11$ iš 3, gautume tiesinę lygtį su trimis nežinomaisiais $15x_1 - 12x_2 + 3x_3 = 33$.

Sudėtis. Tiesinių lygčių su n nežinomųjų

$L_i:\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$ ir

$L_k:\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = b_k$, (čia i ir k – kurie nors natūralieji skaičiai) *suma* (žym. $L_i + L_k$) yra vadinama tiesinė lygtis $(a_{i1} + a_{k1})x_1 + (a_{i2} + a_{k2})x_2 + ... + (a_{in} + a_{kn})x_n = b_i + b_k$.

Pavyzdžiui, tiesinių lygčių su keturiais nežinomaisiais $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1$ ir $3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0$ suma yra tiesinė lygtis su keturiais nežinomaisiais $5x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = 1$.

Atimtis. Tiesinių lygčių su n nežinomųjų L_i ir L_k skirtumu (žym. $L_i - L_k$) yra vadinama tiesinių lygčių L_i ir $(-1)L_k$ suma: $L_i - L_k = L_i + (-1)L_k$.

Pavyzdžiui, atėmę tiesinę lygtį su trimis nežinomaisiais $2x_1 - x_2 - 3x_3 = 7$ iš tiesinės lygties su trimis nežinomaisiais $5x_1 - x_2 + 4x_3 = 8$, gautume tiesinę lygtį su trimis nežinomaisiais $3x_1 + 7x_3 = 1$. Atkreipiame dėmesį, kad čia praleidome lygų nuliui su visomis nežinomojo x_2 reikšmėms dėmenį $0x_2$.

Tiesinio darinio apibrėžimas. Tiesinių lygčių su n nežinomųjų

$L_i: \ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$ ir

$L_k: \ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = b_k$ *tiesiniu dariniu* yra vadinama tiesinių lygčių λL_i ir μL_k suma $\lambda L_i + \mu L_k$, čia λ ir μ (realieji skaičiai) vadinami tiesinio darinio koeficientais.

Aišku, kad tiesinio darinio sąvoka apima ir tiesinės lygties sandaugą iš skaičiaus ($\lambda = 0$ arba $\mu = 0$), ir tiesinių lygčių sumą ($\lambda = \mu = 1$), ir tiesinių lygčių skirtumą ($\lambda = 1, \mu = -1$ arba $\lambda = -1, \mu = 1$).

Konstruojant tiesinių lygčių su n nežinomųjų L_i ir L_k tiesinius darinius kartais galima taip pasirinkti koeficientus λ ir μ, kad tiesinės lygties $\lambda L_i + \mu L_k$ koeficientas prie pasirinkto nežinomojo būtų norimo ženklo ir norimo didumo.

3 pavyzdys. Sudarykime tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais $L_1: \ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$ ir $L_2: \ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7$ tiesinį darinį $\lambda L_1 + \mu L_2$, kad: a) jo koeficientas prie nežinomojo x_2 būtų lygus nuliui; b) jo koeficientas prie nežinomojo x_3 būtų lygus 5.

Sprendimas. Tiesinis darinys $\lambda L_1 + \mu L_2$ yra tiesinė lygtis su trimis nežinomaisiais $(2\lambda + 4\mu)x_1 + (-\lambda + 3\mu)x_2 + (3\lambda - \mu)x_3 = 5\lambda + 7\mu$. Pirmuoju atveju koeficientai λ ir μ turi tenkinti vienintelę sąlygą $-\lambda + 3\mu = 0$. Tai tiesinė lygtis su dviem nežinomaisiais λ ir μ. Ji turi be galo daug sprendinių (λ; μ), kuriuos galima užrašyti taip: ($3r$; r), $r \in$ R. Taigi galima sudaryti be galo daug tiesinių darinių $\lambda L_1 + \mu L_2$ taip, kad koeficientas prie nežinomojo x_2 būtų lygus nuliui. Parašykime kelis tokių tiesinių darinių pavyzdžius: $3L_1 + L_2$ (atvejis $r = 1$), $L_1 + \frac{1}{3}L_2$ (atvejis $r = \frac{1}{3}$), $5L_1 + \frac{5}{3}L_2$ (atvejis $r = \frac{5}{3}$).

Spręsdami antrąją uždavinio dalį, koeficientus λ ir μ renkamės taip, kad jie tenkintų lygtį $3\lambda - \mu = 5$. Šios lygties sprendinių (λ; μ) aibę sudaro realiųjų skaičių poros (r; $3r$–5), $r \in$ R. Kai r=2, ieškomasis tiesinis darinys yra $2L_1 + L_2$. Reikiamą sąlygą tenkina tiesiniai dariniai $L_1 - 2L_2$, $-L_1 - 8L_2$, – jų yra be galo daug.

3. Tiesinių lygčių sistema ir jos sprendinių aibė. Tiesinių lygčių su n nežinomųjų

$$L_i:\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i,\ i=1, 2, \ldots, m,$$

rinkinys

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

vadinamas *m tiesinių lygčių su n nežinomųjų sistema* (trumpai – *tiesinių lygčių sistema*).

Išspręsti tiesinių lygčių sistemą (1) reiškia rasti visus nežinomųjų $x_1, x_2, ..., x_n$ reikšmių rinkinius ($x_1; x_2; ...; x_n$), kurie tenkina kiek–vieną šios sistemos lygtį. Tokie realiųjų skaičių rinkiniai vadinami šios tiesinių lygčių sistemos sprendiniais, o jų visuma – tiesinių lygčių sistemos (1) sprendinių aibe.

Tiesinių lygčių sistemos (1) sprendinių aibę pažymėkime *X*, o ją sudarančių tiesinių lygčių L_i sprendinių aibes pažymėkime X_i; *i* = 1, 2, … , *m*. Tada tiesinių lygčių sistemos (1) sprendinių aibę *X* galėsime apibūdinti kaip aibių X_1, X_2, …, X_m sankirtą (bendrąją dalį): $X = X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_m$.

4 pavyzdys. Raskime trijų tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemos

$$\begin{cases} 2x_1 \quad - 3x_3 = 1, \\ \quad 5x_2 \quad = 0, \\ x_1 + 7x_2 \quad = 2 \end{cases} \qquad (2)$$

sprendinių aibę *X*.

Sprendimas. Iš pat pradžių atkreipiame dėmesį (kad nekiltų nesusipratimų) į vieną esminį dalyką – kiekviena (2) sistemos lygtis turi po tris nežinomuosius (nuliui lygūs dėmenys paprastai nerašomi). Apibrėžimo (1) formą atitinkantis duotosios sistemos užrašas yra toks:

$$\begin{cases} 2x_1 + 0x_2 + (-3)x_3 = 1, \\ 0x_1 + 5x_2 + 0x_3 = 0, \\ 1x_1 + 7x_2 + 0x_3 = 2. \end{cases}$$

Pabandykime rasti atskirų lygčių sprendinių aibių X_1, X_2 ir X_3 sankirtą. Aišku, kad $X_2 = \{ (r_1;\ 0;\ r_3) : r_1 \in \mathrm{R},\ r_3 \in \mathrm{R} \}$. Kad trejetas $(r_1;\ 0;\ r_3)$ tenkintų pirmąją lygtį turi galioti sąlyga $2r_1 - 3r_3 = 1$, o kad būtų trečios lygties sprendiniu, turi būti $r_1 = 2$. Taigi abiems lygtims (L_1 ir L_3) tinka tik tie trejetai $(r_1;\ 0;\ r_3)$, kuriuose $r_1 = 2$ ir $r_3 = 1$.

Išvada: $X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \{(2;0;1)\}$. Sistema (2) turi vienintelį sprendinį (2; 0; 1).

5 pavyzdys. Raskime trijų tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemos

$$\begin{cases} 2x_1 & & & = 4, \\ & 3x_2 & & = 0, \\ & & 5x_3 & = 5 \end{cases}$$

sprendinių aibę X.

Sprendimas. Kadangi

$X_1 = \{ (2;\ r_2;\ r_3) : r_2 \in \mathrm{R},\ r_3 \in \mathrm{R} \}$,

$X_2 = \{ (r_1;\ 0;\ r_3) : r_1 \in \mathrm{R},\ r_3 \in \mathrm{R} \}$,

$X_3 = \{ (r_1;\ r_2;1) : r_1 \in \mathrm{R},\ r_2 \in \mathrm{R} \}$,

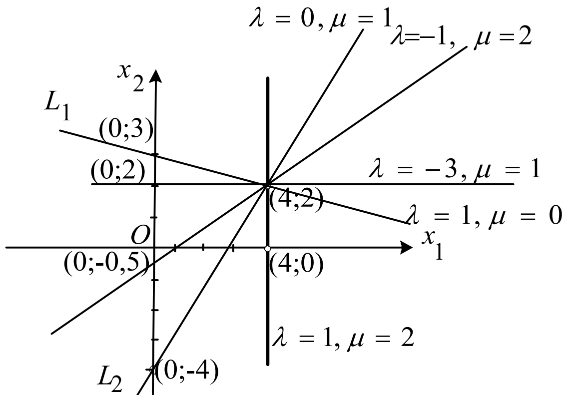
tai visoms trims aibėms (X_1, X_2 ir X_3) gali priklausyti tik toks realiųjų skaičių trejetas (r_1; r_2; r_3), kuriame $r_1 = 2$ (priešingu atveju jis nepriklauso aibei X_1), $r_2 = 0$ (kad priklausytų aibei X_2), $r_3=1$ (turi būti aibėje X_3).

Taigi $X = X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \{(2;0;1)\}$.

Žinoma, pavyzdžiuose nagrinėtoms tiesinių lygčių sistemoms spręsti taikytas būdas nėra universalus. Tuo galėtume įsitikinti pasirinkę spręsti, pavyzdžiui, tokią trijų tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 6, \\ 3x_1 + 14x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 = 5. \end{cases} \tag{4}$$

Įžvalgesnis skaitytojas greitai aptiktų, kad skaičių trejetas (2; 0; 1) tenkina kiekvieną šios sistemos lygtį (patikrinkite savarankiškai), tačiau liktų atviras klausimas, ar ši sistema neturi daugiau sprendinių.



4 pav.

4. Tiesinių lygčių sistemų ekvivalentumas. Dvi tiesinių lygčių sistemos su n nežinomųjų vadinamos *ekvivalenčiomis*, jeigu jų sprendinių aibės sutampa. Lygčių skaičiai tose sistemose gali būti skirtingi. Pavyzdžiui, dvi tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos,

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 11, \\ 3x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7, \\ 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + x_2 = 4, \end{cases}$$

yra ekvivalenčios, nes ir viena, ir kita turi vienintelį sprendinį – skaičių porą (1; 3). Ketvirtame ir penktame pavyzdžiuose spręstos (2) ir (3) trijų tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemos taip pat yra ekvivalenčios, nes jų sprendinių aibės sutampa – gavome $X = \{(2;\ 0;\ 1)\}$.

Tiesinių lygčių sistemų ekvivalentumo sąvoka yra ne tik teorinė. Jei, pavyzdžiui, žinotume, kad tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemos

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases} \tag{5}$$

ir

$$\begin{cases} \quad\quad x_2 \quad\quad = 2, \\ 3x_1 \quad\quad\quad\quad = 3, \\ \quad\quad\quad 2x_3 = 4 \end{cases} \tag{6}$$

yra ekvivalenčios, tai vietoj (5) sistemos spręstume (6) sistemą, nes jos sprendinių aibę X lengva rasti sugretinus šią sistemą sudarančių lygčių sprendinių aibes $X_1 = \{(r_1;\ 2;\ r_3):\ r_1 \in \mathrm{R},\ r_3 \in \mathrm{R}\}$, $X_2 = \{(1;\ r_2;\ r_3):\ r_2 \in \mathrm{R},\ r_3 \in \mathrm{R}\}$ ir $X_3 = \{(r_1; r_2;\ 2):\ r_1 \in \mathrm{R},\ r_2 \in \mathrm{R}\}$. Rezultatas toks: $X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \{(1; 2; 2)\}$. Toliau beliktų pasakyti, kad (5) tiesinių lygčių sistema turi vienintelį sprendinį (1; 2; 2). Tačiau tokia išvada nebūtų korektiška nežinant, ar abi tiesinių lygčių sistemos yra ekvivalenčios.

Tiesinių lygčių sistemoms spręsti pakanka mokėti turimą tiesinių lygčių sistemą pakeisti jai ekvivalenčia paprastesne tiesinių lygčių sistema. Kokiais veiksmais, atliekamais su sistemos lygtimis, gaunama ekvivalenti tiesinių lygčių sistema? Patyrinėkime ryšį tarp dviejų tiesinių lygčių ir jų tiesinio darinio sprendinių aibių.

6 pavyzdys. Pasirinkime dvi tiesines lygtis su dviem nežinomaisiais

$$L_1:\ x_1 + 4x_2 = 12 \text{ ir } L_2:\ 3x_1 - 2x_2 = 8\ .$$

Jų tiesinis darinys $\lambda L_1 + \mu L_2$ yra tiesinė lygtis su dviem nežinomaisiais

$$(\lambda + 3\mu)x_1 + (4\lambda - 2\mu)x_2 = 12\lambda + 8\mu\,.$$

Imdami įvairias λ ir μ reikšmes, gauname konkrečias tiesines lygtis. Pavyzdžiui,

$$5x_1 - 8x_2 = 4 \text{ (kai } \lambda = -1,\ \mu = 2),$$

$$0x_1 - 14x_2 = -28 \text{ (kai } \lambda = -3,\ \mu = 1),$$

$$7x_1 + 0x_2 = 28 \text{ (kai } \lambda = 1,\ \mu = 2).$$

Aišku, tarp tų tiesinių lygčių yra ir pradinės lygtys L_1 (kai $\lambda = 1$, $\mu = 0$) bei L_2 (kai $\lambda = 0$, $\mu = 1$).

Pavaizduokime šių lygčių sprendinius toje pačioje Dekarto koordinačių plokštumoje (žr. 4 pav.). Gausime tiesių, susikertančių viename taške pluoštą. Susikirtimo taško koordinatės yra (4; 2).

Remdamiesi grafiku, galime padaryti tokią išvadą: skaičių pora (4; 2) yra tiesinio darinio $\lambda L_1 + \mu L_2$, t.y. tiesinės lygties

$$(\lambda + 3\mu)x_1 + (4\lambda - 2\mu)x_2 = 12\lambda + 8\mu$$

sprendinys su bet kuriomis λ ir μ reikšmėmis. Tuo galima įsitikinti apskaičiavus reiškinį $(\lambda + 3\mu)4 + \ + (4\lambda - 2\mu)2$.

Kita išvada: tiesinių lygčių sistemos

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 12, \\ 3x_1 - 2x_2 = 8; \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 12, \\ (\lambda + 3\mu)x_1 + (4\lambda - 2\mu)x_2 = 12\lambda + 8\mu, \ \mu \neq 0; \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} (\lambda + 3\mu)x_1 + (4\lambda - 2\mu)x_2 = 12\lambda + 8\mu, \ \lambda \neq 0; \\ 3x_1 - 2x_2 = 8; \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 12, \\ 3x_1 - 2x_2 = 8, \\ (\lambda + 3\mu)x_1 + (4\lambda - 2\mu)x_2 = 12\lambda + 8\mu \end{cases} \tag{10}$$

yra ekvivalenčios. Visos jos turi vienintelį sprendinį – skaičių porą (4; 2).

Kokios praktinės naudos galėtume turėti iš tų išvadų? Pirmiausia, spręsdami (7) sistemą galėtume ją pakeisti (8) arba (9) sistema, pasirinkę tokias λ ir μ reikšmes, kad tiesinio darinio $(\lambda + 3\mu)x_1 + (4\lambda - 2\mu)x_2 = 12\lambda + 8\mu$ koeficientas $\lambda+3\mu$ prie x_1 arba koeficientas $4\lambda - 2\mu$ prie x_2 būtų lygus nuliui. Tokios lygčių sistemos sprendimas lengvesnis. Pavyzdžiui, antrąją (7) sistemos lygtį pakeitę tiesiniu dariniu $L_1 + 2L_2$, toliau spręstume dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 12, \\ 7x_1 = 28. \end{cases}$$

Šios sistemos sprendinių aibė aiški: ji turi vienintelį elementą – sprendinį (4; 2).

Kitas praktinis momentas toks: jei spręsdami trijų (ar didesnio skaičiaus) tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą įsitikintume, kad viena lygtis yra kitų dviejų lygčių tiesinis darinys, tai galėtume tą tiesinį darinį pašalinti iš sistemos ir toliau spręsti ekvivalenčią sistemą su mažesniu lygčių skaičiumi (pavyzdžiui, vietoj (10) sistemos spręsti (7) sistemą).

Nagrinėto pavyzdžio išvadas galima apibendrinti ne tik bet kuriai m tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemai

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = b_m, \end{cases}$$

bet ir didesnį nežinomųjų skaičių turinčių tiesinių lygčių sistemai. Dviejų nežinomųjų atvejis yra išskirtinis tuo, kad sistemos sprendinių analizei galima pasitelkti grafiką. Stebint sistemos lygčių sprendinių aibes atitinkančių tiesių tarpusavio padėtį kartais būna lengviau įžvelgti sistemos sprendinių aibę, formuluoti teorines hipotezes, apsisaugoti nuo klaidingų išvadų. Bendruoju atveju, t.y. nagrinėjant bet kurią m ($m \geq 2$) tiesinių lygčių su n ($n \geq 1$) nežinomųjų sistemą (1), išvados grindžiamos apibrėžimais, žinomais teiginiais, naudojant loginę analizę, algebrinius skaičiavimus. Čia suformuluosime tik sistemų ekvivalentumo savybes.

1 savybė. Pakeitus bet kurią (1) tiesinių lygčių sistemos lygtį L_k : $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n$ tiesiniu dariniu $\lambda L_i + \mu L_k$ ($\lambda \in$R, $\mu \in$R, $\mu \neq 0$), gaunama ekvivalenti tiesinių lygčių sistema. Čia L_i yra bet kuri kita (1) sistemos lygtis.

Įrodymas. Remiantis tiesinių lygčių sistemos sprendinio apibrėžimu pakanka įrodyti, kad yra ekvivalenčios šios dviejų tiesinių lygčių su n nežinomųjų sistemos:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases} \tag{11}$$

ir

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ (\lambda a_{i1} + \mu a_{k1})x_1 + \ldots + (\lambda a_{in} + \mu a_{kn})x_n = \lambda b_i + \mu b_k, \ \ \mu \neq 0. \end{cases} \tag{12}$$

Iš pradžių tarkime, kad (11) sistema turi nors vieną sprendinį. Pasirinkime bet kurį iš jų, pavyzdžiui, $(r_1; r_2; \ldots; r_n)$. Pagal sprendinio apibrėžimą turi galioti šios lygybės: $a_{i1}r_1 + a_{i2}r_2 + \ldots + a_{in}r_n = b_1$ ir $a_{k1}r_1 + a_{k2}r_2 + \ldots + a_{kn}r_n = b_k$.

Patikrinkime, ar skaičių rinkinys $(r_1; r_2; \ldots; r_n)$ yra (12) sistemos sprendinys. Aišku, kad jis tenkina pirmąją lygtį, todėl belieka patikrinti, ar jis tenkina antrąją lygtį. Skaičiuodami gauname:

$$(\lambda a_{i1}+\mu a_{k1})r_1+(\lambda a_{i2}+\mu a_{k2})r_2+...+(\lambda a_{in}+\mu a_{kn})r_n=$$
$$=\lambda(a_{i1}r_1+a_{i2}r_2+...+a_{in}r_n)+\mu(a_{k1}r_1+a_{k2}r_2+...+a_{kn}r_n)=\lambda b_i+\mu b_k.$$

Taigi rinkinys $(r_1; r_2; ...; r_n)$ tenkina abi (12) sistemos lygtis ir todėl yra šios sistemos sprendinys.

Kadangi tikrinome laisvai pasirinktą (11) sistemos sprendinį, tai galime daryti išvadą, jog kiekvienas (11) sistemos sprendinys yra (12) sistemos sprendinys.

Tarę, kad kuris nors realiųjų skaičių rinkinys $(r_1; r_2; ...; r_n)$ yra (12) sistemos sprendinys, aiškinkimės, ar jis tenkina ir (11) sistemą. Pagal sprendinio apibrėžimą turi galioti lygybė

$$(\lambda a_{i1}+\mu a_{k1})r_1+(\lambda a_{i2}+\mu a_{k2})r_2+...+(\lambda a_{in}+\mu a_{kn})r_n=\lambda b_i+\mu b_k.$$

Reiškinys pirmuosiuose skliaustuose lygus b_i, nes $(r_1; r_2; ...; r_n)$ yra lygties L_i sprendinys. Todėl

$$\lambda b_i+\mu(a_{k1}r_1+a_{k2}r_2+...+a_{kn}r_n)=\lambda b_i+\mu b_k,$$
$$\mu(a_{k1}r_1+a_{k2}r_2+...+a_{kn}r_n)=\mu b_k$$

ir

$$a_{k1}r_1+a_{k2}r_2+...+a_{kn}r_n=b_k \text{ (nes } \mu\neq 0).$$

Taigi rinkinys $(r_1; r_2; ...; r_n)$ tenkina ir lygtį L_i, ir lygtį L_k. Jis yra (11) sistemos sprendinys.

Dabar jau pagristai galima teigti, kad realiųjų skaičių rinkinys $(r_1; r_2; ...; r_n)$ yra (11) sistemos sprendinys tada ir tik tada, kai jis yra (12) sistemos sprendinys.

Dar atkreipiame dėmesį į atvejį, kai viena iš nagrinėjamų sistemų ((11) ir (12)) neturi sprendinių. Remdamiesi ką tik suformuluota išvada, gautume (prieštaros metodu), jog ir kita sistema neturi sprendinių.

2 savybė. Pašalinus iš tiesinių lygčių sistemos tapatybę (jeigu tokia būtų), gaunama ekvivalenti tiesinių lygčių sistema.

Įrodymas. Tarkime, kad (1) tiesinių lygčių sistemos paskutinė lygtis L_m: $a_{m1}r_1+a_{m2}r_2+...+a_{mn}r_n=b_m$ yra tapatybė, t.y. $a_{m1}=a_{m2}=$ $=...=a_{mn}r_n=b_m=0$. Šią lygtį tenkina kiekvienas realiųjų skaičių rinkinys, todėl

$X_1\cap X_2\cap...\cap X_{m-1}\cap X_m=(X_1\cap X_2\cap...\cap X_{m-1})\cap X_m=$
$=X_1\cap X_2\cap...\cap X_{m-1}$; čia X_i, i=1, 2, …, m–1, m, yra (1) sistemą

sudarančių tiesinių lygčių L_i, i=1, 2, …, m–1, m, sprendinių aibės.

Analogišką išvadą gautume ir tada, kai bet kuri kita (1) sistemos lygtis yra tapatybė.

5.Nežinomųjų eliminavimas. Gauso metodas. Taikant tiesinių lygčių sistemų ekvivalentumo savybes sprendžiamą tiesinių lygčių sistemą siekiama pertvarkyti taip, kad gautos sistemos lygtyse būtų kuo daugiau nuliui lygių koeficientų. Atitinkami lygčių dėmenys tada nerašomi (nes lygūs nuliui su visomis nežinomųjų reikšmėmis), ir nežinomųjų skaičius kai kuriose lygtyse tarsi sumažėja. Todėl tokio pobūdžio tiesinių lygčių sistemos pertvarka vadinama *nežinomųjų eliminavimu* (pašalinimu). Yra natūralu ieškoti trumpiausio kelio supaprastinti duotąją tiesinių lygčių sistemą ir taip rasti jos sprendinių aibę, bet dažniausia taikomos nuoseklaus nežinomųjų eliminavimo schemos. Viena iš jų – *Gauso metodas* (Carl Friedrich Gauss – vokiečių matematikas, 1777–1855). Sprendžiant šiuo metodu (1) tiesinių lygčių sistemą siekiama ją suvesti į trikampę tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\quad c_{22}x_2 + ... + c_{2n}x_n = d_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n. \end{cases}$$

Kai $c_{11} \neq 0$, $c_{22} \neq 0$, … , $c_{nn} \neq 0$, tokia tiesinių lygčių sistema turi vienintelį sprendinį. Jo komponentės lengvai apskaičiuojamos pradedant paskutiniąja lygtimi. Kitais atvejais ši tiesinių lygčių sistema gali turėti tik be galo daug sprendinių arba nė vieno sprendinio. Tokių atvejų čia visai negvildensime. Žinių apie juos galima rasti įvairiose knygose, tarp kurių yra A. Apynio ir E. Stankaus “Elementarus matematikos taikymas ekonomikoje” (Presvika, 1997).

7 pavyzdys. Gauso metodu išspręskime tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 8, \\ 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases} \tag{13}$$

Sprendimas. Siekdami gauti trikampę tiesinių lygčių sistemą, eliminuokime nežinomąjį x_1 iš antros ir trečios lygčių. Nežinomajam x_1 eliminuoti iš antros lygties sudarykime lygčių

$L_1: \quad x_1 + 3x_2 - x_3 = 8$ ir $L_2: \quad 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 5$ tiesinį darinį $\lambda L_1 + \mu L_2$ – tiesinę lygtį

$$(\lambda + 2\mu)x_1 + (3\lambda + 7\mu)x_2 + (-\lambda + 2\mu)x_3 = 8\lambda + 5\mu$$

su nuliui lygiu koeficientu $\lambda + 2\mu$ prie x_1. Skaičiams λ ir μ pasirinkti čia yra daug galimybių (iš lygties $\lambda + 2\mu = 0$ sprendinių). Imkime $\lambda = -2$, $\mu = 1$. Tada turėsime tiesinę lygtį $0x_1 + x_2 + 4x_3 = -11$. Ja pakeiskime antrąją sistemos lygtį ir gausime ekvivalenčią tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 8, \\ \quad x_2 + 4x_3 = -11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases} \tag{14}$$

Nežinomajam x_1 eliminuoti iš trečios lygties sudarykime tiesinį darinį $3L_1 - L_3$, t.y. tiesinę lygtį $0x_1 + 11x_2 - 5x_3 = 26$. Šia lygtimi pakeiskime trečiąją lygtį ir turėsime ekvivalenčią tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 8, \\ \quad x_2 + 4x_3 = -11, \\ \quad 11x_2 - 5x_3 = 26. \end{cases} \tag{15}$$

Antros ir trečios lygčių tiesiniu dariniu $11L_2 - L_3$ pakeiskime trečiąją lygtį ir gausime ekvivalenčią, – jau trikampę – tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 8, \\ \quad x_2 + 4x_3 = -11, \\ \quad\quad 49x_3 = -147. \end{cases} \tag{16}$$

Iš šios sistemos trečiosios lygties $0x_1 + 0x_2 + 49x_3 = -147$ nustatome, kad sistemos sprendinių $(x_1; x_2; x_3)$ trečioji komponentė x_3 gali būti lygi tik –3. Tada iš antrosios lygties randame vienintelę antrosios komponentės reikšmę $x_2 = 1$, o paskui (iš pirmos lygties) ir pirmąją sprendinio komponentę $x_1 = 2$. Taigi trejetas (2; 1; –3) yra vienintelis (16) sistemos, todėl ir (13) sistemos vienintelis sprendinys (nes (13), (14), (15) ir (16) sistemos yra ekvivalenčios).

8 pavyzdys. Gauso metodu išspręskime šią keturių tiesinių lygčių su keturiais nežinomaisiais sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 9, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ \qquad 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 \qquad + 2x_3 - 2x_4 = -6. \end{cases} \tag{17}$$

Sprendimas. Nežinomąjį x_1 reikia eliminuoti tik iš antros ir ketvirtos lygčių. Tai atlikime vienu žingsniu, antrąją lygtį pakeisdami tiesiniu dariniu $3L_1 - L_2$ (tiesine lygtimi $0x_1 + x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 21$), o ketvirtąją – tiesiniu dariniu $L_1 - L_4$ (tiesine lygtimi $0x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 15$). Toliau nagrinėsime tokią ekvivalenčią sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 9, \\ \qquad x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 21, \\ \qquad 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 5, \\ \qquad 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 15. \end{cases} \tag{18}$$

Šios sistemos lygčių tiesiniais dariniais $-3L_2 + L_3$ ir $-2L_2 + L_4$ pakeitę atitinkamai trečią ir ketvirtą lygtis, gauname tokią (ekvivalenčią!) sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 9, \\ \qquad x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 21, \\ \qquad\quad 16x_3 - 14x_4 = -58, \\ \qquad\qquad 9x_3 - 6x_4 = -27. \end{cases} \tag{19}$$

Trikampei sistemai gauti belieka eliminuoti nežinomąjį x_3 iš ketvirtos lygties. Šią lygtį pakeiskime tiesiniu dariniu $\frac{3}{2}L_3 - \frac{8}{3}L_4$ – tiesine lygtimi $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 5x_4 = -15$. Iš gautosios trikampės keturių tiesinių lygčių sistemos

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 9, \\ \qquad x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 21, \\ \qquad\quad 16x_3 - 14x_4 = -58, \\ \qquad\qquad\quad -5x_4 = -15 \end{cases}$$

randame vienintelį duotosios, t.y. (17) sistemos sprendinį (2; 0; –1; 3).

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Susitiko du piemenys ir derasi dėl ganomų avių. „Atiduok man vieną savo avį, tada aš turėsiu dvigubai daugiau avių negu tu“, – siūlo pirmasis. Antrasis jam atkerta: „Jokiu būdu! Verčiau tu atiduok man vieną savo avį, tada abu turėsime po lygiai!“ Kiek avių turėjo kiekvienas piemuo?

2. Nubrėžkite tieses $mx + ny = mn$ ir $nx - my = mn$; čia m yra Jūsų vardo raidžių skaičius, o n – Jūsų pavardės raidžių skaičius. Apskaičiuokite šių tiesių susikirtimo taško koordinates.

3. Nustatykite, kokias reikšmes gali įgyti m, kad tiesės $mx + y = 1$, $x + my = 1$ ir $x + y = m$ susikirstų viename taške. Nubrėžkite šias tieses toje pačioje Dekarto koordinačių plokštumoje.

4. Nustatykite, ar ekvivalenčios šios tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3, \\ 3x + y = 21, \\ x + 4y = 18 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} 4x + 7y = 45, \\ 7x - 3y = 33. \end{cases}$$

5. Raskite visas parametro p reikšmes, su kuriomis tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos

$$\begin{cases} 2px + 3y = 7p, \\ 3px - 2y = 4p \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} 2x - py = 0, \\ 5x + py = 7p \end{cases}$$

yra ekvivalenčios.

6. Užrašykite tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais

$$L_1:\ 3x + 2y = 13 \ \text{ ir } \ L_2:\ 5x - 3y = 9$$

tiesinį darinį $\lambda L_1 + L_2$ ir nubrėžkite jo grafiką Dekarto koordinačių plokštumoje, kai λ reikšmės lygios 2, –1, 3. Raskite tokias λ reikšmes, su kuriomis tiesinio darinio $\lambda L_1 + L_2$ grafikas yra tiesė:
a) einanti per tašką (5; –2);
b) lygiagreti su koordinačių ašimi Oy.

7. Raskite tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemos

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 9, \\ 3x_2 = 6 \end{cases}$$

sprendinių aibę.

8. Gauso metodu išspręskite tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą :

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

Gauso metodu išspręskite tiesinių lygčių su keturiais nežinomaisiais sistemas:

9.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

6. ALGEBRINĖS LYGTYS

Rimantas Skrabutėnas
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

Paprasčiausias pirmojo laipsnio algebrines lygtis su vienu nežinomuoju sprendžiame jau pradinėse klasėse. Vėliau susipažįstame su kvadratinėmis ir aukštesnių laipsnių lygtimis, kurioms spręsti taikome pažymėjimo ar kitokius metodus. Šioje užduotyje Jums siūlome aptarti algebrines lygtis, kurių sprendimas paremtas klasikinės algebros faktais ir nereikalauja kokių nors specifinių, tik tai konkrečiai lygčiai tinkančių samprotavimų. Norime Jums pristatyti, o Jūsų mokytojams, – priminti, kai kuriuos tipinių, bet aukštesnio laipsnio lygčių *su vienu nežinomuoju ir realiaisiais koeficientais* sprendimo metodus. Tikimės, kad patirtis, įgyta sprendžiant pateikiamus uždavinius, ne tik susistemins Jūsų žinias apie algebrines lygtis, bet ir įgalins plačiau pažvelgti į mokykloje nagrinėjamas temas.

Pirmiausia kelios pagrindinės sąvokos.

***n*-tojo laipsnio algebrinės lygties su vienu nežinomuoju** bendrasis pavidalas:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0\,; \qquad (1)$$

čia $a_n \neq 0$, $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ yra realieji skaičiai – lygties koeficientai. Natūralusis skaičius n vadinamas lygties laipsniu (žym. $n = \deg f(x)$. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$).

Algebrinės lygties *sprendinys* tai – skaičius, kurį įstatę į (1) ir atlikę veiksmus, gauname teisingą lygybę. Lygties $f(x) = 0$ sprendiniai vadinami daugianario $f(x)$ *šaknimis*.

Apie skaičių aibes. Kompleksiniai skaičiai

Pirmiausia, visi skaičiai, su kuriais pagal programą susipažįstama mokykloje, yra *realieji.* Jų aibė žymima *R*. Aibę *R* geometriškai interpretuojame *skaičių tiesės* taškais. Aibės *R* poaibiai: natūraliųjų skaičių aibė *N*, sveikųjų skaičių aibė *Z*, racionaliųjų skaičių aibė *Q*. Tačiau aibė *R* netenkina matematikos poreikių, nes joje *nėra pakankamai skaičių*. Tuo norima pasakyti, kad ne visos algebrinės lygtys turi sprendinių. Tokios, pavyzdžiui, yra lygtys:

$$x^2 + 1 = 0\,,\; 2x^2 - 4x + 17 = 0\,.$$

Situacija esminiai keičiasi, jei aibę R išplečiame įvesdami vadinamuosius **kompleksinius skaičius** (sutrumpintai – KS). Formalioji KS teorija užimtų daug laiko, todėl mes pasielkime paprasčiau: KS pavadinkime simbolius $a+ib$, kuriuose a ir b reiškia bet kokius realiuosius skaičius, o raide i žymime vadinamąjį *menamąjį vienetą*, apibrėžiamą kaip dydį, kuriam teisinga lygybė $i^2=-1$. Tad formaliai: $i=\sqrt{-1}$. Kadangi aibėje R tokio skaičiaus nėra, tai i ir yra tas naujo tipo (*kompleksinius*) skaičius generuojantis objektas. KS (simbolių $a+ib$) aibę žymėsime raide K.

Kai $b=0$, tai laikysime, kad $a+i\cdot 0=a$. Todėl $R\subset K$. Du KS $a+ib$ ir $c+id$ laikome *lygiais* tada ir tiktai tada, kai $a=c$ ir $b=d$.

Aritmetiniai veiksmai su KS $a+ib$ ir $c+id$: jų *suma* vadiname KS skaičių $(a+c)+i(b+d)$, *skirtumu* KS $(a-c)+i(b-d)$, jų *sandauga* yra KS $(ac-bd)+i(ad+bc)$. Skaičių $a+ib$ ir $c+id$ santykis yra toks KS $x+iy$, su kuriuo teisinga lygybė $(c+id)\cdot(x+iy)=a+ib$.

Pavyzdžiui, $(1-2i)+(-3+5i)=-2+3i$,

$(1-2i)\cdot(-3+5i)=7+11i$, $(1-i):(1+i)=-i$.

Vokiečių matematiko K.Gauso (Karl-Fridrich Gauss, 1777–1855) įrodyta teorema (dažnai vadinama *pagrindine algebros teorema*, *sutrumpintai:* PAT) tvirtina, kad: *bet kuri* (1) *pavidalo lygtis turi bent vieną* (apskritai – *kompleksinį*) *sprendinį*.

Dvinarės ir kvadratinės lygtys. Yra išvesta formulė, kurios pagalba iš KS $a+bi$ galima traukti n-tojo laipsnio šaknį, kitaip sakant, spręsti dvinarę lygtį: $x^n=a+bi$.

Iš PAT išplaukia, kad ji turi lygiai n sprendinių.

Iki šiol, nustatę, kad kvadratinės lygties diskriminantas yra neigiamas, konstatuodavome: *lygtis sprendinių neturi*. Dabar, remdamiesi PAT, patiksliname: tokia kvadratinė lygtis *neturi realiųjų sprendinių*. Užtat ji turi lygiai du kompleksinius sprendinius. Tuo įsitikiname, taikydami įprastą kvadratinio trinario šaknų radimo formulę.

1 pavyzdys. Lygties $x^2-2x+5=0$ sprendiniai yra $x_{1,2}=1\pm\sqrt{(-1)\cdot 4}=1\pm 2\sqrt{-1}=1\pm 2i$.

KS $a+bi$ ir $a-bi$ vadinami *jungtiniais*. Darome išvadą: *kvadratinė lygtis su realiaisiais koeficientais ir neigiamu diskriminantu turi du jungtinius kompleksinius sprendinius*.

2 pavyzdys. Kadangi $1=1+0\cdot i\in K$, tai dvinarė lygtis $x^3=1$ turi tris sprendinius, kurie yra vadinami *kubinėmis šaknimis iš vieneto*. Tad skaičius $x_1=1$ yra tik viena iš trijų kubinių šaknų iš vieneto! Kitas dvi galima rasti pagal minėtą šaknies traukimo iš KS formulę, arba taip:

$$x^3-1=(x-1)\,(x^2+x+1)\Rightarrow$$

$$x_2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x_3=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Svarbi lygties kompleksinių sprendinių savybė: *jei algebrinės lygties su realiaisiais koeficientais sprendinys yra kompleksinis skaičius* $a+bi$, *tai ir jam jungtinis skaičius* $a-bi$ *yra tos lygties sprendinys*.

Daugianarių dalyba „kampu“

Vieno kintamojo daugianariams, kaip ir sveikiesiems skaičiams, galioja *dalybos su liekana teorema* (DLT): *kiekvienai daugianarių porai* $f(x),\, g(x)\neq O(x)$ (čia $O(x)$ žymime tapatingai lygų nuliui daugianarį), egzistuoja vieninteliai daugianariai $q(x),\, r(x)$ tokie, kad $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$; $q(x)$ vadinamas *nepilnuoju santykiu*, o $r(x)$, – *liekana*. Be to, $\deg r(x)<\deg g(x)$, arba $r(x)=O(x)$. Pastaruoju atveju sakome, kad $f(x)$ *dalijasi iš* $g(x)$ ir rašome: $g(x)\,|\,f(x)$, arba kitaip: $f(x)\,\vdots\, g(x)$. Daugianarių dalybos algoritmas primena sveikųjų skaičių dalybą „kampu“.

1 pavyzdys. Kai $f(x)=x^5-3x^2+2$, o $g(x)=x^3-3x^2+2$, tai $q(x)=x^2+3x+9$, o $r(x)=22x^2-6x-16$. Rašome:

$$f(x)=(x^5-3x^2+2)\cdot(x^2+3x+9)+22x^2-6x-16\,.$$

2 pavyzdys. Kai $f(x)=x^4-3x^2+2$, o $g(x)=x-1$, tai $q(x)=x^3-2$, o $r(x)=O(x)$, t.y. $x-1\,|\,x^4-3x^2+2$. Rašome:

$$x^4-3x^2+2=(x-1)(x^3-2).$$

Atskiru atveju, kai $g(x)=x-c,\ c\in R$, tai $f(x)=q(x)(x-c)+r$, t.y. liekana r yra tiesiog skaičius. Iš čia išplaukia vadinamoji *Bezu teorema* (E.Bezout, 1730–1783).

Liekana, gauta dalijant daugianarį $f(x)$ *iš dvinario* $x-c$*, lygi* $f(c)$*. Jei skaičius* $c \in R$ *yra n-tojo laipsnio daugianario* $f(x)$ *šaknis, tai egzistuoja toks daugianaris* $q(x)$*,* $\deg q(x) = n-1$*, kad* $f(x) = (x-c)\,q(x)$.

Vijeto teorema (Francois Viete, 1540–1603)

Lengvai įrodomas žinomos *Vietos teoremos* bendrinys. Pvz, kai $n=3$, tai daugianaris $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ turi tris šaknis, tarkime, $x_1,\ x_2,\ x_3$, tai

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = -a\,,\\
&x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b\,,\\
&x_1x_2x_3 = -c\,.
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Dabar aptarsime (1) lygties sprendimo būdus, kai lygties koeficientai – realieji skaičiai, o $n \geq 3$.

Kubinės lygtys. Dar XVI a. italų matematikas *Kardano* (*Geronimo Cardano*, 1501–1576) surado bendrosios kubinės lygties

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,,\ a \neq 0\,,\ a,b,c,d \in R \qquad (3)$$

sprendimo metodą. Kardano išvedė formules, kurios visus tris kubinės lygties sprendinius išreiškia per jos koeficientus.

Kardano teorema. *Kiekviena* (3) *pavidalo lygtis turi tris sprendinius* (*jų tarpe gali būti kartotinių, – lygių tarpusavyje*). *Bent vienas iš sprendinių yra realusis*.

Įrodymas. Kad būtų kiek paprasčiau, susitarkime nagrinėti jau *redukuotą* kubinę lygtį:

$$y^3 + py + q = 0\,,\ p,q \in R\,. \qquad (4)$$

(Kiekvieną (3) lygtį galima suvesti į (4) pavidalą dviem pertvarkiais – keitiniu $x = y - \dfrac{b}{3a}$ ir abiejų lygties pusių dalyba iš $a \neq 0$). Tuokart $y = u + v$, o kompleksiniai skaičiai *u* ir *v* randami iš Kardano išvestų formulių:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}\,,\ v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}\ . \qquad (5)$$

Čia skaičius $D := \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}$ vadinamas kubinės lygties (4) *diskriminantu*.

Bendruoju atveju iš (5) formulių gaunamos sprendinio y dedamosios dalys u ir v turi būti taip suderintos, kad tenkintų papildomą sąlygą

$$3uv = -p\,. \tag{6}$$

Panašiai kaip ir kvadratinės lygties atveju, atsakymas priklauso nuo to, koks yra (4) lygties diskriminantas D ($D > 0$, $D = 0$ ar $D < 0$). Pirmi du atvejai nėra sudėtingi. Kardano surasti atsakymai yra tokie.

1. Kai $D \geq 0$, tai *realieji* (!) skaičiai

$$u_0 := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}\ ,\ v_0 := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$$

tenkina (6) sąlygą (įsitikinkite tuo juos daugindami) , o *realusis* (4) lygties sprendinys yra

$$y_1 = u_0 + v_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}\ . \tag{7a}$$

Kitus du sprendinius galima rasti pasinaudojus dalybos *„kampu“* patirtimi, arba Kardano rastomis jų išraiškomis

$$y_{2,3} = -\frac{u_0 + v_0}{2} \pm \frac{u_0 - v_0}{2}\sqrt{3}\, i\,. \tag{7b}$$

2. Atvejis $D < 0$ Kardano amžininkams atrodė labai komplikuotai. Mat tada, apskaičiuojant (4) lygties sprendinius tenka traukti kvadratinę šaknį iš neigiamo skaičiaus: atsakymai yra tarpusavyje jungtiniai KS. Ilgai matematikai nemokėjo rasti realiojo tokios kubinės lygties sprendinio, nors ir žinojo, kad jis egzistuoja. Šis atvejis buvo pavadintas *Casus irreduciblis* ir buvo daugelio 15–16a. matematikų nesėkmingų tyrinėjimų objektu, kol tas pats prancūzų matematikas Franciskas Vieta (*F.Viete*, 1540–1603) pateikė išsamų šio atvejo aprašymą – sprendimą.

Teorema. *Redukuota kubinė* (4) *lygtis su realiaisiais koeficientais* p, q *visada turi bent vieną realų sprendinį. Kai* $D > 0$, *– kiti du sprendiniai yra tarpusavyje jungtiniai KS. Kai* $D \leq 0$ *– visi trys lygties* (4) *sprendiniai yra realieji skaičiai*.

Taigi atveju $D < 0$, visi trys sprendiniai yra realieji. Jiems rasti F.Vieta išvedė formules, kurių, taupydami vietą, detaliai neaprašinėsime. Pateikiame supaprastintą tų formulių variantą.

Kai $D < 0$, tai $p < 0$, o $-D > 0$. Tada iš (5) turime:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + i\sqrt{-D}}\ ,\ v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - i\sqrt{-D}}\ ,$$

o iš čia, atsižvelgiant į (6), išvedama, kad (4) lygties sprendiniai yra realieji skaičiai:

$$y_1 = 2r\cos\frac{\varphi}{3},\ y_2 = 2r\cos\frac{\varphi+2\pi}{3}\ \text{ir}\ y_3 = 2r\cos\frac{\varphi+4\pi}{3}. \qquad (8)$$

Čia $r = \sqrt{-\frac{p}{3}}$, o kampui φ nustatyti (kai $q \neq 0$) galima naudoti tokią taisyklę:

kai $q > 0$, tai $\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{-D}}{q}$,

kai $q < 0$, tai $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{-D}}{-q}$.

Pavyzdžiai. 1. Kardano formulių pagalba išspręskime kubinę lygtį: $x^3 + 3x^2 - 3x - 9 = 0$.

Po standartinio pakeitimo $x = y - 1$ gauname atitinkamą redukuotą lygtį: $y^3 - 6x - 4 = 0$. Jos $D = -4 < 0$, todėl taikysime (8) formules. Turime: $p = -6$, $q = -4 < 0$, $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{4}}{4} = \frac{\pi}{4}$. Tad:

$$y_1 = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3},$$

$$y_2 = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right) = -2,$$

$$y_3 = 1-\sqrt{3}.$$

Ats.: $x_1 = 1+\sqrt{3}-1 = \sqrt{3}$; $x_2 = -2-1 = -3$; $x_3 = -\sqrt{3}$.

2. Dar išspręskime lygtį: $8x^3 + 12x^2 + 54x + 9 = 0$. Pakeitimas $x = y - \frac{1}{2}$. Redukuota lygtis $y^3 + 6y - 2 = 0$. Čia $p = 6,\ q = -2$, $D = 9 > 0$, todėl taikome (7*a*, *b*) formules. Gauname:

$$u_0 = \sqrt[3]{-\frac{-2}{2}+\sqrt{\frac{2^2}{4}+\frac{6^3}{27}}} = \sqrt[3]{1+3} = \sqrt[3]{4},\ v_0 = \sqrt[3]{1-3} = -\sqrt[3]{2};$$

$$y_1 = u_0 + v_0 = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}\,,\ y_{2,3} = -\frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}{2} \pm \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{2} \cdot i \cdot \sqrt{3}\,.$$

Tuomet, pavyzdžiui, $x_1 = y_1 - \frac{1}{2} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} - \frac{1}{2}$.

Ketvirtojo laipsnio lygtys

Italų matematikas *Feraris* (Lodovico Perrari (1522–1565) rado ir bendrosios ketvirtojo laipsnio lygties

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,,\ a, b, c, d \in R \tag{9}$$

sprendimo algoritmą.

F**errari teorema**. *Kiekviena* (9) *pavidalo lygtis turi keturis sprendinius* – jų tarpe gali būti kartotinių.

Metodo idėja - išskaidyti (9) lygties kairę pusę į dviejų kvadratinių trinarių sandaugą. Pasirodo, kad tai *visada galima padaryti.*

Pažymėkime raide t kol kas nežinomą parametrą ir užrašykime (9) lygtį taip:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + t\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} + 2t - b\right)x^2 + (at - c)\,x + (t^2 - d)\,. \tag{10}$$

Pareikalaukime, kad dešinėje pusėje užrašytas kvadratinis (x atžvilgiu) trinaris būtų pilnasis kvadratas. Tam tereikia, kad jo diskriminantas būtų lygus nuliui, t.y.

$$(at - c)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} + 2t - b\right)(t^2 - d) = 0\,. \tag{11}$$

Kitaip sakant, reikia, kad skaičius t būtų (11) kubinės lygties (vadinamos (9) lygties *rezolvente*) sprendinys. Iš *Kardano teoremos* žinome, kad bent vienas iš trijų sprendinių yra realusis. Pažymėkime jį t_0. Tada (10) lygtį galėsime užrašyti šitaip:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + t_0\right)^2 - (\alpha\, x + \beta)^2 = 0\,.$$

Koeficientai α, β išreiškiami skaičiais a, b, c, d ir t_0.

Iš čia, suskaidę, gauname, kad (9) lygtis ekvivalenti *lygčių visumai*

$$\left[\ x^2 + \frac{a}{2}x + t_0 = \alpha x + \beta,\ x^2 + \frac{a}{2}x + t_0 = -\alpha x - \beta. \right. \tag{12}$$

Išsprendę jas, rasime visus keturis (9) lygties sprendinius. Aišku, tarp jų gali būti lygių tarpusavyje (kartotinių).

Kad būtų paprasčiau, mes imsime tik tokias lygtis, kurioms skaičiai α, β yra realieji.

Pavyzdžiui, išspręskime lygtį $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$.

Užrašome ją (10) pavidalu:

$$(x^2 - 2x + t)^2 = (2t+1)x^2 - (4t+2)x + (t^2+1) .$$

Jos rezolventė tokia: $-8t^3 + 12t^2 + 8t = 0$. Nebūtina ją spręsti Kardano metodu. Perskaitę visus čia pateikiamus patarimus, neretai galėsite bent vieną rezolventės sprendinį rasti gerokai paprasčiau.

Matome, kad šiuo atveju vienas iš sprendinių yra $t_0 = 0$. Todėl pradinės lygties (10) pavidalas yra

$$(x^2 - 2x)^2 = x^2 - 2x + 1 .$$

Iš čia gauname dvi kvadratines lygtis:

$$x^2 - 2x = x - 1,\ \ x^2 - 2x = -x + 1$$

Jų sprendiniai atitinkamai yra $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ ir $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ats.: $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Sangrąžinės algebrinės lygtys

Apibrėžimas. n-ojo laipsnio daugianaris

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \ \ (a_k \in R, k = 0, 1, 2, \ldots, n;\ a_n \neq 0)$$

yra vadinamas *pirmojo tipo sangrąžiniu daugianariu*, jeigu jo koeficientai tenkina sąlygas $a_k = a_{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Šį daugianarį žymėsime $f_n^+(x)$.

Apibrėžimas. n-ojo laipsnio daugianaris

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \ \ (a_k \in R, k = 0, 1, 2, \ldots, n;\ a_n \neq 0)$$

yra vadinamas *antrojo tipo sangrąžiniu daugianariu*, jeigu jo koeficientai tenkina sąlygas $a_k = -a_{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Šį daugianarį žymėsime $f_n^-(x)$.

Pavyzdžiui, $f_5^+(x) = -2x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 3x - 2$.

Apibrėžimas. Daugianaris $f_n^-(x) \in R[x]$ vadinamas *sangrąžiniu antrojo tipo daugianariu*, jei jo koeficientai a_k tenkina sąlygas: $a_k = -a_{n-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Pavyzdžiui, $f_6^-(x) = \sqrt{2}x^6 + 3x^5 - 7x^4 + 7x^2 - 3x - \sqrt{2}$.

Nesunku parodyti, kad *pirmojo ir antrojo tipo sangrąžines lygtis* $f_n^+(x) = 0$ bei $f_n^-(x) = 0$ tinkamu keitiniu galima suvesti į bent dvigubai mažesnio laipsnio lygtis. Taip praplečiant pagal formules (kartais sakoma – *radikalais*) išsprendžiamų algebrinių lygčių aibę.

1. Bet kurio tipo sangrąžinės lygties sprendimą galima suvesti į *pirmojo tipo lyginio laipsnio lygties* ($n = 2\,m$) sprendimą:

– *antrojo tipo lyginio laipsnio* lygtis $f_{2m}^-(x) = 0$ visada turi sprendinius $x_{1,2} = \pm 1$. Todėl $f_{2m}^-(x) = (x^2 - 1)\, g_{2m-2}^+(x)$.

Be to, $g_{2m-2}^+(x)$ yra jau *pirmojo tipo sangrąžinis* lyginio laipsnio daugianaris;

– *pirmojo tipo nelyginio laipsnio* lygtis $f_{2m+1}^+(x) = 0$ visada turi sprendinį $x_1 = -1$. Todėl $f_{2m+1}^+(x) = (x + 1)\, h_{2m}^+(x)$, vėlgi su *pirmojo tipo sangrąžiniu* lyginio laipsnio daugianariu $h_{2m}^+(x)$;

– pagaliau *antrojo tipo nelyginio laipsnio* sangrąžiniam daugianariui: $f_{2m+1}^-(x) = (x - 1)\, d_{2m}^+(x)$ su *pirmojo tipo sangrąžiniu* lyginio laipsnio daugianariu $d_{2m}^+(x)$.

2. Lieka aptarti pirmojo tipo lyginio laipsnio $f_{2m}^+(x) = 0$ lygties sprendimo metodą.

Sugrupavę $f_{2m}^+(x)$ narius su vienodais koeficientais ir įvedę keitinį $x + \dfrac{1}{x} = z$, turėsime:

$$f_{2m}^+(x) = a_0 x^m \left(x^m + \frac{1}{x^m} \right) + a_1 x^m \left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}} \right) + \dots +$$

$$+ a_{m-1} x^m \left(x + \frac{1}{x} \right) + a_m x^m =$$

$$= x^m (a_m + a_{m-1}z + a_{m-2}(z^2 - 2) + ... + a_0(z^m - ...)) =$$
$$= x^m (Az^m + Bz^{m-1} + ... + Cz + D).$$

Kadangi $x = 0$ nėra lygties $f_{2m}^{+}(x) = 0$ sprendinys, tai gauname jau tik m-tojo laipsnio lygtį:

$$Az^m + Bz^{m-1} + ... + Cz + D = 0,\ A, B, ...C, D \in R.$$

Jei pastarąją lygtį spręsti mokame (pvz, jei $m \le 4$), tai, radę jos sprendinius $z_1, ..., z_m$, gauname m kvadratinių lygčių $x + \frac{1}{x} = z_k$, $k = 1, 2, ..., m$, o iš čia $2m$ pradinės lygties sprendinių $x_1, ..., x_{2m}$.

Pavyzdžiui, aptarkime lygtį

$$x^{10} + 2x^9 + x^8 + 3x^7 + x^6 - x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Tai – antrojo tipo lygtis. Ji turi sprendinius $x = \pm 1$, todėl, padaliję iš dvinario $x^2 - 1$, suvedame ją į lygtį

$$x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 5x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0,$$

o tai – jau pirmojo tipo lyginio laipsnio lygtis. Padalijame iš x^4 ir sugrupuojame kaip nurodyta:

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + 2\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0.$$

Pažymėję $x + \frac{1}{x} = z$ ir pastebėję, kad $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$,

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = z^3 - 3z, \quad x^4 + \frac{1}{x^4} = z^4 - 4(z^2 - 2) - 6 = z^4 - 4z^2 + 2,$$

gauname $z^4 + 2z^3 - 2z^2 - z + 1 = 0$.

Tai *Ferrari metodu* išsprendžiama lygtis.

Lygtys su racionaliaisiais koeficientais

Aptarsime, kaip randami lygčių su *racionaliaisiais koeficientais racionalieji sprendiniai*. Pastebėsime, kad daugianarį padauginus iš skaičiaus $c \ne 0$, jo šaknys nesikeičia. Pavyzdžiui, daugianariai

$f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{6}{7}x-\frac{3}{14}$ su racionaliaisiais koeficientais ir $14f(x)=$ $=7x^4-12x-3$ su sveikaisiais koeficientais turi tas pačias šaknis.

Kai daugianario $f(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$ koeficientų ($a_k \in Z$, $k=0,1,2,...,n$) didžiausias bendras daliklis $D(a_n, a_{n-1}, ..., a_0)$ yra lygus 1, tai ieškant jo racionaliųjų šaknų galima verta pasinaudoti tokia teorema.

R1 teorema. *Jei nesuprastinama trupmena* $\frac{l}{m}$ *yra* $f(x)$ *racionalioji šaknis, tai* $l \mid a_0$, o $m \mid a_n$.

Pastebėsime, kad atvirkščias tvirtinimas, nėra neteisingas. Tačiau yra teisinga tokia „pretendentus“ į šaknis „rūšiuojanti“ teorema.

R2 teorema. *Jei nesuprastinama trupmena* $\frac{l}{m} \in Q$ *yra daugianario* $f(x)$ su sveikaisiais koeficientais, $D(a_n, a_{n-1}, ..., a_0)=1$ *šaknis, tai su visais sveikaisiais* k (*tokiais, kad* $l-km \neq 0$) *yra teisingas teiginys*: $l-km \mid f(k)$.

Atkreipiame dėmesį: iš sąlygos $(l-km) \mid f(k)$ neišplaukia, jog $f\left(\frac{l}{m}\right)=0$. Pavyzdžiui, jei spręstume lygtį

$$8x^7-12x^6+22x^5-25x^4+20x^3-14x^2+6x-1=0,$$

tai iš pradžių patikrintume, ar ji neturi racionaliųjų sprendinių. Pagal R1 teoremą, jais tegali būti skaičiai: $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$. Visų jų tikrinti įrašant į lygtį nėra reikalo. Apskaičiuojame daugianario $f(x)$ reikšmę su bet kuriuo $k \in Z$. Paprastai (iš pradžių) imama $k=\pm 1$. Mūsų atveju $f(1)=4$, $f(-1)=108$. Pagal R2 teoremą šaknimis gali būti tik tie skaičiai $\frac{l}{m}$, kuriems $(l-m) \mid 4$ ir $(l+m) \mid 108$. $\frac{l}{m}=\frac{1}{8}$, bet $1-8=$ $=-7 \nmid 4$. Išvada: $\frac{1}{8}$ nėra lygties sprendinys. Netinka ir $-\frac{1}{8}, \pm\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$, nes $-1-8=-9 \nmid 4$, $1-4=-3 \nmid 4$, $-1-4=-5 \nmid 4$, $-1-2=-3 \nmid 4$.

Tačiau ir $1-2=-1\,|\,4$, ir $1+2=3\,|\,108$, todėl $\frac{1}{2}=0{,}5$ gali būti sprendinys. Tad iš pretendentų sąrašo liko tik $0{,}5$. Įstatę į lygtį, įsitikiname, kad $f(0{,}5)=0$. Išvada: duotoji lygtis turi racionalųjį sprendinį $0{,}5$. Padaliję $f(x)$ iš dvinario $2x-1$, gauname šeštojo laipsnio lygtį:

$$4x^6-4x^5+9x^4-8x^3+6x^2-4x+1=0,$$

kurios sprendimo tęsinio lyg ir nesimato. Tačiau atsiminkime, kad lygties sprendinys gali būti kartotinis! (Žinoma, tereikia tikrinti jau surastus racionaliuosius sprendinius). Pasirodo, skaičius 0,5 tenkina ir šią lygtį, todėl jis yra bent jau *antrojo kartotinumo* sprendinys. Vėl padaliję iš dvinario $2x-1$, gauname lygtį: $2x^5-x^4+4x^3-2x^2+2x-1=0$.

Skaičius 0,5 yra ir šios lygties sprendinys… Dalijame dar kartą ir gauname: $x^4+2x^2+1=0$ arba kitaip: $(x^2+1)^2=0$.

Šios lygties sprendiniai yra kompleksiniai skaičiai i ir $-i$, o iš skaidinio matome, kad abu jie antrojo kartotinumo. Visi septyni lygties sprendiniai yra: 0,5; 0,5; 0,5; i; i; $-i$; $-i$.

Algebrinėms lygtims $f(x)=0$ spręsti naudojami ir kiti metodai. Kai nė vienu iš jų lygties sprendinių rasti nepavyksta, tai kompiuteriu lygtį galima išspręsti *apytikriai* reikalingu tikslumu.

Kai didelio tikslumo nereikia, kartais naudojamas *grafinis* algebrinių lygčių sprendimo būdas.

Toliau logiška būtų ieškoti aukštesnio negu ketvirtojo laipsnių lygčių sprendimo metodų. Istoriškai taip ir buvo – įvairių šalių matematikai XVI–XVIII a. ieškojo Kardano ir Ferrari metodų analogų lygtims, kurių laipsnis $n \geq 5$. Tačiau visi bandymai buvo nesėkmingi. Tada imta galvoti kitaip: ar apskritai yra formulės, tarkime, bendriausios penktojo laipsnio algebrinės lygties sprendiniams rasti?

1824 m. norvegų matematikas *N. Abelis* (*Niels Henrik Abel*, 1802–1829) parodė, kad atsakymas į šitaip formuluojamą klausimą yra *neigiamas*. Kita vertus, akivaizdu, kad atskiroms (pvz, dvinarėms) lygtims tokios formulės tikrai egzistuoja. Imta domėtis, kokių tipų lygtims tas formules visgi galima rasti? Talentingas prancūzų matematikas *E.Galua* (*Evariste Galois*, 1811–1832) išvystė bendrą teoriją (*Galua teoriją*), kuria išsamiai atsakė į šį klausimą. Bet tai jau gilesnių matematikos studijų tematika.

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Išspręskite lygtį $2x^3 - 7x^2 + ax = 0$, kai a reiškia Jūsų amžių (metais). Raskite visus tris jos sprendinius.

2. Taikydami Kardano formules, raskite visus tris kubinės lygties $x^3 + 3x^2 - 3x + 4 = 0$ sprendinius.

3. Kiek realiųjų sprendinių turi kubinė lygtis $2x^3 + 3x^2 - 6x - 9 = 0$? Raskite juos.

4. Įrodykite, kad daugianaris $(x-2)^{2003} - (x-1)^{3002} + 1$ dalijasi iš trinario $x^2 - 3x + 2$.

5. Ferrari metodu išspręskite ketvirtojo laipsnio lygtį
$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 6 = 0.$$

6. Išspręskite algebrinę lygtį $x^{16} - 4x^{12} - x^8 + 10x^4 + 6 = 0$, suvesdami ją į nedidesnio kaip ketvirtojo laipsnio lygtis. Kiek sprendinių yra iš viso? Kiek tarp jų yra realiųjų?

7. Išspręskite antrojo tipo sangrąžinę lygtį
$$x^8 + 3x^7 - 3x^6 + 4x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0.$$

8. Žinoma, kad vienas iš lygties
$$x^7 - 6x^6 + 14x^5 - 13x^4 - x^3 + 14x^2 - 14x + 5 = 0$$
sprendinių yra kompleksinis skaičius $2 - i$. Raskite likusius šešis.

9. Su kokia parametro c reikšme dviejų kubinės lygties
$$x^3 - 20x + c = 0$$
sprendinių sandauga lygi trečiajam jos sprendiniui? Raskite tuos sprendinius.

10. Išspręskite lygtį $f(x) = 0$, iš pradžių rasdami jos racionaliuosius sprendinius, kai $f(x) = 6x^6 - 17x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 23x^2 + 4x - 4$.

7. BRĖŽIMO UŽDAVINIAI

Vladas Vitkus
(Vilniaus „Minties“ gimnazija)

Brėžimo uždavinyje reikalaujama nubraižyti kurią nors geometrinę figūrą nurodytais braižymo įrankiais. Dažniausiai tie įrankiai yra liniuotė be padalų ir skriestuvas. Liniuote galima nubraižyti tiesę, spindulį, atkarpą, tiesę, einančią per duotąjį tašką, arba per du duotus taškus. Ja neleidžiama daryti kitų veiksmų, pavyzdžiui, matuoti atkarpų. Skriestuvu galima nubrėžti apskritimą, lanką, duotoje tiesėje nuo duoto taško galima atidėti atkarpą, lygią duotajai atkarpai.

Kartais nurodoma, kad brėžimo uždavinį reikia atlikti vien tik liniuote arba vien tik skriestuvu. Šioje užduotyje tokių uždavinių nenagrinėsime.

Tiek planimetrijos, tiek stereometrijos brėžimo uždaviniai sprendžiami pagal tokią schemą: analizė, brėžimas, įrodymas, tyrimas.

Analizė – tai brėžimo plano sudarymas. Tarus, kad uždavinys jau išspręstas, nusibraižomas apytikslis ieškomos figūros brėžinys ir stengiamasi rasti tokius uždavinio duomenų sąryšius, kurie leidžia sprendimą pradėti nuo anksčiau išmoktų paprasčiausių brėžimo uždavinių atlikimo.

Brėžimas – tai tiesioginis figūros braižymas bei jo žingsnių aprašymas. Paprasčiausio uždavinio atlikimas laikomas vienu brėžimo žingsniu. Tokiais vieno žingsnio paprasčiausiais uždaviniais laikysime:

- atkarpos dalijimą pusiau;
- statmenos tiesės per duotąjį tašką brėžimą;
- kampo pusiaukampinės brėžimą;
- kampo, lygaus duotajam, atidėjimą;
- trikampio braižymą pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų, pagal kraštinę ir du kampus prie jos, pagal tris kraštines;
- apskritimo liestinės nubrėžimą;
- apskritimo apibrėžimą apie trikampį;
- apskritimo įbrėžimą į trikampį ir kt.

Įrodymas – tai įsitikinimas, kad nubrėžtoji figūra atitinka visus sąlygos reikalavimus. Įrodoma remiantis žinomomis aksiomomis ir teoremomis.

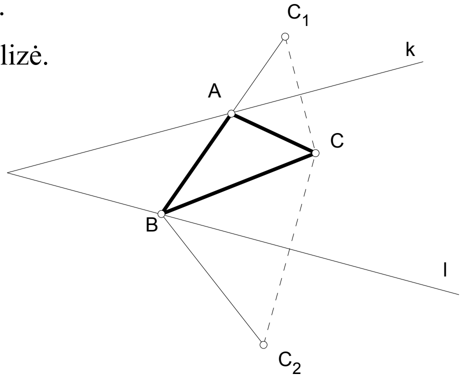
Tyrimas – tai nagrinėjimas, kokie turi būti duomenys, kad uždavinys turėtų sprendinį, kiek sprendinių turi uždavinys, kada nebus sprendinių.

Nebūtina, sprendžiant kiekvieną uždavinį, išskirti visus keturis etapus: kartais aišku kaip reikia braižyti ir be analizės, kai kada įrodoma jau analizėje arba braižant, dažnai praleidžiamas tyrimas.

Pateikiame keletą brėžimo uždavinių sprendimo pavyzdžių.

1 pavyzdys. Kampo $\angle$ (kl) viduje duotas taškas C. Raskite kampo kraštinėse po tašką A ir B, kad trikampio ABC perimetras būtų mažiausias.

I. Analizė.

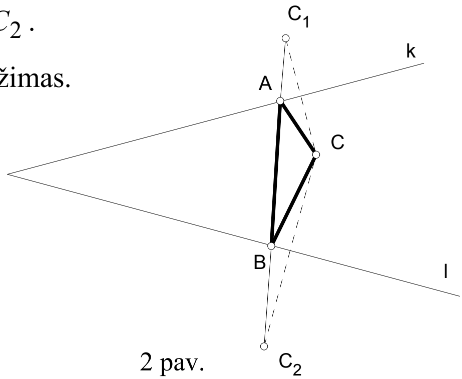


1 pav.

Tegul taškai $A \in k$ ir $B \in l$ tokie, kad $CA+AB+BC$ yra mažiausias. Nubrėžkime taškui C simetriškus taškus C_1 ir C_2 kampo kraštinių k ir l atžvilgiu. Kadangi k yra atkarpos CC_1 vidurio statmuo, tai $CA = C_1A$. Analogiškai $BC = BC_2$. (1 pav.).

Vadinasi, $CA + AB + BC = C_1A + AB + BC_2$. Kadangi C_1 ir C_2 pastovūs, tai laužtė $C_1A + AB + BC_2$ bus trumpiausia, kai imsime atkarpą C_1C_2 .

II. Brėžimas.

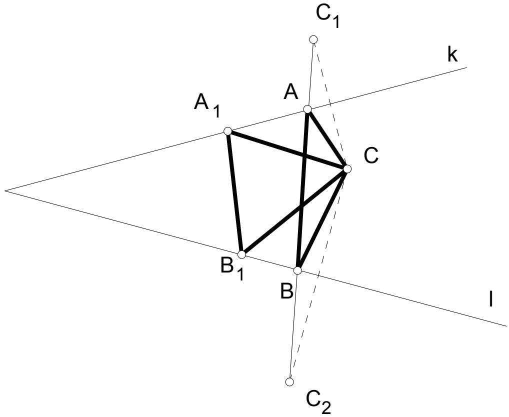


2 pav.

1. $k(C) = C_1$ (taškas C_1 simetriškas taškui C tiesės k atžvilgiu);
2. $l(C) = C_2$;
3. C_1C_2;
4. $C_1C_2 \cap k = A$;
5. $C_1C_2 \cap l = B$.

ΔABC perimetras yra mažiausias (2 pav.).

III. Įrodymas.



3 pav.

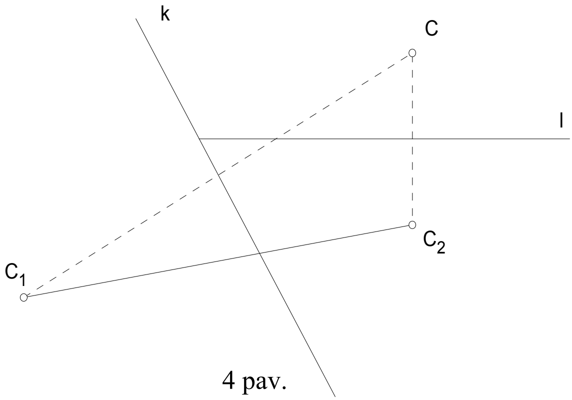
Imkime bet kurį kitą tašką A_1 kraštinėje k ir – tašką B_1 kraštinėje l (3 pav.).

Kadangi $CA_1 = C_1A_1$ ir $B_1C = B_1C_2$, tai

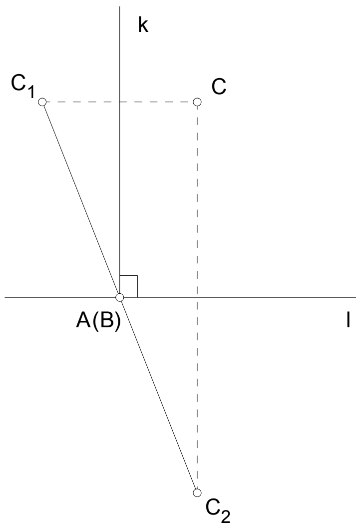
$$C_1A_1 + A_1B_1 + B_1C = C_1A_1 + A_1B_1 + B_1C_2 > C_1C_2 = CA + AB + BC.$$

IV. Tyrimas. Kai $\angle(kl)$ smailusis, uždavinys visada turės vieną sprendinį. Kai $\angle(kl)$ bukasis, tai atkarpa C_1C_2 kerta vienos kampo kraštinės tęsinį, kitos kraštinės nekerta ir sąlygą tenkinančių taškų negauname (4 pav.).

Kai $\angle(kl)$ statusis, tai abu taškai A ir B sutampa su kampo viršūne ir trikampis „išsigimsta“ į atkarpą (5 pav.).



4 pav.

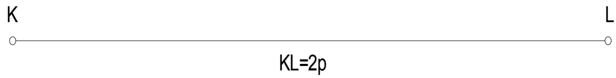


5 pav.

2 pavyzdys.

Per smailiojo kampo A vidaus tašką M nubrėžkite tiesę, kuri atkirstų duotojo perimetro $2p$ trikampį (6 pav.).

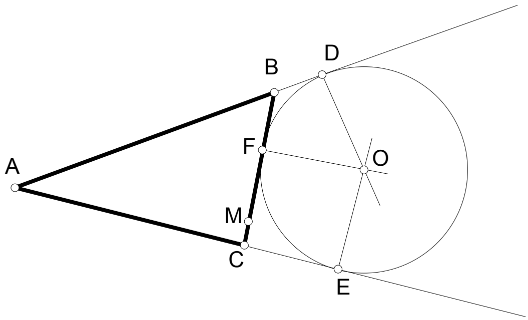
Duota: $\angle A$, M – kampo A vidaus taškas,



6 pav.

Nubrėžti: ΔABC, kad $P_{ABC} = 2p$.

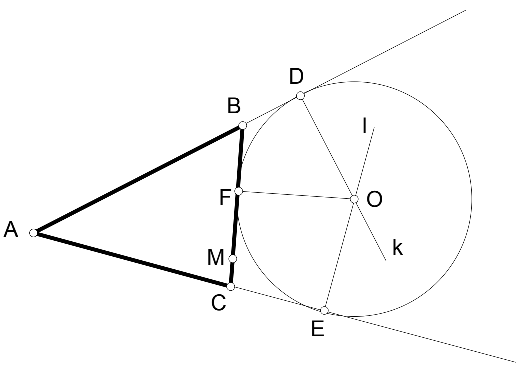
I. Analizė.



7 pav.

Sakysime, kad nubrėžtas trikampis ABC, kurio $AB + BC + CA = 2p$ ir $M \in BC$. Nubrėžkime apskritimą, kuris liestų trikampio kraštinę BC ir kitų dviejų kraštinių tęsinius. Lietimosi taškus pažymėkime F, D ir E. Iš to paties taško nubrėžtų apskritimo liestinių dalys yra lygios: $BD = BF$, $CE = CF$ ir $AD = AE$. Tada $AB + BC + CA = AB + BF + FC + AC =$ $= AB + BD + AC + CE = AD + AE = 2AD = 2p$. Vadinasi, $AD = AE =$ $= p$ (7 pav.).

II. Brėžimas.



8 pav.

1. Duotojo kampo A kraštinėse atidedame $AD = AE = p$.
2. Brėžiame $k \perp AD$, $D \in k$ ir $l \perp AE$, $E \in l$.
3. $k \cap l = O$.
4. Nubrėžiame apskritimą $w(O;\ OD)$.
5. Per duotąjį tašką M išvedame apskritimui liestinę BC, $B \in AD$, $C \in AE$.

ΔABC ieškomasis (8 pav.).

III. Įrodymas. Analizėje įrodėme, kad

$$AB + BC + CA = AD + AE = 2p.$$

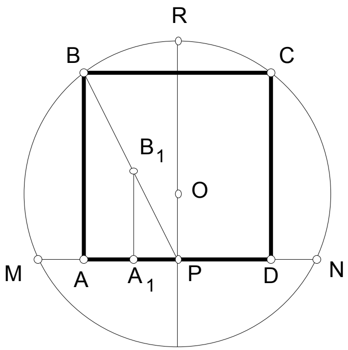
Taškas $M \in BC$ pagal brėžimą.

IV. Tyrimas. Uždavinys turės:

- du sprendinius, kai M bus srities, apribotos atkarpų AD, AE ir lanko DFE vidaus taškas;
- vieną sprendinį, kai $ME \in \cup DFE$;
- neturės sprendinių, kai M nepriklauso minėtai sričiai.

Kai kuriems brėžimo uždaviniams taikomas panašumo metodas. Nekreipiant dėmesio į kurį nors sąlygos reikalavimą, pirmiausia nubraižoma ieškomai figūrai panaši figūra, o po to papildoma iki norimo brėžinio.

3 pavyzdys. Į skritulio nuopjovą įbrėžkite kvadratą, kurio dvi viršūnės būtų ant stygos, o kitos dvi ant lanko.



9 pav.

I. Analizė. Sakykime, kad $ABCD$ į skritulio nuopjovą įbrėžtas kvadratas. Nubrėžiame skersmenį PR, statmeną stygai MN. PR yra kvadrato simetrijos ašis.

$$AP = PD = \frac{1}{2}AB.$$

Vadinasi, $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{2}$.

Imkime $A_1 \in AP$ ir iš jo iškelkime statmenį A_1B_1 stygai MN.

$A_1B_1 \cap BP = B_1$. $\Delta A_1B_1P \sim \Delta ABP$, todėl $\frac{A_1P}{A_1B_1} = \frac{AP}{AB} = \frac{1}{2}$. Vadinasi, brėžimą galima pradėti nuo stačiojo trikampio A_1B_1P braižymo (9 pav.).

II. Brėžimas. (brėžinys analizėje 9 pav.).

1. Atidedame $MP = PN$ ir brėžiame $PR \perp MN$.
2. Imame $A_1 \in MN$, brėžiame $A_1B_1 \perp MN$ ir atidedame $A_1B_1 = 2A_1P$.
3. Brėžiame PB_1, $PB_1 \cap \cup MRN = B$.
4. $BA \perp MN$, $BA \cap MN = A$.
5. $BC \,||\, MN$, $BC \cap \cup MRN = C$.
6. $CD \perp MN$, $CD \cap MN = D$.

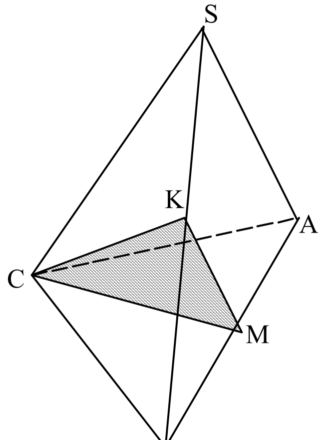
III. Įrodymas.

Pagal brėžimą statieji trikampiai A_1B_1P ir ABP panašūs ir $\frac{A_1P}{A_1B_1} = \frac{AP}{AB} = \frac{1}{2}$.

Be to, pagal brėžimą A su D ir B su C yra simetriški skersmens QR atžvilgiu. Todėl $AP = PD$ ir $AD = AB$.

$AB = CD$, $BC = AD$. Vadinasi, $AB = BC = CD = DA$ ir kampai statūs, todėl $ABCD$ – kvadratas.

IV.Tyrimas.



10 pav.

Jei skritulio nuopjovos lankas yra didesnis už $\frac{3}{4}$ apskritimo lanko, tai uždavinys neturės sprendinio.

4 pavyzdys. Nubraižykite tetraedro *SABC* pjūvį, gautą, perkirtus jį plokštuma, kuri yra lygiagreti briaunai *SA* ir kurioje yra pagrindo pusiaukraštinė *CM*.

I. Analizė. Sakykime, kad ieškomasis pjūvis *CMK* yra nubraižytas. Kadangi $SA \,||\, (CMK)$, tai plokštuma *ABS* eina per tiesę *SA*, lygiagrečią pjūvio plokštumai ir kerta ją. Vadinasi, $MK \,||\, SA$ (10 pav.).

II. Brėžimas.

1. Atidedame $AM = BM$.
2. Brėžiame $MK \,||\, SA,\ K \in SB$.
3. Tašką *C* sujungiame su *K* ir su *M*.
   ΔCMK – ieškomas pjūvis.

III. Įrodymas.

$CM \subset (CMK)$ – pagal brėžimą.

$SA \,||\, (CMK)$, nes $SA \,||\, MK$ (brėžėme) ir $MK \subset (CMK)$.

IV. Tyrimas.

Uždavinys turi vienintelį sprendinį, nes visi brėžimo žingsniai atliekami vienareikšmiškai:

1) atkarpa *AB* turi tik vieną vidurio tašką *M*;
2) egzistuoja tik vienas šios tiesės susikirtimo taškas *K* su briauna *SB*;
3) per tris taškus *C*, *M*, *K*, nesančius vienoje tiesėje, eina vienintelė plokštuma.

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1. Nubrėžkite lygiašonį trikampį, kai duotas jo perimetras ir į pagrindą nuleista aukštinė.

2. Nubrėžkite statųjį trikampį, kai duotos dvi jo pusiaukraštinės m_a ir m_c (raide *c* pažymėta įžambinė).

3. Nubrėžkite lygiašonį trikampį, kai duotas kampas prie viršūnės α ir pagrindo bei aukštinės, nuleistos į pagrindą, suma *s*.

4. Nubrėžkite trikampį, kai duotos kraštinės *a*, *b* ir žinoma, kad kampas *A* trigubai didesnis už kampą *B*.

5. Nubrėžkite stačiakampį, kai duota jo didesnioji kraštinė a ir iš tos kraštinės vidurio į įstrižainę nubrėžtas statmuo h.

6. Į duotą skritulio išpjovą įbrėžkite kvadratą taip, kad viena jo kraštinė būtų spindulyje, viena viršūnė išpjovos lanke ir viena – kitame spindulyje.

7. Apie duotąjį apskritimą apibrėžkite lygiašonę trapeciją, kurios perimetras lygus $2p$.

8. Raskite trikampio viduje tašką, iš kurio visos kraštinės būtų matomos tuo pačiu kampu.

9. Taškai M ir N – tetraedro $DABC$ briaunų AD ir AB vidaus taškai. Nubraižykite tetraedro pjūvį, gautą, perkirtus jį plokštuma, einančia per duotuosius taškus ir lygiagrečia tiesei AC.

10. Nubraižykite gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pjūvį, gautą, perkirtus jį plokštuma, einančia per tiesę BC_1 ir briaunos DD_1 vidurio tašką M.

8. SUDĖTIS, ATIMTIS IR DAUGYBA STULPELIU BEI DALYBA KAMPU

Romualdas Kašuba
(Vilniaus universitetas)

Nurodytieji veiksmai kažkada buvo labai įprasti moksleiviškame ir net studentiškame gyvenime, nes jokių skaičiuoklių nebuvo, ir susidūrus su neišvengiamais skaičiavimais tekdavo arba skaičiuoti mintinai, arba atlikti veiksmus stulpeliu ar istoriškai vėlesniais laikais pasitelkti logaritminę liniuotę.

Šiais informacinės visuomenės laikais, kai skaičiuoklis guli ant kiekvieno stalo ir yra kone kiekvienoje kišenėje, šios rūšies aritmetinis menas yra gerokai primirštas.

Tai labai gerai, bet…

Skaičiuojant kampu arba stulpeliu daug informacijos arba įžvalgų gauname jau vien iš parodytų veiksmų formos. Kartais vien iš jos galime net vienareikšmiškai nustatyti, kas ten buvo daryta.

1. Ryškiu tos rūšies pavyzdžiu galėtų būti žinomas uždavinys, spręstas I Lietuvos jaunesniųjų klasių moksleivių olimpiadoje 1999 metais. Dauginant stulpeliu skaičių *RASK* patį iš savęs arba, kitaip tariant, keliant jį kvadratu, visi kiti tarpiniai skaitmenys buvo pažymėti vienu simboliu *X*. Suraskite, kas buvo daryta, jei struktūriškai veiksmas atrodo taip (žr. 1 pav.):

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & R & A & S & K \\
 & & & \times & R & A & S & K \\ \cline{5-8}
 & & & & X & X & X & X \\
+ & & X & X & X & X & & \\
 & X & X & X & X & & & \\ \hline
X & X & X & X & X & X & X & X
\end{array}
$$

1 pav.

Pasižiūrėję į antrąją „pasistūmusią“ daugiau negu įprasta *X*-ų eilutę, suprantame, kad taip nutinka, kai antrajame daugiklyje esama nulių – šiuo atveju nulis yra antrasis daugiklio (dešimčių) skaitmuo. Kitaip sakant, šiuo atveju $S = 0$. Be to, dar yra aišku, kad sandaugos vyriausiosios skilties skaitmuo yra 1, o tada aukštesnės eilutės pirmasis skaitmuo yra 9. Suprantama ir tai, kad antrasis sandaugos skaitmuo yra 0. Surašę tai, kas iš karto aišku, turime (žr. 2 pav.):

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & R & A & 0 & K \\
 & & & \times & R & A & 0 & K \\
\cline{5-8}
 & & & & X & X & X & X \\
+ & & X & X & X & X & & \\
 & 9 & X & X & X & & & \\
\hline
1 & 0 & X & X & X & X & X & X
\end{array}
$$

2 pav.

Dabar suprantame, kad skaitmuo R turi būti lygus 3 – kitaip prieš–paskutinėje eilutėje neturėtume 9, o jeigu taip, tai tada A ir K tegali būti tik 1 arba 2. Jeigu A būtų lygus 1, tada galutinis rezultatas negalėtų būti aštuoniaženklis skaičius, todėl $A = 2$, vadinasi, $K = 1$ ir mes jau viską sužinojome. Vadinasi, mūsų daugyba arba šiuo atveju kėlimas kvadratu atrodo taip:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 3 & 2 & 0 & 1 \\
 & & & \times & 3 & 2 & 0 & 1 \\
\cline{5-8}
 & & & & 3 & 2 & 0 & 1 \\
+ & & 6 & 4 & 0 & 2 & & \\
 & 9 & 6 & 0 & 3 & & & \\
\hline
1 & 0 & 2 & 4 & 6 & 4 & 0 & 1
\end{array}
$$

2. Paimkime kitą paprastą uždavinį. Imame tris triženklius skaičius, kurių užraše yra visi devyni nenuliniai skaitmenys. Sudedame juos kad ir stulpeliu. Koks yra pats didžiausias galimas taip gaunamas keturženklis skaičius?

Atsakymas yra visai nesunkiai randamas. Jeigu norime rasti patį didžiausią galimą skaičių, gaunamą kaip trijų triženklių skaičių sumą, užrašomą panaudojus visus 9 nenulinius skaitmenis, tai visai aišku, kad šimtų skaitmenys turi būti patys didžiausi – 9, 8 ir 7. Likusius pagal didumą skaitmenis reikia imti dešimčių skaitmenimis – tai būtų skait–menys 6, 5 ir 4. Likusius tris skaitmenis 3, 2 ir 1 imsime vienetų skaitmenimis. Todėl pati didžiausia galima suma yra

$$\begin{array}{r} 9\ 6\ 3 \\ +\ 8\ 5\ 2 \\ 7\ 4\ 1 \\ \hline 2\ 5\ 5\ 6 \end{array}$$

Beje, tokią sumą galima gauti $6 \times 6 \times 6 = 216$ būdų, kadangi šimtų, dešimčių ir vienetų skaitmenis galima laisvai kaitalioti.

Lygiai taip pat, jeigu keltume klausimą, kokią pačią mažiausią sumą galime gauti sudėję tris triženklius skaičius, kuriuose pavartoti visi 9 nenuliniai skaitmenys, gautume $147 + 258 + 369 = 774$, beje, irgi gau–namą 216 būdų.

O dabar paklauskime, kiek skirtingų sumų galime gauti, sudėdami 3 skirtingus triženklius dėmenis, kuriuose panaudoti visi 9 skirtingi ne–nuliniai dėmenys.

3. Dar toks uždavinys.

Natūralusis skaičius „baigiasi“ 4. Perkėlus tą ketvertą į priekį, skaičius padidėja 4 kartus. Koks yra pats mažiausias toks skaičius?

Jeigu skaičius baigiasi 4, tai jį galima užrašyti *ABCD*...*JK*4 (neži–nome, kiek skaitmenų).

Perkėlus 4 į priekį, skaičius atrodys 4*ABCD*…*JK* ir pagal sąlygą

$$\begin{array}{r} A\ B\ C\ D\ ...\ J\ K\ 4 \\ \times \qquad\qquad\qquad 4 \\ \hline 4\ A\ B\ C\ \ ...\ \ J\ K \end{array}$$

Prisiminę, kad $4 \times 4 = 16$, suvokiame, kad $K = 6$, o tada jau galime patikslinti, kad

$$\begin{array}{r} A\ B\ C\ D\ ...\ J\ 6\ 4 \\ \times \qquad\qquad\qquad 4 \\ \hline 4\ A\ B\ C\ \ \ ...\ J\ 6 \end{array}$$

Dabar galime tęsti toliau ir sužinoti sekantį nežinomą skaičių J, kuris lygus 5, kadangi $6 \times 4 = 24$ ir dar „vienas mintyje“ būtų 25. Todėl galime parašyti

$$\begin{array}{r} A\ B\ C\ D\ ...\ 5\ 6\ 4 \\ \times \qquad\qquad\qquad 4 \\ \hline 4\ A\ B\ C\ ...\ I\ 5\ 6 \end{array}$$

Kadangi 5×4 yra 20 ir 2 „buvo mintyje“ , tai iš viso gausime 22 ir todėl $I = 2$.

Tęsdami toliau pamatytume, kad viskas greitai baigiasi, nes sekan– tys žingsniai atitinkamai rašant tik paskutiniuosius skaitmenis būtų tokie:

$$\begin{array}{r} 256 \\ \times \quad 4 \\ \hline 256 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 02564 \\ \times \quad 4 \\ \hline 0256 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 102564 \\ \times \quad 4 \\ \hline 10256 \end{array}$$

Kadangi $1 \times 4 = 4$, o „mintyje“ nieko nebuvo, tai 4 ir pasilieka, o tuo pačiu mūsų darbas pasibaigia, nes $102564 \times 4 = 410256$.

4. Netradiciniai dalykai.

Tradiciniuose iššifravimo uždaviniuose visada yra pasakoma ir pakartojama, kad skirtingoms raidėms atitinka skirtingi, o vienodoms raidėms – vienodi skaitmenys. Tačiau būna ir kitaip.

4.1. Kitame pavyzdyje visi nelyginiai skaitmenys pažymimi raide *L*, o visi lyginiai skaitmenys – raide *N*, o pati daugyba, pavyzdžiui, atrodo taip:

$$\begin{array}{r} N\,L\,L \\ \times \quad L\,L \\ \hline L\,N\,L\,L \\ L\,N\,L \\ \hline N\,N\,L\,L \end{array}$$

Ar galima būtų nustatyti, „kas čia buvo dauginta“?

Papasakosime, kaip toks uždavinys sprendžiamas.

Kadangi $188 \times 8 = 1504$, tai pirmoji *N* turi būti didesnė už 1. Po šio *N* padauginimo iš pirmosios *L* turi gautis neviršijantis 8 skaičius, todėl $N = 3$, o $L = 2$. Pavidalo 3*LL* skaičiai, kuriuos padauginus iš 2, gautųsi *LNL* pavidalo skaičiai, gali būti tik 306, 308, 326, 328, 346 ir 348. Tačiau, jeigu mes padauginsime tuos skaičius iš 4 arba iš 6, tai negau– sime *LNLL*. Jeigu mes tuos skaičius dauginsime iš 8, tai tik paskutinieji du skaičiai duos *LNLL* pavidalo išraišką.

Toliau, $346 \times 28 = 9\,688$, todėl vienintelis sprendinys yra toks:

$$\begin{array}{r} 348 \\ \times \quad 28 \\ \hline 2784 \\ 696 \\ \hline 9744 \end{array}$$

4.2. Lietuvos jaunesniųjų klasių moksleivių olimpiadoje yra buvęs toks uždavinys, kuriame irgi labai patogu mokėti dalyti kampu.

Imsime atskirą to uždavinio atvejį.

Nagrinėkime visus skaičiaus 23 kartotinius ir suskaičiuokime tokių skaičių skaitmenų sumas. Kokį patį mažiausią skaičių galime gauti taip darydami?

Iš pradžių mums labai norėtųsi paklausti, ar negalima būtų gauti 1? Tai tikrai būtų pati mažiausioji galima suma. Tačiau skaitmenų sumą 1 turi 1 su keliais nuliais, o tokie skaičiai vieną ar daugiau kartų gali dalintis tik iš 2 ar 5, o jau niekaip iš 23.

Jeigu negalima gauti vieneto, tai gal galima tikėtis, jog įmanoma rasti skaičių, kuris dalijasi iš 23 ir kurio skaitmenų suma yra 2?

Tokio skaičiaus pradžioje turėtų būti 1, po to kažkiek nulių ir gale vėl 1. Tai vienintelė galimybė, nes 2 su daug nulių tesidalija iš 2 ir 5 laipsnių.

Todėl pradedame 1 su daug nulių dalyti kampu laukdami liekanos, lygios 16, tada dalinyje įrašytume 1 ir baigtume dalybą, nes $161 = 7 \cdot 23$.

```
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 | 2 3
  9 2                   |------------------
  ---                     4 3 4 7 8 2 6 8 7
    8 0
    6 9
    ---
    1 1 0
      9 2
    -----
      1 8 0
      1 6 1
      -----
        1 9 0
        1 8 4
        -----
            6 0
            4 6
            ---
            1 4 0
            1 3 8
            -----
                2 0 0
                1 8 4
                -----
                  1 6 1
                  1 6 1
                  -----
                      0
```

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Šioje dalyboje teparodytas vienintelis (dalmens) skaitmuo ir vis tiek visa dalyba „atstatoma“ vieninteliu būdu. Kaip ta dalyba atrodo?

$$\begin{array}{l|l} X\,X\,X\,X\,X\,X\,X\,X & X\,X\,X \\ \cline{2-2} \underline{\;\;X\,X\,X\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;} & X\,X\,8\,X\,X \\ \;\;\;\;\;\;X\,X\,X\,X & \\ \;\;\;\;\;\;\underline{\;\;\;X\,X\,X} & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;X\,X\,X\,X & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{X\,X\,X\,X} & \\ \;0 & \end{array}$$

2. Raskite keturženklį skaičių, jeigu jo dalyba iš dviejų vienaženklių skaičių užrašoma taip:

$$\begin{array}{l|l} X\,X\,X\,X & X \\ \cline{2-2} \underline{\;\;X\;\;} & X\,X\,X \\ \;\;X\,X & \\ \;\;\underline{\;\;X} & \\ \;\;\;\;X\,X & \\ \;\;\;\;\underline{X\,X} & \\ \;\;\;\;\;\;\;0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} X\,X\,X\,X & X \\ \cline{2-2} \underline{X\,X} & X\,X\,X \\ \;\;\;X\,X & \\ \;\;\;\underline{X\,X} & \\ \;\;\;\;\;\;0 & \end{array}$$

Kiek atsakymų turi šis uždavinys?

3. Iššifruokite galvosūkį (jį būtų galima laikyti lakoniška studento žinute tėvams[*]), kuriame reikia išsiaiškinti, kokie yra dėmenys ir kokia jų suma:

$$\begin{array}{r} S\;E\;N\;D \\ +\;\;M\;O\;R\;E \\ \hline M\;O\;N\;E\;Y \end{array}$$

4. Įsitikinkite, kad iš teisingos „angliškos“ sudėties „keturiasdešimt plius dešimt ir dar plius dešimt yra šešiasdešimt“ išplaukia kita teisinga skaitinė lygybė:

$$\begin{array}{r} F\;O\;R\;T\;Y \\ +\;\;\;\;\;\;\;T\;E\;N \\ T\;E\;N \\ \hline S\;I\;X\;T\;Y \end{array}$$

[*] ir kas iš to išėjo įsikišus matematikams

5. Vėl nelyginius skaitmenis pažymėsime raide *N*, o lyginius - raide *L*. Iššifruokite daugybą

$$\begin{array}{r} L\;L\;N \\ \times\qquad N\;N \\ \hline L\;N\;L\;N \\ L\;N\;N \\ \hline N\;N\;N\;N\;N \end{array}$$

6. O dabar vėl prisiminkime, kad pirminiai skaičiai yra tokie, kurie tesidalija tik iš 1 ir patys iš savęs. 1 nelaikomas pirminiu skaičiumi. Užrašytoje daugyboje visi dalyvaujantys skaitmenys yra pirminiai ir visi jie pažymėti raide *P*. Atstatykite daugybą

$$\begin{array}{r} P\;P\;P \\ \times\qquad P\;P \\ \hline P\;P\;P\;P \\ P\;P\;P\;P \\ \hline P\;P\;P\;P\;P \end{array}$$

7. O šiame uždavinyje tik dalį lyginių ir nelyginių skaičių tepažy–mėsime įprastinėmis raidėmis *L* ir *N*, o visas likusius žymėsime simboliu *X*. Nepaisant to, žemiau pavaizduotąją dalybą galima iššifruoti. Pabandykite.

$$\begin{array}{cccccccccc|l}
X & X & X & X & X & X & X & X & X & X & \underline{X\;X\;X\qquad\qquad} \\
 & \underline{N} & \underline{L} & \underline{X} & & & & & & & X\;X\;X\;X\;X\;X\;X \\
 & X & X & X & X & & & & & & \\
 & \underline{N} & \underline{N} & \underline{X} & \underline{X} & & & & & & \\
 & & & & X & X & X & & & & \\
 & & & & \underline{L} & \underline{L} & \underline{X} & & & & \\
 & & & & & X & X & X & & & \\
 & & & & & \underline{L} & \underline{N} & \underline{X} & & & \\
 & & & & & X & X & X & X & & \\
 & & & & & \underline{L} & \underline{L} & \underline{X} & \underline{X} & & \\
 & & & & & & & X & X & X & \\
 & & & & & & & \underline{N} & \underline{N} & \underline{X} & \\
 & & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

8. Skaičius n baigiasi skaitmeniu 2. Šį dvejetą perkėlus į skaičiaus pradžią, skaičius padidėja 2 kartus. Raskite patį mažiausią galimą tokį skaičių n.

9. Raskite patį didžiausią triženklį skaičių, kuris, nubraukus jo šimtų skaitmenį, sumažėja 51 kartą.

10. Ar yra toks natūralusis skaičius, kuris, nubraukus jo pirmąjį skait–menį, sumažėtų 50 kartų?

BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas), Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Raskite skaičių $35\,035$, $54\,450$ didžiausią bendrą daliklį ir mažiausią bendrą kartotinį.

2. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -5. \end{cases}$$

3. Išspręskite lygtį $x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1 = 0$.

4. Apie apskritimą, kurio spindulys 3 cm, apibrėžtas lygiašonis trikampis. Raskite trikampio perimetrą, jeigu trikampio kampas prie pagrindo lygus 30°.

Užduočių sprendimai

STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Funkcijos $f(x) = x^2 - 2ax$ grafikas – parabolė, kurios šakos nukreiptos aukštyn, o viršūnės taško abscisė $x_0 = a$.

Kai $a \le 0$, tai $f(x) = x^2 - 2ax \ge 0$ su visomis x reikšmėmis iš intervalo [0; 3] ir todėl funkcija reikšmės –4 neįgyja. Kai $0 < a \le 3$, funkcijos $f(x)$ mažiausia reikšmė intervale [0; 3] yra $-a^2$. Pagal sąlygą $-a^2 = -4$. Taigi $a = 2$. Kai $a > 3$, funkcijos $f(x)$ mažiausia reikšmė intervale [0; 3] yra $f(3) = 9 - 6a$. Išspręskime lygtį $9 - 6a = -4$. Iš čia $a = \dfrac{13}{6}$. Kadangi $\dfrac{13}{6} < 3$, tai šiuo atveju tinkamų a reikšmių nėra.

Ats.: $a = 2$.

2. Sprendžiame lygčių sistemą:

$$\begin{cases} y = 3x^2 + 6x, \\ y = 6 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 7x - 6 = 0, \\ y = 6 - x. \end{cases}$$

Gautosios kvadratinės lygties sprendiniai $x_1 = -3$, $x_2 = \dfrac{2}{3}$. Tuomet $y_1 = 9$, $y_2 = \dfrac{16}{3}$.

Ats.: (–3; 9) – II ketvirtis, $\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{16}{3}\right)$ – I ketvirtis.

3. Pagal kosinusų teoremą

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Sudėję šias lygybes gauname:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2(bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=2abc\left(\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}=\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}.$$

4. Pažymėkime didesnįjį skaičių *A*, mažesnįjį – *B*. Tuomet pagal sąlygą

$$\begin{cases} 99 < B < A < 1000, \\ A = 5B, \\ A + B = 498 \cdot k,\ k \in N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 99 < B < A < 1000, \\ A = 415k, \\ B = 83k,\ k \in N. \end{cases}$$

Nelygybė $83k > 99$ galioja tik su $k \geq 2$, o nelygybė $415k < 1000$ – tik su $k \leq 2$. Vadinasi, $k = 2$. Taigi $A = 830$, $B = 166$.

Ats.: 830, 166.

5. Vienas iš trijų paeiliui einančių natūraliųjų skaičių $n-1$, n, $n+1$ dalijasi iš 3, o kiti du – nesidalija (liekanos yra 1 ir 2). Jeigu $n-1$ dalijasi iš 3, tai ir $(n-1)\,n$ dalijasi iš 3, o $(n+1)^2$ nesidalija iš 3. Jeigu n dalijasi iš 3, tai ir $(n-1)\,n$ dalijasi iš 3, o $(n+1)^2$ taip pat nesidalija iš 3. Jeigu $n+1$ dalijasi iš 3, tai iš 3 dalijasi ir $(n+1)^2$, o nei n, nei $n-1$, taigi ir jų sandauga $(n-1)\,n$, iš 3 nesidalija.

Natūralusis skaičius dalijasi iš 3 tik tuomet, kai jo skaitmenų suma dalijasi iš 3. Kadangi vienas iš skaičių $n\,(n-1)$ ir $(n+1)^2$ visuomet dalijasi iš 3, o kitas – ne, tai jų skaitmenų sumos negali būti lygios.

6. $\sqrt{x}-\sqrt{y}=10 \Rightarrow x = y + 20\sqrt{y}+100$. Nagrinėkime reiškinį $200 - x + 2y$:

$$200 - x + 2y = 200 - (y + 20\sqrt{y}+100) + 2y = y - 20\sqrt{y}+100 =$$

$$= (\sqrt{y}-10)^2 \geq 0 \Rightarrow 200 - x + 2y \geq 0 \Rightarrow x - 2y \leq 200.$$

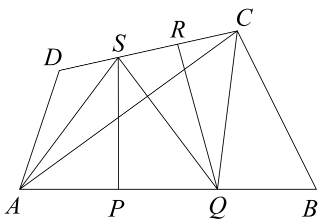
7. Figūrų plotų (žr. 1 pav.) žymėjimui naudokime raidę F. $F_{ADS} = \frac{1}{3} F_{ADC}$, $F_{QCB} = \frac{1}{3} F_{ACB} \Rightarrow F_{ADS} + F_{QCB} =$

$= \frac{1}{3}(F_{ADC} + F_{ACB}) = \frac{1}{3} F_{ABCD} \Rightarrow$

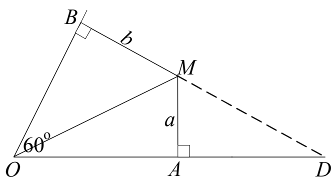
$\Rightarrow F_{ASCQ} = \frac{2}{3} F_{ABCD}$. Tačiau $F_{QSR} = F_{QRC}$, $F_{PSQ} = F_{ASP}$.

Todėl $F_{PSRQ} = \frac{1}{3} F_{ABCD} = 8\ \text{cm}^2$.

Ats.: $8\ \text{cm}^2$.



1 pav.



2 pav

8. $\angle MDA = 30^\circ \Rightarrow MD = 2a$, $BD = b + 2a$; $\angle BDO = 30^\circ \Rightarrow$ $\Rightarrow OD = 2OB$. Iš stačiojo trikampio OBD: $OD^2 - OB^2 = BD^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow OB = \frac{b + 2a}{\sqrt{3}}$. Iš stačiojo trikampio OBM:

$OM^2 = OB^2 + MB^2 = \left(\frac{b+2a}{\sqrt{3}}\right)^2 + b^2 = \frac{4}{3}(a^2 + ab + b^2)$. Taigi $OM = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2 + ab + b^2}$.

Ats.: $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2 + ab + b^2}$.

9. Pažymėkime (žr. 3 pav.) ABC piramidės pagrindą, D – jos viršūnę. Tuomet $AD \perp BD$, $AD \perp CD$, $BD \perp CD$. Pažymėję $AD = x$, $BD = y$, $CD = z$, gausime:

$$S_{ADB} = \frac{1}{2} x\,y = a^2,\ S_{ADC} = \frac{1}{2} x\,z = b^2,\ S_{BDC} = \frac{1}{2} y\,z = c^2 .$$

Sudauginame šias lygybes:

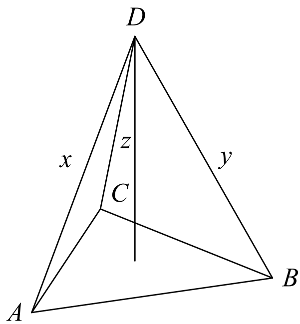
$$\frac{1}{8} x^2 y^2 z^2 = a^2 b^2 c^2 .$$

Iš čia $x\,y\,z = 2\sqrt{2}\,a\,b\,c$. Piramidės tūrį apskaičiuojame pagrindu laikydami trikampį BDC:

$$V = \frac{1}{3} S_{BDC} \cdot AD = \frac{1}{2} y\,z \cdot x =$$

$$= \frac{1}{6} xyz = \frac{2\sqrt{2}}{6} abc = \frac{\sqrt{2}}{3} a\,b\,c .$$

Ats.: $\frac{\sqrt{2}}{3} a\,b\,c$.



3 pav.

10. Pažymėkime x – eskalatoriaus laiptelių skaičių, kai jis išjungtas, u – Lino greitį (laiptelių per minutę skaičių), v – eskalatoriaus greitį (laiptelių per minutę skaičių). Tuomet Linas veikiančiu eskalatoriumi užbėgs į viršų per $\frac{x}{u+v}$ minučių, o nubėgs žemyn per $\frac{x}{u-v}$ minučių. Tuomet pagal sąlygą:

$$\begin{cases} \frac{x}{u+v} \cdot u = 30, \\ \frac{x}{u-v} \cdot u = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{30} = \frac{u+v}{u}, \\ \frac{x}{150} = \frac{u-v}{u}. \end{cases}$$

Sudėję gautąsias lygtis gauname

$\frac{6x}{150} = 2$. Taigi $x = 50$.

Ats.: 50.

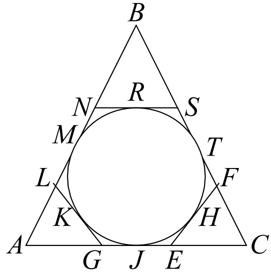
PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Remiantis liestinės teoremos išvada $NR = NM$, $RS = ST$, $KL = LM$, $KG = GJ$, $JE = HE$, $HF = FT$ (1 pav.). Tai trikampiai *BNS*, *FCE* ir *LGA* „Išsilanksto“ į trikampį *ABC*:

$$AB + BC + AC = 48$$

Pažymėję $AB = BC = a$, gauname: $2a + 12 = 38$; $a = 18$.

Ats.: $AB = 18$.



1 pav.

2. Duota $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 4$, $C_2C_1 \parallel AB$, $B_1B_2 \parallel AC$, $A_1A_2 \parallel CB$ (2 pav.). Reikia surasti *r*.

Taikydami „išlankstymo“ metodą, gauname $P_{ABC} = P_{A_2AA_1} + P_{B_2BB_1} + P_{C_2CC_1}$. Trikampis A_2AA_1 panašus į trikampį *ABC*, trikampis B_2BB_1 panašus į trikampį *ABC*, trikampis C_2CC_1 panašus į trikampį *ABC*, nes tiesė, lygiagreti bet kuriai trikampio kraštinei, atkerta trikampį, panašų į duotąjį. Todėl:

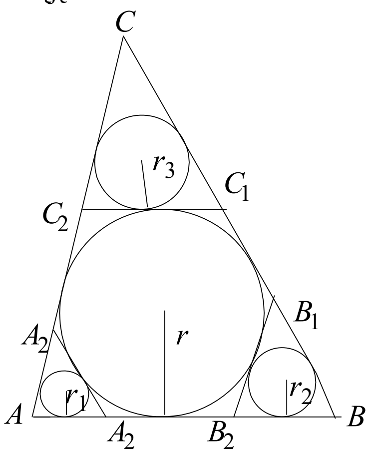
$$\begin{cases} \dfrac{r_1}{r} = \dfrac{p_1}{p}, \\ \dfrac{r_2}{r} = \dfrac{p_2}{p}, \\ \dfrac{r_3}{r} = \dfrac{p_3}{p}; \end{cases}$$

čia p_1, p_2, p_3 ir *p* yra atitinkamai trikampių A_2AA_1, B_2BB_1, C_2CC_1 ir *ABC* pusperimetriai. Sudėję šias lygybes panariui, gauname:

$$\frac{r_1 + r_2 + r_3}{r} = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{p} = \frac{p}{p} = 1.$$

Todėl $r = r_1 + r_2 + r_3 = 2 + 3 + 4 = 9$.

Ats.: 9.



2 pav.

3. Duota: $P_{ABC} = 20$, $A_1B_1 \parallel AB$, $A_1B_1 = 2{,}4$ (3 pav.). Reikia surasti *AB*. Kadangi $A_1B_1 \parallel AB$, tai trikampiai A_1B_1C ir ABC panašūs:

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C}} = \frac{AB}{A_1B_1};$$

čia P_{ABC} ir $P_{A_1B_1C}$ – trikampių ABC ir A_1B_1C perimetrai. Pažymėję $AL = AM = x$, $BM = BN = y$, $CL = CN = z$ ir pasinaudoję liestinės teoremos išvada ($LA_1 = A_1K$, $KB_1 = B_1N$) bei parašytąja lygybe, gauname:

$$P_{ABC} = 2x + 2y + 2z = 20;$$

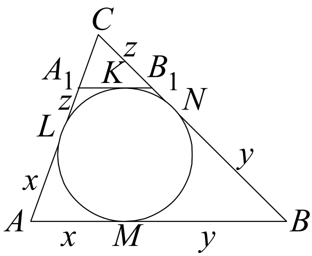
$$2z = 20 - 2(x + y);$$

$$\frac{20}{20 - 2(x + y)} = \frac{x + y}{2{,}4};$$

$$(x + y)^2 - 10(x + y) + 24 = 0;$$

$$AB = x + y = 4 \text{ arba } AB = x + y = 6.$$

Ats.: 4 arba 6.



3 pav.

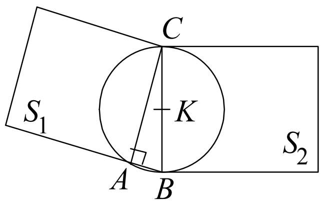
4. Duota $\alpha = \beta - \gamma$; čia α, β, γ – trikampio kampai, $AB = 1$, $S_1 + S_2 = 2S_{skritulio}$. Suraskime *BC* (4 pav.).

Kadangi $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ir $\beta = \alpha + \gamma$, tai $2\beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ$. Trikampis *ABC* status. Tarkime $\angle A = 90^\circ$, $BC = x$.

Tuomet $$x^2 + x^2 - 1 = 2\frac{\pi x^2}{4};$$

$$x = \sqrt{\frac{2}{4 - \pi}}.$$

Ats.: $\sqrt{\frac{2}{4 - \pi}}$.

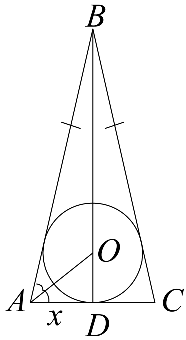


4 pav.

5. Duota: $AB = AC = 60$, $BO : OD = 12 : 5$ (5 pav.). Raskime *OD*.

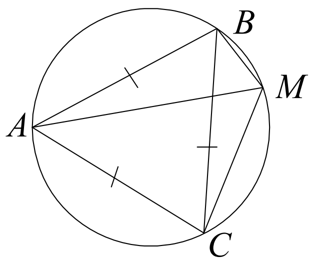
Kraštinės *AD* ilgį pažymėkime *x*. Trikampiui *ABD* taikome pusiaukampinės savybę: $\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{x}$; $\frac{12}{5} = \frac{60}{x}$, $12x = 5 \cdot 60$, $x = 25$, $AC = 50$.

Ats.: 50.

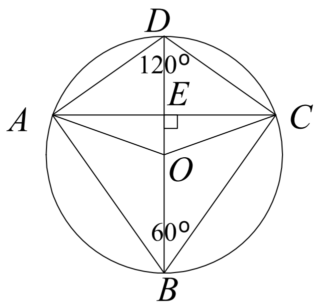


5 pav.

6. Taikome Ptolomėjaus teoremą (6 pav.) $BC \cdot AM = BM \cdot AC + AB \cdot MC$. Padaliję abi šios lygybės puses iš *BC*, gauname $AM = BM + MC$, nes $AB = BC = AC$.



6 pav.



7 pav.

7. $S_{AOD} = S_{AOB} = S_{OBC} = S_{DOC}$, nes $DO = OB$ ir $AE = EC$ (7 pav.). Tuomet $S_{AOD} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{4}$. Trikampis *AOD* yra lygiakraštis su kraštine *R* (apskritimo spindulys). Todėl $S_{AOD} = \frac{R^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{4}$, $R^2 = 9$, $R = 3$.

Ats.: 3.

8. Duota $\angle BAK = \angle KAC$, įbrėžto į trikampį *ABK* ir apibrėžto apie trikampį *ABC* apskritimų centrai sutampa (8 pav.). Suraskime kampus *A, B, C*.

Taškas O yra trikampio ABK pusiaukampinių susikirtimo taškas, todėl $\angle BAO = \angle OAK$. Pažymėkime šį kampą α. Atkarpa AK yra kampo BAC pusiaukampinė, todėl $\angle KAC = 2\alpha$. Kadangi $OA = OB = OC = R$, (o apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo centras), tai trikampis AOB lygiašonis ir $\angle ABO = \angle BAO = \alpha$. Atkarpa OB yra kampo ABC pusiaukampinė, todėl $\angle OBC = \alpha$.

Analogiškai:

$\angle OBC = \angle OCB = \alpha$,

$\angle OAC = \angle OCA = \alpha$,

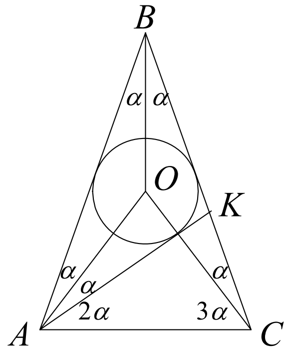
$\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = 10\alpha = 180^\circ$

$, \alpha = 18^\circ$,

$\angle A = \angle C = 4\alpha = 72^\circ$,

$\angle B = 2\alpha = 36^\circ$.

Ats.: $72^\circ; 72^\circ; 36^\circ$.



8 pav.

9. Duota $r = \dfrac{3}{2}$, $R = \dfrac{25}{8}$. Suraskime AB ir AC (9 pav.). Tegu $AB = a$, $AC = BC = b$. Tuomet

$$S_{ABC} = r \cdot p = \frac{3}{4} \cdot (a + 2b),$$

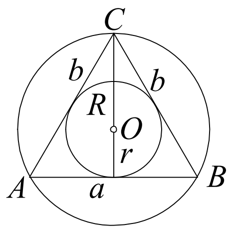
$$S_{ABC} = \frac{a \cdot b \cdot b}{4R} = \frac{2 \cdot b^2 \cdot a}{25};$$

$$\frac{3}{4} \cdot (a + 2b) = \frac{2 \cdot b^2 \cdot a}{25};$$

$$75(a + 2b) = 8ab^2..$$

Ši lygtis turi vienintelį sveikąjį sprendinį: $a = 6$, $b = 5$.

Ats.: 6; 5.



9 pav.

10. Duota $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $BC = 5$, $CD = 12$ (10 pav.). Suraskime BA ir AD.

Trikampis BCD statusis, todėl $BD^2 = 5^2 + 12^2 = 169$, $BD = 13$. Tegu $AD = x$, $AB = y$.

Pagal apibrėžtojo keturkampio savybę gauname:
$5 + x = 12 + y$, $y = x - 7$.

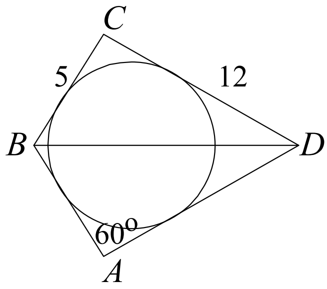
Trikampiui BDA taikome kosinusų teoremą:

$$13^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60^\circ,$$

$$169 = x^2 + (x-7)^2 - x(x-7),$$

$x^2 - 7x - 120 = 0$, $x_1 = -8$, $x_2 = 15$. Taigi $x = 15$, $y = 15 - 7 = 8$.

Ats.: 15; 8.



10 pav.

ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tarkime, kad taškas $M(x;\ y)$ (1 pav.) ieškomosios aibės taškas. Pagal sąlygą $\angle AMO = \angle OMB$, taigi OM – kampo M pusiaukampinė.

Pasinaudosime jos savybe, kad $\dfrac{AO}{AM} = \dfrac{OB}{MB}$. Iš čia

$$\frac{6}{\sqrt{(x+6)^2 + y^2}} = \frac{2}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}},$$

$$3\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x+6)^2 + y^2},$$

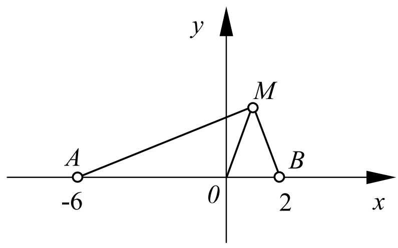
$$9\left(x^2 - 4x + 4 + y^2\right) = x^2 + 12x + 36 + y^2,$$

$$8x^2 - 48x + 8y^2 = 0,$$

$$x^2 - 6x + y^2 = 0,$$

$$(x-3)^2 + y^2 = 9.$$

Ats.: Apskritimas, kurio centras yra taškas (3; 0) ir spindulys lygus 3.



1 pav.

2. Padaliję abi lygties puses iš 400, turime

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Vadinasi,

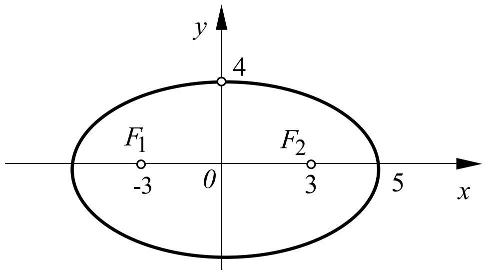
$a^2=25, b^2=16$,

todėl $a=5$, $b=4$. Tuomet iš formulės

$c=\sqrt{a^2-b^2}$

gauname $c=3$.

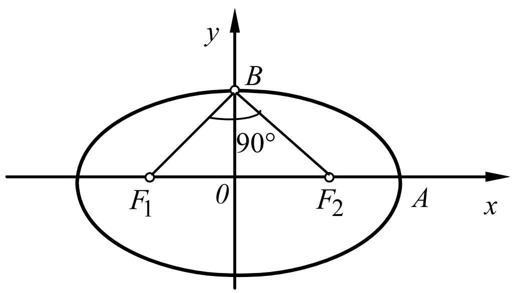
Ats.: 5, 4, (–3; 0), (3; 0).



2 pav.

3. Iš sąlygos aišku, kad $\angle F_1BF_2=90^\circ$, $OA=a$, $OB=b$ (3 pav.). Kadangi $OF_1=OF_2$, tai $BO=OF_2$. Taigi $b=c$. Iš formulės $c^2=a^2-b^2$ gauname, kad $a=c\sqrt{2}$. Vadinasi,

$$k=\frac{b}{a}=\frac{c}{c\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



3 pav.

Ats.: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Išnagrinėkime atvejį, kai taškas M yra tarp A ir B. Atvejis, kai taškas M yra atkarpos AB tęsinyje nagrinėjamas analogiškai.

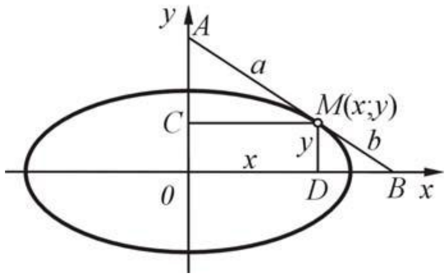
1 būdas. Pasinaudoję sinuso apibrėžimu, turime (4 pav.):

$$\sin\angle MAC=\frac{x}{a},\quad \cos\angle DMB=\cos\angle MAC=\frac{y}{b}.$$

Kadangi $\sin^2 \angle MAC + \cos^2 \angle MAC = 1$,
tai gauname

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Taigi taškas *M* brėžia elipsę.



4 pav.

2 būdas. Kadangi trikampiai *ACM* ir *MDB* yra panašieji, tai $\frac{AM}{MB} = \frac{CM}{DB}$, taigi

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{\sqrt{b^2 - y^2}}.$$

Iš čia $a^2\left(b^2 - y^2\right) = b^2 x^2$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

5. Iš sąlygos $y = \pm\frac{1}{2}x$ išplaukia $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, taigi $a = 2b$. Kadangi $2c = 10$, tai $c = 5$. Iš lygybės $c^2 = a^2 + b^2$ gauname $b^2 = 5$, $b = \sqrt{5}$. Vadinasi, $a = 2\sqrt{5}$.

Ats.: $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$.

6. Pažymėkime taško M koordinates x ir y: $M(x; y)$ (5 pav.), $\angle MAB = \alpha$, $\angle MBA = 2\alpha$. Aišku, kad taškas M gali būti tik dešinėje ašies Oy pusėje.

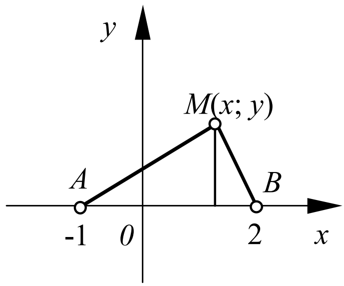
Randame $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x+1}$, $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{y}{2-x}$; čia $x < 2$.

Nesunku įsitikinti, jog ši lygybė teisinga ir tada, kai $x > 2$. Pasinaudoję žinoma formule

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},$$

gauname lygtį

$$\frac{y}{2-x} = \frac{2\dfrac{y}{x+1}}{1-\left(\dfrac{y}{x+1}\right)^2}.$$



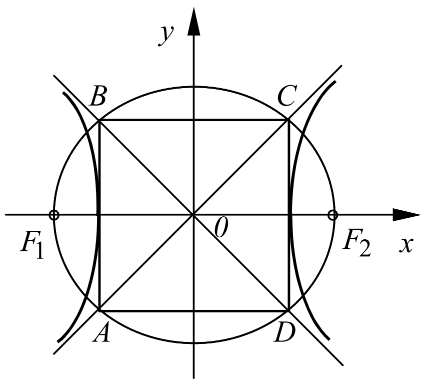
5 pav.

Pertvarkę ją, turime $x^2 - \frac{1}{3}y^2 = 1$.

Ats.: Hiperbolės $x^2 - \frac{1}{3}y^2 = 1$ dešinioji šaka.

7. Apskritimo lygtis $x^2 + y^2 = r^2$; čia $r = OF_2$ (6 pav.).

Pažymėkime $OF_2 = c$. Iš hiperbolės lygties $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ turime, kad $a = b$. Tuomet iš formulės $c^2 = a^2 + b^2$ gauname $c^2 = 2a^2$, todėl $r = c = a\sqrt{2}$. Vadinasi, apskritimo lygtis yra $x^2 + y^2 = 2a^2$. Kadangi hiperbolės asimptotės yra $y = \pm x$, tai išsprendę lygčių sistemą



6 pav.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a^2, \\ y = \pm x \end{cases}$$

randame keturių susikirtimo taškų koordinates $(\pm a; \pm a)$. Taigi apskritimas eina per kvadrato *ABCD* viršūnes.

Ats.: $(\pm a; \pm a)$.

8. Parabolę nubrėžkime taip, kaip pavaizduota 7 pav. Tuomet jos lygtis bus $x^2 = -2py$. Kadangi taškas $M(1{,}5;-4)$ yra parabolės taškas, tai jo koordinatės tinka lygčiai $x^2 = -2py$. Iš čia

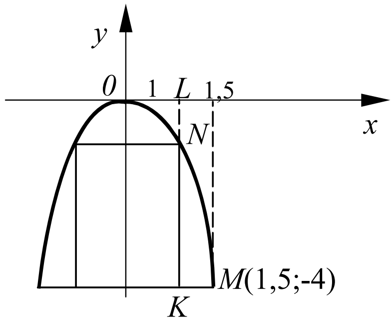
$$1{,}5^2 = -2p \cdot (-4), \quad p = \frac{9}{32}.$$

Tuomet parabolės lygtis yra $x^2 = -\frac{9}{16}y$.

Kai $x = 1$, tai $y = -\frac{16}{9} = -1\frac{7}{9}$.

Todėl $|LN| = 1\frac{7}{9}$ ir

$$|KN| = 4 - 1\frac{7}{9} = 2\frac{2}{9} > 2.$$



7 pav.

Ats.: Gali.

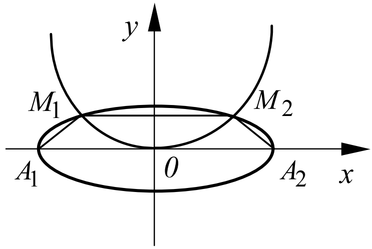
9. Parašę elipsės lygtį $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, randame jos pusašes $a = 2$, $b = 1$.

Parabolė yra simetriška ašies *Oy* atžvilgiu (8 pav.).

Išsprendę lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4, \\ x^2 = 6y, \end{cases}$$

randame elipsės ir parabolės



8 pav.

susikirtimo taškų M_1 ir M_2 ordinatę $y=\frac{1}{2}$. Tuomet $x^2=6\cdot\frac{1}{2}$ ir taško M_2 abscisė $x=\sqrt{3}$. Vadinasi,

$$M_1M_2=2\sqrt{3},\quad A_1A_2=4 \text{ ir}$$

$$S_{A_1M_1M_2A_2}=\frac{2\sqrt{3}+4}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}.$$

Ats.: $\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})$.

10. Pažymėkime spindulio, išėjusio iš židinio *F*, susikirtimo su parabole tašką *M* (*x*; *y*) (9 pav.).

Kadangi 2*p* = 12, tai $\frac{p}{2}=3$, todėl židinys yra taškas *F* (3; 0).

Pasinaudosime tiesės, einančios per tašką $(x_0;y_0)$, lygtimi

$$y-y_0=k(x-x_0);$$

čia *k* – tiesės krypties koeficientas, *k* = tgα. Taigi tiesės *FM* lygtis yra tokia:

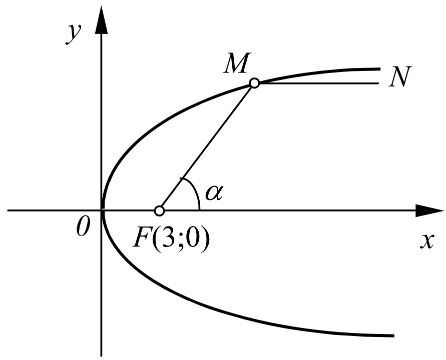
$$y=\frac{3}{4}(x-3).$$

Išsprendę lygčių sistemą

$$\begin{cases} y=\frac{3}{4}(x-3), \\ y^2=12x, \end{cases}$$

randame taško *M* ordinatę *y* = 18. Tiesės *MN* lygtis yra *y* = 18.

Ats.: *y* = 18.



9 pav.

TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Kadangi

$$\begin{array}{r|l} 38500 & 2 \\ 19250 & 2 \\ 9625 & 5 \\ 1925 & 5 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

tai skaičius

$$38500 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$$

iš viso turi 48 daliklius, nes

$$d(38500) = (2+1)(3+1)(1+1)(1+1) = 48\,.$$

Skaičiaus 38500 dalikliai užrašomi taip:

$$d = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot 7^{\gamma} \cdot 11^{\delta}\,;$$

čia rodikliai $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gali įgyti tokias reikšmes:

$$\alpha = 0, 1, 2,\ \ \beta = 0, 1, 2, 3,\ \ \gamma = 0, 1,\ \ \ \delta = 0, 1.$$

Išrašę visus 48 skaičiaus 38500 daliklius turėsime

1,	2,	4,	5,	7,	10,	11,	14,
20,	22,	25,	28,	35,	44,	50,	55,
70,	77,	100,	110,	125,	140,	154,	175,
220,	250,	275,	308,	350,	385,	500,	550,
700,	770,	875,	1100,	1375,	1540,	1750,	1925,
2750	3500,	3850,	5500,	7700,	9625,	19250,	38500.

Ats.: $d = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot 7^{\gamma} \cdot 11^{\delta}$, $\alpha = 0, 1, 2$, $\beta = 0, 1, 2, 3$, $\gamma = 0, 1$, $\delta = 0, 1$.

2. Kadangi

$$\begin{array}{r|l} 2044 & 2 \\ 1022 & 2 \\ 511 & 7 \\ 73 & 73 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 1771 & 7 \\ 253 & 11 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array}$$

tai

$$(2044, 1771) = 7,$$

$$[2044, 1771] = 2^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 73 = 517132.$$

Ats.: 7, 517132.

3. Didžiausiam bendrajam dalikliui surasti naudojame Euklido algoritmą:

$$4k + 1 = 4 \cdot (k - 1) + 5 .$$

Todėl

$$(4k + 1,\ k - 1) = (k - 1,\ 5) .$$

Skaičius 5 yra pirminis. Todėl $(k - 1,\ 5) = 5$, jei $k - 1$ dalosi iš 5. Taip yra tada, kai $k - 1 = 5l$ arba $k = 5l + 1$. Jei $k - 1$ nesidalija iš 5, tai $(k - 1,\ 5) = 1$.

Ats.: $(4k + 1,\ k - 1) = 5$, jei $k = 5l + 1$, ir $(4k + 1,\ k - 1) = 1$, jei $k \neq 5l + 1$.

4. Pasinaudoję Euklido algoritmu gauname, kad

$$24k + 1 = 2 \cdot (12k - 1) + 3 ,$$

$$12k - 1 = 4k \cdot 3 - 1 .$$

Todėl

$$(24k + 1, 12k - 1) = (12k - 1, 3) = (3, 1) = 1 .$$

Taigi skaičiai $24k + 1$ ir $12k - 1$ yra tarpusavyje pirminiai.

5. **1.** Pirmiausia pasinaudokime formule

$$(20\,631, 2\,640\,239, 10\,810, 9\,269) =$$

$$= (((20\,631, 2\,640\,239), 10\,810), 9\,269).$$

Toliau spręsdami uždavinį daug kartų naudosimės Euklido algoritmu. Kadangi

$$2\,640\,239 = 127 \cdot 20\,631 + 20\,102,$$

$$20\,631 = 1 \cdot 20\,102 + 529,$$

$$20\,102 = 38 \cdot 529,$$

tai

$$(20\,631, 2\,640\,239) = 529.$$

Toliau skaičiuojame didžiausią bendrąjį daliklį $(529, 10\,810)$. Vėl turime

$$10\,810 = 20 \cdot 529 + 230,$$
$$529 = 2 \cdot 230 + 69,$$
$$230 = 3 \cdot 69 + 23,$$
$$69 = 3 \cdot 23.$$

Todėl

$$(529, 10\,810) = 23\,.$$

Dar reikia suskaičiuoti $(23, 9\,269)$. Turime

$$9\,269 = 403 \cdot 23\,.$$

Taigi

$$(20\,631,\, 2\,640\,239, 10\,810,\, 9\,269) = 23\,.$$

2. Mažiausiam bendrajam kartotiniui surasti naudosimės formule

$$[20\,631,\, 2\,640\,239, 10\,810,\, 9\,269] =$$
$$= [[[20\,631,\, 2\,640\,239], 10\,810], 9\,269].$$

Turime, kad

$$[20\,631,\, 2\,640\,239] = \frac{20\,631 \cdot 2\,640\,239}{(20\,631 \cdot 2\,640\,239)} =$$
$$= \frac{54\,470\,770\,809}{529} = 102\,969\,321.$$

Kadangi

$$102\,969\,321 = 9\,525 \cdot 10\,810 + 4\,071,$$
$$10\,810 = 2 \cdot 4\,071 + 2\,668,$$
$$4\,071 = 1 \cdot 2\,668 + 1\,403,$$
$$2\,668 = 1 \cdot 1\,403 + 1265,$$
$$1403 = 1 \cdot 1265 + 138,$$
$$1\,265 = 9 \cdot 138 + 23,$$
$$138 = 6 \cdot 23,$$

tai

$$(102\,969\,321, 10\,810) = 23$$

ir

$$[102\,969\,321, 10\,810] = \frac{102\,969\,321 \cdot 10\,810}{(102\,969\,321, 10\,810)} =$$

$$= \frac{1\,113\,098\,360\,010}{23} = 48\,395\,580\,870.$$

Tęsdami procesą toliau, turime

$$48\,395\,580\,870 = 5\,221\,230 \cdot 9\,269 .$$

Todėl

$$(48\,395\,580\,870, 9\,269) = 9\,269$$

ir

$$[48\,395\,580\,870, 9\,269] = \frac{48\,395\,580\,870 \cdot 9\,269}{(48\,395\,580\,870, 9\,269)} = 48\,395\,580\,870.$$

Taigi

$$[20\,631, 2\,640\,239, 10\,810, 9\,269] = 48\,395\,580\,870.$$

Ats.: 23, 48 395 580 870.

6. Skaičius n turi 15 skirtingų daliklių, kai daliklių skaičiaus funkcija

$$d(n) = 15 .$$

Jei n kanoninis skaidinys

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} ,$$

tai

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_r + 1) .$$

Matome, kad lygybė

$$15 = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_r + 1)$$

galima tik dviem atvejais. Kai $r = 1$, $\alpha_1 = 14$, arba $r = 2$, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 2$. Vadinasi

$$n = p_1^{14} \quad \text{arba} \quad n = p_1^4 p_2^2 .$$

Mažiausią skaičių $n = 144$ gausime antruoju atveju, imdami $p_1 = 2$, o $p_2 = 3$.

Ats.: 144.

7. Skaičius n yra dviejų pirminių laipsnių sandauga, todėl jo kanoninis skaidinys:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}, \ \alpha_1 \ge 1, \ \alpha_2 \ge 1.$$

Taigi

$$n^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2}.$$

Kadangi n^2 turi 15 skirtingų daliklių, tai

$$d(n^2) = (2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) = 15.$$

Iš čia gauname vienintelį sprendinį

$$\alpha_1 = 2, \ \alpha_2 = 1.$$

Dabar galime suskaičiuoti n^3 daliklių skaičių:

$$d(n^3) = d(p_1^{3\alpha_1} p_2^{3\alpha_2}) = (3\alpha_1 + 1)(3\alpha_2 + 1) = 7 \cdot 4 = 28.$$

Ats.: 28.

8. Skaičiaus $10\,125$ skaidinys pirminių skaičių laipsniais yra toks:

$$10\,125 = 3^4 \cdot 5^3.$$

Todėl jo daliklių suma

$$\sigma(10\,125) = \sigma(3^4)\,\sigma(5^3) = \frac{3^5 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^4 - 1}{5 - 1} = 18\,876.$$

Ats.: $18\,876$.

9. Skaičiaus $10\,125$ skaidinys pirminių skaičių laipsniais yra toks:

$$10\,125 = 3^4 \cdot 5^3.$$

Todėl skaičių, nedidesnių už $10\,125$ ir tarpusavyje pirminių su $10\,125$, skaičius yra lygus Oilerio funkcijos reikšmei

$$\varphi(10\,125) = \varphi(3^4)\,\varphi(5^3) = (3^4 - 3^3)\,(5^3 - 5^2) = 5\,400.$$

Skaičiai iki $10\,125$, kurie nėra tarpusavyje pirminiai su $10\,125$, turi su $10\,125$ bendrus daliklius didesnius už 1. Todėl ieškomas skaičius yra lygus

$$10\,125 - \varphi(10\,125) = 10\,125 - 5\,400 = 4\,725.$$

Ats.: $4\,725$.

10. Skaičiai, kurie yra nedidesni už p^{α} ir nėra tarpusavyje pirminiai su p, o taip pat su p^{α}, yra tik p kartotiniai:

$$p, 2p, 3p, \ldots, p^{\alpha-1}p.$$

Aiškiai matyti, kad tokių kartotinių yra lygiai $p^{\alpha-1}$. Visi kiti skaičiai iki p^{α} neturi su p^{α} bendrų daliklių didesnių už 1, todėl jie yra tarpusavyje pirminiai su p^{α}. Tokių skaičių yra

$$p^{\alpha} - p^{\alpha-1}.$$

Taigi

$$\varphi(p^{\alpha}) = p^{\alpha} - p^{\alpha-1}.$$

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

Lietuviškos abėcėlės simbolių keitimo skaičiais lentelė:

Abėcėlės raidė	A	Ą	B	C	Č	D	E	Ę	Ė	F	G	H	I	Į	Y	J
Eilės numeris	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Abėcėlės raidė	K	L	M	N	O	P	R	S	Š	T	U	Ų	Ū	V	Z	Ž
Eilės numeris	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

1. Kadangi ant skytales telpa tik trys eilutės, tai užvyniojus juostelę, šalia raidės D atsidurs raidė A, šalia pastarosios R ir t.t. Nesunkiai iššifruojame ir visą tekstą: DARBASDARBĄVEJA, žr. 1 pav.

Ą	V	E	J	A
S	D	A	R	B
D	A	R	B	A

1 pav.

Ats.: DARBASDARBĄVEJA.

2. a) 3 x 5 šablone (ir. 2 pav.) reikia išpjauti penkis langelius.

2 pav.

Kadangi du gretimi tos pačios eilutes langeliai negali būti išpjauti, tai eilutėje daugiausiai galine išpjauti tris langelius. Penkis langelius, kuriuos išpjausime, eilutėse galime pasirinkti taip:

0+2+3, 0+3+2, 1+1+3, 1+2+2, 1+3+1, 2+0+3,
2+1+2, 2+2+1, 2+3+0, 3+0+2, 3+1+1, 3+2+0.

Čia, pavyzdžiui, užrašas 1+2+2 reiškia, kad išpjauname vieną pirmos eilutės langelį, ir po du antros ir trečios eilučių langelius. Vieną langelį eilutėje galime išpjauti penkiais būdais, du langelius šešiais būdais, žr. 3 pav., o tris langelius – vienu būdu.

x		x		

x			x	

x				x

	x		x	

	x			x

		x		x

3 pav.

Vadinasi, 0+2+3 rūšies šablonų yra 6, 1+1+3 rūšies –25, 1+2+2 rūšies šablonų iš viso yra $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$. Kiekvienos iš kitų rūšių šablonų skaičius priklauso tik nuo dėmenų, bet ne nuo dėmenų tvarkos. Taigi viso skirtingų šablonų, kuriuose nurodyta, kuri eilutė yra pirmoji, yra $6 \times 6 + 3 \times 25 + 3 \times 180 = 651$.

Ats.: 651.

b) Jeigu 3×5 šablonuose išpjovę po penkis langelius kaip parodyta 4 pav. a) ir b), pažymėsime pirmąją eilutę (pavyzdžiui, parašydami pieštuku + kuriame nors neišpjautame pirmos eilutės langelyje) visi galės juos atskirti.

x			x	
	x			x
		x		

4 a) pav.

		x		
x			x	
	x			x

4 b) pav.

Tačiau jeigu pirmosios eilutės nepažymėsime, jų atskirti nebus galima. Iš tiesų, apsukus viena iš jų 180° kampu jis atrodys taip pat, kaip kitas. Vadinasi, tiek pjaudami langelius kaip parodyta 4 a) pav., tiek 4 b) pav. parodytu būdu, gauname tą patį šabloną.

Pažymėkime skirtingų šioje dalyje nagrinėjamų šablonų skaičių *x*. Skaičiuodami šablonus a) dalyje kiekvieną b) dalies šabloną įskaičiavome dukart, išskyrus vienuolika simetriškų šablonų, (trys iš jų pavaizduoti 5 pav.)

	x		x	
		x		
	x		x	

x		x		
		x		
		x		x

		x		
x		x		x
		x		

5 pav.

Taigi

$$2x - 11 = 651, \quad x = 331.$$

Ats.: 331.

Jeigu naudojame šabloną, su nepažymėta pirmąja eilute, tai jį ant stačiakampio, ant kurio rašysime raides, galime uždėti dviem būdais. Vadinasi ir tą patį 5 simbolių tekstą galime įrašyti dviem būdais. Dešifruodami uždedame šabloną ant raidžių stačiakampio ir vienu ir kitu būdu. Gauname du tekstus. Reikia tikėtis, kad sugebėsime atskirti, kuris tekstas prasmingas, o kuris ne.

c) Įsisižiūrėkime į du šablonus, kuriuose nepažymėta, kuri eilutė pirmoji, žr. 6 pav.

		x		x
			x	
x		x		

x		x		
	x			
		x		x

6 pav.

Jeigu nurodyta, kuria puse šablonus reikia uždėti ant stačiakampio su tekstu, tai gavę tokius šablonus nuspręsime, kad jie skirtingi. Tačiau jeigu nežinoma, kuria puse juos reikia uždėti, tai jų atskirti negalėsime. Iš tiesų, apvertus antrąjį šabloną, jis atrodys taip pat kaip pirmasis.

Pažymėkime šioje dalyje nagrinėjamų skirtingų šablonų skaičių *y*. Skaičiuodami šablonus b) dalyje kiekvieną tokį šabloną įskaičiavome dukart, išskyrus tuos šablonus, kuriuos apvertę (ir galbūt pasukę) gauname taip pat atrodantį šabloną kaip ir prieš apverčiant (keletas tokių šablonų pavaizduota 7 pav.)

	x		x	
		x		
x				x

		x		x
		x		
		x		x

		x		
	x		x	
	x		x	

		x		
x				x
x				x

		x		
	x		x	
x				x

x		x		x
x				x

7 pav.

Tokius šablonus reikia nusibraižyti ir suskaičiuoti. Iš viso jų yra 17. Taigi

$$2y-17=331\,,\quad y=174\,.$$

Ats.: 174.

3. Šablone langelius reikia išpjauti taip, kad uždėjus šabloną ant kvadrato su raidėmis ir šabloną sukinėjant, kiekviena raidė atsidengtų tik vieną kartą. Prieš išpjaudami langelius sužymėkime juos skaičiais taip, kaip parodyta 8 pav.

1	2	3	1
3	4	4	2
2	4	4	3
1	3	2	1

8 pav.

Iš keturių langelių pažymėtų „1“ galime išpjauti tik vieną langelį, iš skaičiumi „2“ pažymėtų langelių irgi tik vieną ir t.t.

Šabloną pasigaminsime iš kiekvienos grupės pasirinkę ir išpjovę po vieną langelį. Galimybių tai padaryti iš viso yra

$$4\times4\times4\times4=256\,.$$

Ats.: 256.

4. Šablonas bus pagamintas teisingai, jeigu bus išpjauti 6 langeliai: vienas iš skaitmeniu „1“ pažymėtų langelių grupės, vienas iš skaitmeniu „2“ pažymėtos grupės ir t.t., žr. 9 pav.

1	2	3	4	1
4	5	6	5	2
3	6		6	3
2	5	6	5	4
1	4	3	2	1

9 pav.

5. Kadangi žinome, koks šifras naudotas, galime bandymų keliu ieškoti rakto. Šifras a) gautas imant $k=3$, o b) šifras – $k=4$.

Ats.: a) GYVENOKADAISEPARYŽIUIBOBUTĖ;

b) JIMĖGOŽlŪRĖTIPRORAKTOSKYLUTĘ.

6. Žinome, kad raidė S užšifruota raide Ą. Raidės S numeris $m=23$, o raidės Ą – $e(m)=1$. Taigi jei buvo šifruojama naudojantis lygybe

$$e(m)=(m+k)(\text{mod }32),$$

tai imdami $m=23$, $e(m)=1$ gauname, kad $k=10$. Pabandykime dešifruoti naudodami šį raktą keturias pirmąsias šifro raides FGOD. Jų numeriai yra 9, 10, 20, 5. Statydami į lygybę

$$e(m)=(m+10)(\text{mod }32,)$$

$e(m)=9,10,20,5$, randame $m=31,0,10,27$, t.y. pirmosios teksto raidės būtų ŽAGŲ. Neatrodo, kad tai būtų prasmingas žodis, ar prasmingo žodžio pradžia. Galbūt šifruojant buvo naudota taisyklė

$$e(m)=(k\cdot m)(\text{mod }32)\ ?$$

Imdami $e(m)=1$, $m=23$ iš lygybės $k\cdot 23=1\,(\text{mod}\,32)$ gauname $k=7$. Vėl pabandykime iššifruoti pirmąsias keturias šifro raides. Į lygybę $e(m)=(7\cdot m)(\text{mod}\,32)$ statome $e(m)=9,10,20,5$:

$$9=7m\,(\text{mod}\,32),\quad m=15,$$

$$10=7m\,(\text{mod}\,32),\quad m=6,$$

$$20=7m\,(\text{mod}\,32),\quad m=12,$$

$$5=7m\,(\text{mod}\,32),\quad m=19.$$

Taigi gauname tokią pranešimo pradžią: JEIN. Verta tęsti! Galbūt kai kas pastebėjo, kad dešifruojant galime naudotis lygybe $m = (23e(m))\,(\mathrm{mod}\,32.)$ Dešifravę gauname: JEINORĖSILĄIMĖSI. Atrodo, šifruotojas padarė gramatinę klaidą. Ką gi, pasitaiko.

Ats.: JEINORĖSILĄIMĖSI.

7. Kadangi raidės I numeris yra 12, tai iš lygybės $12 = (4\cdot m)(\mathrm{mod}\,32)$ gauname, kad *m* galėjo būti:

$$m = 3,\ \ 3+8=11,\ \ 3+2\cdot 8= 19,\ \ 3+3\cdot 8=27.$$

Ats.: a) Pranešimo raidė galėjo būti C,H,N arba Ų.

b) Pasirinkime natūralųjį skaičių $0 \le m < 31$ (raidės numerį) ir nagrinėkime skaičius

$$4(m+8k) = 4m + 32k\,,\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Visi šie skaičiai duoda tą pačią dalybos iš 32 liekaną. Jeigu $0 \le m + 8k < 31$, tai $m+8k$ taip pat yra raidės numeris. Naudojantis taisykle $e(m) = (4\cdot m)(\mathrm{mod}\,32)$ raidės su numeriais *m*, $m+8k$ šifruojamos ta pačia raide.

Koks bebūtų *m*, $0 \le m < 31$, visada galime parinkti $k \ne 0$, kad būtų $0 \le m + 8k < 31$. Taigi kiekvienai raidei atsiras kita raidė (iš tikrųjų dar trys raidės), kuri šifruojama ta pačia raide.

8. Tarkime priešingai: yra dvi raidės su skirtingais numeriais *m*, *n*, kad jos šifruojamos ta pačia raide. Tada skaičiai

$$A = k_1 m + k_2\,,\quad B = k_1 n + k_2\quad (\,m \ne n\,)$$

duoda tą pačią dalybos iš 32 liekaną. Tada $A - B = k_1(m-n)$ yra 32 kartotinis, t.y. dalijasi iš 32. Kadangi k_1 yra nelyginis skaičius, tai $m-n$ turi dalylis iš 32. Tai įmanoma tik tada, kai $m = n$. Gavome prieštarą. Taigi negali būti dviejų skirtingų raidžių, kurios šifruojamos ta pačia raide.

9. Raide, kurios numeris *m*, šifruotojas šifruoja, naudodamasis lygybe $e(m) = (15\cdot m + 3)(\mathrm{mod}\,32)$. Kadangi $e(m)$ yra $15\cdot m + 3$ dalybos iš 32 liekana, tai

$$15 \cdot m + 3 = 32 \cdot t + e(m), \quad e(m) = 15 \cdot m + 3 - 32t.$$

Po to gautąją raidę (jos numeris $e(m)$) šifruotojas šifruoja pakartotinai:

$$e(e(m)) = (15 \cdot e(m) + 3)(\mathrm{mod}\,32),$$

skaičius $e(e(m))$ yra $15 \cdot e(m) + 3$ dalybos iš 32 liekana. Tačiau

$$15 \cdot e(m) + 3 = (m + 16) + 32(7m - 15t + 1),$$

taigi skaičiai $15 \cdot e(m) + 3$ ir $m + 16$ duoda tą pačią dalybos iš 32 liekaną. Vadinasi, šifras, kurį gauname po dviejų šifravimų su lygybe $e(m) = (15 \cdot m + 3)(\mathrm{mod}\,32)$ sutampa su šifru, kurį gauname vieną kartą šifruodami su lygybe $e(m) = (m + 16)(\mathrm{mod}\,32)$.

Ats.: Du kartus šifruodami gauname tą patį kaip šifruodami vieną kartą su lygybe $e(m) = (m + 16)(\mathrm{mod}\,32)$.

10. Žinome, kad šifruojant naudotas trijų simbolių ilgio raktas. Taigi pakanka surasti šių simbolių eilės numerius k_1, k_2, k_3.Naudojant k_1 gautos šifro raidės FOHE..., naudojant k_2 – šifro raidės LHTŠ..., naudojant k_3 – GKKU...

Žinome, kad pirmosios grupės raidė H gauta iš raidės S. Kadangi raidės S numeris yra 23, 0 raidės H – 11, tai iš lygybės $11 = (23 + k_1)(\mathrm{mod}\,32)$ gauname, kad $k_1 = 20$.

Žinome, kad antrosios grupės raidė H gauta iš raidės U. Kadangi raidės U numeris yra 26, o raidės H – 11, tai iš lygybės $11 = (26 + k_2)(\mathrm{mod}\,32)$ gauname, kad $k_2 = 17$.

Trečiojo numerio k_3 taip apskaičiuoti nepavyks. Pabandykime iššifruoti tą šifro dalį, kuri gauta naudojant skaičius k_1, k_2.

Gauname: PA*AU*SĖ*MĘ*ŽU*DE*OP. Dabar jau reikia paspėlioti. Nesunku įspėti, kad tekstas yra toks: PAGAUKSĖKMĘUŽUODEGOP, taip pat nesunku įspėti, kad jeigu šifruotojas nebūtų apsirikęs, paskutinė raidė būtų buvusi S.

Ats.: PAGAUKSĖKMĘUŽUODEGOP.

PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tegu pirmasis piemuo turėjo x avelių, o antrasis turėjo y avelių. Pagal pirmojo piemens pasiūlymą turi galioti lygybė $x+1=2(y-1)$, o pagal antrojo piemens pasiūlymą – lygybė $y+1=x-1$. Taigi turime išspręsti dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą:

$$\begin{cases} x+1=2(y-1), \\ x-1=y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-3, \\ x=y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-3, \\ 2y-3=y+2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=2y-3, \\ y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7, \\ y=5. \end{cases}$$

Ats.: pirmasis piemuo turėjo 7 avis, o antrasis turėjo 5 avis.

2. Reztai priklausultao nuo m ir n reikšmių. Apskaičiuokime tik tiesių susikirtimo taško $(x; y)$ koordinates, spręsdami lygčių $mx+ny=mn$ ir $nx-my=mn$ sistemą:

$$\begin{cases} mx+ny=mn, \\ nx-my=mn \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx+ny=mn, \\ (m^2+n^2)\,x=mn\,(m+n) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=m-\dfrac{mx}{n}, \\ x=\dfrac{mn\,(m+n)}{m^2+n^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{mn\,(n-m)}{m^2+n^2}, \\ x=\dfrac{mn\,(m+n)}{m^2+n^2}. \end{cases}$$

Ats.: $\left(\dfrac{mn\,(m+n)}{m^2+n^2};\ \dfrac{mn\,(n-m)}{m^2+n^2}\right)$.

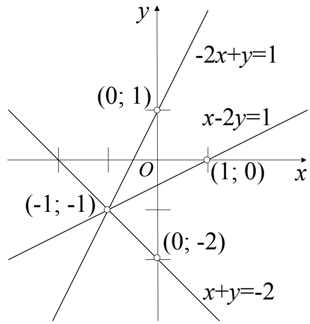
3. Sprendžiame trijų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} mx+y=1, \\ x+my=1, \\ x+y=m. \end{cases}$$

Sudėję pirmąsias dvi lygtis, gauname lygtį $(m+1)\,(x+y)=2$. Į ją įrašome $x+y=m$ ir sprendžiame kvadratinę lygtį $(m+1)\,m=2$. Ši lygtis turi du sprendinius: $m_1 = 1$ ir $m_2 = -2$. Kai $m = 1$, tai visos trys lygtys yra $x + y = 1$. Taigi ši m reikšmė netenkina uždavinio sąlygos. Kai $m = -2$, tai gauname trijų tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} -2x + y = 1, \\ x - 2y = 1, \\ x + y = -2. \end{cases}$$

Ji turi vienintelį sprendinį: $x = -1$, $y = -1$. Taigi visos trys tiesės susikerta taške $(-1; -1)$, kai $m = -2$ (žr. 1 pav.).



1 pav.

4. Sprendžiame abi sistemas ir palyginame jų sprendinių aibes:

1) $\begin{cases} 2x - 3y = 3, \\ 3x + y = 21, \\ x + 4y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 - 4y, \\ 2(18 - 4y) - 3y = 3, \\ 3(18 - 4y) + y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 - 4y, \\ y = 3, \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ y = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x + 7y = 45, \\ 7x - 3y = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{45 - 7y}{4}, \\ 7 \cdot \dfrac{45 - 7y}{4} - 3y = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{45 - 7y}{4}, \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ y = 3. \end{cases}$

Abi sistemos turi po vieną sprendinį – skaičių porą (6; 3), todėl jos yra ekvivalenčios.

Ats.: taip.

5. Iš pradžių išspręskime abi sistemas:

1) $\begin{cases} 2px + 3y = 7p, \\ 3px - 2y = 4p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2px + 3y = 7p, \\ 13px = 26p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0, \\ y = 0, \\ x = r, r \in \mathrm{R} \end{cases}$ arba $\begin{cases} p \neq 0, \\ x = 2, \\ y = p; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - py = 0, \\ 5x + py = 7p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - py = 0, \\ 7x = 7p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0, \\ x = 0, \\ y = r, r \in \mathrm{R} \end{cases}$ arba $\begin{cases} p \neq 0, \\ x = p, \\ y = 2. \end{cases}$

Taigi pirmosios sistemos sprendinių aibę sudaro poros $(r; 0)$, $r \in \mathrm{R}$, kai $p = 0$, ir poros $(2; p)$, kai $p \neq 0$. Antrosios sistemos sprendinių aibę sudaro skaičių poros $(0; r)$, $r \in \mathrm{R}$, kai $p = 0$, ir poros $(p; 2)$, kai $p \neq 0$.

Kai $p = 0$, abiejų sistemų sprendinių aibės nesutampa, todėl sistemos nėra ekvivalenčios.

Kai $p \neq 0$, tai abi sistemos turi tik po vieną sprendinį. Jie sutampa, kai $p = 2$.

Ats.: sistemos yra ekvivalenčios su $p = 2$.

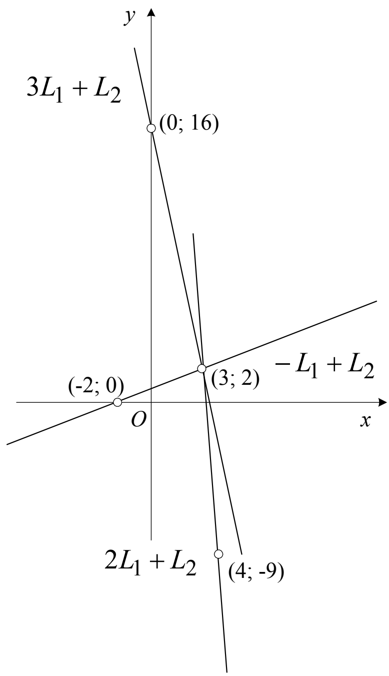
6. Lygčių L_1: $3x + 2y = 13$ ir L_2: $5x - 3y = 9$ tiesinis darinys $\lambda L_1 + L_2$ yra tiesinė lygtis $(3\lambda + 5)x + (2\lambda - 3)y = 13\lambda + 9$. Kai $\lambda = 2$, $\lambda = -1$, $\lambda = 3$, gausime tokias lygtis:

$2L_1 + L_2$: $11x + y = 35$,

$-L_1 + L_2$: $2x - 5y = -4$,

$3L_1 + L_2$: $14x + 3y = 48$.

Pirmoji tiesė eina per taškus (3; 2) ir (4; –9), antroji – per taškus (–2; 0) ir (3; 2), o trečioji – per taškus (3; 2) ir (0; 16). Visos trys tiesės eina per vieną tašką – (3; 2) (žr. 2 pav.).



2 pav.

Toliau randame parametro λ reikšmes, su kuriomis tiesinio darinio $\lambda L_1 + L_2$ sprendinių aibės tiesė tenkina papildomas sąlygas: a) eina per tašką (5; –2); b) yra lygiagreti su ašimi *Oy*.

a) Tiesė $\lambda L_1 + L_2$: $(3\lambda+5)x+(2\lambda-3)y=13\lambda+9$ eina per tašką (5; –2), kai $(3\lambda+5)\cdot 5+(2\lambda-3)\cdot(-2)=13\lambda+9$. Gauname $\lambda=11$.

b) Tiesė $\lambda L_1 + L_2$ yra lygiagreti su ašimi *Oy*, kai $2\lambda-3=0$, t. y. $\lambda=1{,}5$. Tos tiesės lygtis yra $x=3$.

7. Lygčių sprendinių aibes pažymėkime X_i, $i=1, 2, 3, 4$. Analizuodami šias aibes, gauname:

$X_4=\{(r_1; 2; r_3):\ r_1\in \mathrm{R},\ r_3\in \mathrm{R}\}$,

$X_4\bigcap X_1=\{(r_1; 2; 5):\ r_1\in \mathrm{R}\}$,

$(X_4\bigcap X_1)\bigcap X_2=\{(-1; 2; 5)\}$.

Taigi $X_1\bigcap X_2\bigcap X_4=\{(-1; 2; 5)\}$. Dar reikia patikrinti, ar trejetas (–1; 2; 5) priklauso aibei X_3. Įstatę į trečiąją lygtį, gauname $3\cdot(-1)-2+2\cdot 5\neq 9$. Vadinasi, aibių X_1, X_2, X_3 ir X_4 sankirta yra tuščioji aibė.

Ats.: sistema sprendinių neturi.

8. Sistemos lygtis pažymėkime L_i, $i=1, 2, 3, 4$. Iš pradžių lygtį L_2 keičiame tiesiniu dariniu $-2L_1+3L_2$, lygtį L_3 – tiesiniu dariniu $-5L_1+3L_3$ ir lygtį L_4 – tiesiniu dariniu $-5L_1+3L_4$. Gauname ekvivalenčią tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2-\ \ x_3=5,\\ \qquad 16x_2+11x_3=-4,\\ \qquad 13x_2+8x_3=-7,\\ \qquad 16x_2+11x_3=-4. \end{cases}$$

Šios sistemos lygtis vėl žymime L_i, $i=1, 2, 3, 4$. Trečiąją ir ketvirtąją lygtį keičiame tokiais tiesiniais dariniais: $13L_2-16L_3$ (trečiąją) ir L_2-L_4 (ketvirtąją). Gauname sistemą

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ 16x_2 + 11x_3 = -4, \\ 15x_3 = 60, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Ketvirtoji lygtis yra tapatybė $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$, todėl ją pašaliname iš sistemos ir gauname ekvivalenčią (šiai ir pradinei sistemai) trikampę tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ 16x_2 + 11x_3 = -4, \\ 15x_3 = 60. \end{cases}$$

Ši sistema, taigi ir duotoji, turi vienintelį sprendinį (1; –3; 4).

Ats.: (1; –3; 4).

9. Lygtį L_2 keičiame tiesiniu dariniu $-L_1 + L_2$, o lygtį L_4 – tiesiniu dariniu $-2L_1 + L_4$. Gauname sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ -2x_2 - x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$$

Eliminuodami x_2 iš L_3 ir L_4, jas keičiame (atitinkamai) tiesiniais dariniais $-3L_2 + L_3$ ir $2L_2 + L_4$. Gauname sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_3 - 4x_4 = -3, \\ x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

Nežinomąjį x_3 iš L_4 eliminuojame, pakeisdami šią lygtį tiesiniu dariniu $-L_3 + L_4$. Iš trikampės tiesinių lygčių sistemos

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_3 - 4x_4 = -3, \\ 5x_4 = 5 \end{cases}$$

randame šios, taigi ir duotosios, sistemos vienintelį sprendinį (1; 1; 1; 1).

Ats.: (1; 1; 1; 1).

10. Šią sistemą galima išspręsti nuosekliai eliminuojant nežinomuosius. Tereikia sudaryti atitinkamus tiesinius lygčių darinius ir jais pakeisti lygtis. Gausime vieną lygtį, neturinčią sprendinių, todėl galutinė išvada tokia: sistema sprendinių neturi. Norint įrodyti, kad duotoji sistema neturi sprendinių, pakaktų sudaryti tiesinį darinį $2L_1 + L_3 - L_2 - L_4$. Gautume tiesinę lygtį su keturiais nežinomaisiais $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$, neturinčią sprendinių.

Ats.: $\varnothing$.

ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Jokių „gudrybių“. Tik pageidautina prisiminti, kad lygtis turi *tris* sprendinius. Vienas iš jų, aišku $x_1 = 0$, o kitus du surandame spręsdami kvadratinę lygtį $2x^2 - 7x + a = 0$.

Ats.: 0, $\frac{7}{4} \pm \frac{1}{4} i\sqrt{8a - 49}$. Pavyzdžiui, *penkiolikmečiai* moksleiviai turėtų gauti tokius sprendinius: $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \frac{7}{4} \pm \frac{1}{4} i\sqrt{71}$. Beje, a – nebūtinai sveikasis skaičius. Be to, jei atsiras koks *penkiametis* vunderkindas, tai jis gaus $x_2 = 1$, $x_3 = 2{,}5$ …

2. Sąlyga reikalauja taikyti Kardano formules. Jei to reikalavimo nebūtų, tai būtų tikslinga pradžioje patikrinti, ar lygtis neturi racionaliųjų sprendinių.

Standartiniu keitiniu $x = y - 1$ redukuojame duotąją lygtį ir gauname: $y^3 - 6y + 9 = 0$.

Tad $p = -6, q = 9$ ir $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{49}{4} > 0$. Remdamiesi Vijeto teorema, darome išvadą: *redukuotoji lygtis turi vieną realųjį ir du tarpusavyje jungtinius kompleksinius sprendinius*.

Kadangi $D > 0$, tai realieji skaičiai

$$u_0 := \sqrt[3]{-\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{-1} = -1\ ,\ v_0 := \sqrt[3]{-\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

tenkina sąlygą $uv = -\frac{p}{3} = 2$ ir *realusis* redukuotos lygties sprendinys yra $y_1 = -1 + (-2) = -3$. Kitus du sprendinius randame iš Kardano formulių:

$$y_{2,3} = -\frac{u_0 + v_0}{2} \pm \frac{u_0 - v_0}{2}\sqrt{3} \cdot i = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\ i\ .$$

Belieka prisiminti, kad $x = y - 1$.

Ats. $x_1 = -4$, $x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\ i$.

3. Šį kartą sąlyga Kardano formulių taikyti nereikalauja. Tačiau, jei racionaliųjų sprendinių nėra, tai be tų formulių vargu ar apsieisime.

Iš pradžių atsakykime į klausimą apie lygties realiųjų sprendinių skaičių. Atitinkamais pertvarkiais (keitiniu $x = y - \frac{1}{2}$ ir dalyba iš 2) redukuojame duotąją lygtį ir gauname:

$$y^3 - \frac{15}{4}y - \frac{11}{4} = 0\ .$$

Matome, kad : $p = -\frac{15}{4}, q = -\frac{11}{4}$ ir $D = \frac{121}{64} - \frac{125}{64} = -\frac{1}{16} < 0$.

Prisiminę Vietos teoremą, jau turime atsakymą į pirmąjį užduoties klausimą: *redukuotoji* (*žinoma, ir pradinė*) *lygtis turi tris realiuosius sprendinius*.

Pagal Vijeto formules, tie sprendiniai yra tokie:

$$y_1 = 2r\cos\frac{\varphi}{3},\ y_2 = 2r\cos\frac{\varphi+2\pi}{3} \text{ ir } y_3 = 2r\cos\frac{\varphi+4\pi}{3};$$

čia $r = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Kadangi $q < 0$, tai

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{-D}}{-q} = \operatorname{arctg}\frac{2\cdot\frac{1}{4}\cdot 4}{11} = \operatorname{arctg}\frac{2}{11}.$$

Toliau belieka pereiti prie *x*. Be to, turint po ranka skaičiuoklį, ar kompiuterį, galima norimu tikslumu rasti sprendinių racionaliuosius artinius (pabandykite tai padaryti).

Kita vertus, nesunku matyti (ypač užrašius redukuotąją lygtį pavidalu: $4y^3 - 15y - 11 = 0$), kad vienas iš redukuotosios lygties sprendinių yra $\tilde{y}_1 = -1$. Tada daugianaris $4y^3 - 15y - 11$ turi dalytis iš dvinario $y + 1$. Gauname

$$4y^3 - 15y - 11 = (y+1)\left(4y^2 - 4y - 11\right),$$

o iš čia apskaičiuojame, kad $\tilde{y}_{2,3} = 1 \pm \sqrt{3}$. Tad Kardano formulės duoda teisingą, bet kiek „užmaskuotą“ atsakymą.

Ats. Trys realieji sprendiniai: $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$.

4. Kadangi $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, tai pakanka įsitikinti, jog duotasis daugianaris dalijasi iš dvinarių $x-1$ ir $x-2$. Pagal Bezu teoremą šio daugianario reikšmės taškuose $x-1$ ir $x-2$ turi būti lygios nuliui: $f(1) = 0,\ \ f(1) = 0,\ \ f(2) = 0.$ Gauname:

$$f(1) = (1-2)^{2003} - (1-1)^{3002} + 1 = 0,$$
$$f(2) = (2-2)^{2003} - (2-1)^{3002} + 1 = 0.$$

5. Užrašome duotąją lygtį pavidalu:

$$\left(x^2 - 2x + t\right)^2 = (-1 + 2t)x^2 + (-4t + 2)x + t^2 + 6;$$

čia t, – kol kas laisvas parametras. Pareikalavę, kad dešinioji pusė būtų pilnasis kvadratas, gauname *rezolventę*:

$$-2t^3+5t^2-16t+7=0\,,$$

kurios realųjį sprendinį randame iš Kardano formulių, arba tarp racionaliųjų skaičių, betarpiškai patikrindami pretendentus: $\pm 1, \pm 7, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{7}{2}$. Pasirodo, rezolventė turi racionalųjį sprendinį $t_0=\frac{1}{2}$. Todėl pradinę lygtį galima užrašyti pavidalu:

$$\left(x^2-2x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}\,.$$

Šią lygtį išskaidome į dvi kvadratines lygtis:

$$x^2-2x-2=0 \text{ ir } x^2-2x+3=0..$$

Ats. $x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$, $x_{3,4}=1\pm i\sqrt{2}$.

6. Pažymėję $y=x^4$, gauname ketvirtojo laipsnio lygtį

$$y^4-3y^3-3y^2+15y-10=0\,.$$

Ją sprendžiame Ferario metodu. Rezolventės

$$-8t^3-12t^2+10t+15=0$$

racionalusis sprendinys yra $t_0=-\frac{3}{2}$, todėl pradinę lygtį galime parašyti pavidalu:

$$\left(y^2-\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(3y-7)^2\,.$$

Ši lygtis turi 4 realiuosius sprendinius: $y_1=1$, $y_2=2$, $y_{3,4}=\pm\sqrt{5}$.

Dabar spręsdami 4 dvinares lygtis,

$$x^4=y_k\,,\ k=1, 2, 3, 4.$$

gauname visus šešiolika pradinės lygties sprendinius:

$x^4=1 \Rightarrow x_{1,\,2}=\pm 1,\ \ x_{3,\,4}=\pm i$;

$$x^4 = 2 \Rightarrow x_{5,6} = \pm\sqrt[4]{2},\ x_{7,8} = \pm i\sqrt[4]{2}\ ;$$

$$x^4 = \sqrt{5} \Rightarrow x_{9,10} = \pm\sqrt[8]{5},\ x_{11,12} = \pm i\sqrt[8]{5}\ ;$$

$$x^4 = -\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[8]{5}, \\ u^4 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[8]{5}, \\ (u^2 - \sqrt{2}u + 1)(u^2 + \sqrt{2}u + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{13,14} = i\sqrt[8]{5}(1 \pm i)\frac{\sqrt{2}}{2},\ \ x_{15,16} = i\sqrt[8]{5}(-1 \pm i)\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ats.: 16 sprendinių; 6 iš jų, – realieji.

7. Antrojo tipo *lyginio laipsnio* lygtis visada turi sprendinius $x_{1,2} = \pm 1$. Dalindami jos kairę pusę iš $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ gausime jau pirmojo tipo lyginio (šešto) laipsnio sangrąžinį daugianarį ir atitinkamą lygtį:

$$x^6 + 3x^5 - 2x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0\,.$$

Padaliname iš x^3 ir sugrupuojame:

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 7 = 0\,.$$

Įvedę pažymėjimą $x + \dfrac{1}{x} = z$ ir pasinaudoję tuo, kad $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = z^3 - 3z$, $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = z^2 - 2$, gausime jau tik kubinę lygtį: $z^3 + 3z^2 - 5z + 1 = 0$. Vienas iš jos sprendinių yra $z_1 = 1$, todėl lengvai randame ir kitus $z_{2,3} = -2 \pm \sqrt{5}$. Lieka išspręsti tris kvadratines lygtis.

$$x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;$$

$$x + \frac{1}{x} = -2 - \sqrt{5} \Rightarrow x_{5,6} = \frac{-2 - \sqrt{5} \pm \sqrt{5 + 4\sqrt{5}}}{2}\ ;$$

$$x + \frac{1}{x} = -2 + \sqrt{5} \Rightarrow x_{7,8} = \frac{\sqrt{5} - 2 \pm i\sqrt{4\sqrt{5} - 5}}{2}\,.$$

Ats.: ± 1, $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-2-\sqrt{5} \pm \sqrt{5+4\sqrt{5}}}{2}$, $\frac{\sqrt{5}-2 \pm \sqrt{4\sqrt{5}-5}}{2}$.

8. Metodiniuose nurodymuose akcentavome: *jei lygtis su realiaisiais koeficientais turi sprendinį $a+bi$, tai ir jungtinis skaičius $a-bi$ irgi yra tos lygties sprendinys*. Tad du sprendinius jau turime: $x_{1,2} = 2 \pm i$. Padalinę kairiąją lygties pusę iš kvadratinio trinario

$$(x-2-i)(x-2+i) = x^2 - 4x + 5,$$

gauname lygtį:

$$x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Tai, – pirmojo tipo nelyginio laipsnio sangrąžinė lygtis. Tokios lygtys visada turi sprendinį $x_3 = -1$. Todėl , dalindami iš $x+1$, suvedame ją į pirmojo tipo lyginio laipsnio sangrąžinę lygtį:

$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Padalinę iš x^2, gauname:

$$x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0.$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0.$$

Pakeitimas $z = x + \frac{1}{x}$. Atitinkama lygtis: $z^2 - 3z + 2 = 0$. Jos sprendiniai: $z_1 = 1, z_2 = 2$.

$$x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x_{4,5} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, \; x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x_{6,7} = 1.$$

Ats. $2 \pm i$, -1, $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $1, 1$.

9. Duotosios lygties sprendinius pažymėkime x_1, x_2, x_3, pagal Vijeto teoremos bendrinį gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -20, \\ x_1x_2x_3 = -c, \\ x_1x_2 = x_3. \end{cases},$$

Į antrąją lygtį įstatome: $x_1x_2 = x_3$ ir $x_1 + x_2 = -x_3$. Gauname: $x_3 - x_3^2 = -20$. Iš čia: $x_3 = 5$ arba $x_3 = -4$.

Kai $x_3 = 5$, tai $x_1x_2 = 5$ ir $c = -x_1x_2x_3 = -5 \cdot 5 = -25$, o $x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Kai $x_3 = -4$, tai $x_1x_2 = -4$, $c = -16$, $x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Ats. $c = -25$, $x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = 5$ arba $c = -16$, $x_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{2}$, $x_3 = -4$.

10. Daugianario $f(x)$ šaknys (žr. teoremą R1) tegali būti šie racionalieji skaičiai:

$$\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{3}; \pm \frac{1}{6}; \pm \frac{2}{3}; \pm \frac{4}{3}.$$

Galėtume tiesiogiai patikrinti, kurie iš šių skaičių tenkina lygtį, bet verta elgtis racionaliau ir „pretendentus“ išsijoti pasitelkiant R2 teoremą. Dėl to apskaičiuokime, pavyzdžiui, $f(-1) = 36$ ir $f(1) = 18$ ir patikrinkime, ar galioja sąlygos $(l+m) \mid 36$ ir $(l-m) \mid 18$.

Skaičius 4 nėra sprendinys, nes $\frac{l}{m} = \frac{4}{1}$, $k = -1$, $l + m = 5$, o 36 nesidalija iš 5.

Skaičius $\frac{4}{3}$ nėra sprendinys, nes $\frac{l}{m} = \frac{4}{3}$, $k = -1$, $l + m = 7$, o 36 nesidalija iš 7.

Skaičius $\frac{2}{3}$ nėra sprendinys, nes $\frac{l}{m}=\frac{2}{3}$, $k=-1$, $l+m=5$, o 36 nesidalija iš 5.

Skaičius $\frac{1}{6}$ nėra sprendinys, nes $\frac{l}{m}=\frac{1}{6}$, $k=1$, $l-m=-5$, o 18 nesidalija iš –5.

Skaičius $\frac{1}{3}$ gali būti lygties sprendinys, nes $\frac{l}{m}=\frac{1}{3}$, $l+m=4$ ir 36 dalijasi iš 4; $l-m=-2$ ir 18 dalijasi iš –2.

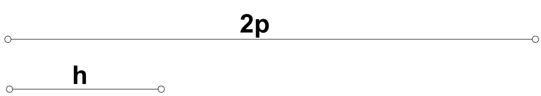
Taip galima patikrinti visus aukščiau parašytus skaičius – „pretendentus“ į sprendinius. Pasitelkę pagalbon skaičiuoklį galų gale randame, kad racionalieji lygties sprendiniai yra 2, $-\frac{1}{2}$ ir $\frac{1}{3}$.

Padalijus daugianarį $f(x)$ iš dvinarių $x-2$, $2x+1$ ir $3x-1$ lieka daugianaris $6x^3-11x^2-3x+2$. Atitinkamą lygtį jau galima išspręsti Kardano metodu, tačiau ieškant daugianario šaknų, nereikia pamiršti, kad jos gali būti *kartotinės*. Štai ir dabar lengvai pastebime, kad skaičius 2 yra ir šio trečiojo laipsnio daugianario šaknis. Todėl jį dar sykį daliname iš dvinario $x-2$ ir lieka tik kvadratinis trinaris x^2+x+1,šaknis lengvai apskaičiuojame.

Ats.: $2, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. *Duota:* $2p$ – trikampio perimetras; h – trikampio aukštinė į pagrindą.

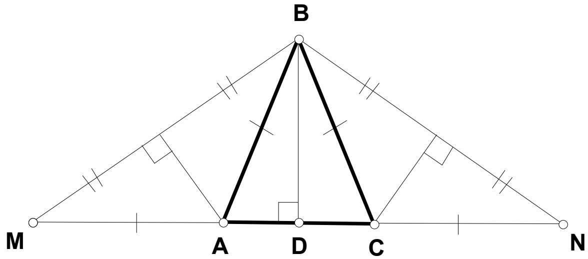


Nubrėžti: $\Delta ABC \ (AB=BC)$.

I. Analizė (1 pav.). Sakykime, kad uždavinys išspręstas ir trikampis *ABC* yra ieškomasis, t.y.

$$AB = BC,\ BD \perp AC,\ BD = h,\ AB + BC + CA = 2p.$$

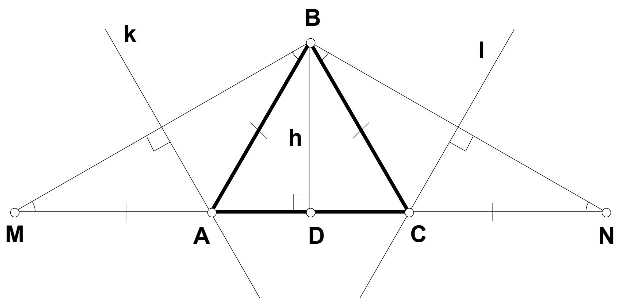
Pratęskime AC į abi puses ir atidėkime $AM = CN = AB$. Gauname lygiašonį trikampį *MBN*, kurio pagrindas $MN = 2p$ ir aukštinė $BD = h$. Taškai A ir C yra šoninių kraštinių *BM* ir *BN* vidurio statmenyse



1 pav.

II. Brėžimas (2 pav.).

1. Brėžiame lygiašonį trikampį *MBN*, kurio pagrindas $MN = 2p$ ir iš atkarpos *MN* vidurio taško *D* iškelta aukštinė $DB = h$.
2. Brėžiame atkarpų *BM* ir *BN* vidurio statmenis *k* ir *l*.
3. $MN \cap k = A$; $MN \cap l = C$.
4. Sujungę tašką *B* su taškais *A* ir *C* atkarpomis, gauname trikampį *ABC*.



2 pav.

III. Įrodymas. Įrodysime, kad gautasis trikampis *ABC* atitinka visus sąlygos reikalavimus. $AB + BC + AC = AM + CN + AC = 2p;$; $BD \perp AC$ ir $BD = h$ – pagal brėžimą. Trikampiai *MBN*, *ABM* ir *BCN* yra lygiašoniai, todėl $\angle M = \angle N = \angle ABM = \angle CBN$. Remiantis trikampio priekampio savybe: $\angle BAC = \angle M + \angle ABM$, $\angle BCA = \ = \angle N + \angle CBN$, todėl $\angle BAC = \angle BCA$ ir ΔABC – lygiašonis.

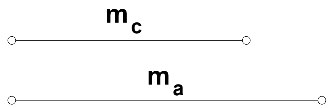
IV. Tyrimas.

Jeigu $0 < h < p$, kur p – pusperimetris, uždavinys turi vieną sprendinį, nes visi brėžimo etapai atliekami vienareikšmiškai.

Jeigu $h \geq p$, uždavinys neturi sprendinio (neegzistuoja trikampis *ABD*).

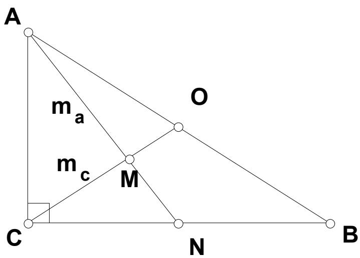
2. *Duota:*

m_c, m_a – pusiaukraštinės

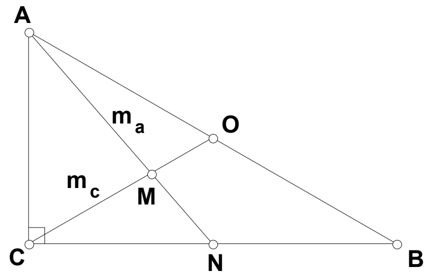


Nubrėžti: $\Delta ABC \quad (\angle C = 90^\circ)$.

I. Analizė (3 pav.). Sakykime, kad statusis trikampis *ABC* ($\angle C = 90^\circ$) yra nubrėžtas, kurio dvi pusiaukraštinės lygios $CO = m_c$ ir $AN = m_a$. Remiantis trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taško *M* savybe ir tuo, kad $OA = OB = OC = m_c$, galima nubrėžti trikampį *AOM* (pagal tris kraštines), o po to jį papildyti iki ieškomo trikampio *ABC*.



3 pav.



4 pav.

II. Brėžimas (4 pav.).

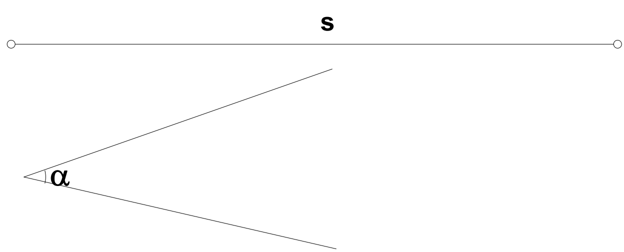
1. Brėžiame ΔAOM pagal tris kraštines: $OA = m_c$, $OM = \frac{1}{3} m_c$ ir $AM = \frac{2}{3} m_a$.
2. Pratęsiame AO už taško O ir atidedame $OB = OA$, pratęsiame OM už taško M ir atidedame $MC = \frac{2}{3} m_c$, pratęsiame AM už taško M ir atidedame $MN = \frac{1}{3} m_a$.
3. Tašką C sujungę atkarpomis su taškais A ir B, gauname ieškomą trikampį ABC.

III. Įrodymas. Laikydami M trikampio pusiaukraštinių susikirtimo tašku atidėjome $OC = m_c$ ir $AM = \frac{2}{3} m_a$ (tada $AN = m_a$). Pagal brėžimą $OA = OB = OC = m_c$. Kadangi apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras yra jo kraštinės vidurys, tai trikampis ABC yra statusis.

IV. Tyrimas. Pagal trikampio kraštinių nelygybės savybę, kad egzistuotų trikampis AOM viena trikampio kraštinė turi būti mažesnė už kitų dviejų kraštinių sumą, bet didesnė už jų skirtumą, todėl $m_c - \frac{1}{3} m_c < \frac{2}{3} m_a < m_c + \frac{1}{3} m_c$; $m_c < m_a < 2m_c$.

Vadinasi, kai $m_c < m_a < 2m_c$, uždavinys turi vienintelį sprendinį.

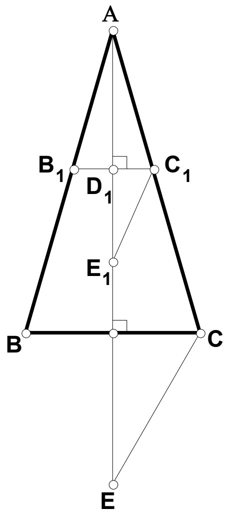
3. *Duota:*



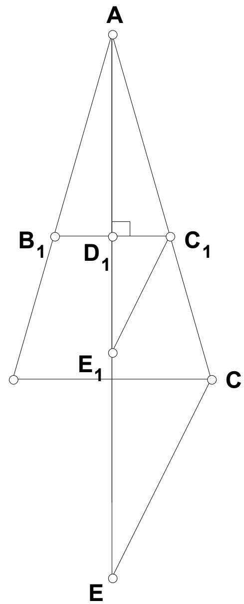
Nubrėžti: $\Delta ABC \quad (AB = AC)$.

I. Analizė (5 pav.). Taikome panašumo metodą. Jei nekreiptume dėmesio į sąlygos reikalavimą, kad trikampio aukštinės, bei pagrindo ilgių suma būtų lygi *s*, tai galėtume nubrėžti be galo daug lygiašonių trikampių, kurių viršūnės kampas būtų lygus α. Jie visi būtų panašūs ieškomajam trikampiui *ABC*.

Tegul ieškomasis trikampis ABC ($\angle A = \alpha,\ AB = AC,$ $AD + BC = s$) bei vienas iš jam panašių trikampių AB_1C_1 $(\angle B_1AC_1 = \alpha, AB_1 = AC_1)$ yra nubrėžti. Šių trikampių aukštinės AD ir AD_1 yra nubrėžtos į pagrindus. Spindulyje AD atidėkime $AE = AD + BC = s$, $AE_1 = AD_1 + B_1C_1$ ir nubrėžkime atkarpas $EC,\ E_1C_1$. Kadangi $\dfrac{AC}{AC_1} = \dfrac{AE}{AE_1}$, tai $CE \parallel C_1E_1$.



5 pav.



6 pav.

II. Brėžimas (6 pav.).

1. Brėžiame ΔAB_1C_1 $(\angle B_1AC_1 = \alpha, AB_1 = AC_1)$.
2. Brėžiame $AD_1 \perp B_1C_1$.

3. Atidedame $AE_1 = AD_1 + B_1C_1$ ir sujungiame E_1 su C_1.
4. Atidedame $AE = s$ ir brėžiame $EC \parallel E_1C_1$ $(EC \cap AC_1 = C)$.
5. Brėžiame $CB \parallel C_1B_1$ $(CB \cap AB_1 = B)$ ir gauname ieškomą ΔABC.

III. Įrodymas. Nesunku įsitikinti, kad $\angle A = \alpha$ ir $AB = AC$. Sunkiau įrodyti, kad $AD + BC = s$. Pagal brėžimą $E_1C_1 \parallel EC$, todėl $\Delta AE_1C_1 \sim \Delta AEC$ ir $\dfrac{AE_1}{AE} = \dfrac{AC_1}{AC}$ arba

$$\frac{AD_1 + D_1E_1}{AD + DE} = \frac{AC_1}{AC}. \qquad (1)$$

Pagal brėžimą $B_1C_1 \parallel BC$, todėl $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC$ ir

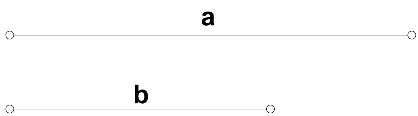
$$\frac{AD_1}{AD} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AC_1}{AC}.$$

Sudarome išvestinę proporciją:

$$\frac{AD_1 + B_1C_1}{AD + BC} = \frac{AC_1}{AC}. \qquad (2)$$

Iš (1) ir (2) lygybių: $D_1E_1 = B_1C_1$ ir $DE = BC$. Vadinasi, $AD + DE = AD + BC = s$.

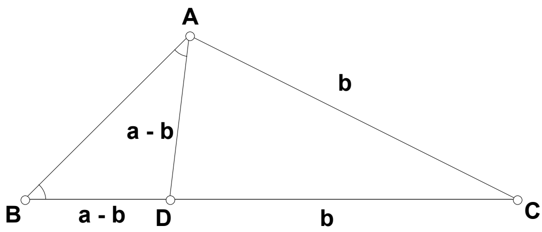
IV. Tyrimas. Šiam uždaviniui tyrimas nėra charakteringas, todėl jo galime ir neatlikti.



4. *Duota:* $\angle A = 3\angle B$

Nubrėžti: ΔABC

I. Analizė (7 pav.). Sakykime, kad ΔABC – ieškomasis, $BC = a$, $AC = b$, $\angle BAC = 3\angle B$.



7 pav.

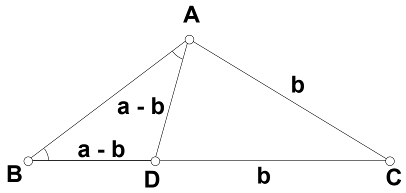
Kadangi $\angle A > \angle B$, tai $a>b$. Atidėkime $\angle BAD = \angle B$ $\left(AD \cap BC = D\right)$.

Tada $\angle CAD = \angle CDA = 2\angle B$, todėl $CD = CA = b$ ir $AD = BD = a - b$.

II. Brėžimas. (8 pav.)

1. Brėžiame ΔACD pagal tris kraštines: $AC = CD = b$, $AD = a - b$.
2. Pratęsiame CD ir atidedame $DB = a - b$.

Sujungę A su B atkarpa, gauname ieškomą ΔABC.

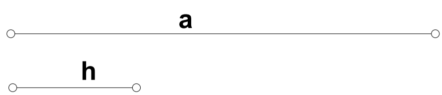


8 pav.

III. Įrodymas. $AC = b$ (brėžėme), $BC = b + \left(a - b\right) = a$. Pagal priekampio savybę $\angle ADC = \ = \angle B + \angle BAD = 2\angle B$. Lygiašonio trikampio ACD kampai prie pagrindo lygūs, todėl $\angle CAD = \angle CDA = 2\angle B$. Tada $\angle BAC = \angle B + 2\angle B = 3\angle B$.

IV. Tyrimas. Kad egzistuotų trikampis ADC, turi galioti nelygybė: $b - b < a - b < b + b$; arba $b < a < 3b$. Vadinasi, kai $b < a < 3b$, egzistuoja vienintelis sprendinys, o kitais atvejais sprendinių nėra.

5. *Duota:*

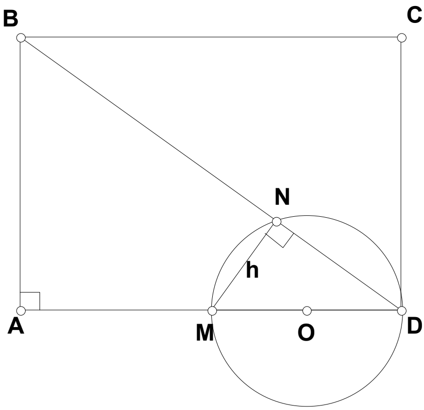


Nubrėžti: stačiakampį $ABCD$.

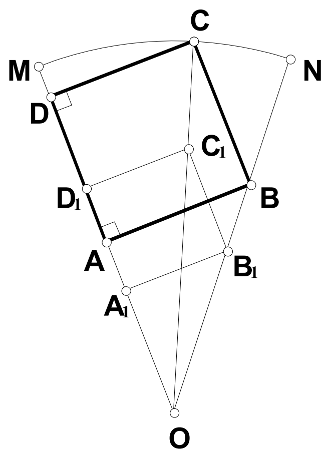
I. Analizė (9 pav.). Sakykime, kad stačiakampis $ABCD$ yra nubrėžtas: $AD = a$, $M - AD$ vidurio taškas, $MN \perp BD$ ir $MN = h$. Apie statųjį trikampį MND apibrėžkime apskritimą. Šio apskritimo centras O bus atkarpos MD vidurio taškas, o spindulys lygus $\frac{1}{2}MD$.

II. Brėžimas.

1. Bet kurioje tiesėje atidedame atkarpą $AD = a$.
2. Randame atkarpos *AD* vidurio tašką *M*.
3. Randame atkarpos *MD* vidurio tašką *O*.
4. Nubrėžiame apskritimą *w(O;OD)*.
5. Nubrėžiame apskritimą *w(M;h)*, *w(O;OD)* $\bigcap$ *w(M,h)=N*.
6. Brėžiame *DN* ir $AB \perp AD$ $\left(AB \bigcap DN = B\right)$.
7. Trikampį *ABD* papildome iki ieškomo stačiakampio *ABCD*.



9 pav.



10 pav.

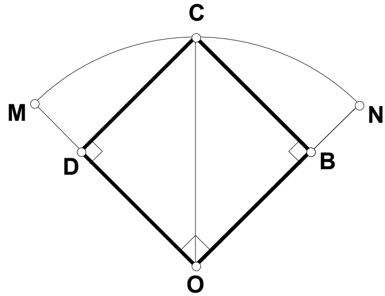
Įrodyti, kad gautasis brėžinys patenkina visus sąlygos reikalavimus nesunku.

Visi brėžimo etapai bus įvykdomi, kai $h < \frac{1}{2}a$. Uždavinys turės vienintelį sprendinį, nes tokio paties ilgio ir pločio stačiakampis, nubrėžtas kitoje vietoje, nelaikomas skirtingu sprendiniu.

6. Duota išpjova MON , kurios spindulys OM . Taikykime panašumo metodą. Pirmiausia nubrėžkime kvadratą, panašų ieškomajam, atmesdami reikalavimą, kad viena jo viršūnė būtų išpjovos lanke. (Žr. 10 pav.).

Iš spindulio OM taško A_1 iškeliame statmenį iki susikirtimo su išpjovos spinduliu ON taške B_1. Nubraižome kvadratą $A_1B_1C_1D_1$, kurio kraštinė lygi iškelto statmens ilgiui A_1B_1 ir viena kraštinė yra išpjovos spindulyje OM.

Brėžiame spindulį OC_1 ($OC_1 \cap \cup MN = C$). Iš taško C brėžiame statmenį į spindulį OM ($CD \cap OM = D$). Nubraižome ieškomą kvadratą $ABCD$, kurio kraštinė lygi iškelto statmens ilgiui CD.



11 pav.

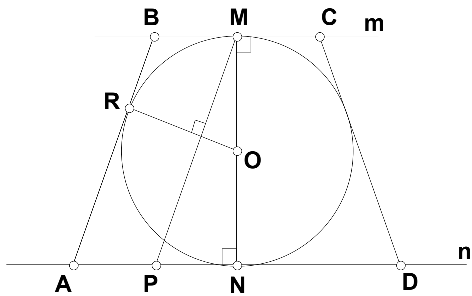
Tyrimas. Uždavinys turės sprendinį, kai išpjovos kampas yra smailus arba status. Mūsų aprašytas sprendimas tinka tik smailiajam išpjovos kampui.

Jei skritulio išpjovos kampas yra status, tai brėžiame kampo pusiaukampinę OC ir nuleidžiame į spindulius OM ir ON statmenis CD ir CB. Keturkampis $OBCD$ yra ieškomasis kvadratas.

7. *Duota:* apskritimas, apibrėžtinės trapecijos perimetras $2p$.

Apibrėžti: trapeciją $ABCD$ ($AB = CD$).

I. Analizė (12 pav.).Tegul $ABCD$ – apie duotąjį apskritimą apibrėžta lygiašonė trapecija. Pagal apibrėžtinio keturkampio savybę $AB + CD = BC + AD = = p$. Tada $AB = CD = = \frac{1}{2} p$. Per apskritimo



12 pav.

centrą O nubrėžiame trapecijos aukštinę MN, o per tašką –

atkarpą $MP \parallel AB$ ($MP \cap AD = P$). Gauname $MP = AB = \frac{1}{2}p$.

Žinant statinį ir įžambinę galima nubrėžti statųjį trikampį MNP.

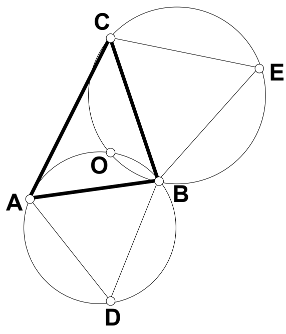
II. Brėžimas.

1. Brėžiame bet kurį apskritimo skersmenį MN.
2. Per taškus M ir N brėžiame skersmeniui statmenas apskritimo liestines m ir n.
3. Brėžiame apskritimą $w\left(M; \frac{1}{2}p\right)$ ir atkarpą MP $\left(w \cap n = P\right)$.
4. Pasinaudodami duotojo apskritimo spinduliu OR, statmenu MP, brėžiame liestinę AB, lygiagrečią su MP.
5. Atidėję $MC = MB$ ir $ND = NA$, nubrėžiame CD.

Keturkampis $ABCD$ – ieškomoji trapecija.

Tyrimas. Uždavinys turės sprendinį, kai galima bus nubrėžti statųjį trikampį MNP, t.y., kai duotojo apskritimo skersmuo $MN < \frac{1}{2}p$.

8. Nubraižome prie trikampio ABC dviejų kraštinių (AB ir BC) lygiakraščius trikampius ABD, BCE. Apibrėžę apie gautuosius trikampius apskritimus, gauname apskritimų susikirtimo tašką O, kuris ir yra ieškomasis taškas. Sujungę šį tašką su duoto trikampio viršūnėmis, gauname įbrėžtinius 120° kampus.

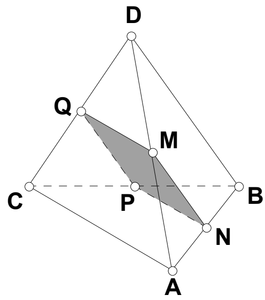


13 pav.

9. **I. Analizė** (14 pav.). Sakykime, kad pjūvis yra nubraižytas. Kertančios plokštumos ir sienos ABD pjūvį gausime, sujungę taškus M ir N. Remsimės teorema „Jeigu plokštuma eina per tiesę, lygiagrečią kitai plokštumai, ir kerta tą plokštumą, tai plokštumų susikirtimo linija yra lygiagreti duotajai tiesei“.

Pagal sąlygą tiesė AC, esanti plokštumoje ABC, lygiagreti pjūvio plokštumai MNP, todėl tų plokštumų susikirtimo linija NP yra lygiagreti tiesei AC.

Analogiškai $MQ \parallel AC$, nes
$AC \subset (ACD),\ AC \parallel (MNP)$,
$(ACD) \cap (MNP) = MQ$.



14 pav.

II. Brėžimas.

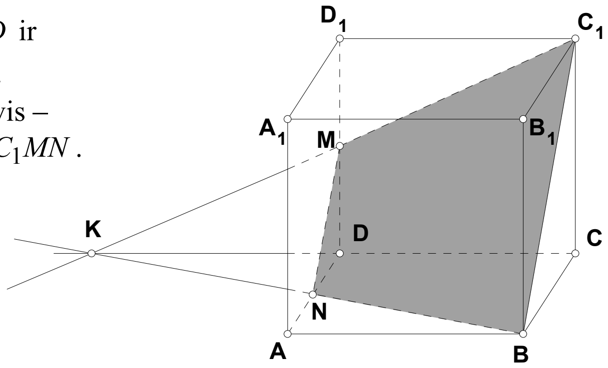
1. Brėžiame MN.
2. Brėžiame $NP \parallel \mathrm{AC}$ $(NP \cap BC = P)$.
3. Brėžiame $MQ \parallel \mathrm{AC}$ $(MQ \cap CD = Q)$.
4. Sujungiame taškus P ir Q.

Keturkampis $MNPQ$ - ieškomasis pjūvis.

III. Įrodymas. Remsimės teorema „Jeigu tiesė yra lygiagreti tiesei, esančiai plokštumoje, tai duotoji tiesė ir plokštuma yra lygiagrečios“. Pjūvio plokštuma MNP lygiagreti tiesei AC, nes $MQ \parallel \mathrm{AC}$. Akivaizdu, kad įvykdyti ir kiti sąlygos reikalavimai.

IV. Tyrimas. Uždavinys turi vienintelį sprendinį, nes visi brėžimo etapai atliekami vienareikšmiškai. Briauna BC kerta pjūvio plokštumą vieninteliame taške P, o pagal aksiomą per taškus M, N, P eina vienintelė plokštuma. Be to, per tašką duotai tiesei galima išvesti tik vieną lygiagrečią tiesę.

10. Brėžiame
$K = C_1M \cap CD$ ir
$N = BK \cap AD$.
Ieškomasis pjūvis –
keturkampis BC_1MN.



15 pav.

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1.

$$\begin{array}{r|l} 10020316 & 124 \\ \cline{2-2} \underline{992} & 80809 \\ 1003 & \\ \underline{992} & \\ 1116 & \\ \underline{1116} & \\ 0 & \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{r|l} 1014 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{9} & 338 \\ 11 & \\ \underline{9} & \\ 24 & \\ \underline{24} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1014 & 2 \\ \cline{2-2} \underline{10} & 507 \\ 14 & \\ \underline{14} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1035 & 9 \\ \cline{2-2} \underline{9} & 115 \\ 13 & \\ \underline{9} & \\ 45 & \\ \underline{45} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1035 & 5 \\ \cline{2-2} \underline{10} & 207 \\ 35 & \\ \underline{35} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1\,0\,0\,8 & 9 \\ \cline{2-2} \underline{9} & 1\,1\,2 \\ 1\,0 & \\ \underline{9} & \\ 1\,8 & \\ \underline{1\,8} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1\,0\,0\,8 & 2 \\ \cline{2-2} \underline{1\,0} & 5\,0\,4 \\ 0\,8 & \\ \underline{0\,8} & \\ 0 & \end{array}$$

3. $$\begin{array}{r} 9\,5\,6\,7 \\ +\ 1\,0\,8\,5 \\ \hline 1\,0\,6\,5\,2 \end{array}$$

4. $$\begin{array}{r} 2\,9\,7\,8\,6 \\ +\ \ 8\,5\,0 \\ 8\,5\,0 \\ \hline 3\,1\,4\,8\,6 \end{array}$$

5. $$\begin{array}{r} 2\,8\,5 \\ \times\ \ 3\,9 \\ \hline 2\,5\,6\,5 \\ 8\,5\,5 \\ \hline 1\,1\,1\,1\,5 \end{array}$$

6. $$\begin{array}{r} 7\,7\,5 \\ \times\ \ 3\,3 \\ \hline 2\,3\,2\,5 \\ 2\,3\,2\,5 \\ \hline 2\,5\,5\,7\,5 \end{array}$$

7. $$\begin{array}{r|l} 1.1\,5\,1\,8\,1\,6\,7\,8\,5 & 2\,4\,5 \\ \cline{2-2} \underline{9\,8\,0} & 4\,7\,0\,1\,2\,9\,3 \\ 1\,7\,1\,8 & \\ \underline{1\,7\,1\,5} & \\ 3\,1\,6 & \\ \underline{2\,4\,5} & \\ 7\,1\,7 & \\ \underline{4\,9\,0} & \\ 2\,2\,7\,8 & \\ \underline{2\,2\,0\,5} & \\ 7\,3\,5 & \\ \underline{7\,3\,5} & \\ 0 & \end{array}$$

Uždavinio sąlygas taip pat tenkina skaičiai:
1176316785:245=4801213,
1156518078:246=4701293,
1181118078:246=4801293.

8.

$$\begin{array}{r} 105.\,263.\,157.\,894.\,736.\,842 \\ 2 \\ \hline 210.\,526.\,315.\,789.\,473.\,684 \end{array}$$

9.

$$\begin{array}{r|l} 9\ 1\ 8 & 1\ 8 \\ \cline{2-2} 9\ 0 & 5\ 1 \\ \cline{1-1} 1\ 8 & \end{array}$$

10. Jeigu būtų toks skaičius, tai tada

$$\overline{axy...t} = 50\,\overline{xy...t},$$

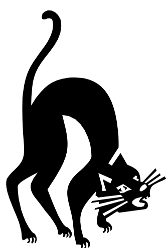
$$10^n a + \overline{xy...t} = 50\,xy...t,$$

$$10^n a = 49\,xy...t.$$

Kadangi a skaitmuo, tai tokia lygybė yra neįmanoma. Vadinasi, tokio skaičiaus nėra.

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

1	2	3	4
55 34 684 650	(1; 2; –1)	i; $-i$ $\dfrac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$	$14\sqrt{3} + 24$



Išleistose LJMM knygelėse buvo nagrinėtos tokios temos:

I KNYGA

I. J. Šinkūnas. *Kvadratinis trinaris.*
II. G. Stepanauskas. *Rekurenčiosios sekos.*
III. R. Kašuba. *Elementarinės matematikos uždavinių sprendimo metodai.*
IV. A.Skūpas. *Funkcija.*
V. V. Pekarskas. *Sveikoji ir trupmeninė skaičiaus dalis. Jų savybės.*
VI. Pr. Survila. *Kombinatorikos ir tikimtybių skaičiavimo pradmenys.*
VII. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. *Grafai.*

II KNYGA

I. J. Šinkūnas, A. Urbonas. *Funkcija.*
II. E. Mazėtis. *Apskritimų geometrija. Įbrėžtiniai ir apibrėžtiniai daugiakampiai. Taisyklingieji daugiakampiai.*
III. B. Vosylienė. *Skaičiaus modulis algebros uždaviniuose.*
IV. J. Šinkūnas. *Figūrų panašumas. Talio teorema ir jos taikymai.*
V. J. Jurgaitis. *Matematinės indukcijos metodas.*
VI. A. Urbonas. *Lygčių, nelygybių bei jų sistemų ekvivalentumas.*
VII. B. Grigelionis. *Urnų schemos ir baigtinės markovo grandinės.*
VIII. A. Juozapavičius, J. Šinkūnas. *Koordinačių sistemos. Žemėlapiai.*

III KNYGA

I. E. Stankus. *Skaičių dalumas.*
II. R. Skrabutėnas. *Grandininės trupmenos.*
III. V. Vitkus. *Vidurkiai.*
IV. E. Mazėtis. *Vektoriai.*
V. J. Šinkūnas. *Plokščių figūrų plotai.*
VI. St. Staknienė. *Iracionaliosios lygtys ir nelygybės.*
VII. A. Apynis, E. Stankus. *Trigonometrinės lygtys ir nelygybės.*
VIII. AG. Stepanauskas. *Sekos.*

IV KNYGA

I. G. Stepanauskas. *Skaičiavimo sistemos.*
II. P. Vaškas. *Antrosios eilės kreivės.*
III. L. Maliaukienė. *Įdomioji logika.*
IV. A. P. Urbonas. *Atvirkštinės funkcijos.*
V. A. Apynis. *Optimizavimo uždaviniai.*
VI. P. Survila. *Kombinatorikos pradmenys.*
VII. P. Survila. *Tikimybių teorijos pradmenys.*
VIII. A. Nagelė. *Kompleksiniai skaičiai.*