LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Jaunajam matematikui

6

2003–2005 metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Danielių leidykla

Vilnius, 2005

UDK 51 (079)
Ia712

Leidinio sudarytojai:
Antanas APYNIS
Eugenijus STANKUS
Juozas ŠINKŪNAS

Leidinį redagavo Joana PRIBUŠAUSKAITĖ
Maketavo Kristina LYNDIENĖ

ISBN-9955-476-33-8

TURINYS

PRATARMĖ

Šiame šeštajame Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos leidinyje „Jaunajam matematikui“ skaitytojas ras 2003–2005 mokslo metų LJMM visų temų metodinę medžiagą, uždavinius bei jų sprendimus.

Per šiuos dvejus mokslo metus LJMM klausytojai turės galimybę išsamiau panagrinėti finansų matematikos uždavinius, geometrines transformacijas, funkcijų reikšmių sritis, Paskalio trikampį, tiesinių lygčių sistemų taikymo uždavinius, Invariantų metodo subtilumus, tiesinių rekurenčiųjų sekų savybes ir uždavinių su parametrais sprendimą.

Kad skaitytojui būtų patogiau naudotis LJMM knygelėmis „Jaunajam matematikui“, paskutiniuose šios knygelės puslapiuose įdėjome visų anksčiau išleistų knygelių temų pavadinimus. Tikimės, kad ir ši knygelė, papildanti jau esamos metodinės literatūros sąrašą, bus naudinga jos skaitytojams.

Nuoširdžiai dėkojame straipsnių autoriams už metodinę medžiagą ir kolegei Kristinai Lyndienei už nuoširdų darbą renkant ir maketuojant knygelės tekstą. Labai ačiū šio leidinio redaktorei Joanai Pribušauskaitei.

Antanas Apynis,
Eugenijus Stankus,
Juozas Šinkūnas

Metodinė medžiaga ir užduotys

STOJAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Į kiekvieną 3×3 matmenų kvadratinės lentelės langelį laisvai pasirenkant įrašomas vienas iš trijų skaičių: -1; 0; 1. Paskui apskaičiuojamos eilutėse, stulpeliuose ir įstrižainėse parašytų skaičių sumos. Įrodykite, kad tarp šių 8 sumų yra bent dvi vienodos.

2. Raskite triženklį skaičių, kad skirtumas tarp 328 ir šio skaičiaus būtų lygus ieškomojo skaičiaus skaitmenų sumai.

3. Ceche pagamintas detales nutarta sukrauti į vienodas dėžes, kuriose telpa po 20 detalių. Kai į turimas dėžes sudėjo po 12 detalių, viena detalė liko. Paskui visas detales iš vienos dėžės išėmė ir jas bei likusiąją sudėjo po lygiai į kitas dėžes. Kiek detalių buvo pagaminta?

4. Inde buvo 12% druskos rūgšties tirpalo. Iš pradžių nupylė 1 litrą šio tirpalo ir įpylė 1 litrą vandens. Paskui vėl nupylė 1 litrą tirpalo ir įpylė 1 litrą vandens. Taip susidarė 3% druskos rūgšties tirpalas. Kiek litrų tirpalo buvo inde?

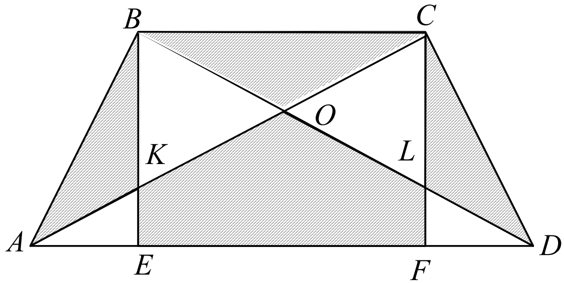
5. Išspręskite šią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x^2y - xy^2 = 30, \\ x + xy - y = 13. \end{cases}$$

6. Kambaryje yra keli žmonės, mokantys bent vieną kalbą iš trijų – anglų, vokiečių ir prancūzų: 6 moka anglų kalbą, 6 – vokiečių kalbą, 7 – prancūzų kalbą. Keturi žmonės moka anglų ir vokiečių, trys – vokiečių ir prancūzų, o du – prancūzų ir anglų kalbas. Visas tris kalbas moka vienas žmogus. Kiek žmonių yra kambaryje ir keli iš jų moka tik anglų kalbą?

7. Vienas pusskritulio skersmens galas yra lygiašonio trikampio kampo prie pagrindo viršūnėje, o kitas – šio trikampio pagrinde. Raskite pusskritulio spindulį, jeigu pusapskritimis vieną šoninę kraštine liečia, o kitą dalija į dvi 5 cm ir 4 cm atkarpas (skaitant nuo trikampio pagrindo).

8. Trapecija *ABCD* yra lygiašonė, atkarpos *BE* ir *CF* yra jos aukštinės. Įrodykite kad figūros *EKOLF* plotas yra lygus subrūkšniuotų trikampių *ABK*, *BOC* ir *CLD* plotų sumai.



9. Į kūgio pagrindą įbrėžtas lygiakraštis trikampis, kurio kraštinė lygi a. Plokštuma, einanti per kūgio viršūnę ir trikampio kraštinę, kūgyje iškerta lygiakraštį trikampį. Raskite kūgio tūrį.

10. Realieji skaičiai x, y ir a tenkina lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + y = 2a - 1, \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3. \end{cases}$$

Nustatykite, su kuriomis a reikšmėmis sandauga xy įgyja mažiausią reikšmę.

1 tema. FINANSŲ MATEMATIKA

Albertas Bakštys
(Šiaulių universitetas)

1. ĮVADAS

Laikui bėgant pinigų vertė kinta. Jeigu sausio 1 padėsime į stalčių 100 litų, gruodžio 31 jį išėmę iš stalčiaus pamatysime, kad banknotas nepasikeitė, tačiau jo vertė nebe ta, kokia buvo metų pradžioje. Tarkime, tais metais prekės pabrango 4 %. Jeigu metų pradžioje prekė kainavo 1 litą, tai metų pabaigoje ji kainuos 1,04 litų. Už tą 100 litų banknotą metų pradžioje galėjo nupirkti 100 tokių prekių, o metų pabaigoje tik $100/1{,}04 \approx 96$ prekes. Ir atvirkščiai, padėję 100 litų į banką, kuris moka 3 % palūkanų, po metų galėsime atsiimti $100 + 100 \cdot 0{,}03 = 103$ (Lt).

Taigi pinigų vertė priklauso nuo laiko. Finansų matematika nagrinėja įvairius pinigų vertės skaičiavimo būdus. Tai – už į banką padėtus pinigus palūkanų skaičiavimas, vertybinių popierių pirkimas už mažesnę kainą, pinigų kaupimas periodinėmis įmokomis į banką, kredito grąžinimo būdų nagrinėjimas.

Finansų matematikos uždaviniams spręsti patogu naudoti Excel programą (žr. [1]). Tačiau visus skaičiavimus galima atlikti ir skaičiuotuvu, tik reikia, kad juo galėtume pakelti skaičių laipsniu. Pastebėsime, jog atsakymus reikia pateikti piniginio vieneto šimtųjų tikslumu.

2. PROCENTAI IR PROMILĖS

Norėdami surasti dydžio a dalį b, kuri sudarančią, pavyzdžiui $\frac{3}{4}$ šio dydžio, dydį a dauginame iš $\frac{3}{4}$. Gausime $b = a \cdot \frac{3}{4}$. Finansiniuose skaičiavimuose dažniausiai naudojamos šimtosios dalys. Viena šimtoji dydžio a dalis $\frac{1}{100}a$ vadinama 1 *procentu (dydžio a)* ir žymima 1 %, o m yra dydis $\frac{m}{100}a$.

1 pavyzdys. Parduotuvė padidino prekės kainą 10 %, o po to paskelbė, kad ją tiek pat procentų sumažinsianti. Ar galutinė prekės kaina bus ta pati, kaip ir pradinė?

Sprendimas. Tarkime, kad pradinė prekės kaina yra c Lt. Kainą padidinus, ta prekė kainuos $c + c \cdot \frac{10}{100} = 1{,}1c$ (Lt).

Šią kainą sumažinus 10 %, prekė kainuos

$$1{,}1c - 1{,}1c \cdot \frac{10}{100} = 0{,}99c \text{ (Lt)}.$$

Ats. Galutinė prekės kaina bus 1 % mažesnė už pradinę kainą.

2 pavyzdys. Parduotuvė prieš šventes sumažino prekės kainą 20 %. Todėl ją buvo galima nupirkti už 260 Lt. Kiek prekė kainavo prieš atpiginimą?

S*prendimas.* Prekės kainą prieš atpiginimą pažymėkime x. Ją randame spręsdami lygtį:

$$x - x \cdot \frac{20}{100} = 260,$$

$$80x = 26\,000,$$

$$x = 325 \text{ (Lt)}.$$

Ats. Prieš atpiginimą prekė kainavo 325 Lt.

3 pavyzdys. Pridėtinės vertės mokestis (PVM) yra 18 % didumo. Kiek procentų prekės kainos reikia sumažinti, kad gautume jos kainą be PVM?

Sprendimas. Jeigu prekės kaina be PVM lygi c, o jos kaina su PVM lygi k, tai $c + c \cdot 0{,}18 = k$. Iš čia $c = k \cdot \frac{1}{1{,}18}$.

Šitoje lygybėje esančią trupmeną galime išreikšti skirtumu:

$$\frac{1}{1{,}18} = 1 - x\,, \ \ x \approx 0{,}153\,.$$

Vadinasi, $c \approx k\,(1 - 0{,}153)$.

Ats. Kainą reikia sumažinti apie 15,3 %. Prekybininkai šį skaičių dar labiau suapvalina ir sako, kad norint gauti kainą be PVM, reikia kainą su PVM sumažinti 15 %.

Kartais prireikia smulkesnių negu šimtosios dalys. Tada naudojamos tūkstantosios dalys, kurios vadinamos promilėmis (lot. pro mile – nuo tūkstančio) ir žymimos ‰. Taigi,

$$1\ ‰ = \frac{1}{1000} = 0{,}001\,, \quad p\ ‰ = \frac{p}{1000}\,.$$

4 pavyzdys. Baltijos jūros vandenyje yra 6 ‰ druskų. Kiek druskų yra viename kibire (10 kg) Baltijos jūros vandens?

Sprendimas. Randame 10 kilogramų vandens $\frac{6}{1000}$ dalis:

$$10 \cdot \frac{6}{1000} = 0{,}06\ (\text{kg}) = 60\ (\text{g}).$$

Ats.: 60 g.

3. PALŪKANOS

Padėję pinigus į banką ar juos paskolinę, nebegalime jais naudotis. Už tai yra mokamos palūkanos. Bankai skelbia metinį palūkanų procentą, t.y. kiek procentų gautum palūkanų, jei indėlį laikytum metus. Tačiau palūkanos gali būti skaičiuojamos ir už trumpesnį laikotarpį – pusmetį, ketvirtį, mėnesį ir t.t. Metinis palūkanų procentas vadinamas palūkanų norma ir žymimas i.

Paprastosios palūkanos. Yra ne vienas palūkanų skaičiavimo būdas. Kai palūkanos skaičiuojamos nuo pradinio kapitalo, jos vadinamos **paprastosiomis**. Dar sakome, kad procentai yra paprastieji. Pradinis kapitalas drauge su palūkanomis per laikotarpį t vadinamas sukauptąja verte ir žymimas $A(t)$. Todėl sukauptosios vertės ir pradinio kapitalo skirtumas yra palūkanos.

Jeigu į banką padėjome k litų, tai po t metų sukauptoji vertė lygi

$$A(t) = k + kit = k\ (1 + it)\,.$$

5 pavyzdys. Kam bus lygi sukauptoji vertė, jei 73 dienoms paskolinsime 5000 litų su metinių 16 % paprastųjų palūkanų? Tais metais buvo 365 dienos.

Sprendimas. Laikotarpis, išreikštas metais, lygus $t = \dfrac{73}{365} = 0{,}2$, $i = \dfrac{16}{100} = 0{,}16$. Todėl sukauptoji vertė lygi

$$A(0{,}2) = 5000\,(1 + 0{,}16 \cdot 0{,}2) = 5160 \text{ (Lt)}.$$

6 pavyzdys. Kiek metinių palūkanų procentų reikia pareikalauti, kad paskolinę 10000 litų 8 mėnesiams gautume 1200 litų palūkanų?

Sprendimas. Laikotarpis, išreikštas metais, lygus $t = \dfrac{8}{12}$. Procentų skaičių p randame iš lygties:

$$A\left(\frac{8}{12}\right) - A(0) = 1200 \Rightarrow 10\,000 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{8}{12} = 1200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{200p}{3} = 1200 \Rightarrow p = 18.$$

Ats. Reikia pareikalauti 18 %.

Sudėtinės palūkanos. Kai palūkanos skaičiuojamos pagal paprastuosius procentus, kiek kartų jas skaičiuotume, skaičiuojame nuo tos pačios pradinės sumos k. Tačiau jei pinigus padėsime į banką 3 mėnesiams ir, suėjus terminui, sutartį pratęsime prie pradinės sumos prijungę palūkanas, naujos palūkanos bus skaičiuojamos nuo sukauptosios vertės.

Palūkanų skaičiavimas nuo sukauptosios vertės vadinamas *sudėtiniais procentais,* o palūkanos – *sudėtinėmis*.

Vienodo ilgio laiko tarpai, už kuriuos skaičiuojamos palūkanos, vadinami *laiko periodais* arba tiesiog *periodais*.

Paskolinto ar padėto į banką kapitalo k didumas (drauge su palūkanomis) po n periodų taip pat vadinamas *sukauptąja verte* ir žymimas $A(n)$.

Skaičiuojant sudėtines palūkanas, iš palūkanų normos reikia surasti vieno periodo palūkanų normą. Tarkime, palūkanų norma lygi 2,8 %, o palūkanos skaičiuojamos kiekvieną metų ketvirtį. Tada už vieną periodą gausime $\dfrac{2{,}8\,\%}{4} = 0{,}7\,\%$ palūkanų. Šis skaičius vadinamas *periodo palūkanų norma*.

Suraskime, kam lygi sukauptoji vertė, kai k litų padedame į banką n periodams, o periodo palūkanų norma lygi i. Po pirmojo periodo

$$A(1) = k\ (1+i)\ .$$

Toliau gausime:

$$A(2) = A(1)\ (1+i) = k\ (1+i)^2\ ,$$

$$A(3) = A(2)\ (1+i) = k\ (1+i)^3\ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A(n) = A(n-1)\ (1+i) = k\ (1+i)^n\ .$$

Vadinasi, po n periodų sukauptoji vertė lygi

$$A(n) = k\ (1+i)^n\ .$$

7 pavyzdys. Į kokią sumą išaugs 1500 Lt kapitalas, jei jį padėsime į banką 12 metų su 4 % sudėtinių palūkanų?

Sprendimas. Periodas yra metai, todėl periodo palūkanų norma lygi $i = 4\ \%$, o sukauptoji vertė lygi

$$A(12) = 1500\left(1+\frac{4}{100}\right)^{12} = 1500\cdot 1{,}6010 = 2401{,}5\ \text{(Lt).}$$

8 pavyzdys. Į banką padėjo 10000 litų su 2,4 % sudėtinių palūkanų jas perskaičiuojant kas 3 mėnesius. Kam lygi sukauptoji vertė po 5 metų?

Sprendimas. 2,4 % yra metiniai procentai, todėl vieno periodo palūkanų norma lygi $i = \dfrac{2{,}4\ \%}{4} = 0{,}6\ \%$. Per 5 metus yra $4\cdot 5 = 20$ periodų, todėl

$$A(20) = 10\ 000\ (1+0{,}006)^{20} = 10\ 000\cdot 1{,}15439 = 11\ 543{,}9\ \text{(Lt).}$$

Ats. Sukauptoji vertė lygi 11543,9 Lt.

9 pavyzdys. Kelių sudėtinių procentų palūkanas turi duoti bankas, kad indėlis po 20 metų padvigubėtų? Palūkanų skaičiavimo periodas lygus metams.

Sprendimas. Jeigu indėlis lygus k, tai po 20 metų sukauptoji vertė $A(20) = 2k$. Metinę procentų normą i randame iš lygties:

$$2k = k\ (1+i)^{20},\ \ (1+i)^{20} = 2,\ \ 20\ \lg\ (1+i) = \lg\ 2,$$

$$\lg\ (1+i) = \frac{\lg 2}{20} = 0{,}01505,$$

$$1+i=1{,}035,\ \ i=0{,}035=3{,}5\ \%.$$

Ats. Metinė palūkanų norma lygi 3,5 %.

4. ANUITETAS

Norėdami sukaupti lėšų, periodiškai į banką įmokame indėlius. Paskolą taip pat galime grąžinti ne iš karto, o dalimis.

Periodinių mokėjimų srautas vadinamas *anuitetu* arba *finansine renta*.

Panagrinėkime anuiteto būsimąją vertę, kai dydžio C periodines įmokas mokėsime n kartų kiekvieno periodo pabaigoje. Tarkime, periodo palūkanų norma lygi i. Pirmoji įmoka per likusius n–1 periodą užaugs į

$$C(1+i)^{n-1},$$

antroji įmoka per n–1 periodą užaugs į

$$C(1+i)^{n-2}$$

ir t.t. Drauge su paskutinė įmoka C baigiasi mokėjimų srautas, todėl anuiteto būsimoji vertė lygi

$$S=\ C(1+i)^{n-1}+C(1+i)^{n-2}+\ldots+C=C\,((1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+\ldots+1).$$

Skliaustuose esantis daugianaris žymimas simboliu $s_{n\rceil i}$, kuris skaitomas „*s* kampas *n* prie *i*“. Pagal geometrinės progresijos sumos formulę randame, kad

$$s_{n\rceil i}=1+(1+i)+\ldots+(1+i)^{n-1}=\frac{(1+i)^n-1}{i},$$

todėl anuiteto, kai įmokos mokamos kiekvieno periodo pabaigoje, būsimoji vertė lygi

$$S=C\,s_{n\rceil i}\,.$$

Daugiklį $s_{n\rceil i}$ galime skaičiuoti pagal formulę

$$s_{n\rceil i}=\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

arba paimti iš lentelių, kurios yra finansų matematikos vadovėliuose.

10 pavyzdys. Į banką, kuris moka 3 % metinių palūkanų, kiekvieno metų ketvirčio pabaigoje padedame po 1000 litų. Kam lygi anuiteto būsimoji vertė po 6 metų?

Sprendimas. Įmokų bus $n = 4 \cdot 6 = 24$, o periodo palūkanų norma lygi $i = \dfrac{3\ \%}{4} = 0{,}75\ \%$. Todėl būsimoji anuiteto vertė lygi

$$S = 1000\, s_{24\rceil 0{,}75\ \%} = 1000 \cdot 26{,}1885 = 26188{,}5 \text{ (Lt).}$$

Ats. Būsimoji anuiteto vertė lygi 26188,5 Lt.

Jeigu įmokos mokamos periodo pradžioje, kiekviena įmoka išbūna banke vienu periodu ilgiau negu mokant periodo pabaigoje, todėl dabar anuiteto būsimoji vertė lygi

$$S = C\,((1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \ldots + (1+i)).$$

Daugiklis, esantis prie *C*, žymimas $\ddot{s}_{n\rceil i}$, todėl anuiteto būsimoji vertė, kai įmokos mokamos kiekvieno periodo pradžioje lygi

$$S = C\,\ddot{s}_{n\rceil i}.$$

$\ddot{s}_{n\rceil i}$ galime išreikšti $s_{n+1\rceil i}$:

$$\ddot{s}_{n\rceil i} = (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^n =$$

$$= \frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} = \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1 = s_{n+1\rceil i} - 1.$$

Todėl pakanka vien tik $s_{n\rceil i}$ lentelių.

11 pavyzdys. Į banką, kuris moka 3 % metinių palūkanų, kiekvieno mėnesio pradžioje padedu po 100 litų. Kiek sutaupysiu per 6 metus?

Sprendimas. Mėnesio palūkanų norma lygi $i = \dfrac{3\ \%}{12} = 0{,}25\ \%$, o anuitetas tęsiasi $12 \cdot 6 = 72$ periodus. Tada

$$S = 100\,(\ddot{s}_{72\rceil 0{,}25\ \%} - 1) = 100\left(\frac{(1+0{,}0025)^{73} - 1}{0{,}0025} - 1\right) =$$

$$= 100 \cdot 78{,}9763 = 7897{,}63 \text{ (Lt).}$$

Ats.: Sutaupysiu 7897,53 Lt.

12 pavyzdys. Bankas moka 3,5 % metinių palūkanų. Kokio didumo turi būti įmokos *C*, kad per 20 metų sutaupyčiau 25000 litų, jei pinigus į banką padėčiau kiekvienų metų pradžioje?

Sprendimas. Iš anuiteto būsimosios vertės formulės randame, kad įmokos lygios $C = 25000 / \ddot{s}_{20\rceil 0{,}035}$.

Kadangi $\ddot{s}_{20\rceil 0{,}035} = s_{21\rceil 0{,}035} - 1 = 29{,}2698$, tai $C = \dfrac{25000}{29{,}2698} = 854{,}13$ (Lt).

Ats.: Kasmet reikia padėti į banką po 854,13 Lt.

5. KREDITO GRĄŽINIMAS

Kai mūsų sumanymams neužtenka pinigų, juos skolinamės arba prekes imame skolon. Pinigų ar prekių perleidimas laikinam naudojimui vadinamas kreditu (lot. creditum – paskola). Įstaiga ar asmuo, kuris duoda kreditą vadinamas kreditoriumi, o tas, kuris ima kreditą – debitoriumi.

Kreditorius, kol jam negrąžins kredito, negali naudotis savo turtu, todėl už tai reikalauja atlyginimo, kuris vadinamas palūkanomis. Vadinasi, suėjus kredito terminui, reikia grąžinti ne tik pasiskolintą sumą, bet ir palūkanas. Artimi žmonės skolina pinigus be palūkanų.

Yra įvairių kredito grąžinimo būdų. Vienas iš jų yra grąžinti pasiskolintą sumą ir paprastąsias palūkanas. Tarkime, kreditas lygus B, o palūkanų reikia mokėti p paprastųjų procentų per metus. Jeigu kreditas gautas t metams, suėjus terminui reikės grąžinti

$$K = B + B \cdot \frac{p}{100} \cdot t = B\left(1 + \frac{pt}{100}\right).$$

13 pavyzdys. Devyniems mėnesiams pasiskolinau 12000 litų su 16 % paprastųjų palūkanų per metus. Kiek litų, suėjus terminui, turėsiu grąžinti?

Sprendimas. Formulėje kredito terminas išreikštas metais, todėl $t = \dfrac{9}{12} = 0{,}75$. Gražinama suma yra lygi

$$K = 12000\left(1 + \frac{16 \cdot 0{,}75}{100}\right) = 13440 \text{ (Lt).}$$

Ats.: Turėsiu grąžinti 13440 litų.

Kitas būdas yra kredito grąžinimas lygiomis dalimis, palūkanas skaičiuojant pagal sudėtinius procentus. Šis būdas vadinamas *laipsnišku kredito grąžinimu*.

Tarkime n metams paimtas kreditas B su p sudėtinių procentų palūkanomis. Kreditą drauge su palūkanomis reikia grąžinti lygiomis dalimis po m kartų per metus. Todėl yra $n = m \cdot t$ kredito grąžinimo periodų. Vieno periodo palūkanų norma lygi

$$i = \frac{p}{100} : m\,,$$

o per n periodų kreditas išaugs iki

$$B\,(1+i)^n\,.$$

Šitą sumą esame įsipareigoję grąžinti periodinėmis įmokomis R. Per n periodų anuiteto būsimoji vertė lygi

$$S = R\, s_{n\rceil i}\,.$$

Kreditas bus grąžintas, kai anuitetas bus lygus užaugusiam kreditui:

$$R\, s_{n\rceil i} = B\,(1+i)^n\,.$$

Todėl periodinės įmokos lygios

$$R = B(1+i)^n / s_{n\rceil i}\,.$$

Kadangi

$$a_{n\rceil i} = s_{n\rceil i} / (1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n} = \frac{1-(1+i)^n}{i} = ,$$

kredito laipsniško grąžinimo periodinių įmokų dydis lygus

$$R = B / a_{n\rceil i}\,.$$

14 pavyzdys. Noriu paimti 100000 Lt kreditą. Kreditorius reikalauja 15 sudėtinių procentų metinių palūkanų, o kreditą reikia grąžinti per 3 metus, kiekvieno mėnesio gale įmokant po vienodą pinigų sumą. Kam lygios įmokos?

Sprendimas. Vieno periodo palūkanų norma lygi 15 %/12 = = 1,25 % = 0,0125, o periodų yra $12 \cdot 3 = 36$. Todėl

$$a_{36\rceil 0,0125} = \frac{1-(1+0{,}0125)^{-36}}{0{,}0125} = \frac{1-0{,}6394}{0{,}0125} = 28{,}8473$$

ir įmokos lygios

$$R = 100000/a_{36\rceil 0,0125} = \frac{100\,000}{28{,}8475} = 3466{,}53 \;\; \text{(Lt).}$$

Ats.: Kreditui grąžinti periodinės įmokos lygios 3466,53 Lt.

L i t e r a t ū r a

1. A. Bakštys, *Finansų matematika*, Šiauliai: ŠU leidykla, 1998.
2. P. Katauskis, *Finansų matematika*, V.: VU leidykla, 1997.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Keliais procentais reikia padidinti kiekvieną stačiakampio gretasienio briauną, kad kūno tūris padidėtų dvigubai?

2. Prekės kaina, priskaičiavus PVM, lygi 599 Lt, o jeigu PVM imtų 1,5 % mažesnį, prekė kainuotų 591,39 Lt. Kiek procentų sudaro pradinis PVM?

3. Asmuo už 75000 litų nusipirko butą ir nutarė jį išnuomoti. Kiek litų nuomos jis turi reikalauti per mėnesį, kad gautų tiek pat, kiek bankas mokėtų per mėnesį paprastųjų palūkanų? Už indėlį bankas moka 2,8 % metinių palūkanų.

4. Bankas mokas 3 % metinių paprastųjų palūkanų. Kuriam laikui į jį reikia padėti 2000 litų, kad gaučiau 90 litų palūkanų?

5. Paimtas 25000 litų kreditas, bet po pusės metų reikės grąžinti 26500 litų. Su keliais paprastaisiais procentais buvo suteiktas kreditas?

6. Prieš 5 metus namas buvo įvertintas 120000 litų. Jei tada namas būtų parduotas ir ta suma padėta į banką, kuris moka 4 % sudėtinių palūkanų, kokia dabar būtų to indėlio sukauptoji vertė?

7. Bankas moka 2,4 % metinių palūkanų, kai indėlis padedamas 3 mėnesiams. Noriu 3 mėnesiams į banką padėti tam tikrą sumą, o suėjus 3 mėnesiams, prijungti palūkanas ir pratęsti terminą dar 3 mėnesiams ir t.t. Kiek litų reikia padėti į banką, kad po dviejų metų galėčiau atsiimti 5000 litų?

8. Įrodykite formules:

a) $s_{\overline{n+k}|i} = s_{\overline{n}|i} + s_{\overline{k}|i}(1+i)^n$;

b) $a_{\overline{n+k}|i} = a_{\overline{n}|i} + a_{\overline{k}|i}(1+i)^{-n}$.

9. Kokiomis periodinėmis įmokomis galima laipsniškai grąžinti 30000 litų kreditą, jei per 4 metus įmokos mokamos kiekvieno metų ketvirčio pabaigoje? Kreditorius reikalauja 15 % sudėtinių palūkanų.

10. Noriu paimti paskolą, bet galiu 4 metus kiekvieną mėnesį grąžinti po 100 litų. Kam lygi paskola, jei kreditorius reikalauja 12 % sudėtinių palūkanų?

II tema. GEOMETRINĖS TRANSFORMACIJOS

Edmundas Mazėtis
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

Transformacijos sąvoka yra viena svarbiausių sąvokų ne tik matematikoje, bet ir kituose gamtos moksluose. Gamtoje nuolat viskas juda, keičiasi, pereina iš vienos vietos į kitą, iš vienos būsenos į kitą, t. y. vienaip ar kitaip transformuojasi. Atlikdami šią užduotį, Jūs detaliau susipažinsite su plokštumos transformacijomis.

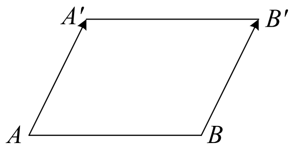
Transformacijos sąvoka – tai termino „funkcija“ sinonimas. Kai nagrinėjame funkciją $y = f(x)$, tai suprantame, kad kintamojo x reikšmei iš vienos skaičių aibės (vadinamos tos funkcijos apibrėžimo sritimi) nurodytu būdu yra priskiriamas vienintelis skaičius y iš kitos skaičių aibės (vadinamos funkcijos reikšmių sritimi). Kai kalbama apie geometrines transformacijas, tai užrašas $Y = g(X)$ yra suprantamas taip: bet kuriam plokštumos taškui X pagal tam tikrą taisyklę f yra priskiriamas vienintelis plokštumos taškas Y, arba kitaip sakant, transformacija f taškas X atvaizduojamas į tašką Y. Tuomet taškas Y yra vadinamas taško X *vaizdu*. Jei Φ – duotoji plokštumos figūra (t. y. plokštumos taškų aibė), tai visų jos taškų $X \in \Phi$ vaizdai $Y = f(X)$ sudaro plokštumos taškų aibę, vadinamą *figūros* Φ *vaizdu*.

Sakykime, kad f ir g yra dvi plokštumos transformacijos, ir transformacija f plokštumos taškas X atvaizduojamas į tašką $Y = f(X)$, o transformacija g taškas Y atvaizduojamas į tašką $Z = g(Y)$. Tuomet apibrėžiama nauja transformacija h, kuria taškas X atvaizduojamas į tašką Z; ši transformacija yra vadinama dviejų transformacijų f ir g *kompozicija*. Geometrijoje paprastai nagrinėjamos tokios transformacijos, kuriomis ne tik kiekvienas plokštumos taškas X vaizduojamas vieninteliu plokštumos tašku $f(X)$, bet ir kiekvienu plokštumos tašku vaizduojamas vienintelis plokštumos taškas. Tokios transformacijos vadinamos *bijekcijomis*. Jei f yra plokštumos bijekcija, kuria bet koks plokštumos taškas X vaizduojamas tašku $Y = f(X)$, tai tašku Y vaizduojamas tik taškas X. Todėl apibrėžiame transformaciją, kuria taškas Y vaizduojamas tašku X; ši transformacija yra vadinama transformacijai f *atvirkštine transformacija* ir žymima f^{-1}. Pagal apibrėžimą $f^{-1}(Y) = X$ tada ir tik tada, kai $Y = f(X)$, bet kuriam plokštumos taškui Y. Nagrinėjama ir tokia transformacija, kuria bet kuris plokštumos taškas atvaizduojamas pats į save. Tokia transformacija vadinama plokštumos *tapatingąja transformacija.* Dviejų viena kitai atvirkštinių transformacijų kompozicija visuomet yra tapatingoji transformacija.

Plokštumos taškas M, kuris duotaja transformacija f atvaizduojamas į save, vadinamas šios transformacijos *invariantiniu tašku*. Figūra Φ, atvaizduojama pati į save, vadinama transformacijos f *invariantine figūra*.

Plokštumos judesiu (arba *poslinkiu*) vadinama tokia plokštumos transformacija f, kuri nekeičia atstumų tarp taškų, t. y. bet kuriems taškams A, B ir jų vaizdams $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ atstumai AB ir $A'B'$ vienodi. Pateiksime judesių pavyzdžių.

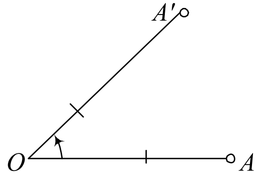
1. Lygiagretusis postūmis. Jei $\vec{a}$ – plokštumos vektorius, tai plokštumos transformacija $L_{\vec{a}}$, kuria kiekvienas taškas A atvaizduojamas į tašką A' taip, kad $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, vadinama *lygiagrečiuoju postūmiu* vektoriumi $\vec{a}$. Jei taškų A ir B vaizdai yra atitinkamai taškai A' ir B', tai keturkampio $ABB'A'$ priešingos kraštinės AA' ir BB' yra lygios ir lygiagrečios (1 pav.), todėl šis keturkampis yra lygiagretainis, o atstumai AB ir $A'B'$ yra vienodi. Todėl lygiagretusis postūmis yra judesys. Akivaizdu, kad nėra taškų, invariantinių lygiagrečiojo postūmio nenuliniu vektoriumi atžvilgiu, o invariantinės tiesės yra tos, kurios lygiagrečios su vektoriumi $\vec{a}$. Be to, dviejų lygiagrečiųjų postūmių $L_{\vec{a}}$ ir $L_{\vec{b}}$ kompozicija yra lygiagretusis postūmis vektoriumi $\vec{a} + \vec{b}$.



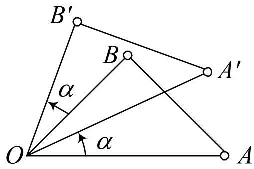
1 pav.

2. Plokštumos posūkis apie tašką. *Plokštumos posūkiu* apie tašką O kampu α vadinama plokštumos transformacija, kuria kiekvienas taškas A atvaizduojamas į tašką A' taip, kad $OA = OA'$, o $\angle AOA' = \alpha$ (2 pav.).

1 užduotis. Įrodykite, kad plokštumos posūkis apie tašką yra judesys (įrodydami pasinaudokite 3 pav.).



2 pav.



3 pav.

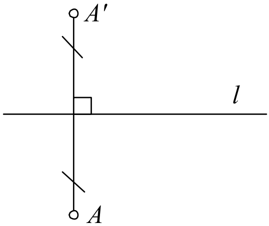
Akivaizdu, kad taškas O (vadinamas *posūkio centru*) yra vienintelis invariantinis posūkio atžvilgiu taškas, invariantinių tiesių šiuo atveju nėra.

2 užduotis. Įrodykite šį teiginį: posūkio kampu α kiekviena tiesė a atvaizduojama į tiesę a', sudarančią su tiese a kampą α (jei α – smailusis arba statusis kampas) arba kampą $180° - \alpha$ (jei α – bukasis kampas).

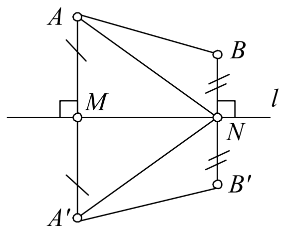
3. Centrinė simetrija – tai plokštumos posūkis apie tašką O 180° kampu, taškas A ir jo vaizdas A' yra vadinami *simetriškais* taško O atžvilgiu; akivaizdu, kad taškai A ir A' yra simetriški taško O atžvilgiu, jei taškas O yra atkarpos AA' vidurio taškas. Aišku, kad centrinė simetrija yra judesys, simetrijos centras O yra vienintelis invariantinis taškas, kiekviena tiesė, einanti per tašką O yra invariantinė centrinės simetrijos atžvilgiu.

3 užduotis. Jei tiesė a neina per simetrijos centrą O, tai jai simetriška taško O atžvilgiu tiesė a' yra lygiagreti su tiese a. Įrodykite.

4. Ašinė simetrija. Taškai A ir A' yra vadinami simetriškais tiesės l atžvilgiu, jei tiesė l yra atkarpos AA' vidurio statmuo (4 pav.). Ašinė simetrija (arba simetrija tiesės l atžvilgiu) – tai plokštumos transformacija S_l, kuria kiekvienas taškas A vaizduojamas tašku A', simetrišku



4 pav.



5 pav.

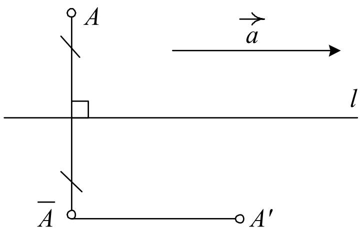
jam tiesės l atžvilgiu. Jei taškas yra simetrijos ašyje l, tai jis vaizduojamas savimi.

4 užduotis. Įrodykite, kad ašinė simetrija yra judesys (5 pav.).

5 užduotis. Įrodykite, kad ašinei simetrijai atvirkštinė transformacija yra ta pati ašinė simetrija.

Akivaizdu, kad ašinės simetrijos atžvilgiu invariantinės tiesės yra simetrijos ašis l ir visos jai statmenos tiesės.

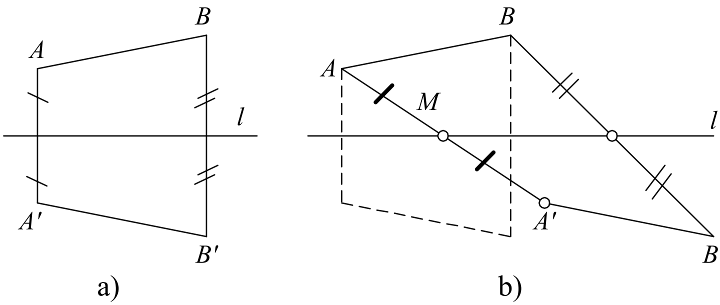
5. Slenkančioji simetrija. Sakykime, kad duota tiesė l ir su ja lygiagretus vektorius $\vec{a}$. Ašinės simetrijos S_l ir lygiagrečiojo postūmio $L_{\vec{a}}$ kompozicija yra judesys, vadinamas *slenkančiąja simetrija* (6 pav.). Akivaizdu, kad nėra taškų, invariantinių šio judesio atžvilgiu, o vienintelė invariantinė tiesė yra slenkančiosios simetrijos ašis.



6 pav.

6 užduotis. Įrodykite, kad kai tiesė l lygiagreti su vektoriumi $\vec{a}$, tai transformacijų S_l ir $L_{\vec{a}}$ kompozicija nepriklauso nuo jų atlikimo tvarkos.

Bet kurios dvi lygios atkarpos AB ir $A'B'$ atvaizduojamos viena į kitą (taškas A atvaizduojamas į tašką A', o taškas B – į B') arba ašine simetrija (jei $AA' \parallel BB'$) arba slenkančiąja simetrija (jei tiesės AA' ir BB' nelygiagrečios, 7 pav.); abiem atvejais simetrijos ašis yra atkarpų AA' ir BB' vidurio taškus jungianti tiesė.

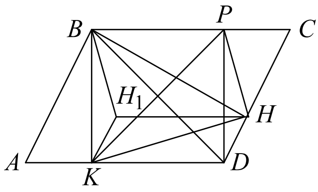


7 pav.

Išvardijome penkių rūšių judesius. Pasirodo, kad bet kuris judesys yra viena iš šių išvardytų transformacijų.

1 pavyzdys. Iš lygiagretainio $ABCD$ viršūnės B nubrėžtos aukštinės $BK \perp AD$, $BH \perp CD$. Rasime atstumą nuo taško B iki trikampio BKH aukštinių sankirtos taško, jei $KH = a$, $BD = b$.

Sprendimas. Sakykime, kad trikampio BKH aukštinės kertasi taške H_1 (8 pav.). Kadangi $HH_1 \perp BK$, tai $HH_1 \parallel AD$. Kadangi $KH_1 \perp BH$, tai $KH_1 \parallel DC$. Taigi keturkampis H_1HDK yra lygiagretainis. Todėl lygiagrečiuoju postūmio vektoriumi $\overrightarrow{H_1H}$ taškas K atvaizduojamas į tašką D. Jei taško B vaizdas yra taškas P, tai keturkampis $BPDK$ yra stačiakampis, todėl $KP = BD = b$. Kita vertus, keturkampis $BPHH_1$ yra lygiagretainis, todėl $PH \parallel BH_1$. Taigi $\angle PHK = 90^\circ$ ir iš stačiojo trikampio PHK gauname

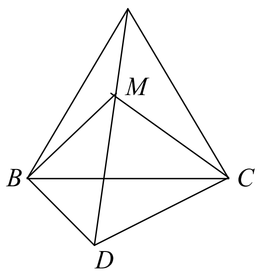


8 pav.

$$BH_1 = PH = \sqrt{KP^2 - KH^2} = \sqrt{b^2 - a^2}.$$

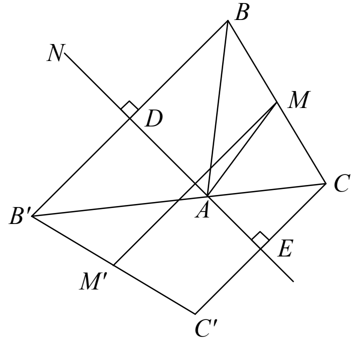
2 pavyzdys. Lygiakraščio trikampio ABC viduje yra taškas M; be to, $AM = 1$, $BM = \sqrt{3}$, $CM = 2$. Raskime kampų AMB, BMC ir AMC didumus.

Sprendimas. Pasukime plokštumą apie tašką C 60° kampu (9 pav.) taip, kad taško A vaizdas būtų taškas B. Tuomet taškas M vaizduojamas tašku D ir trikampis CMD – lygiakraštis, nes $CM = CD$, o $\angle MCD = 60^\circ$. Iš čia $MD = CM = 2$. Kadangi atkarpa AM vaizduojama atkarpa BD, tai $AM = BD = 1$. Iš trikampio MDB gauname, kad $MD^2 = MB^2 + DB^2$, t. y. trikampis MBD yra status. Kadangi $MD = 2$, $BD = 1$, tai kampas DMB lygus 30°. Tuomet $\angle CMB = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, $\angle AMB = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$, $\angle AMC = 360^\circ - 150^\circ - 90^\circ = 120^\circ$.



9 pav.

3 pavyzdys. Atkarpa AM yra trikampio ABC pusiaukraštinė. Įrodysime, kad yra teisinga nelygybė $AM \geq \frac{1}{2}(AC + AB)\cos\frac{A}{2}$.



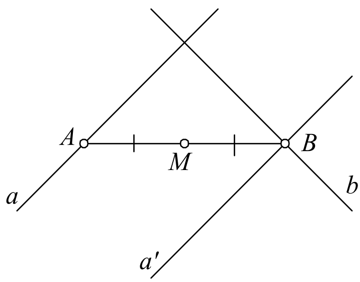
10 pav.

Sprendimas. Sakykime, kad tiesė AN yra trikampio ABC priekampio A pusiaukampinė (10 pav.), taškai B', M', C' yra simetriški taškams B, M, C tiesės AN atžvilgiu. Kadangi tiesės BB', CC' ir MM' yra statmenos tiesei AN, tai keturkampis $BCC'B'$ yra lygiašonė trapecija, o atkarpa MM' yra jos vidurio linija. Todėl $MM' = \frac{1}{2}(BB' + CC')$. Iš stačiojo trikampio ADB randame

$$BB' = 2DB = 2AB\sin\frac{180^\circ - A}{2} = 2AB\cos\frac{A}{2};$$

analogiškai iš stačiojo trikampio CAE gauname $CC' = 2AC\cos\frac{A}{2}$. Taigi $MM' = (AC + AB)\cos\frac{A}{2}$. Lygiašoniam trikampiui AMM' pritaikę trikampio nelygybę, gauname $AM + AM' \geq MM'$, arba $AM \geq \frac{1}{2}MM'$, t. y. $AM \geq (AC + AB)\cos\frac{A}{2}$.

4 pavyzdys. Duotos dvi susikertančios tiesės a ir b, o taip pat joms nepriklausantis taškas M. Įrodysime, kad per tašką M eina vienintelė tiesė, kuri kerta tieses a ir b taškuose A ir B taip, kad taškas M yra atkarpos AB vidurys.

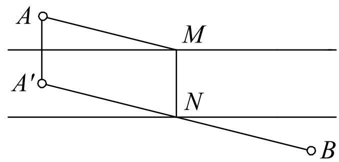


11 pav.

Sprendimas. Sakykime, kad tiesė AB eina per tašką M, kuris yra atkarpos AB vidurio taškas (11 pav.). Tuomet taškai A ir Byra simetriški taško M

atžvilgiu. Jei tiesė a' yra simetriška tiesei a taško M atžvilgiu, tai ji eina per tašką B (taškas A yra tiesėje a, todėl jam simetriškas taškas B yra tiesėje a'). Bet pagal uždavinio sąlygą taškas B yra tiesėje b. Kadangi tiesės a ir b nelygiagrečios, o tiesė a' lygiagreti su tiese a (žr. 3 užduotį), tai tiesės a' ir b kertasi taške B. Taigi tiesė BM yra ieškomoji. Jei $A'B'$ – kita tiesė, tenkinanti uždavinio sąlygą, tai taškai A' ir B' simetriški taško M atžvilgiu. Taškui A' simetriškas taškas B' priklauso ir tiesei a', ir tiesei b, t. y. jis sutampa su tašku B; todėl tiesės AB ir $A'B'$ sutampa.

5 pavyzdys. Kaimai A ir B yra skirtingose upės pusėse (12 pav.). Nustatysime, kur reikia pastatyti tiltą MN per upę, kad kelias $AMNB$ iš kaimo A į kaimą B būtų trumpiausias (upės krantai yra lygiagretūs, o tiltas MN yra jiems statmenas).



12 pav.

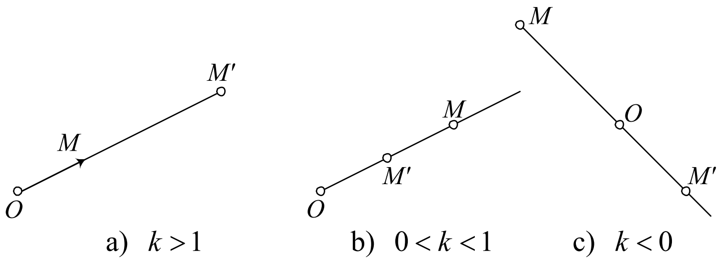
Sprendimas. Tašką A pastumiame lygiagrečiuoju postūmiu vektoriumi $\overrightarrow{MN}$ į tašką A'. Kadangi $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$, tai keturkampis $AMNA'$ yra lygiagretainis ir $AM = A'N$. Iš čia gauname, kad kelias iš kaimo A į kaimą B $AM + MN + NB$ yra lygus $AA' + A'N + NB$. Šis kelias trumpiausias, kai taškai A', N ir B yra vienoje tiesėje. Taigi reikia rasti tašką A' ir tiesės $A'B$ sankirtos su artimesniuoju kaimui B upės krantu taške N statyti tiltą.

Dabar nagrinėsime transformacijas, kuriomis atkarpos nebūtinai vaizduojamos joms lygiomis atkarpomis. Paprasčiausios tokios transformacijos yra panašumo transformacijos.

Plokštumos transformacija f, kuria bet kurie du taškai A ir B atvaizduojami į taškus A' ir B' taip, kad atstumų $A'B'$ ir AB santykis k yra vienodas visoms taškų poroms, vadinama *panašumo transformacija*; teigiamas skaičius k yra vadinamas panašumo transformacijos f *panašumo koeficientu*. Jei trikampio ABC viršūnės vaizduojamos taškais A', B', C', tai $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC} = k$, t. y. trikampiai ABC ir $A'B'C'$ panašūs. Iš čia išplaukia, kad panašumo transformacija kampas atvaizduojamas į jam lygų kampą.

Homotetija, kurios centras – taškas O, o koeficientas $k \neq 0$ – tai plokštumos transformacija, kuria bet kuris taškas M vaizduojamas tašku

M' taip, kad teisinga lygybė $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ (13 pav.). Iš apibrėžimo išplaukia, kad taškai O, M ir M' yra vienoje tiesėje.



13 pav.

7 užduotis. Įrodykite, kad homotetija, kurios centras O, o koeficientas $k = -1$, yra simetrija centro O atžvilgiu.

Homotetijos centras O yra vienintelis invariantinis homotetijos atžvilgiu taškas; bet kuri tiesė, einanti per tašką O, atvaizduojama į save.

Sakykime, kad homotetija, kurios centras O ir koeficientas k, taškai A ir B atvaizduojami į taškus A' ir B', t. y. $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$. Tuomet

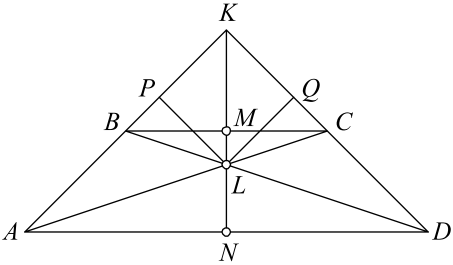
$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k\overrightarrow{AB}.$$

Iš čia išplaukia, kad a) $A'B' = |k|\, AB$, t. y. homotetija yra panašumo transformacija, kurios panašumo koeficientas $|k|$; b) $A'B' \parallel AB$, t. y. tiesė, neinanti per homotetijos centrą atvaizduojama į lygiagrečią su ja tiesę.

Homotetijos, kurios centras O ir posūkio apie tašką O kompozicija vadinama *homotetiniu posūkiu*. Homotetijos, kurios centras O ir ašinės simetrijos S_l, jei $O \in l$, kompozicija yra vadinama *homotetine simetrija*. Ir homotetinis posūkis, ir homotetinė simetrija yra panašumo transformacija. Apskritai, bet kuri panašumo transformacija yra arba homotetija, arba judesio ir homotetijos kompozicija.

6 pavyzdys. Trapecijos įstrižainių susikirtimo taškas vienodai nutolęs nuo jos šoninių kraštinių. Įrodysime, kad ši trapecija yra lygiašonė.

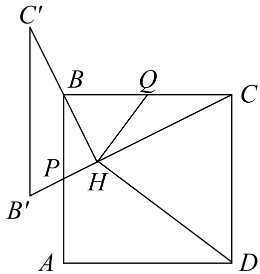
Sprendimas. Sakykime, kad trapecijos $ABCD$ šoninės kraštinės AB ir CD kertasi taške K, o įstrižainės – taške L (14 pav.). Nagrinėjame homotetiją, kurios centras K ir kuria taškas B atvaizduojamas į tašką A. Kadangi tiesės BC ir AD lygiagrečios, o taškai K, C ir D yra vienoje tiesėje, tai taško C vaizdas yra taškas D. Todėl pagrindo BC vidurio taškas M atvaizduojamas į pagrindo AD vidurio tašką N, t. y. taškai K, M ir N yra vienoje tiesėje. Analogiškai homotetija, kurios centras L ir kuria taškas B vaizduojamas tašku D, taškas C vaizduojamas tašku A, todėl taško M vaizdas yra taškas N, t. y. taškai M, L ir N yra vienoje tiesėje. Taigi visi taškai K, M, L ir N yra vienoje tiesėje. Jei $LP \perp AB$, $LQ \perp CD$, tai trikampiai LPK ir LQK lygūs (jie statūs, įžambinė LK bendra, $LP = LQ$ pagal sąlygą). Iš čia gauname, kad $\angle PKL = \angle QKL$, t. y. tiesė KL yra trikampio AKD pusiaukampinė. Kadangi ji yra ir šio trikampio pusiaukraštinė, tai trikampis AKD lygiašonis, o tai reiškia, kad ir trapecija $ABCD$ yra lygiašonė.



14 pav.

7 pavyzdys. Kvadrato $ABCD$ kraštinėse AB ir BC pažymėti taškai P ir Q, be to, $BP = BQ$. Atkarpa BH yra trikampio BPC aukštinė. Įrodysime, kad kampas DHQ status.

Sprendimas. Kadangi trikampiai BHC ir PHB panašūs, tai rasime panašumo transformaciją, kuria taškai B, H ir C atvaizduojami atitinkamai į taškus P, H ir B (15 pav.). Pasukame trikampį BHC apie tašką H 90° kampu, gauname trikampį $B'HC'$. Atlikime homotetiją, kurios centras H, o koeficientas $k = \dfrac{BP}{CB}$. Tuomet trikampis $B'HC'$ vaizduojamas trikampiu BHP. Taigi trikampis BHC vaizduojamas trikampiu PHB transformacija, kuri yra homotetinis posūkis apie tašką H 90°



15 pav.

kampu su koeficientu $k = \dfrac{BP}{CB}$. Šia transformacija kvadratas *ABCD* vaizduojamas kvadratu. Duotojo kvadrato viršūnės *C* ir *B* vaizduojamos taškais *B* ir *P*, o $BP = BQ$; taškas *D* vaizduojamas tašku *Q*. Todėl tiesės *HD* vaizdas – tai tiesė *HQ*. Kadangi posūkio 90° kampu bet kuri tiesė pasukama 90° kampu (žr. 2 užduotį), o homotetija tiesė vaizduojama lygiagrečia su ja tiese, tai kampas tarp tiesių *HD* ir *HQ* yra status.

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Du lygūs apskritimai išoriškai liečiasi taške *K*. Tiesė, lygiagreti su jų centrų tiese, kerta apskritimus taškuose, kurie paeiliui pažymėti *A*, *B*, *C*, *D*. Raskite kampą *AKC*.

(Nagrinėkite lygiagretųjį postūmį vektoriumi $\overrightarrow{AC}$.)

2. Duoti du taškai *A* ir *B* ir dvi nelygiagrečios tiesės *m* ir *n*. Įrodykite, kad egzistuoja vienintelis lygiagretainis *ABCD*, kad $C \in m$, $D \in n$.

(Lygiagretusis postūmis vektoriumi $\overrightarrow{AB}$.)

3. Apskritimai ϖ_1 ir ϖ_2 kertasi taškuose *A* ir *B*. Ar egzistuoja tiesė *l*, einanti per tašką *A*, kertanti apskritimus ϖ_1 ir ϖ_2 atitinkamai taškuose *C* ir *D* taip, kad atkarpos *AC* ir *AD* yra lygios? (Centrinė simetrija taško *A* atžvilgiu.)

4. Kampo *ABC* viduje pažymėtas taškas *M*. Kaip reikia parinkti kampo kraštinėse *AB* ir *BC* taškus *K* ir *L*, kad suma $MK + KL + LM$ būtų mažiausia?

5. Į apskritimą įbrėžtas lygiašonis trikampis *ABC*, $AB = AC$, $\angle A = 30^\circ$. Lanke *AC* yra taškas *D* toks, kad lanko dydis *CD* lygus 30°. Taškas *G* yra lanke *AB* ir $DG = AC$ ($AG < BG$). Tiesė *DG* kerta tiesę *AB* taške *E*. Raskite trikampio *AEG* kampus. (Posūkis apie apskritimo centrą 30° kampu.)

6. Trikampio ABC kraštinė AC ilgesnė už kraštinę AB. Kraštinėje AC yra taškas D toks, kad $CD = AB$. Atkarpų AD ir BC vidurio taškai yra M ir N, kampas BAC lygus 40°. Raskite kampą CMN. (Slenkančioji simetrija, taškus A ir B atvaizduojanti į taškus D ir C.)

7. Į trikampį ABC įbrėžtas apskritimas liečia kraštinę AB taške M, atkarpa MN yra to apskritimo skersmuo. Tiesė CN kerta tiesę AB taške D. Įrodykite, kad $AC + AD = BC + BD$. (Homotetija su centru C ir atitinkamais taškais A_1 ir A.)

8. Kampo MON kraštinėje OM yra taškai A_1, A_2, o kraštinėje ON – taškai B_1, B_2, be to, tiesės A_1B_1 ir A_2B_2 yra lygiagrečios. Tiesės A_1P ir B_1Q, statmenos atitinkamai tiesėms OM ir ON, kertasi taške X, o tiesės A_2S ir B_2T, statmenos tiesėms OM ir ON, kertasi taške Y. Įrodykite, kad taškai O, X ir Y yra vienoje tiesėje. (Homotetija su centru O ir atitinkamais taškais A_1 ir A_2.)

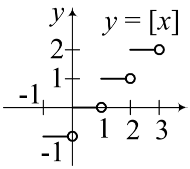
9. Apie trikampį ABC apibrėžtas apskritimas, atkarpa CD – jo skersmuo. Taškas C_1 yra simetriškas taškui C atkarpos AB vidurio taško atžvilgiu. Raskite kampą tarp tiesių AB ir C_1D. (Homotetija su centru C ir koeficientu 0,5.)

10. Stačiojo trikampio ABC ($\angle C = 90^\circ$) aukštinė yra atkarpa CD. Raskite kampą tarp trikampių ADC ir DBC pusiaukraštinių AM ir CN. (Homotetinis posūkis su centru D, 90° kampu ir koeficientu $k = DC/AD$.)

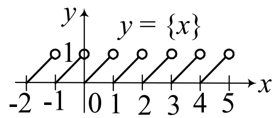
III tema. FUNKCIJOS REIKŠMIŲ SRITIS

Birutė Galbogienė
(Jurbarko Antano Giedraičio-Giedriaus gimnazija)

Dažniausiai funkcija apibrėžiama formule, pavyzdžiui $y = x^2 + 2x + 1$. Iš formulės matyti, kaip, turint argumento reikšmę x, galima apskaičiuoti funkcijos reikšmę y. Skaičius y, atitinkantis pasirinktąją argumento reikšmę x, vadinamas *funkcijos reikšme* taške x. Visa funkcijos $y = f(x)$ reikšmių aibė žymima E arba $E(f(x))$ ir *vadinama funkcijos reikšmių sritimi*. Pradėkime nuo funkcijų $f(x) = [x]$ ir $g(x) = \{x\}$; čia $[x]$ yra skaičiaus x sveikoji, o $\{x\}$ – jo trupmeninė dalis. Prisiminkime, kad $[x]$ – sveikoji skaičiaus x dalis, yra didžiausias sveikasis skaičius n, su kuriuo galioja nelygybė $n \le x$. Pavyzdžiui, $[2{,}3] = 2$, $[0{,}7] = 0$, $[-1{,}2] = -2$. Trupmenine skaičiaus x dalimi $\{x\}$, vadinamas skirtumas $\{x\} = x - [x]$ Pavyzdžiui, $\{2{,}3\} = 0{,}3$, $\{0{,}7\} = 0{,}7$, $\{-1{,}2\} = -1{,}2 - (-2) = 0{,}8$. Funkcijų $f(x) = [x]$ ir $g(x) = \{x\}$ grafikai yra tokie:

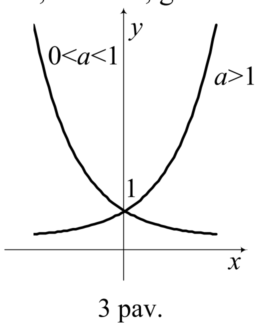


1 pav.

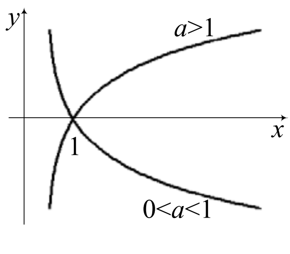


2 pav.

Iš jų matyti, kad $E([x]) = Z$, $E(\{x\}) = [0; 1)$. Rodiklinės funkcijos $y = a^x$, $a > 1$ ir $a \ne 1$ bei logaritminės funkcijos $y = \log_a x$, kur $a > 0$ ir $a \ne 1$, o $x > 0$, grafikai yra tokios kreivės:



3 pav.



4 pav.

Matome, kad šių funkcijų reikšmių sritys yra aibės $E(a^x) = (0; +\infty)$ ir $E(\log_a x) = (-\infty; +\infty)$. Priminsime logaritmo apibrėžimą. Skaičiaus N logaritmu pagrindu a ($a > 0$ ir $a \neq 1$) vadinamas laipsnio rodiklis, kuriuo reikia pakelti pagrindą a, norint gauti skaičių N. $\log_a N = n$, nes $a^n = N$. Pavyzdžiui, $\log_3 27 = 3$, nes $3^3 = 27$, $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$, nes $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$. Tačiau ne visuomet ieškant reikšmių srities reikia brėžti funkcijos grafiką. Funkcijos reikšmių sritį galima surasti analiziniu būdu. Kaip tai atlikti matysime iš tolesnių pavyzdžių.

1 pavyzdys. Raskime funkcijos

$$f(x) = \log_3 x + \log_x 3$$

reikšmių sritį.

Sprendimas. Tarkime, jog

$$\log_3 x + \log_x 3 = a \text{, kai } x \in D(f(x)).$$

Ieškosime galimų a reikšmių, su kuriomis gauta lygtis turės sprendinių. Surastosios a reikšmės ir sudarys funkcijos $f(x)$ reikšmių sritį, kai $x \in D(f(x))$.

$$\log_3^2 x - a\log_3 x + 1 = 0.$$

(Pasinaudojome logaritmo pagrindo keitimo formule $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$.)

Ši lygtis yra kvadratinė $\log_3 x$ atžvilgiu, todėl ji turės sprendinių, kai $D = a^2 - 4 \geq 0$. Išsprendę nelygybę, gauname $a \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Ats.: $E(f(x)) = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

2 pavyzdys. Ar skaičius –0,4 priklauso funkcijos

$$f(x) = \cos^2 x - \sin x \cos x$$

reikšmių sričiai?

Sprendimas. Prisiminkime, kad

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x - \alpha).$$

Pirmiausia funkcijos $f(x)$ išraišką pertvarkykime taip

$$\cos^2 x - \sin x \cos x = \cos^2 x - \frac{1}{2} \cdot 2 \sin x \cos x =$$

$$= 0{,}5 \cos 2x - 0{,}5 \sin 2x + 0{,}5 = 0{,}5\,\sqrt{2}\cos(2x - \alpha) + 0{,}5 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x - \alpha) + \frac{1}{2}.$$

Funkcijos $f(x)$ reikšmių srities ieškokime aukščiau parodytu metodu. Tarkime, kad

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x - \alpha) + \frac{1}{2} = a\ .$$

Panagrinėkime, su kuriomis a reikšmėmis gauta lygtis

$$\cos(2x - \alpha) = \frac{2a - 1}{\sqrt{2}}$$

turi sprendinių. Kairioji lygybės pusė $\cos(2x - \alpha)$ įgyja reikšmes iš intervalo [–1; 1], tai ir dešiniosios šios lygybės pusės reikšmės priklausys tam pačiam intervalui:

$$\frac{2a - 1}{\sqrt{2}} \in [-1; 1] \;\Rightarrow\; a \in \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0{,}4 \notin \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Ats.: ne.

3 pavyzdys. Raskime funkcijos $f(x) = \dfrac{1}{\{x\}}$ apibrėžimo sritį.

Sprendimas. Funkcijos apibrėžimo sritį sudaro tik tos kintamojo x reikšmės, su kuriomis $\{x\} \neq 0$. Vadinasi, x reikšmės negali būti sveikieji skaičiai

Ats.: $\{x : x \in R,\ x \neq n;\ n \in Z\}$.

4 pavyzdys. Nustatykime funkcijų

$$f(x) = \sqrt{\log_3 \cos x}\ \text{ ir }\ g(x) = 4^x + 2^x$$

reikšmių aibių sankirtą.

Sprendimas. Pažymėję $\sqrt{\log_3 \cos x} = a \geq 0$, išsiaiškinsime, su kuriomis a reikšmėmis gauta lygtis turi sprendinių, kai $x \in D(f(x))$. Kadangi $\log_3 \cos x = a^2$, $\cos x = 3^{a^2} \in [-1; 1]$, todėl

$$a^2 \leq 0 \;\Rightarrow\; a = 0 \;\Rightarrow\; E(f(x)) = 0 .$$

Funkcijos $g(x) = 4^x + 2^x$ reikšmių sritis (ieškoma analogiškai) yra intervalas $(0; +\infty)$.

Matome, kad $E(f(x))$ ir $E(g(x))$ bendrų elementų neturi, todėl šių aibių sankirta tuščia aibė.

Ats.: $\varnothing$.

5 pavyzdys. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} y - 2|x| = 3, \\ |y| - x = -3. \end{cases}$$

Sprendimas. Pasinaudoję modulio apibrėžimu nustatykime galimas y ir x reikšmes:

$$y - 2|x| = 3 \;\Rightarrow\; |x| = \frac{y-3}{2} \;\Rightarrow\; y \geq 3 .$$

$$|y| - x = -3 \;\Rightarrow\; x = |y| + 3 \;\Rightarrow\; x \geq 6 .$$

Todėl duotoji lygčių sistema ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} y - 2x = 3, \\ y - x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2x = 3, \\ \qquad x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6, \\ y = -9. \end{cases}$$

Tačiau $x \geq 6$ ir $y \geq 3$, todėl duotoji lygčių sistema sprendinių neturi.

Ats.: $\varnothing$.

Suradus funkcijos reikšmių sritį, dažnai palengvėja sudėtingesnių lygčių, nelygybių sprendimas bei įrodymai.

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Raskite funkcijos $f(x)=\sqrt{3x^2-4x+3}$ reikšmių sritį.

2. Raskite funkcijos $f(x)=\lg(2-x^2)-1$ didžiausią reikšmę.

3. Raskite funkcijos $f(x)=x+\dfrac{1}{x}+1$ didžiausios neigiamos ir mažiausios teigiamos reikšmių skirtumo modulį.

4. Išspręskite nelygybę

$$\frac{2x}{x^2+1}\cdot\cos^2(1-x)\cdot\lg(9+2x-x^2)\geq 1 .$$

5. Įrodykite, kad lygtis $\sin\dfrac{\pi x}{2}=6^{-x}+6^{x}-1$ neturi sprendinių.

6. Nustatykite, ar yra realiųjų skaičių x, tenkinančių lygybę $3^{\{x\}}=\{x\}$. Išvadas pagrįskite.

7. Raskite funkcijos $f(x)=\dfrac{1}{[x]}+\sqrt{1-x^2}$ apibrėžimo sritį.

8. Įrodykite, kad nelygybė $[\sin x+\cos x]\leq 2^{|\cos x|}$ yra teisinga su visais realiaisiais skaičiais x.

9. Žinoma, kad $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x-2}$. Ar skaičius $-\dfrac{2}{3}$ priklauso funkcijos $f(x)$ reikšmių sričiai?

10. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases}|x-1|+|y-5|=1,\\ y=5+|x-1|.\end{cases}$$

IV tema. PASKALIO TRIKAMPIS

Vilius Stakėnas
(Vilniaus universitetas)

Įsivaizduokime aibę iš n elementų (pavyzdžiui, krepšį su n obuolių). Visi elementai skirtingi (vieni obuoliai mažesni, kiti didesni, vieni sukirmiję kiti ne).

Keliais būdais galime pasirinkti vieną aibės elementą? Žinoma, n būdų. O keliais būdais galime pasirinkti n–1 elementą, t.y. nepasirinkti vieno (palikti vieną obuolį krepšyje)? Irgi n būdų. O dabar pasvarstykime, keliais būdais iš n elementų galime pasirinkti m. Šį skaičių įprasta žymėti C_n^m arba $\binom{n}{m}$.

Jau žinome, kad $C_n^1 = C_n^{n-1}$. Taip pat nesunkiai suvoksime, kad $C_n^0 = C_n^n$, apskritai $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Tačiau grįžkime prie C_n^m. Įsivaizduokime, kad prieš pradėdami rinkti elementus, juos peržvelgėme ir įsidėmėjome vieną (pavyzdžiui, labiausiai sukirmijusį obuolį). O dabar pasirinkime elementus. Yra dvi galimybės: arba įsidėmėtas elementas (labiausiai sukirmijęs obuolys) pateks į atrinktuosius arba nepateks. Keliais būdais galime atrinkti elementus, kad patektų? Žinoma, C_{n-1}^{m-1}, nes atidėjus įsidėmėtąjį iš n–1 dar reikia atsirinkti m–1. O kad nepatektų? Iš n–1 elementų reikia atsirinkti m, taigi būdų yra C_{n-1}^m. Taigi gauname:

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m . \tag{1}$$

Gavome svarbią dydžių C_n^m savybę, kuria naudodamiesi galime skaičiuoti juos vieną po kito. Išrašysime šiuos dydžius taip, kad dydžiai $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ būtų vienoje eilėje. Kiekviena tokia eilė prasideda ir baigiasi vienetu, o n-oje eilėje yra $n+1$ skaičius. Išdėstysime šiais eiles taip, kad jos sudarytų trikampį, nusitęsiantį į begalybę. Įrodytoji (1) lygybė duoda mums galimybę lengvai surasti n-osios eilės skaičius, jeigu jau išrašyti $n-1$-osios eilės skaičiai. Sudėję du gretimus šios eilės skaičius gauname n-osios eilės skaičių.

		$m=0$	
$n=0$	1	$m=1$	
$n=1$	1 1	$m=2$	
$n=2$	1 2 1	$m=3$	2=1+1
$n=3$	1 3 3 1	$m=4$	3=1+2, 3=2+1
	1 4 6 4 1		4=1+3, 6=3+3, 4=3+1
	1 5 10 10 5 1		

Sudarytasis skaičių trikampis vadinamas Paskalio trikampiu. Šie skaičiai ir jų išdėstymas trikampio formos lentelėje buvo žinomi gerokai prieš Paskalį. Tačiau prancūzų matematikas Blezas Paskalis (1623–1662) buvo pirmasis matematikas atskleidęs daug šių skaičių savybių. Ir mes patyrinėsime keletą jų.

Sudarykime Paskalio trikampį ir prie jo skaičių prirašę kintamojo x laipsnius juos susumuokime. Dabar kiekvienoje Paskalio trikampio eilutėje gausime daugianarį.

$P_0(x) =$	1
$P_1(x) =$	$1 + 1x$
$P_2(x) =$	$1 + 2x + 1x^2$
$P_3(x) =$	$1 + 3x + 3x^2 + 1x^3$
$P_4(x) =$	$1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + 1x^4$
$P_5(x) =$	$1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + 1x^5$

Pažymėkime n-osios eilutės daugianarį $P_n(x)$. Taigi

$$P_n(x) = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + x^n .$$

Vos žvilgtelėję į trikampį įsitikinsite, kad

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = 1 + x,\ P_2(x) = (1+x)^2,\ P_3(x) = (1+x)^3 .$$

Kiekvienam tikriausiai kils nuojauta: $P_m(x) = (1+x)^m$ teisinga su visais $m = 0, 1, 2, \ldots$. Tačiau kaip tai įrodyti?

Jau žinome, kad teiginys teisingas, kai $m = 0, 1, 2, 3$. Tarkime, kad jis teisingas su kažkokia reikšme $m = n-1$, t.y.

$$P_{n-1}(x) = 1 + C_{n-1}^1 x + C_{n-1}^2 x^2 + \ldots + C_{n-1}^{n-2} x^{n-2} + x^{n-1} = (1+x)^{n-1} .$$

Nagrinėkime daugianarį $P_n(x)$:

$$P_n(x) = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + x^n .$$

Dydžiams C_n^1, C_n^2, … , C_n^{n-1} pritaikykime (1) lygybę:

$$P_n(x) = 1 + (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1)x + (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2)x^2 + \ldots +$$
$$+ (C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1})x^{n-1} + x^n$$

ir narius suporuokime taip, kad iš kiekvienos poros galėtume iškelti daugiklį $1 + x$ (įstatysime $C_{n-1}^0 = C_{n-1}^{n-1} = 1$):

$$P_n(x) = 1 + x + C_{n-1}^1 x\,(1 + x) + C_{n-1}^2 x^2 (1 + x) + \ldots +$$
$$+ C_{n-1}^{n-2} x^{n-2} (1 + x) + x^{n-1} (1 + x) .$$

Iškėlę $1 + x$ gauname: $P_n(x) = (1 + x)P_{n-1}(x) = (1 + x)^n$.

Dabar pasvarstykime: kadangi lygybė teisinga su $m = 0$, tai teisinga ir su $m = 1$; kadangi teisinga su $m = 1$, tai teisinga ir su $m = 2$ ir t.t. Sukonstravome tarsi kokias logines kopėčias, kuriomis galima pasiekti kiekvieną lygybę, t.y. įrodyti, kad ji teisinga. Šis svarbus matematinio samprotavimo metodas vadinamas *matematine indukcija*.

Taigi pasinaudoję matematine indukcija įrodėme, kad su visais natūraliaisiais *n*

$$(1 + x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + x^n . \tag{2}$$

Sudarydami Paskalio trikampį, dydžius C_n^m skaičiuojame vieną po kito. Praverstų ir tiesioginis šio dydžio skaičiavimo būdas, t.y. formulė, kuri C_n^m išreikštų tiesiog per *n* ir *m*. Tokią formulę tikriausiai jau žinote: su visais natūraliaisiais *n* ir $m = 0, 1, \ldots, n$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} ; \tag{3}$$

čia žymime: $k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, $0! = 1$.

Įrodykime šią formulę pasinaudoję matematinės indukcijos metodu.

Kai $n = 1$, tai dydžiai tik du: $C_1^0 = C_1^1 = 1$. Akivaizdu, kad (3) formulė šiems dydžiams yra teisinga. Padarykime prielaidą, kad (3) formulė teisinga visiems dydžiams su $n = k - 1$ ir nagrinėkime dydį C_k^m su $m = 0, 1, \ldots, k$. Kai $m = 0$ arba $m = k$, tai $C_k^m = 1$ ir (3) formulė teisinga.

Taigi galime nagrinėti atvejį $0 < m < k$. Pritaikykime dydžiui C_k^m (1) lygybę ir pasinaudokime tuo, kad (3) teisinga, kai $n = k - 1$:

$$C_k^m = C_{k-1}^{m-1} + C_{k-1}^m = \frac{(k-1)!}{(m-1)!(k-m)!} + \frac{(k-1)!}{m!(k-m-1)!} =$$

$$= \frac{(k-1)!}{(m-1)!(k-m-1)!}\left(\frac{1}{k-m} + \frac{1}{m}\right) = \frac{k!}{m!(k-m)!}.$$

Gavome, kad ir su $n = k$ (3) formulė teisinga. Taigi matematinės indukcijos būdu (3) formulę įrodėme.

Spręsdami uždavinius atskleisite dar keletą Paskalio trikampio skaičių (binominių koeficientų) savybių. Linkiu sėkmės!

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Panagrinėkite santykius $\dfrac{C_n^{m+1}}{C_n^m}$, kai $m = 0, 1, \dots, n-1$ ir įrodykite, kad didėjant *m* dydžiai C_n^m iš pradžių didėja, o po to ima mažėti. Duotajam *n* suraskite *m*, su kuriuo C_n^m yra didžiausias. Atskirai išnagrinėkite atvejus, kai *n* yra lyginis ir nelyginis.

2. Pasinaudokite (3) formule ir įrodykite šias dydžių C_n^m savybes:

$$C_n^m C_m^k = C_n^k C_{n-k}^{m-k}, \quad C_n^m = \frac{n}{m} C_{n-1}^{m-1}.$$

3. Pasinaudokite (2) lygybe ir įrodykite, kad su visais skaičiais *a*, *b* teisinga lygybė

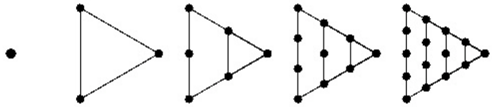
$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

4. Apskaičiuokite sumas:

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + 1;$$

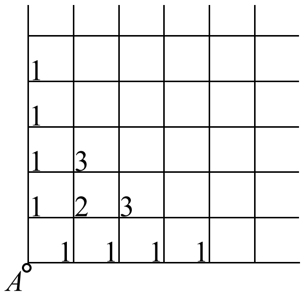
$$1 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n.$$

5. Trikampiais skaičiais vadinami natūralieji skaičiai, kuriuos geometriškai galima pavaizduoti taip:



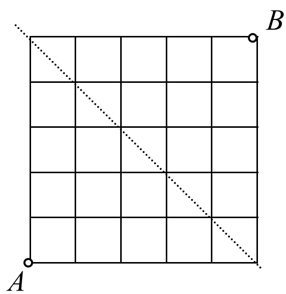
Taigi n-asis trikampis skaičius T_n lygus taškų, pažymėtų n-ajame trikampyje skaičiui. Raskite sekos $\{T_n\}$ bendrojo nario formulę ir nurodykite trikampių skaičių vietą Paskalio trikampyje.

6. Ketvirtis plokštumos padalytas kvadratėliais kaip pavaizduota paveikslėlyje.



Nagrinėjame, kiek trumpiausių kelių veda iš taško A į kvadratėlių viršūnes. Ties kvadratėlių viršūnėmis užrašome trumpiausių kelių skaičių. Įrodykite, kad šitaip gauname tą patį Paskalio skaičių trikampį, t.y. n-oje kvadrato įstrižainėje bus skaičiai C_n^0, C_n^1, … , C_n^n.

7. Taškai A ir B yra dvi priešingos $n \times n$ kvadrato, padalyto į kvadratėlius, viršūnės.

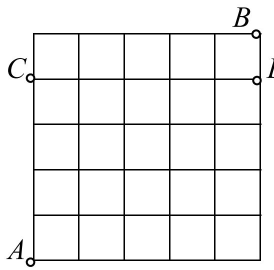


Įrodykite, kad trumpiausių kelių, vedančių iš A į B mažųjų kvadratėlių kraštinėmis skaičius lygus C_{2n}^{n} .

8. Kiekvienas trumpiausias kelias iš taško A į B (žr. 7 uždavinio brėžinį) kerta vieninteliame taške kvadrato įstrižainę, kurios priešingose pusėse yra taškai A ir B. Suraskite, kiek trumpiausių kelių veda iš taško A į ant įstrižainės esančius taškus ir įrodykite, kad trumpiausių kelių iš A į B skaičiui C_{2n}^{n} teisinga lygybė

$$C_{2n}^{n}=\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\left(C_n^2\right)^2+\ldots+\left(C_n^{n-1}\right)^2+\left(C_n^n\right)^2 .$$

9. Kiekvienas trumpiausias kelias iš taško A į B, einantis $n\times n$ kvadrato kvadratėlių kraštinėmis pasiekia atkarpą CD ir viename iš jos taškų palikęs ją, kyla į viršų ir užsibaigia taške B.



Užrašykite, kiek trumpiausių kelių veda į kraštinėje CD esančias kvadratėlių viršūnes ir įrodykite, kad trumpiausių kelių iš A į B skaičių galima užrašyti taip:

$$C_{2n}^{n}=C_{n-1}^{n-1}+C_{n}^{n-1}+C_{n+1}^{n-1}+\ldots+C_{2n-1}^{n-1} .$$

10. Keliais būdais galima skaičių 5 užrašyti dviejų natūraliųjų skaičių suma, jeigu reiškinius, sudarytus iš tų pačių dėmenų, tačiau užrašytų skirtinga tvarka laikysime skirtingais? Žinoma, keturiais būdais:

$$5=1+4,\ 5=2+3,\ 5=3+2,\ 5=4+1 .$$

O keliais būdais galime užrašyti trijų dėmenų suma?

Įsivaizduokime 5 m ilgio atkarpą A_0A_5, kurioje atidėti dar keturi taškai A_1, A_2, A_3, A_4, dalijantys atkarpą A_0A_5 į vienodas

1 m ilgio dalis. Pasirinkime iš šių keturių taškų du, pavyzdžiui, A_2 ir A_4. Tada

$$A_0A_5 = A_0A_2 + A_2A_4 + A_4A_5 \text{ arba } 5 = 2 + 2 + 1.$$

Nesunku įsitikinti, kad kiekvieną skaičiaus 5 užrašymą trijų dėmenų suma galima gauti tokiu būdu.

Pasinaudoję panašiu samprotavimu įrodykite, kad natūralųjį skaičių n trijų natūraliųjų dėmenų suma galime užrašyti C_{n-1}^2 būdais, o m $(m \le n)$ dėmenų suma – C_{n-1}^{m-1} būdais.

V tema. TIESINIŲ LYGČIŲ SISTEMŲ TAIKYMO UŽDAVINIAI

Antanas Apynis
(Vilniaus universitetas)

1. Tiesinės lygtys ir jų sistemos. Iš pradžių prisiminkime tiesines lygtis ir jų sistemas. Peržengdami vidurinės mokyklos matematikos programos ribas jas apibūdinsime truputį bendriau.

Tiesine lygtimi su *n* nežinomųjų yra vadinama tokia lygtis:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b\,;$$

čia a_1, a_2, …, a_n ir *b* yra žinomi realieji skaičiai, o x_1, x_2, …, x_n – nežinomi realieji skaičiai. Skaičiai a_1, a_2, …, a_n yra vadinami lygties koeficientais, *b* – laisvuoju nariu, o x_1, x_2, …, x_n – nežinomaisiais (kintamaisiais).

Išspręsti tiesinę lygtį reiškia rasti visus nežinomųjų rinkinius $(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n)$, su kuriais skaičius $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ yra lygus skaičiui *b*. Kiekvienas toks konkrečių skaičių rinkinys yra vadinamas tiesinės lygties sprendiniu, o jų visuma – tiesinės lygties sprendinių aibe. Pavyzdžiui, tiesinę lygtį su trimis nežinomaisiais $2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 7$ tenkina realiųjų skaičių trejetai $(1;\, 1;\, 0)$, $(0;\, 3;\, 2)$, $(2;\, 2;\, 1{,}75)$, $(-1;\, 2;\, 0{,}25)$, todėl visi jie yra šios lygties sprendiniai. Tuo tarpu trejetas $(1;\, 2;\, 3)$ nepriklauso sprendinių aibei, nes $2\cdot 1 + 5\cdot 2 - 4\cdot 3 \neq 7$.

Kartais reikia nagrinėti ne vieną, o kelias tiesines lygtis (su tokiu pačiu nežinomųjų skaičiumi) ieškant visoms lygtims bendrų sprendinių. Tada sakoma, kad reikia išspręsti tiesinių lygčių sistemą. Bendrasis *m* tiesinių lygčių su *n* nežinomųjų sistemos pavidalas yra toks:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Tegu *X* yra tiesinių lygčių sistemos sprendinių aibė, o X_1, X_2, …, X_m – atitinkamai pirmos, antros ir t.t. lygčių sprendinių aibės. Tada aibė *X* yra aibių X_1, X_2, …, X_m bendroji dalis (sankirta):

$$X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_m .$$

Išspręsti tiesinių lygčių sistemą reiškia rasti visus jos sprendinius arba įrodyti, kad $X = \varnothing$.

2. Tiesinių lygčių sistemos sprendimas. Gauso metodas. Tiesinių lygčių sistemos dažniausia yra sprendžiamos eliminuojant (šalinant) nežinomuosius. Viena iš nuoseklaus nežinomųjų eliminavimo schemų yra Gauso metodas (*Carl Friedrich Gauss* – vokiečių matematikas, 1777–1855). Sprendžiant šiuo metodu (1) tiesinių lygčių sistemą siekiama suvesti į ekvivalenčią (turinčią tą pačią sprendinių aibę) trikampę tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\quad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad c_{nn}x_n = d_n. \end{cases}$$

Kai $c_{11} \neq 0$, $c_{22} \neq 0$, …, $c_{nn} \neq 0$, tokia tiesinių lygčių sistema turi vienintelį sprendinį. Jo komponentes visai lengva apskaičiuoti pradedant paskutiniąja lygtimi. Tačiau nekiekvieną tiesinių lygčių sistemą pavyksta suvesti į trikampę sistemą. Tada baigiamoji sistemos analizė būna šiek tiek sudėtingesnė. Apskritai, tiesinių lygčių sistema gali turėti tik vieną sprendinį, be galo daug sprendinių arba nė vieno.

Tiesinių lygčių ir jų sistemų teorija yra gana išsamiai išdėstyta A.Apynio straipsnyje „Tiesinių lygčių sistemos“, kurį galima rasti LJMM penktojoje knygelėje „Jaunajam matematikui“ (Danieliaus leidykla, 2004) arba LJMM interneto svetainėje (www.mif.vu.lt/ljmm; 2002–2004, penktoji užduotis). Čia yra aiškinami veiksmai su tiesinėmis lygtimis (daugyba iš skaičiaus, sudėtis, atimtis), supažindinama su tiesiniais lygčių dariniais, gvildenamas tiesinių lygčių sistemų ekvivalentumas, mokoma eliminuoti nežinomuosius. Žinių apie tiesinių lygčių sistemų sprendimą galima rasti ir kitose knygose, tarp kurių yra A. Apynio ir E. Stankaus „Elementarus mate-matikos taikymas bekonomikoje“ (V.: Presvika, 1997). Vis dėlto porą pavyzdžių išnagrinėsime ir čia.

1 pavyzdys. Gauso metodu išspręskime keturių tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 9, \\ 3x_1 \ \ - x_2 \ \ + x_3 = 1, \\ \ \ x_1 + 4x_2 \qquad\quad = 5, \\ 2x_1 \ \ - x_2 \ \ - x_3 = 2. \end{cases} \tag{2}$$

Sprendimas. Sistemos lygtis pažymėkime atitinkamai L_1, L_2, L_3 ir L_4. Iš pradžių eliminuokime nežinomąjį x_1 iš antros, trečios ir ketvirtos lygčių. Tuo tikslu sudarykime lygčių tiesinius darinius $-3L_1 + 2L_2$, $L_1 - 2L_3$, $L_1 - L_4$ ir pakeiskime jais (2) sistemos atitinkamai antrą, trečią ir ketvirtą lygtis. Gausime ekvivalenčią (!) tiesinių lygčių sistemą su nežinomuoju x_1 tik pirmoje lygtyje, nes kitose lygtyse koeficientai prie x_1 bus lygūs nuliui. Taigi sudarykime užrašytuosius tiesinius darinius – tiesines lygtis $-3L_1 + 2L_2$, $L_1 - 2L_3$ ir $L_1 - L_4$:

1) $-3L_1 + 2L_2$: $-11x_2 + 14x_3 = -25$;

2) $L_1 - 2L_3$: $-5x_2 - 4x_3 = -1$;

3) $L_1 - L_4$: $4x_2 - 3x_3 = 7$.

Toliau nagrinėjame tokią tiesinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ - 4x_3 = 9, \\ \qquad -11x_2 + 14x_3 = -25, \\ \qquad\quad -5x_2 \ - 4x_3 = -1, \\ \qquad\qquad 4x_2 \ - 3x_3 = 7. \end{cases} \tag{3}$$

Eliminuodami nežinomąjį x_2 iš trečios ir ketvirtos lygčių, jas pakeiskime atitinkamai tiesinėmis lygtimis (tiesiniais dariniais) $5L_2 - 11L_3$ ir $4L_2 + 11L_4$ (čia L_2, L_3 ir L_4 yra (3) sistemos lygtys). Gausime tokias tiesines lygtis:

1) $5L_2 - 11L_3$: $114x_3 = -114$;

2) $4L_2 + 11L_4$: $23x_3 = -23$.

Dabar vietoj (3) sistemos sprendžiame jai ekvivalenčią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 9, \\ -11x_2 + 14x_3 = -25, \\ 114x_3 = -114, \\ 23x_3 = -23. \end{cases}$$

Iš ketvirtosios lygties gauname $x_3 = -1$. Tokį patį rezultatą gauname ir iš trečiosios lygties. Tada iš antrosios lygties randame $x_2 = 1$, o iš pirmosios lygties – $x_1 = 1$. Taigi duotoji (2) sistema turi vienintelį sprendinį $(1;\ 1;\ -1)$.

2 pavyzdys. Gauso metodu išspręskime trijų tiesinių lygčių su keturiais nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 4. \end{cases} \tag{4}$$

Sprendimas. Iš pradžių eliminuokime nežinomąjį x_1 iš antros ir trečios lygties pakeisdami antrąją lygtį tiesiniu dariniu (tiesine lygtimi)

$$3L_1 - L_2:\ 7x_2 - 11x_3 + 5x_4 = -8,$$

o trečiąją lygtį – tiesiniu dariniu

$$2L_1 - L_3:\ 7x_2 - 10x_3 + 3x_4 = -6.$$

Toliau spręskime ekvivalenčią tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -1, \\ 7x_2 - 11x_3 + 5x_4 = -8, \\ 7x_2 - 10x_3 + 3x_4 = -6. \end{cases} \tag{5}$$

Nežinomąjį x_2 iš trečios lygties eliminuokime keisdami trečiąją lygtį tiesiniu dariniu

$$-L_2 + L_3:\ x_3 - 2x_4 = 2;$$

čia L_2 ir L_3 yra (5) sistemos lygtys. Turėsime trapecinę tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -1, \\ 7x_2 - 11x_3 + 5x_4 = -8, \\ x_3 - 2x_4 = 2. \end{cases} \tag{6}$$

Nesunku įsitikinti, kad ši sistema (taigi ir duotoji) turi be galo daug sprendinių. Tarę, kad $x_4 = t$ (t – bet kuris realusis skaičius), iš trečiosios lygties gauname $x_3 = 2t + 2$. Tada iš antros lygties apskaičiuojame $x_2 = \frac{17}{7}t + 2$, o iš pirmos lygties – $x_1 = \frac{1}{7}t + 1$. Taigi (4) sistemos sprendinių aibę X sudaro realiųjų skaičių rinkiniai

$$\left(\frac{1}{7}t + 1;\ \frac{17}{7}t + 2;\ 2t + 2;\ t\right),\ t \in R.$$

3. Probleminių situacijų matematinis modeliavimas. Tiesinės lygtys ir jų sistemos turi daug įdomių savybių, tačiau šį kartą prie jų nesustosime. Pagvildensime tik praktinio pobūdžio problemas, kurias nagrinėjant yra sudaromos tiesinės lygtys, o atsakymams į rūpimus klausimus rasti reikia išspręsti tam tikras jų sistemas.

Kiekvienam moksleiviui yra tekę spręsti ne vieną ir ne du vadinamuosius „žodinius“ ar „sąlyginius“ uždavinius. Juose paprastai vientisu tekstu aprašoma situacija ir suformuluojama užduotis, – jokių lygčių, nelygybių, funkcijų. Netgi kintamuosius dydžius pačiam reikia pasirinkti. Vieniems moksleiviams tokie uždaviniai patinka, nes jie patys gali konstruoti matematinius modelius. Kitiems gi – labai nepatrauklūs, nes reikia susikaupus gilintis į sąlygą, įžvelgti įvairius funkcinius sąryšius, analizuoti išspręsto uždavinio atsakymus.

Pradėkime nuo „standartinio“ mokyklinio uždavinio.

3 pavyzdys. Trys skirtingų kvalifikacijų darbininkai sumūrijo tvorą. Pirmasis dirbo 6 valandas, antrasis – 4 valandas, o trečiasis – 7 valandas. Jei pirmasis būtų dirbęs keturias valandas, antrasis – dvi, o trečiasis – penkias valandas, tai būtų sumūryta tik du trečdaliai tvoros. Apskaičiuokime, per kelias valandas tvorą sumūrytų visi trys darbininkai dirbdami kartu.

Sprendimas. Visą darbo apimtį pažymėkime a ir tarkime, kad kiekvieno darbininko darbo tempas yra pastovus. Tegu x yra pirmojo darbininko darbo tempas (atlikta apimties dalis per vieną valandą), y – antrojo darbininko darbo tempas, z – trečiojo. Tada pagal pirmąją uždavinio sąlygos dalį sudarome tiesinę lygtį $6x + 4y + 7z = a$, o pagal antrąją – tiesinę lygtį $4x + 2y + 5z = \frac{2a}{3}$. Laiką, per kurį tvorą sumūrytų visi trys darbininkai dirbdami kartu, pažymėkime t. Gauname trečią lygtį: $tx + ty + tz = a$. Taigi turime tris lygtis ir keturis nežinomuosius. Iš trečiosios lygties apskaičiuojame ieškomąjį laiką *t*:

$$t = \frac{a}{x + y + z}.$$

Matome, kad iš pirmųjų dviejų lygčių pakanka rasti sumą $x + y + z$. Tuo tikslu spręskime sistemą

$$\begin{cases} 6x + 4y + 7z = a, \\ 4x + 2y + 5z = \dfrac{2a}{3}. \end{cases}$$

Tai dviejų tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistema. Taikydami Gauso metodą antrąją lygtį pakeiskime tiesiniu dariniu (tiesine lygtimi)

$$2L_1 - 3L_2 :\ 2y - z = 0.$$

Gauname ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} 6x + 4y + 7z = a, \\ \qquad 2y \ \ - z = 0. \end{cases}$$

Iš jos randame $z = 2y,\ \ x = \dfrac{a}{6} - 3y.$ Tada $x + y + z = \dfrac{a}{6} - 3y + y + 2y = \dfrac{a}{6}.$

Vadinasi, $t = 6$.

4. Kreivių lygtys, trupmenų skaidymas, sumavimo formulės. Tiesinių lygčių sistemos yra gaunamos ir kitokio pobūdžio uždaviniuose – ieškant kreivių lygčių pagal turimą dalinę informaciją, skaidant racionaliąsias funkcijas paprasčiausiomis racionaliosiomis funkcijomis ir kt.

4 pavyzdys. Raskime parabolės, einančios per taškus $(1;\ 6)$, $(2;\ 9)$ ir $(3;\ 14)$, lygtį.

Sprendimas. Žinome, kad bendroji parabolės lygtis yra $y = ax^2 + bx + c$. Pagal uždavinio sąlygą turi galioti šios lygybės: $6 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$, $9 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$ ir $14 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$. Vadinasi, parabolės parametrams *a*, *b* ir *c* rasti reikia išspręsti tokią tiesinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} a \ \ + b + c = 6, \\ 4a + 2b + c = 9, \\ 9a + 3b + c = 14. \end{cases}$$

Ji turi vienintelį sprendinį: $a=1$, $b=0$, $c=5$. Taigi ieškomosios parabolės lygtis yra $y=x^2+5$.

5 pavyzdys. Raskime realiuosius skaičius *a*, *b* ir *c*, su kuriais galioja lygybė

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)(x+3)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+3} \tag{7}$$

(čia $x>1$).

Sprendimas. Subendravardiklinę gauname

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+3}=\frac{(a+b+c)x^2+(4a+2b)x+3a-3b-c}{(x-1)(x+1)(x+3)}.$$

Vadinasi, turi galioti lygybė

$$(a+b+c)x^2+(4a+2b)x+3a-3b-c=x.$$

Ji tikrai galioja, kai $a+b+c=0$, $4a+2b=1$ ir $3a-3b-c=0$.

Išsprendę (paliekame pačiam skaitytojui) trijų tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais *a*, *b* ir *c* sistemą

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ 4a+2b=1, \\ 3a-3b-c=0, \end{cases}$$

gausime vienintelį trejetą $\left(\frac{1}{8};\ \frac{1}{4};\ -\frac{3}{8}\right)$. Taigi (7) lygybė galioja su $a=\frac{1}{8}$, $b=\frac{1}{4}$, $c=-\frac{3}{8}$:

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)(x+3)}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x+3}\right). \tag{8}$$

Pastaba. Šiame pavyzdyje aprašytas racionaliojo reiškinio išskaidymo būdas yra vadinamas neapibrėžtųjų koeficientų metodu.

6 pavyzdys. Remdamiesi (8) formule apskaičiuokime sumą

$$\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{2}{3\cdot5\cdot7}+\cdots+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}; \tag{9}$$

čia *n* yra natūralusis skaičius.

Sprendimas. Pažymėję $x = 2n$, gausime

$$\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{x}{2(x-1)(x+1)(x+3)}.$$

Tada pagal (8) formulę

$$\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{2}{2n+1} - \frac{3}{2n+3}\right).$$

Taikydami šią formulę išskaidykime visus (9) sumos dėmenis:

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} = \frac{1}{16}\left(1 + \frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right),$$

$$\frac{2}{3\cdot 5\cdot 7} = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{3}{7}\right),$$

$$\frac{3}{5\cdot 7\cdot 9} = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{7} - \frac{3}{9}\right),$$

....

$$\frac{n-1}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2n-3} + \frac{2}{2n-1} - \frac{3}{2n+1}\right),$$

$$\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{2}{2n+1} - \frac{3}{2n+3}\right).$$

Sudėję juos gausime:

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{2}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{3}{5\cdot 7\cdot 9} + \cdots +$$

$$+ \frac{n-1}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{1}{16}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3}{2n+1} + \frac{2}{2n+1} - \frac{3}{2n+3}\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(2 - \frac{1}{2n+1} - \frac{3}{2n+3}\right) = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}.$$

Taigi išvedėme tokią sumavimo formulę:

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{2}{3\cdot 5\cdot 7} + \cdots + \frac{n}{(2n-1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}.$$

Ji galioja su visais natūraliaisiais skaičiais n.

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Gauso metodu išspręskite šią keturių tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 7. \end{cases}$$

2. Trimis traktoriais lauką galima suarti per 4 dienas, pirmuoju ir antruoju – per 6 dienas, o pirmuoju ir trečiuoju – per 8 dienas. Kiek kartų daugiau per vieną dieną galima suarti antruoju traktoriumi negu trečiuoju?

3. Sunkvežimio vairuotojas per visą darbo dieną vežioja skaldą, smėlį ir plytas. Pirmąją dieną pusę darbo laiko jis vežiojo skaldą, o kitą pusę – smėlį. Antrąją dieną $1/7$ darbo laiko vairuotojas vežiojo skaldą, $4/7$ darbo laiko – smėlį, o likusį laiką – plytas. Trečiąją dieną $1/4$ darbo laiko jis vežiojo skaldą, $3/8$ – smėlį ir $3/8$ – plytas. Kiek procentų degalų normos sunaudotų vairuotojas visą darbo dieną vežiodamas tik skaldą, jei pirmąją dieną jis sunaudojo 95% degalų normos, antrąją $708/7\%$ normos, o trečiąją dieną – 101,25% normos?

4. Iš dviejų karjerų, K_1 ir K_2, žvyras vežamas į du statybos objektus, O_1 ir O_2. Statybininkų užsakymai yra atitinkamai 50 t ir 80 t, o karjerų galimybės – 60 t ir 70 t. Vienos tonos žvyro pervežimo vidutinės kainos (litais) surašytos šioje lentelėje:

	O_1	O_2
K_1	20	40
K_2	30	25

Reikia sudaryti tokį žvyro gabenimo planą, kad abu užsakymai būtų įvykdyti, o bendrosios transporto išlaidos lygios 4150 Lt. Ar egzistuoja geresnis, t.y. pigesnis žvyro gabenimo planas?

5. Bendroji plokštumos lygtis stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje yra $ax + by + cz = d$ (bent vienas iš koeficientų a, b ir c nelygus nuliui). Raskite trijų plokštumų, kurių lygtys yra $5x + 2y + z = 11$, $2x + 5y + z = 14$ ir $x + y + 2z = 7$ susikirtimo taško koordinates.

6. Parabolė $y = ax^2 + bx + c$ eina per tašką $(8; 0)$. Raskite a, b ir c, jei parabolės viršūnės koordinatės yra $(6; -12)$.

7. Raskite kvadratinio trinario $mx^2 + nx + k$ koeficientus ir laisvąjį narį, jei žinoma, kad trinaris lygus nuliui, kai $x = 6$, o mažiausią reikšmę, lygią -8, įgyja, kai $x = 4$.

8. Raskite realiuosius skaičius a, b ir c, su kuriais galioja lygybė

$$\frac{ax + b}{x^2 + 1} + \frac{c}{2x + 1} = \frac{5x^2 + 4x + 7}{(2x + 1)(x^2 + 1)}.$$

9. Apskaičiuokite sumą

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)}.$$

10. Išveskite sumos

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n + 1)(n + 2)}$$

skaičiavimo formulę.

VI tema. INVARIANTŲ METODAS

Leonas Narkevičius
(Kauno technologijos universiteto gimnazija)

Apibrėžimas. Invariantiniu dydžiu vadinamas toks dydis, kuris tam tikrame procese nesikeičia. Pavyzdžiui, supantis sūpynėse, atstumas nuo sėdynės iki skersinio, ant kurio jos pakabintos, yra invariantinis dydis, o atstumas nuo sėdynės iki supynių stovų nėra invariantinis dydis.

Yra daug uždavinių, kuriuose reikia nustatyti, ar atliekant duotas operacijas galima gauti norimą rezultatą. Sprendžiant tokius uždavinius kartais pakanka rasti invariantinę savybę, kurios neturi norimasis rezultatas.

Invariantinių savybių pavyzdžiai. Trikampio viršūnei slenkant tiese, lygiagrečia su trikampio pagrindu, trikampio plotas nesikeičia. Taigi čia trikampio plotas yra invariantinis dydis. Bet kokių lyginių skaičių suma yra lyginis skaičius nepriklausomai nuo to, kiek dėmenų tą sumą sudaro. Tokios savybės neturi nelyginiai skaičiai.

Invariantai, susiję su skaičių lyginumu, dalumu bei kitomis skaičių savybėmis paprastai yra vadinami aritmetiniais invariantais.

Čia susipažinsime tik su aritmetiniais invariantais.

1 pavyzdys. Yra 10 audinio gabalų. Kai kuriuos iš jų sukarpius į 5 arba 7 dalis, visi gautieji gabalai sumaišomi ir kai kurie iš jų vėl sukarpomi į 5 arba 7 dalis ir t.t. Ar po kurio nors tokių karpymų skaičiaus galima gauti 2005 gabalus?

Sprendimas. Šiek tiek pasvarstę galėtume atsakyti – neįmanoma. Dabar patyrinėkime sprendimo eigą.

Sukarpius vieną audinio gabalą į 5 dalis, bendrasis gabalų skaičius padidėja 4 vienetais $((9+5)-10=4)$, o sukarpius į 7 dalis – padidėja 6 vienetais $((9+7)-10=6)$. Taigi abiem atvejais bendrasis gabalų skaičius išlieka lyginis – 14 arba 16. Analogišką rezultatą gausime po kiekvieno kito gabalo sukarpymo į 5 arba 7 dalis, nes kiekvieną kartą bendrasis gabalų skaičius padidėja arba 4, arba 6 vienetais ($((n-1)+5)-n=4,\quad ((n-1)+7)-n=6$; čia n – jau turimas gabalų skaičius).

Šio uždavinio invariantinė savybė – lyginis medžiagos gabalų skaičius. Šią savybę turi pradinis gabalų skaičius (10), ji išlieka sukarpius pasirinktą gabalą į 5 arba 7 dalis. Bet šios savybės neturi norimas karpymo rezultatas (2005 gabalai).

2 pavyzdys. Lentoje eile surašyti skaičiai 1, 2, 3, ... , 2006. Vienu „ėjimu“ leidžiama nutrinti bet kuriuos du šalia esančius skaičius ir jų vietoje užrašyti šių skaičių skirtumą (neneigiamą skaičių). Ar įmanoma pasiekti, kad lentoje liktų tik vienas vienintelis skaičius 0?

Sprendimas. Lentoje užrašytų skaičių suma yra nelyginis skaičius:

$$1+2+3+...+2006=\frac{(1+2006)\cdot 2006}{2}=\frac{2007\cdot 2006}{2}=2007\cdot 1003 .$$

Nutrinkime bet kuriuos du gretimus skaičius, tarkime, n ir $n+1$, o jų vietoje įrašykime skirtumą $(n+1)-n=1$. Aišku, kad suma $2007\cdot 1003$ sumažės skaičiumi $2n$ ($n=1$, 2, … , 2006). Taigi vėl turėsime nelyginę lentoje užrašytą skaičių sumą.

Lentoje užrašytų skaičių suma išliks nelyginė ir po kiekvieno kito „ėjimo“. Sakykime, kad a ir b $(a\geq b)$ yra gretimi skaičiai, o S (nelyginis skaičius!) yra visų užrašytų lentoje skaičių suma. Nutrinkime skaičius a ir b ir vietoje jų užrašykime skaičių $a-b$. Tuomet gausime tokią visų skaičių sumą: $(S-(a+b))+(a-b)=S-2b$.

Išvada – nėra tokios „ėjimų“ serijos, po kurios liktų vienintelis skaičius 0.

Invariantinė šio uždavinio savybė – lentoje užrašytų skaičių suma yra nelyginė.

Kartais invarianto nepavyksta rasti taip tiesiogiai kaip nagrinėtuose pavyzdžiuose.

3 pavyzdys. Ekrane užrašyta raidžių X ir Y grandinė *XXYXYY*. Raidžių grupę *XY* galima pakeisti grupe *YYXXYY*, o raidžių grupę *YYX* galima pakeisti raide X. Ar atliekant šias operacijas įmanoma gauti raidžių eilę *YXYXYXYXYXYXYXY* ?

Sprendimas. Nagrinėkime raidžių X skaičiaus n ir raidžių Y skaičiaus m skirtumus $n-m$ raidžių grandinėse.

Pradinėje grandinėje jis lygus nuliui, o norimoje grandinėje $n-m=-1$.

Atliekant raidžių grupės *XY* pakeitimą raidžių grupe *YYXXYY*, šis skirtumas sumažėja dviem vienetais, o atliekant raidžių grupės *YYX* pakeitimą viena raide X – jis padidėja dviem vienetais. Vadinasi, atliekant bet kurį iš minėtų pakeitimų, skirtumas tarp raidžių Y skaičiaus ir raidžių X skaičiaus keičiasi lyginiu skaičiumi. Kadangi pradinėje raidžių grandinėje šis skirtumas lygus nuliui, tai jis negali galinėje grandinėje būti lygiu nelyginiam skaičiui (–1).

Taigi norimos raidžių eilės negalima gauti.

Invariantinė savybė – skirtingų raidžių skaičiaus skirtumas gaunamoje grandinėje yra *lyginis* skaičius.

4 pavyzdys. Miške auga 36 grybai. Kiekvieną dieną ežys vieną grybą nusineša į savo guolį, o vietoje nusineštojo grybo išdygsta keturi nauji grybai. Po kelių dienų miške bus 15 037 grybai?

Sprendimas. Pastebėkime, kad kiekvieną dieną grybų skaičius padidėja trimis. Kadangi pradinis grybų skaičius 36 dalijasi iš 3, tai miške augančių grybų skaičius turi dalytis iš 3 visą laiką. Tačiau skaičius 15 037 iš 3 nesidalija. Taigi miške niekada nebus 15 037 grybų.

Invariantinė savybė – grybų skaičius dalijasi iš 3.

5 pavyzdys. Slibinas turi 2005 galvas. Riteris vienu kirčiu slibinui gali nukirsti 33, 21, 17 arba 1 galvą, bet tuoj pat slibinui atauga atitinkamai 48, 0, 14 arba 349 galvos. Jei bus nukirstos visos galvos, tai naujos galvos neataugs. Ar riteris galės įveikti slibiną?

Sprendimas. Tam, kad riteris nugalėtų slibiną, jis turi nukirsti visas galvas. Panagrinėkime, kaip po vieno kirčio pasikeičia slibino galvų skaičius:

1) nukirtus 33 galvas, atauga 48 galvos – galvų skaičius padidėja 15, t. y. skaičiumi, daliu iš 3;

2) nukirtus 21 galvą, naujų galvų neatauga –galvų skaičius sumažėja 21, t. y. skaičiumi, daliu iš 3;

3) nukirtus 17 galvų, atauga 14 galvų – galvų skaičius sumažėja 3;

4) nukirtus 1 galvą, atauga 349 galvos – galvų skaičius padidėja 348, t. y. skaičiumi, daliu iš 3.

Vadinasi, atlikus bet kurį kirtį, slibino galvų skaičius pasikeičia skaičiumi, daliu iš 3.

Slibinas iš pradžių turi 2005 galvas, t.y., skaičių, kuris nesidalija iš 3. Kapojant slibino galvas, visą laiką nenukirstų galvų skaičius nesidalys iš 3. Taigi galvų skaičius negali būti lygus nuliui.

Invariantinė savybė: slibino galvų skaičius nesidalija iš 3.

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Lentoje užrašyti skaičiai 1, 2, 3, ... , 10. Vienu „ėjimu“ leidžiama išsirinkti bet kuriuos du iš jų ir prie abiejų pridėti po vienetą. Ar, kartojant šiuos „ėjimus“, galima pasiekti, kad visi skaičiai taptų vienodi?

2. Lentoje surašyti skaičiai 0, 1, 0, 0. Leidžiama vienu „ėjimu“ prie bet kurių dviejų skaičių pridėti po vienetą. Ar galima, kartojant šį „ėjimą“ keletą kartų, pasiekti, kad visi skaičiai būtų vienodi?

3. **V**iena šalia kitos į eilę sudėtos 2004 monetos. Pirmoji iš jų padėta skaičiumi į viršų, likusios – herbu į viršų. Vienu „ėjimu“ leidžiama apversti bet kurias tris šalia esančias monetas. Ar egzistuoja tokia ėjimų seka, po kurios visos monetos būtų padėtos herbu į viršų ?

4. **E**krane matoma raidžių eilutė *VOVOVOV*. Raidžių grupę *VO* galima pakeisti raidžių grupe *OVVOVOO* ir atvirkščiai, o raidžių grupę *OO* galima nutrinti. Ar, atlikus keletą kartų šią operaciją, galima gauti raidžių eilutę *VOVOV* ?

5. Miesto žemėlapyje yra 2004 lemputės. Kiekvienai lemputei yra atskiras jungiklis. Vienu metu galima keisti jungiklio padėtį bet kurioms 26 lemputėms. Uždegta 17 lempučių. Ar įmanoma užgesinti visas lemputes?

6. Jonas turi 15 etikečių. Kiekvieną dieną jis iškeičia vieną etiketę į keturias etiketes. Ar kada nors Jonas turės 113 etikečių?

7. Skritulys padalytas į 6 sektorius, į kuriuos įrašyti (po vieną) skaičiai: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Leidžiama prie bet kurių dviejų gretimų skaičių pridėti po vienetą. Ar galima pasiekti, kad skaičiai visuose sektoriuose būtų vienodi?

8. Ar iš figūrų eilės O □ O □ O □ galima gauti eilę O O □ □ O □ O, jei figūrų grupę O □ O galima pakeisti grupe O O □ O □ O O O, o grupę O □ O □ O O O □ O – grupe O □ □ O □ O ?

9. Su natūraliuoju skaičiumi galima atlikti tokias operacijas:
1) pridėti 6;
2) dalinti iš 2, jei skaičius yra lyginis;
3) keisti vietomis skaičiaus skaitmenis (skaičiaus pradžioje negali atsirasti nulis).

Ar šių operacijų pagalba, atliekant jas kelis kartus, iš skaičiaus 21 galima gauti skaičių 3001?

10. Su natūraliuoju skaičiumi galima atlikti šias operacijas: pridėti prie skaičiaus jo skaitmenų sumą arba atimti jo skaitmenų sumą. Ar, atliekant tik šias operacijas, iš skaičiaus 41 galima gauti skaičių 91 ?

VII tema. TIESINĖS REKURENČIOSIOS SEKOS

Juozas Šinkūnas
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

Funkcija *f*: N→R vadinama *realiųjų skaičių seka*. Funkcijos reikšmės $f(n)$ vadinamos *sekos nariais*. Sekos narius įprasta žymėti viena raide su indeksu *n*: $x_n = f(n)$. Sekas dar žymėsime taip: $\{x_n, n \in \mathrm{N}\}$, $\{y_n, n \in \mathrm{N}\}$ arba tiesiog $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ ir t. t. Kartais seka nusakoma užrašant kelis sekos narius. Pavyzdžiui, seka $\{x_n\}$ užrašoma taip: $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$, čia x_1 – pirmasis sekos narys, x_2 – antrasis sekos narys, ... , x_n – *n*-tasis sekos narys. Šiame straipsnelyje nagrinėsime ir sekas, kurių pirmasis narys yra su indeksu „0“, pavyzdžiui, seka $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$.

Seka, kurios kiekvienas narys x_n yra prieš einančių kelių narių funkcija, vadinama *rekurenčiąja seka*. Jeigu $x_{n+k} = g(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \ldots, x_n)$ su visomis *n* reikšmėmis, tai seka $\{x_n\}$ vadinama *k-tos eilės rekurenčiąja seka.* Pavyzdžiui, seka $\{x_n\}$ apibrėžta sąryšiu $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$, $n \in \mathrm{N}$, yra pirmosios eilės rekurenčioji seka, o seka $\{y_n\}$ apibrėžta sąryšiu $y_{n+3} = 2y_{n+2}^2 + \dfrac{1}{y_{n+1}} - 5y_n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, yra trečios eilės rekurenčioji seka.

Čia nagrinėsime tik tiesines rekurenčiąsias sekas.

I. PIRMOS EILĖS TIESINĖS REKURENČIOSIOS SEKOS

1. Pirmos eilės tiesinės homogeninės rekurenčiosios sekos.

Pirmos eilės tiesinė homogeninė rekurenčioji seka apibrėžiama sąryšiu

$$x_{n+1} = q\,x_n\,,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ . \tag{1}$$

Tai gerai žinomas iš mokyklinės matematikos geometrinės progresijos, kurios vardiklis *q*, apibrėžimas. Nesunku įsitikinti, kad seka

$u_n = q^n$ yra (1) *sąryšio sprendinys*, .t y. $u_{n+1} = q^{n+1} = q \cdot q^n = q u_n$. Taigi seka $\{q^n\}$ tenkina (1) sąryšį. Įsitikinsime, kad ir seka $x_n = C \cdot q^n$, $C \in$ R, taip pat yra (1) sąryšio sprendinys, nes $x_{n+1} = Cq^{n+1} = q \cdot (Cq^n) = q x_n$. Seka $x_n = C \cdot q^n$ vadinama *bendruoju (1) sąryšio sprendiniu.* Norint rasti atskirąjį (1) sąryšio sprendinį, reikia papildomos sąlygos. Pavyzdžiui, rasime seką, kurios pirmasis narys $x_0 = b$. Kai $n = 0$, iš (1) sąryšio bendrojo sprendinio gauname: $C \cdot q^0 = b,$ t. y. $C = b$.

Taigi (1) sąryšio atskiras sprendinys yra $x_n = b \cdot q^n$, $n \geq 0$.

Tai – geometrinės progresijos, kurios pirmasis narys $x_0 = b$, o vardiklis q, n-ojo nario formulė:

$$x_1 = x_0 \cdot q = b \cdot q \;\Rightarrow\; x_n = x_1 q^{n-1},\; n \geq 1.$$

2. Pirmos eilės tiesinė nehomogeninė rekurenčioji seka.

Seka $\{x_n\}$, apibrėžta sąryšiu

$$x_{n+1} = q x_n + P_m(n),\; n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

yra vadinama tiesine nehomogenine rekurenčiąja seka;

Kai $P_m(n) = d$, $d \in$ R, seka, apibrėžta sąryšiu

$$x_{n+1} = q x_n + d \tag{2a}$$

vadinama *aritmetine-geometrine progresija* (kai $q = 1$, $x_{n+1} = x_n + d$ – aritmetinė progresija, kai $d = 0$, tai $x_{n+1} = q x_n$ – geometrinė progresija).

1 teorema. Jeigu seka $\{u_n\}$ yra bendrasis homogeninio sąryšio $x_{n+1} = q x_n$ sprendinys, o seka $\{v_n\}$ yra atskirasis (2) sąryšio sprenkdinys, tai seka $\{x_n\} = \{u_n + v_n\}$ yra bendrasis (2) sąryšio sprendinys.

Įrodymas. Kadangi $u_{n+1} = qu_n$, o $v_{n+1} = qv_n + P_n(m)$, tai

$$x_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = qu_n + qv_n + P_m(n) =$$
$$= q(u_n + v_n) + P_m(n) = q x_n + P_n(m).$$

Taigi seka $\{x_n\}$ tenkina (2) sąryšį.

(2) sąryšio atskirojo sprendinio ieškosime *m*-ojo laipsnio daugianario su nežinomaisiais koeficientais pavidalu.

1 pavyzdys. Rasime seką $\{x_n\}$, apibrėžtą rekurentiniu sąryšiu $x_{n+1} = 3x_n - n^2 + n$, $x_0 = 2$.

Sprendimas. Homogeninės tiesinės rekurenčiosios sekos $x_{n+1} = 3x_n$ bendrasis sprendinys yra $u_n = C \cdot 3^n$, $C \in \mathrm{R}$. Kadangi $P_m(n) = -n^2 + n$, tai atskirojo nehomogeninės rekurenčiosios sekos sprendinio ieškome tokio pavidalo: $v_n = an^2 + bn + c$. v_n ir v_{n+1} išraiškas įrašę į duotąjį rekurentinį sąryšį turime:

$a(n+1)^2 + b(n+1) + c = 3(an^2 + bn + c) - n^2 + n$, t. y.

$an^2 + 2an + a + bn + b + c = 3an^2 + 3bn + 3c - n^2 + n$.

Sulyginę koeficientus prie n^2, n ir n^0 narių, gauname:

$$\begin{array}{l|l} n^2 & a = 3a - 1, \\ n^1 & 2a + b = 3b + 1, \\ n^0 & a + b + c = 3c. \end{array}$$

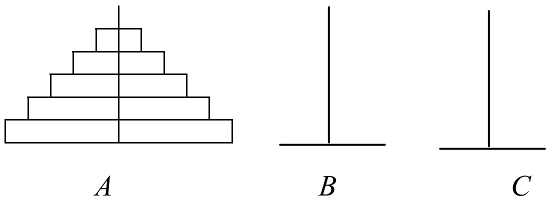
Iš gautosios sistemos randame: $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$, $c = \frac{1}{4}$. Taigi duotojo rekurenčiojo sąryšio bendrasis sprendinys yra

$$x_n = C \cdot 3^n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{4}, \; n = 0, 1, 2, 3, \dots .$$

Kai $n = 0$, $C \cdot 3^0 + \frac{1}{2} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} = 2$. Iš čia gauname: $C = \frac{7}{4}$.

Ats.: $x_n = \frac{7}{4} \cdot 3^n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{4}$, $n \geq 0$.

2 pavyzdys (Hanojaus bokštas). Paveikslėlyje pavaizduoti trys stovai *A*, *B* ir *C*. Ant stovo *A* sumauta *n* skirtingo skersmens žiedų. Nuo stovo *A*, imant po vieną žiedą, pasinaudojant stovu *B* visus žiedus reikia perdėti ant stovo *C*. Didesnio žiedo negalima dėti ant mažesniojo. Rasime kiek mažiausiai reikia atlikti perdėjimų.



Sprendimas. Kai $n=1$, akivaizdu, kad žiedą nuo A perkelsime ant stovo C vienu perkėlimu. Tarkime, kad n žiedų nuo stovo A galima perkelti ant stovo B (pasinaudojame stovu C) atlikus a_n perkėlimų. Jeigu ant stovo A yra $n+1$ žiedas, tai n žiedų galime perkelti ant stovo B (pasinaudojus stovu C) atlikus a_n perkėlimų. Tada nuo stovo A paskutinįjį didžiausiąjį žiedą vienu perkėlimu perdedame ant stovo C ir nuo stovo B (pasinaudojus tuščiu stovu A) n žiedų perkeliame ant stovo C atlikę a_n perkėlimų. Taigi nuo stovo A ant stovo C $n+1$ žiedą galima perkelti atlikus

$a_{n+1}=2a_n+1$, $n\geq 1$, $a_1=1$ perkėlimų.

Šio sąryšio atskirojo sprendinio $(P_m(n)=1!)$ ieškosime pavidalo: $v_n=b$. Kadangi $v_{n+1}=b$, tai $b=2b+1$. Iš čia: $b=-1$. Kadangi $y_n=C2^n$ yra homogeninio sąryšio $a_{n+1}=2a_n$ bendrasis sprendinys, tai $a_n=u_n+v_n=C\cdot 2^n-1$ yra bendrasis nehomogeninio sąryšio sprendinys.

Kai $n=1$, gauname $C\cdot 2^1-1=1$. Iš čia $C=1$. Taigi n žiedų nuo stovo A ant stovo C, pasinaudojus stovu B, galima perdėti atlikus 2^n-1 perkėlimų. Pavyzdžiui, kai $n=64$, reikia atlikti $a_{64}=18446744073703551615$ perkėlimus. Pabandykite apskaičiuoti kiek reikia laiko atlikti šiems perkėlimams, jeigu vieną perkėlimą galima atlikti per 1 sekundę.

Informacija. Skaičius a_{64} nėra pirminis. Pirminiai skaičiai 2^n-1 pavidalo vadinami *Merseno skaičiais*. Pats Mersenas nustatė, kad skaičius $2^{127}-1$ yra 39-ženklis pirminis skaičius (1876 m.). Jis klydo teigdamas, kad skaičius $2^{257}-1$ yra pirminis. Kompiuteriais nustatyta, kad skaičiai $2^{2976221}-1$ (1997 m.) ir $2^{24036583}-1$ (1999 m., 2098960-

ženklis skaičius) yra pirminiai skaičiai. Manoma, kad ir skaičius $2^{24036583}-1$ (2004 m., 7235733-ženklis skaičius) irgi yra pirminis skaičius.

3 pavyzdys (beždžionės ir riešutai). Į beždžionių aptvarą buvo atnešta pintinė riešutų. Pirmoji beždžionė suvalgė pusę visų riešutų ir dar vieną riešutą. Antroji beždžionė suvalgė pusę likusių riešutų ir dar du riešutus. Trečioji beždžionė suvalgė vėl pusę likusių riešutų ir dar tris riešutus ir t. t. *N*-ji beždžionė suvalgė visus likusius riešutus. Rasime kiek pintinėje buvo riešutų. Apskaičiuosime jų skaičių, kai $N=8$.

Sprendimas. Sakykime, kad pintinėje yra x riešutų, o r_n – riešutų likutis pintinėje, kai riešutų porciją suvalgė n-ji beždžionė. Taigi

$$r_n=\frac{r_{n-1}}{2}-n\,,\ 0\le n\le N\,,\ r_0=x\,,\ r_N=0\,.$$

Ieškosime šio sąryšio atskirojo sprendinio tokiu pavidalu:

$$v_n=a\cdot n+b\text{, nes } P_m(n)=-n\,.$$

Turime

$$a\cdot n+b=\frac{a(n-1)+b}{2}-n\,,$$

t. y.

$$2a\cdot n+2b=an-a+b-2n\,.$$

Sulyginę koeficientus prie atitinkamųjų n laipsnių, gauname:

$$\begin{array}{c|l} n^1 & 2a=a-2, \\ n^0 & 2b=-a+b \end{array}$$

Iš šios sistemos randame: $a=-2$, $b=2$. Taigi $v_n=-2n+2$.

Kadangi homogeninio sąryšio $r_n=\dfrac{r_{n-1}}{2}$ bendrasis sprendinys yra $u_n=\dfrac{C}{2^n}$, tai sąryšio $r_n=\dfrac{r_{n-1}}{2}-n$ bendrasis sprendinys yra $r_n=\dfrac{C}{2^n}-2n+2$. Kai $n=0$, gauname $x=\dfrac{C}{2^0}-2\cdot 0+2$, t. y. $C=x-2$.

Į sąryšį $r_n=\dfrac{x-2}{2^n}-2n+2$ įrašę $n=N$, gauname

$$\frac{x-2}{2^N} - 2N + 2 = 0 \text{, t. y. } x = 2^{N+1}(N-1) + 2 .$$

Kai $N = 8$, gauname: $x = 2^9(8-1) + 2 = 3586$.

Ats.: Pintinėje buvo $2^{N+1}(N-1)+2$ riešutų. Kai aptvare paskutinius riešutus suvalgė aštuntoji beždžionė $(N = 8)$, pintinėje iš pradžių buvo 3586 riešutai.

Pastaba. Jeigu iš anksto būtų žinoma, kad aštuntoji beždžionė suvalgė paskutinius riešutus, riešutų skaičių pintinėje galėtume rasti paprasčiau.

Iš tikrųjų, $r_{n-1} = 2r_n + 2n$. Kai $n = 8$, turime

$r_7 = 2\cdot 0 + 2\cdot 8 = 16$, $\quad r_6 = 2\cdot 16 + 2\cdot 7 = 46$,

$r_5 = 2\cdot 46 + 2\cdot 6 = 104$, $\quad r_4 = 2\cdot 104 + 2\cdot 5 = 218$,

$r_3 = 2\cdot 218 + 2\cdot 4 = 444$, $\quad r_2 = 2\cdot 444 + 2\cdot 3 = 894$,

$r_1 = 2\cdot 894 + 2\cdot 2 = 1792$, $\quad r_0 = x = 2\cdot 1792 + 2\cdot 1 = 3586$.

II. ANTROSIOS EILĖS TIESINĖS REKURENČIOSIOS SEKOS

1. Antrosios eilės homogeninės rekurenčiosios sekos.

Nagrinėsime rekurenčiąją seką, apibrėžtą taip:

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n ,\ n \ge 1 . \tag{3}$$

(3) sąryšio sprendinio ieškosime pavidalu $y_n = r^n$. Kadangi $y_{n+1} = r^{n+1}$, $y_{n+2} = r^{n+2}$, tai šias išraiškas įrašę į (3) sąryšį, gauname:

$$r^{n+2} = p\, r^{n+1} + q\cdot r^n \text{, t. y. } r^2 = p\, r + q \quad (r \ne 0!) . \tag{4}$$

Taigi seka $y_n = r^n$ yra (3) sąryšio sprendinys, jeigu *r* tenkina (4) lygtį. (4) lygtis vadinama (3) sąryšio *charakteringąja lygtimi.*

Galimi 3 atvejai:

a) (4) lygtis turi du skirtingus realiuosius sprendinius ($D = p^2 + 4q > 0$) $r_1 = \alpha$ ir $r_2 = \beta$;

b) (4) lygtis turi du realiuosius sutampančius sprendinius ($D = p^2 + 4q = 0$) $r_1 = r_2 = \dfrac{p}{2}$;

c) (4) lygtis neturi realiųjų sprendinių ($D = p^2 + 4q < 0$); šio atvejo šiame straipsnelyje nenagrinėsime.

a) (4) charakteringoji lygtis turi du skirtingus realiuosius sprendinius $r_1 = \alpha$ ir $r_2 = \beta$.

Šiuo atveju (3) sąryšis turi du sprendinius $y_n = \alpha^n$ ir $z_n = \beta^n$. Įsitikinsime, kad

$$x_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n,\ C_1, C_2 \in R \tag{5}$$

taip pat yra (3) sąryšio sprendinys. Iš tikrųjų,

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= C_1\alpha^{n+2} + C_2\beta^{n+2} = C_1\alpha^n(p\alpha + q) + C_2\beta^n(p\beta + q) = \\ &= C_1p\alpha^{n+1} + C_1\alpha^n q + C_2p\beta^{n+1} + C_2\beta^n q = \\ &= p(C_1\alpha^{n+1} + C_2\beta^{n+1}) + q(C_1\alpha^n + C_2\beta^n) = \\ &= p\,x_{n+1} + q\,x_n. \end{aligned}$$

(5) sprendinys yra bendrasis (3) sąryšio sprendinys.

Norint rasti (3) sąryšio atskirąjį sprendinį, reikia dviejų papildomų sąlygų (yra dvi nežinomos konstantos).

Sakykime, kad ieškosime sprendinio, tenkinančio pradines sąlygas: $x_1 = a$, $x_2 = b$.

Kai $n = 1$, iš (5) lygties gauname

$$C_1\alpha + C_2\beta = a.$$

Kai $n = 2$,

$$C_1\alpha^2 + C_2\beta^2 = b.$$

Iš šios lygčių sistemos randame: $C_1 = \dfrac{a\beta - b}{\alpha(\beta - \alpha)}$, $C_2 = \dfrac{a\alpha - b}{\beta(\alpha - \beta)}$.

2 teorema. Seka $x_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n$ yra rekurenčiojo sąryšio $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$, $p = \alpha + \beta$, $q = -\alpha\beta$, sprendinys.

Įrodymas. Pagal atvirkštinę Vijeto teoremą, α ir β yra kvadratinės lygties $r^2 = pr + q$ sprendiniai. Todėl

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= C_1\alpha^{n+2} + C_2\beta^{n+2} = C_1\alpha^n(p\alpha + q) + C_2\beta^n(p\beta + q) = \\ &= p(C_1\alpha^{n+1} + C_2\beta^{n+1}) + q(C_1\alpha^n + C_2\beta^n) = p\,x_{n+1} + q\,x_n. \end{aligned}$$

4 pavyzdys. Rasime seką $\{x_n\}$, apibrėžtą rekurentiškai: $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$, $x_1 = 2$, $x_2 = 5$.

Sprendinys. Duotojo sąryšio charakteringoji lygtis yra $r^2 - 5r + 6 = 0$. Jos sprendiniai: $r_1 = 2$, $r_2 = 3$. Taigi šio sąryšio bendrasis sprendinys yra $x_n = C_1 2^n + C_2 3^n$.

C_1 ir C_2 rasime iš sistemos:

$$\begin{cases} 2C_1 + 3C_2 = 2, \\ 4C_1 + 9C_2 = 5. \end{cases}$$

Gaunome: $C_1 = \dfrac{1}{2}$, $C_2 = \dfrac{1}{3}$.

Ats.: $x_n = 2^{n-1} + 3^{n-1}$, $n \geq 1$.

5 pavyzdys. Įrodysime, kad skaičiai

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{99} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{99}\right) \text{ ir } \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{100} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{100}\right)$$

yra sveikieji tarpusavyje pirminiai skaičiai (jų didžiausias bendras daliklis lygus 1).

Sprendimas. Nagrinėkime seką

$$u_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right).$$

Nesunku patikrinti, kad $u_1 = 1$, $u_2 = 2$. Remdamiesi 2 teorema, gauname, kad $p = 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 2$, o $q = -(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = 1$, t. y. seka $\{u_n\}$ yra rekurenčiojo sąryšio $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$ sprendinys. Kadangi $u_1, u_2 \in \mathrm{N}$, tai $u_n \in \mathrm{N}$.

Iš gauto rekurentinio sąryšio išplaukia, kad narių u_{n+2} ir u_{n+1} bendrasis daliklis yra ir nario u_n bendrasis daliklis, vadinasi ir narių u_{n-1}, u_{n-2} ir t.t. ir $u_1 = 1$ bendrasis daliklis. Taigi bet kurie du kaimyniniai sekos nariai turi tik vieną bendrą daliklį, lygų 1. Taigi u_{99} ir u_{100} yra sveikieji tarpusavyje pirminiai skaičiai.

6 pavyzdys. Rasime seką $\{F_n\}$, apibrėžtą rekurentiniu sąryšiu

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \; F_1 = F_2 = 1. \tag{6}$$

Nesunku apskaičiuoti, kad

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	…
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	…

Tai Fibonačio skaičiai.

Jeigu pradines sąlygas pakeistume: $L_1 = 1$, $L_2 = 3$, tai iš rekurenčiojo sąryšio $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ rastume

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
L_n	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	…

Tai Lukaso skaičiai (E. Lucas, 1842–1891).

Dažnai ir Fibonačio ir Lukaso skaičiai gaunami iš rekurenčiojo sąryšio imant pradines sąlygas $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ir $L_0 = 2$, $L_1 = 1$.

Rasime (6) rekurenčiojo sąryšio bendrąjį sprendinį. Šio sąryšio charakteringoji lygtis yra $r^2 - r - 1 = 0$. Jo sprendiniai: $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Taigi bendrasis (6) sąryšio sprendinys yra:

$$F_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Remdamiesi pradinėmis sąlygomis $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ rasime atskirąjį sprendinį:

$$\begin{matrix} \text{Kai } n = 0, \\ \text{Kai } n = 1, \end{matrix} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

Iš šios sistemos gauname: $C_1 = -C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Taigi (6) sąryšio atskirasis sprendinys yra

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{7}$$

7 pavyzdys. Mokyklos kiemo laiptuose yra 12 laiptelių. Antanukas, eidamas į mokyklą kartais lipa tai ant kiekvieno laiptelio, tai ant kas antro laiptelio. Raskime keliais skirtingais būdais Antanukas gali užlipti mokyklos kiemo laiptais.

Sprendimas. Ant pirmojo laiptelio Antanukas gali užlipti vieninteliu būdu. Ant antrojo laiptelio jis gali užlipti dviem būdais: 1) lipdamas ant pirmo, o po to ant antrojo laiptelio; 2) tiesiog lipdamas ant antrojo laiptelio. Sakykime, kad ant n-ojo laiptelio Antanukas gali užlipti a_n skirtingais būdais. Akivaizdu, kad ant n-ojo laiptelio jis gali užlipti nuo (n–1)-jo laiptelio arba nuo (n–2)-jo laiptelio, peržengdamos (n–1)-jį laiptelį. Taigi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 3$, be to, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Dabar nesunku apskaičiuoti, kad $a_3 = a_2 + a_1 = 3$, $a_4 = a_3 + a_2 = 5$, $a_5 = a_4 + a_3 = 8$, $a_6 = 16$, $a_7 = 21$, $a_8 = 34$, $a_9 = 55$, $a_{10} = 84$, $a_{11} = 144$, $a_{12} = 233$.

Ats.: Antanukas mokyklos laiptais gali užlipti 233 skirtingais būdais.

Informacija. Skaičius $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033989$ vadinamas aukso pjūviu. Apie aukso pjūvį galime paskaityti nurodytoje literatūroje.

Aukso pjūvis ir Fibonačio skaičiai yra tampriai susiję.

Teorema. Aukso pjūvis ir Fibonačio skaičiai susieti formule

$$\varphi^n = F_n \cdot \varphi + F_{n-1}. \tag{8}$$

Įrodymas. Iš tikrųjų $\varphi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$,

$\varphi^2 = \varphi + 1$,

$\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 1$,

$\varphi^4 = 2(\varphi + 1) + \varphi = 34 + 2$,

$\varphi^5 = 3\varphi^2 + 2\varphi = 5\varphi + 3$,

$\varphi^6 = 8\varphi + 5$

…………….

Tarkime, kad $\varphi^k = F_k\varphi + F_{k-1}$.

Įrodysime, kad $\varphi^{k+1} = F_{k+1}\varphi + F_k$. Iš tikrųjų,

$$\varphi^{k+1} = F_k\varphi^2 + F_{k-1}\varphi = F_k(\varphi+1) + F_{k-1}\varphi =$$
$$= (F_k + F_{k-1})\varphi + F_k = F_{k+1}\varphi + F_k \,.$$

Remdamiesi matematinės indukcijos principu turime $\varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}$ su visais natūraliaisiais skaičiais n.

Pastebėsime, kad $\dfrac{F_{20}}{F_{19}} = 1{,}610833963\ldots$ ir su aukso pjūviu sutampa 7 skaitmenys po kablelio.

b) (4) charakteringoji lygtis turi du sutampančius realiuosius sprendinius: $r_1 = r_2 = 1 = \dfrac{p}{2}$ **.**

Šiuo atveju galima surasti tik vieną (3) sąryšio sprendinį $y_n = \alpha^n$. Įsitikinsime, kad seka $z_n = n\alpha^n$ taip pat yra (3) sąryšio sprendinys:

$$z_{n+2} = (n+2)\alpha^{n+2} = n\alpha^n \cdot \alpha^2 + 2\alpha^{n+2} =$$
$$= n\alpha^n(\alpha p + q) + 2\alpha^{n+2} =$$
$$= pn\alpha^{n+1} + n\alpha^n q + p\alpha^{n+1} - p\alpha^{n+1} + 2\alpha^{n+2} =$$
$$= p(n+1)\alpha^{n+1} + qn\alpha^n + 2\alpha^n\left(\alpha - \frac{p}{2}\right) = pz_{n+1} + qz_n \,,$$

nes $\alpha - \dfrac{p}{2} = 0$.

Taigi seka $x_n = C_1\alpha^n + C_2 n\alpha^n$ yra (3) sąryšio bendrasis sprendinys. Šio sąryšio atskirąjį sprendinį galima rasti iš dviejų pradinių sąlygų. Pavyzdžiui, kai $x_1 = a$, $x_2 = b$, atskirasis sprendinys yra:

$$x_n = \big((2a\alpha - b) + n(b - a\alpha)\big)\alpha^{n-2} \,.$$

8 pavyzdys. Rasime seką $\{x_n\}$, apibrėžtą rekurentiniu sąryšiu

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{1}{4}x_n \,,\ x_1 = 1 \,,\ x_2 = -\frac{1}{2} \,.$$

Sprendimas. Šio sąryšio charakteringosios lygties $4r^2 - 4r + 1 = 0$ sprendinys $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$. Taigi bendrasis sprendinys yra $x_n = C_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + C_2\, n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Kai $n = 1$, tai $\frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 = 1$.

Kai $n = 2$, gauname: $\frac{1}{4}C_1 + \frac{1}{2}C_2 = -\frac{1}{2}$.

Iš čia $C_1 = 6$, $C_2 = -4$.

Ats.: $x_n = 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = 2^{1-n}(3-2n)$.

2. Nehomogeninė tiesinė antros eilės rekurenčioji seka.

Nagrinėsime seką

$$a_{n+2} - p\,a_{n+1} - q\,a_n = P_m(n). \tag{9}$$

Kaip ir pirmos eilės tiesinėms nehomogeninėms sekoms galima įrodyti, kad (9) sąryšio bendrasis sprendinys yra homogeninio sąryšio $a_{n+2} - p\,a_{n+1} - q\,a_n = 0$ bendrojo sprendinio ir (9) sąryšio atskirojo sprendinio suma. Atskirasis sprendinys ieškomas *m*-ojo laipsnio daugianario su nežinomais koeficientais pavidalo.

9 pavyzdys. Rasime rekurenčiojo sąryšio $a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 8n$ bendrąjį sprendinį.

Sprendimas. Ieškosime šio sąryšio atskirojo sprendinio tokiu pavidalu: $v_n = An + B$ (čia $P_m(n) = 8n$). Kadangi $v_{n+1} = A(n+1) + B$, o $v_{n+2} = A(n+2) + B$, tai šias išraiškas įrašę į duotąjį sąryšį, gauname

$$A(n+2) + B + A(n+1) + B - 6(An + B) = 8n,$$

t. y.

$$-4An + 3A - 4B = 8n.$$

Sulyginę koeficientus prie atitinkamų *n* laipsnių, gauname:

$$\begin{cases} -4A = 8; \\ 3A - 4B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -2, \\ B = -\frac{3}{2}. \end{array}$$

Taigi atskirasis sprendinys $v_n = -2n - \frac{3}{2}$.

Kadangi homogeninio sąryšio $a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 0$ bendrasis sprendinys yra $u_n = C_1(-3)^n + C_2 2^n$, tai duotojo nehomogeninio sąryšio bendrasis sprendinys –

$$a_n = u_n + v_n = C_1(-3)^n + C_2 \cdot 2^n - 2n - \frac{3}{2}.$$

Literatūra

1. G. Stepanauskas. Rekurenčios sekos. *Jaunajam matematikui, LJMM, 1, 17–21 psl.*
2. G. Stepanauskas. Fibonačio skaičiai. *Alfa plius omega, matematikos žurnalas, 1998, Nr. 2(6), 78-84 psl.*
3. P. Tannenbaumas ir R. Arnoldas. Kelionė į šiuolaikinę matematiką. *V. TEV, 1995.*
4. А. И. Маркушевич. Возвратные последовательности, *М., Наука, 1983.*
5. Н. И. Воробьев. Числа Фибоначчи. *М., Наука, 1970.*
6. М. Гарднер. Математические головоломки и развлечения. *И-во Мир, М., 1971, 218-233 стр.*
7. М. Гарднер. Математические новеллы. *Из-во Мир, М., 1974, 388–401 стр.*

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1. Kvadratinės lygties $x^2 - 3x + A = 0$ sprendiniai x_1 ir x_2, o kvadratinės lygties $x^2 - 12x + B = 0$ – x_3 ir x_4. Raskite koeficientus A ir B, jeigu žinoma, kad skaičiai x_1, x_2, x_3, x_4 sudaro didėjančią geometrinę progresiją.

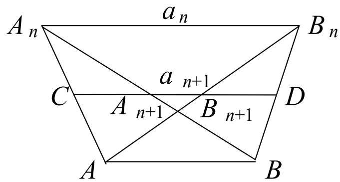
2. Virš ežerų virtinės skrido būrys ančių. Į pirmąjį ežerą nusileido pusė jų skaičiaus ir dar pusė, o kitos skrido toliau. Į antrąjį ežerą nusileido pusė skridusių ančių skaičiaus ir dar pusė ir t. t. Į septintąjį ežerą nusileido visos likusios antys. Kiek ančių buvo būryje?
Nurodymas. Remkitės 3 pavyzdžio pastaba.

3. Bankas moka 4 % metinių palūkanų ir jas per metus priskaičiuoja tik vieną kartą (metų gale). Jaunasis verslininkas Skūpaitis 2004 m. sausio 2 d. į banką įnešė 25 000 Lt ir nutarė toliau taupyti pinigus papildydamas savo sąskaitą po 10 000 Lt kiekvienais metais sausio 2 d. Kiek litų bus Skūpaičio sąskaitoje po n metų? Apskaičiuokite Skūpaičio santaupas, kai $n = 10$.

4. Švenčių proga karalius nutarė apdovanoti savo ministrus. Pirmajam ministrui jis davė 5 auksines monetas, antrajam ministrui – dvigubai daugiau negu pirmajam ir dar 2 monetas, trečiajam – dvigubai daugiau negu antrajam ministrui ir dar 3 monetas ir t. t. n-jam ministrui karalius davė dvigubai daugiau monetų negu $(n-1)$-jam ir dar n monetų. Kiek monetų gavo n-asis ministras? Apskaičiuokite monetų skaičių, kai $n = 10$.

5. Trapecijoje AA_1B_1B, kurios pagrindai $AB = a$ ir $A_1B_1 = b$ $(b > a)$ nubrėžta atkarpa A_2B_2, jungianti įstrižainių vidurius. Gautoje trapecijoje AA_2B_2B vėl nubrėžta atkarpa A_3B_3, jungianti šios trapecijos įstrižainių vidurius ir t. t. Raskite atkarpos $A_{n+1}B_{n+1}$ ilgį.

Nurodymas. Brėžinyje pavaizduota trapecija AA_nB_nB. Sakykime, $A_nB_n = a_n$, o $A_{n+1}B_{n+1} = a_{n+1}$. Raskite sąryšį tarp a_{n+1} ir a_n.



6. Sporto varžybos truko N dienų ir jose buvo išdalinta x medalių $(x > 1)$. Pirmąją dieną buvo įteikta 1 medalis ir $\frac{1}{7}$ likusių $(x-1)$ – medalių. Antrąją dieną buvo įteikta 2 medaliai ir $\frac{1}{7}$ vėl likusių medalių ir t. t. Paskutiniąją N-ąją dieną buvo įteikti likusieji N medaliai. Kelias dienas truko varžybos ir kiek medalių buvo išdalinta?

Nurodymas.

1) Po n-tos varžybų dienos $(0 \le n \le N)$ likusių medalių skaičių pažymėkite r_n $(r_0 = x)$ ir raskite sąryšį tarp r_n ir r_{n-1}. Iš gautojo sąryšio, pasinaudoję sąlyga $r_0 = x$, raskite r_n.

2) Pasinaudokite sąlyga $r_N = 0$.

7. Raskite seką $\{x_n\}$, apibrėžtą rekurentiniu sąryšiu:

1) $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n + n$, $x_1 = 1$, $x_2 = -2$;

2) $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

8. Įrodykite, kad $F_n^2 + F_{n+1}^2$ taip pat yra Fibonačio skaičius. Raskite jį.

Nurodymas. Remkitės (7) formule.

9. Įrodykite, kad su bet kuriuo natūraliuoju n skaičius $u_n = \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$ yra sveikasis nelyginis skaičius.

10. Dešimtženkliai skaičiai sudaryti tik iš skaitmenų 2 ir 5. Kiek tarp šių skaičių yra tokių, kuriuose nėra greta dvejetų?

Nurodymas. Skaičius, tarp kurių nėra greta dvejetų suskirstykite į dvi grupes: skaičius, kurie baigiasi 2 ir skaičius, kurie baigiasi 5. Juos suskaičiuokite remdamiesi Fibonačio rekurenčiąja seka.

VIII tema. UŽDAVINIAI SU PARAMETRU

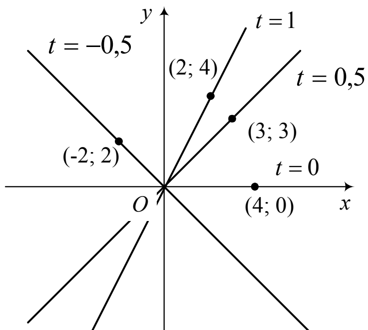
Antanas Apynis
(Vilniaus universitetas)

Matematikos uždaviniuose parametras yra tam tikras kintamasis dydis. Pagrindinių kintamųjų atžvilgiu jis laikomas sąlygiškai pastoviu dydžiu. Keičiant parametro (parametrų) reikšmes paprastai kinta ir pagrindinių kintamųjų reikšmės bei sąsajos tarp jų. Pavyzdžiui, nagrinėjant lygtį su trimis nežinomaisiais (kintamaisiais) $2xt - y = 0$ kintamąjį x galima laikyti laisvuoju kintamuoju, o t – parametru. Tada su kiekviena parametro t reikšme ji taptų tiesinės funkcijos $y = 2xt$ lygtimi. Vaizduodami šios lygties sprendinius $(x; 2xt)$, $x \in (-\infty; +\infty)$, stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje gautume tiesių pluoštą (žr. 1 pav.). Visos tiesės eina per koordinačių pradžios tašką (0; 0). Šiam tiesių pluoštui nepriklauso tik ordinačių ašis Oy – tiesė $x = 0$.

Naudojant parametrus kartais patogu užrašyti įvairių lygčių sprendinius. Pavyzdžiui, tiesinės lygties $2x + 3y = 7$ sprendinių aibę galima užrašyti taip:

$$\left\{\left(t; \frac{7-2t}{3}\right) : -\infty < t < +\infty\right\}$$

Tiesinės lygties su trimis nežinomaisiais $x + 5y - z = 4$ sprendiniai priklauso nuo dviejų parametrų, tarkime, α ir β. Šiuos sprendinius galima apibūdinti, pavyzdžiui, taip: $(\alpha; \beta; \alpha + 5\beta - 4)$, $-\infty < \alpha < +\infty$, $-\infty < \beta < +\infty$.



1 pav.

Daugeliui uždavinių su parametrais spręsti nereikia papildomų matematikos žinių, – pakanka mokyklinio vadovėlio. Šie uždaviniai yra „sunkesni“ tik todėl, kad reikia išsamiau susipažinti su uždavinio sąlyga, atidžiau pasirinkti sprendimo strategiją, apsvarstyti skaičiavimų rezultatus.

Uždavinius su parametrais yra sunkiau suklasifikuoti pagal kokius nors išorinius požymius ar sprendimo būdus, todėl jų lavinamoji vertė lyginant su „standartiniais“ uždaviniais yra didesnė. Sprendžiant juos galima įgyti tam tikrų matematinio tyrimo įgūdžių. Įsitikinkime tuo nagrinėdami konkrečius uždavinius.

1 pavyzdys. Raskime parametro *a* reikšmes, su kuriomis nelygybė

$$ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0 \tag{1}$$

galioja, kai $x > 0$.

Sprendimas. Kai $a = 0$, duotoji nelygybė tampa tokia: $-4x + 1 > 0$. Ji negalioja su $x \geq \frac{1}{4}$. Todėl parametro reikšmę $a = 0$ turime atmesti.

Kai $a < 0$, tai reiškinys $ax^2 - 4x + 3a$ įgyja tik neigiamas reikšmes su visais teigiamais skaičiais *x*. Lengva suvokti, kad su pakankamai dideliu skaičiumi $x > 0$ turėsime nelygybę $(ax^2 - 4x + 3a) + 1 < 0$. Taigi neigiamos parametro *a* reikšmės uždavinio sąlygos taip pat netenkina.

Kai $a > 0$, apskaičiuokime kvadratinio trinario $ax^2 - 4x + 3a + 1$ šaknis. Gausime

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{4 - a - 3a^2}}{a} \text{ ir } x_2 = \frac{2 + \sqrt{4 - a - 3a^2}}{a}.$$

Leistinąsias parametro *a* reikšmes randame iš nelygybės $4 - a - 3a^2 \geq 0$. Jos sudaro intervalą $\left[-\frac{4}{3}; 1\right]$. Suderinę su sąlyga $a > 0$, gauname, jog $a \in (0; 1]$. Aišku, kad $x_2 > 0$, kai $a \in (0; 1]$, ir $ax_2^2 - 4x_2 + 3a - 1 = 0$. Vadinasi, (1) nelygybė galioja ne su visais $x > 0$, kai $a \in (0; 1]$.

Kai $a > 1$, tai $4 - a - 3a^2 < 0$. Tai reiškia, kad kvadratinis trinaris $ax^2 - 4x + 3a + 1$ šaknų neturi. Parabolė $y = ax^2 - 4x + 3a + 1$ nesusikerta su abscisių ašimi. Ji visa yra virš ašies *Ox*, t. y. $ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$ su visais realiaisiais (taigi ir teigiamais) skaičiais *x*.

Išvada tokia – (1) nelygybė galioja su visais $x > 0$, kai $a > 1$.

Ats.: $a > 1$.

2 pavyzdys. Raskime visas parametro t reikšmes, su kuriomis mažiausioji funkcijos

$$f(x) = 1 + 4t - 8t^2 + 8t\cos x - 2\cos^2 x$$

reikšmė intervale $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ yra pati didžiausia.

Sprendimas. Iš pradžių raskime mažiausiąją funkcijos $f(x)$ reikšmę intervale $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, kai parametro t reikšmė yra bet koks realusis skaičius. Šios funkcijos išraiška dydžio $\cos x$ atžvilgiu yra kvadratinis trinaris. Išskirkime pilnąjį kvadratą ir nagrinėjamąją funkciją užrašykime taip:

$$f(x) = 1 + 4t - 2(2t - \cos x)^2, \ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Aišku, kad mažiausią reikšmę gausime tada, kai $(2t - \cos x)^2$ reikšmė bus pati didžiausia. Atkreipkime dėmesį į tai, kad parametro t reikšmė gali būti tiek teigiamas, tiek neigiamas skaičius arba nulis, o funkcija $y = \cos x$ monotoniškai mažėja intervale $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Be to, $\cos 0 = 1$ ir $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Todėl

$$\max(2t - \cos x)^2 = \begin{cases} (2t-1)^2, \text{ kai } t \le 0; \\ (2t-0)^2, \text{ kai } t > 0 \end{cases} = \begin{cases} 4t^2 - 4t + 1, \text{ kai } t \le 0; \\ 4t^2, \text{ kai } t > 0. \end{cases}$$

Vadinasi,

$$\min f(x) = \begin{cases} 1 + 4t - 2(4t^2 - 4t + 1), \text{ kai } t \le 0; \\ 1 + 4t - 2\cdot 4t^2, \text{ kai } t > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -8t^2 + 12t - 1, \text{ kai } t \le 0; \\ -8t^2 + 4t + 1, \text{ kai } t > 0. \end{cases}$$

Pažymėkime

$g_1(t) = -8t^2 + 12t - 1$, $g_2(t) = -8t^2 + 4t + 1$

ir ieškokime šių funkcijų didžiausių reikšmių: funkcijos $g_1(t)$ didžiausios reikšmės intervale $(-\infty; 0]$, o funkcijos $g_2(t)$ – intervale $(0; +\infty)$. Abi funkcijos yra kvadratiniai trinariai, kuriuos galima užrašyti taip:

$$g_1(t) = -8t^2 + 12t - 1 = \frac{7}{2} - 2\left(2t - \frac{3}{2}\right)^2, \ t \le 0;$$

$$g_2(t) = -8t^2 + 4t + 1 = \frac{3}{2} - 2\left(2t - \frac{1}{2}\right)^2, \ t > 0.$$

Matome, kad

$$\max g_1(t) = g_1(0) = \frac{7}{2} - 2\left(2 \cdot 0 - \frac{3}{2}\right)^2 = -1,$$

$$\max g_2(t) = g_2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} - 2\left(2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}.$$

Galutinė *išvada*: funkcijos

$$f(x) = 1 + 4t - 8t^2 + 8t\cos x - 2\cos^2 x$$

mažiausioji reikšmė intervale $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ yra pati didžiausia, kai $t = \frac{1}{4}$. Ji lygi $\frac{3}{2}$.

Įrašę $t = \frac{1}{4}$, gautume tokią funkcijos $f(x)$ išraišką:

$$f(x) = \frac{3}{2} + 2\cos x - 2\cos^2 x.$$

Šios funkcijos mažiausioji reikšmė intervale $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ yra lygi $\frac{3}{2}$. Ji įgyjama dviejuose taškuose: $x_1 = 0$ ir $x_2 = \frac{\pi}{2}$ (įsitikinkite savarankiškai!).

Atkreipkime dėmesį į tai, kad spręsdami ekstremumų uždavinius apsiėjome be išvestinių skaičiavimo ir klasikinės teorijos taikymo.

3 pavyzdys. Nustatykime, su kuriomis parametro m reikšmėmis funkcijos

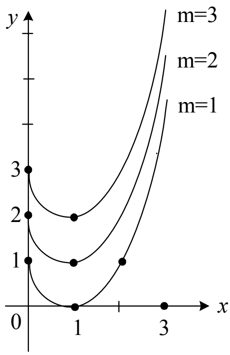
$$y = |x^2 - 2x + m|$$

mažiausioji reikšmė intervale [0; 3] yra lygi 7.

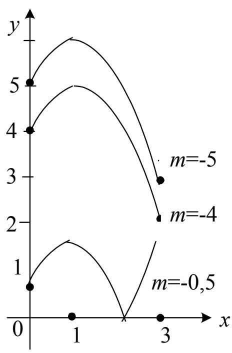
Sprendimas. Užrašykime nagrinėjamą funkciją lygtimi

$$y = |(x-1)^2 + m - 1|.$$

Aišku, kad $|(x-1)^2 + m - 1| = (x-1)^2 + m - 1$, kai $m \geq 1$. Todėl funkcijos $y = |(x-1)^2 + m - 1|$ grafikas intervale [0; 3] yra parabolės lankas su bet kuria parametro $m \geq 1$ reikšme (žr. 2 pav.). Jos viršūnės koordinatės yra $(1; m-1)$. Taigi mažiausioji funkcijos reikšmė intervale [0; 3] yra lygi $m-1$ (kai $m \geq 1$).



2 pav.



3 pav.

Kai $m < 1$, tai funkcijos $y = |(x-1)^2 + m - 1|$ grafikas yra šiek tiek sudėtingesnis (žr. 3 pav.). Vis dėlto pagal gaunamą kreivių šeimą (imant įvairias parametro $m < 1$ reikšmes) nesunku išsiaiškinti, kad mažiausioji funkcijos reikšmė intervale [0; 3] yra lygi:

1) nuliui, kai $-3 < m < 1$ (ji pasiekiama taške $(1 + \sqrt{1-m};\ 0)$);

2) $-m-3$, kai $m \leq -3$ (ji pasiekiama taške $(3;\ -m-3)$).

Reikiamas parametro m reikšmes randame iš lygčių $m - 1 = 7$ ir $-m - 3 = 7$: $m_1 = 8$, $m_2 = -10$.

Ats.: $m \in \{-10;\ 8\}$.

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Raskite parametro t reikšmes, su kuriomis lygtis
$$\frac{3}{2}x^2+(3^t-2^t)x+6^{t-2}=0$$
neturi sprendinių.

2. Raskite parametro m reikšmes, su kuriomis nelygybių sistema
$$\begin{cases} x^2-12x+m\le 0, \\ x\le 2 \end{cases}$$
turi vienintelį sprendinį.

3. Raskite parametro p reikšmes, su kuriomis vienas lygties
$$x^2-2px-p=0$$
sprendinys yra didesnis už 1, o kitas – mažesnis už 1.

4. Raskite parametro a reikšmes, su kuriomis lygties
$$x^2+2(a^2-3a)x-(6a^3-14a^2+4)=0$$
sprendinių suma yra didžiausia.

Pastaba. Turima mintyje, kad kiekviena kvadratinė lygtis, kurios diskriminantas nėra neigiamas, turi du realiuosius (skirtingus arba lygius) sprendinius.

5. Raskite parametro m reikšmes, su kuriomis funkcija
$$f(x)=\frac{m}{x}-x+7$$
didžiausią reikšmę intervale [1; 4] įgyja kairiajame šio intervalo taške.

6. Raskite parametro a reikšmę, su kuria didžiausioji funkcijos
$$f(x)=|-2x^2+x+a|$$
reikšmė intervale [0; 1] yra pati mažiausia.

7. Raskite parametro *k* reikšmes, su kuriomis mažiausioji funkcijos

$$f(x) = x^2 + (k+4)x + 2k + 3$$

reikšmė intervale [0; 2] yra lygi –4.

8. Raskite parametro *t* reikšmes, su kuriomis lygtis

$$\frac{2 - \sin^2 x}{1 + \sin x} = t$$

turi tik vieną sprendinį, priklausantį intervalui $[0; 2\pi]$.

9. Raskite parametro *p* reikšmes, su kuriomis nelygybė

$$\lg(x^2 + px + 1{,}01) > -2$$

galioja, kai $x < 0$.

10. Raskite visas parametro *a* reikšmes, su kuriomis nelygybės

$$(a - x^2)(a + x - 2) < 0$$

sprendinių aibėje $X = \{x : (a - x^2)(a + x - 2) < 0\}$ nėra nelygybės $x^2 \leq 1$ sprendinių.

BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Raskite funkcijos $f(x)=\sqrt{4x^2-12x+13}$ reikšmių aibę.

2. Apskaičiuokite sumą $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+...+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}$.

3. Raskite sekos $\{x_n\}$, apibrėžtos rekurenčiuoju sąryšiu $x_{n+1}=10x_n-9n+19,\ x_0=1,$ bendrąjį narį.

4. Su kuria teigiama parametro m reikšme funkcijos $f(x)=mx^2-4x+2$ didžiausia reikšmė intervale $\left[\frac{2}{m}+\frac{1}{2};\frac{2}{m}+1\right]$ lygi 5.

Užduočių sprendimai

STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Kad ir kaip įrašytume skaičius –1, 0 ir 1 į 3×3 matmenų kvadratinės lentelės langelius, gautos skaičių sumos eilutėse, stulpeliuose ir įstrižainėse gali būti tik: –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3. Kadangi tokių sumų yra 8, o jų reikšmės tik 7, tai pagal Dirichlė principą bent dvi sumos yra lygios.

2. Sakykime, ieškomasis skaičius yra $\overline{abc}$. Tada pagal sąlygą:

$$328-(100a+10b+c)=a+b+c \Rightarrow 328=101a+11b+2c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=3 \Rightarrow 328=303+11b+2c \Rightarrow 11b+2c=25 \Rightarrow b=1, c=7.$$

Ats.: 317.

3. Sakykime, kad iš pradžių detalės buvo kraunamos į n dėžių. Tada detalių skaičių x galėsime užrašyti formule $x=12n+1$. Pagal sąlygą 13 detalių buvo sukrauta po lygiai į ($n-1$) dėžę. Čia galimi tik du atvejai: $n-1=1$ arba $n-1=13$, nes 13 yra pirminis skaičius. Pirmasis atvejis netinka, nes į vieną dėžę telpa tik 20 detalių. Taigi $n=14$, $x=12\cdot 14+1=169$.

Ats.: 169 detalės.

4. Sakykime, kad inde buvo x litrų tirpalo. Pirmą kartą nupylus vieną litrą 12 % tirpalo, grynos druskos rūgšties inde sumažėjo 0,12 l. Todėl įpylus į indą 1 l vandens, buvo gautas $\frac{0{,}12x-0{,}12}{x}\cdot 100=\left(12-\frac{12}{x}\right)$ % druskos rūgšties tirpalas. Antrą kartą buvo nupilta $\frac{12-\frac{12}{x}}{100}$ l grynos druskos rūgšties, o įpylus vieną litrą vandens, druskos rūgšties tirpalo koncentracija inde pasidarė3 %. Taigi

$$\frac{0{,}12x-0{,}12-\left(12-\frac{12}{x}\right)\cdot\frac{1}{100}}{x}=0{,}03 \;\Rightarrow\; x_1=\frac{2}{3},\; x_2=2.$$

Pagal uždavinio sąlygą $x>1$, todėl indo talpa lygi 2 l.

Ats.: 2 l.

5. $\begin{cases} x^2y - xy^2 = 30, \\ x + xy - y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy\,(x - y) = 30, \\ xy + (x - y) = 13. \end{cases}$

Įveskime naujus nežinomuosius $u = xy$ ir $v = x - y$. Tada duotoji sistema atrodys taip:

$$\begin{cases} u + v = 13, \\ u \cdot v = 30. \end{cases}$$

Šios sistemos sprendiniai yra (10; 3) ir (3; 10). Duotosios sistemos sprendinius gausime išsprendę dvi lygčių sistemas: $\begin{cases} x - y = 3, \\ x \cdot y = 10 \end{cases}$ ir

$\begin{cases} x - y = 10, \\ x \cdot y = 3. \end{cases}$

Pirmosios sistemos sprendiniai yra (5; 2) ir (–2; –5), o antrosios – $(5 + \sqrt{28}\,; \sqrt{28} - 5)$ ir $(5 - \sqrt{28}\,;\ -5 - \sqrt{28}\,)$.

Ats.: (5; 2), (–2; –5), $(5 + \sqrt{28}\,;\ -5 + \sqrt{28}\,)$, $(5 - \sqrt{28}\,;\ -5 - \sqrt{28}\,)$.

6. Sudarykime lentelę:

a	*v*	*p*	*av*	*vp*	*pa*	*avp*
6	6	7	4	3	2	①

⇒

a	*v*	*p*	*av*	*vp*	*pa*	*avp*
5	5	6	③	2	1	0

⇒

a	*v*	*p*	*av*	*vp*	*pa*	*avp*
2	2	6	0	②	1	0

⇒

a	*v*	*p*	*av*	*vp*	*pa*	*avp*
2	0	4	0	0	①	0

⇒

a	*v*	*p*	*av*	*vp*	*pa*	*avp*
1	0	3	0	0	0	0

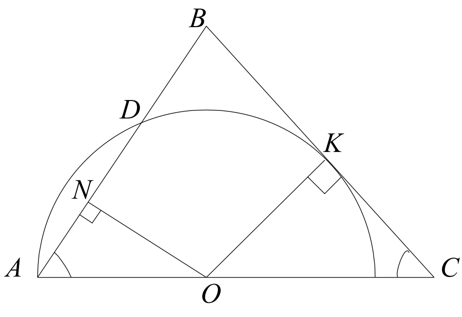
Iš pirmos lentelės pašalinę žmogų, mokantį visas 3 kalbas, gavome 2 lentelę. Iš antros lentelės pašalinę žmones, mokančius anglų ir vokiečių kalbas, gavome trečią lentelę ir t.t.

Iš paskutinės lentelės matome, kad vienas žmogus moka tik anglų kalbą ir trys moka tik prancūzų kalbą. Bendrą žmonių skaičių gauname sudėję visus apibrauktus skaičius: $1+3+1+2+3+1=11$.

Ats.: 11 žmonių, vienas tik anglų.

7. Duota: $AD=5$ cm, $DB=4$ cm, $OK \perp BC$, $\angle A=\angle C$. Rasti: $OA=OK=r$.

Kadangi BC liečia apskritimą taške K, tai $BK^2=BA\cdot BD$ (liestinės ir kirstinės savybė), $BK^2=9\cdot 4=36$, $BK=6$ cm. Tada $KC=9-6=3$ (cm). Kadangi $AN=ND=2{,}5$ ir



1 pav.

$\Delta OCK \sim \Delta OAN$ (jie yra statieji ir $\angle A=\angle C$), tai $\frac{OC}{OA}=\frac{KC}{AN}=\frac{3}{2{,}5}=\frac{6}{5}$. Iš čia $OC=\frac{6}{5}r$. Kita vertus, iš stačiojo trikampio OKC:

$$OC=\sqrt{OK^2+KC^2}=\sqrt{r^2+9}.$$

Taigi $\frac{6}{5}r=\sqrt{r^2+9} \Rightarrow r=\frac{15}{\sqrt{11}}$ cm.

Ats.: $\frac{15}{\sqrt{11}}$ cm.

8. Pastebime, kad

$S_{ABC}+S_{CFD}=S_{BED}$ (nes $BC+FD=ED$),

$S_{BCD}+S_{BEA}=S_{AFC}$ (nes $BC+AE=AF$).

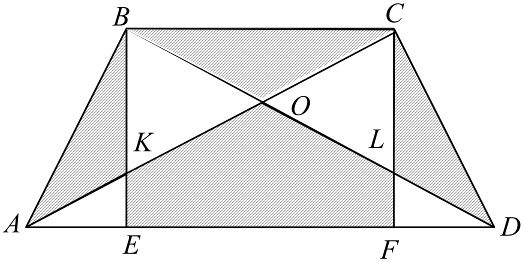
Šias dvi lygybes sudėkime:

$$S_{ABC}+S_{BCD}+S_{CFD}+S_{BEA}=S_{BED}+S_{AFC}.$$

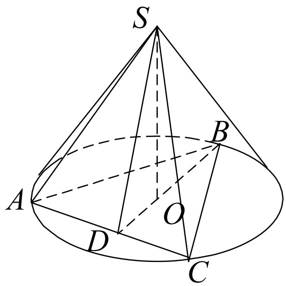
Gautoje lygybėje kiekvieno trikampio plotą pakeiskime jį sudarančių figūrų plotų suma. Gausime:

$$S_{AKB} + S_{KBO} + S_{OBC} + S_{OBC} + S_{OCL} +$$
$$+ S_{CLD} + S_{CLD} + S_{LDF} + S_{AKE} + S_{AKB} =$$
$$= S_{KBO} + S_{EKOLF} + S_{LDF} + S_{AKE} + S_{EKOLF} + S_{OCL},$$
$$2(S_{AKB} + S_{OBC} + S_{OLD}) = 2 \cdot S_{EKOLF}.$$

Taigi $S_{EKOLF} = S_{AKB} + S_{OBC} + S_{OLD}$.



2 pav.



3 pav.

9. Trikampis ABC (žr. 3 pav.)yra lygiakraštis, įbrėžtas į kūgio pagrindą, ΔASC – taip pat lygiakraštis (jis yra kūgio pjūvis), SO – kūgio aukštinė, $AC = a$, OB – kūgio pagrindo spindulys. Reikia rasti $S_{\text{kūgio}}$.

$$BD = \frac{a\sqrt{3}}{2} = SD,\ OD = \frac{a\sqrt{3}}{6},\ OB = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad (OB = r).$$

$$SO^2 = SD^2 - DO^2,\ SO^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{12} = \frac{2a^2}{3},\ SO = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$
$$(SO = H).$$

$$S_{\text{kūgio}} = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a^2}{3} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{27}.$$

$$Ats.: \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{27}.$$

10. Pirmąją lygtį pakėlę kvadratu ir atėmę antrąją lygtį, gauname

$$x\,y=\frac{3}{2}a^2-3a+2\,.$$

Raskime galimų a reikšmių aibę, kurioje reikia ieškoti trinario $\frac{3}{2}a^2-3a+2,$ taigi ir sandaugos $x\,y,$ mažiausios reikšmės.

Kadangi duotoji lygčių sistema yra ekvivalenti lygčių sistemai:

$$\begin{cases} x+y=2a-1, \\ x\,y=\frac{3}{2}a^2-3a+2, \end{cases}$$

tai pagal Vijeto teoremą galima imti tik tas parametro a reikšmes, su kuriomis x ir y yra kvadratinės lygties $z^2-(2a-1)z+\frac{3}{2}a^2-3a+2=0$ sprendiniai. Ši lygtis turi realiuosius sprendinius, kai $D=(2a-1)^2-4\left(\frac{3}{2}a^2-3a+2\right)\ge 0$, t.y. kai $2-\frac{\sqrt{2}}{2}\le a\le 2+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Taigi reikia rasti, su kuriomis a reikšmėmis kvadratinis trinaris $\frac{3}{2}a^2-3a+2$ intervale $\left[2-\frac{\sqrt{2}}{2};\ 2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ įgyja mažiausią reikšmę. Šio trinario grafikas yra parabolė, kurios šakos eina į viršų, o viršūnė (1; 0,5) (kai $a=1$) yra intervalo $\left[2-\frac{\sqrt{2}}{2};\ 2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ kairėje pusėje, todėl kvadratinis trinaris mažiausią reikšmę įgyja su $a=2-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ats.: $a=2-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Stačiakampio gretasienio briaunų ilgius pažymėkime a, b ir c. Tarkime, kad briaunų ilgiai padidinti p %. Tada

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)b\left(1+\frac{p}{100}\right)c\left(1+\frac{p}{100}\right)=2abc\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(1+\frac{p}{100}\right)^3=2\Rightarrow\left(1+\frac{p}{100}\right)=\sqrt[3]{2}\Rightarrow p=\left(\sqrt[3]{2}-1\right)100.$$

Ats.: Kiekvienos briaunos ilgį reikia padidinti $\left(\sqrt[3]{2}-1\right)100\ \%\approx 25{,}99\ \%$.

2. Tarkime, kad prekės kaina be PVM lygi a, o pradinis PVM yra p %. Tada

$$\begin{cases} a\left(1+\dfrac{p}{100}\right)=599, \\ a\left(1+\dfrac{p-1{,}5}{100}\right)=591{,}39 \end{cases}\Rightarrow\frac{1+\dfrac{p}{100}}{1+\dfrac{p-1{,}5}{100}}=\frac{599}{591{,}39}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(1+\frac{p}{100}\right)591{,}39=\left(1+\frac{p-1{,}5}{100}\right)599\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}0761p=1{,}375\Rightarrow p=18{,}068331\approx 18{,}07.$$

Ats.: 18,07 %.

3. Vieno mėnesio palūkanos lygios

$$75\,000\cdot\frac{2{,}8}{100}\cdot\frac{1}{12}=175\ \text{(Lt)}.$$

Ats.: Turi reikalauti 175 Lt mėnesinės nuomos.

4. Tarkime, pinigus reikia padėti į banką t metams. Tada

$$2000\cdot 0{,}03\cdot t=90\Rightarrow t=\frac{90}{60}=1{,}5\,.$$

Ats.: Pinigus reikia padėti į banką 1 metams 6 mėnesiams.

5. . Palūkanų reikia mokėti

$$26\,500 - 25\,000 = 1\,500 \text{ (Lt).}$$

Jeigu kreditas buvo suteiktas su p paprastaisiais procentais, tai

$$25\,000 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{2} = 1\,500 \Rightarrow 125p = 1\,500 \Rightarrow p = 12.$$

Ats.: Palūkanų reikėjo mokėti 12 %..

6. Pagal sudėtinių procentų sukauptosios vertės formulę dabar indėlio vertė lygi

$$A(5) = 120\,000(1+0{,}04)^5 = 120\,000 \cdot 1{,}2166529 \approx 145998{,}35 \text{ (Lt).}$$

Ats.: Dabartinė indėlio vertė lygi 145998,35 Lt.

7. Periodas yra ketvirtadalis metų, todėl periodo palūkanų norma lygi $2{,}4\,\% : 4 = 0{,}6\,\%$. Periodų yra $4 \cdot 2 = 8$. Sudėtinių procentų formulėje žinome:

$$A(8) = 5\,000, \quad i = 0{,}006 \quad \text{ir} \quad n = 8.$$

Todėl padėtoji suma lygi

$$k = 5\,000 : (1+0{,}006)^8 \approx 5\,000 : 1{,}04902 \approx 4\,766{,}35 \text{ (Lt).}$$

Ats.: Reikia padėti į banką 4766,35 Lt..

8. Pradėdami nuo lygybių dešiniųjų pusių randame, kad

a) $$s_{n\rceil i} + s_{k\rceil i}(1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{i} + \frac{(1+i)^k - 1}{i}(1+i)^n =$$

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{i} + \frac{(1+i)^{n+k} - (1+i)^n}{i} = \frac{(1+i)^{n+k} - 1}{i} = s_{n+k\rceil i};$$

b) $$a_{n\rceil i} + a_{k\rceil i}(1+i)^{-n} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + \frac{1-(1+i)^{-k}}{i}(1+i)^{-n} =$$

$$= \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + \frac{(1+i)^{-n} - (1+i)^{-(n+k)}}{i} = \frac{1-(1+i)^{-(n+k)}}{i} =$$

$$= a_{n+k\rceil i}.$$

9. Laipsniškai grąžinant kreditą periodinės įmokos lygios

$$R = \frac{B}{a_{n\rceil i}}.$$

Čia $B = 30\,000$, $n = 4 \cdot 4 = 16$, $i = 15\,\% : 4 = 3{,}75\,\%$. Todėl periodinės įmokos lygios

$$R = \frac{30\,000}{a_{16\rceil 0{,}0375}} \approx \frac{30\,000}{11{,}8702} \approx 2527{,}34.$$

Ats.: Periodinės įmokos lygios 2527,34 Lt.

10. Iš kredito laipsniško grąžinimo įmokų formulės randame, kad paskola lygi

$$B = R\,a_{n\rceil i}.$$

Čia $R = 100$, $n = 12 \cdot 4 = 48$, $i = 12\,\% : 12 = 1\,\%$, todėl paskola lygi

$$B = 100\,a_{48\rceil 0{,}01} = 100 \cdot \frac{1 - 1{,}01^{-48}}{0{,}01} \approx 100 \cdot 37{,}97396 = 3797{,}396 \approx 3797{,}40$$

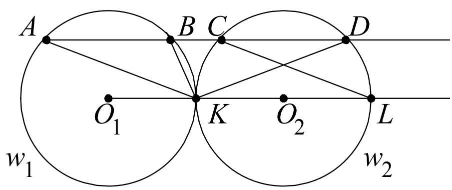
(Lt).

Ats.: Paskola lygi 3797,40 Lt.

ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Sakykime, kad w_1 ir w_2 – duotieji apskritimai. Nagrinėkime lygiagretųjį postūmį vektoriumi $\overrightarrow{AC}$, kuriuo taškas A atvaizduojamas į tašką C. Kadangi $AB=CD$, tai $AC=BD$ ir taškas B atvaizduojamas į tašką D. Taško K vaizdas yra taškas L, esantis apskritime w_2. Kadangi atkarpos AK vaizdas yra atkarpa CL, tai $AK \| CL$. Todėl

$\angle AKC = \angle LCK$.



1 pav.

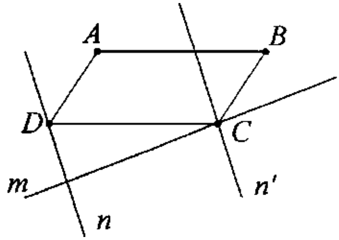
Bet $\angle LCK = 90^\circ$.

Ats.: 90°.

2. Kadangi $ABCD$ – lygiagretainis, tai $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (2 pav.).

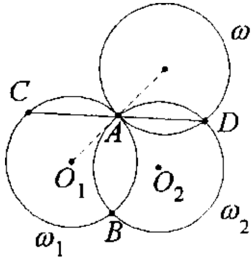
Atlikime lygiagretųjį postūmį vektoriumi $\overrightarrow{AB}$, juo taškai A ir D atvaizduojami į taškus B ir C atitinkamai. Jei tiesė n' – tiesės n vaizdas, tai taško D vaizdas – taskas C yra tiesėje n'. Bet taškas C pagal sąlygą yra tiesėje m. Kadangi tiesės m ir n nelygiagrečios, tai ir tiesės m ir n' nelygiagrečios (nes $n \| n'$). Taigi tiesės m ir n' kertasi taške C. Nubrėžę tiesę, einančią per tašką C ir lygiagrečią su tiese AB, gausime tašką D.

Jei $ABC'D'$ – kitas lygiagretainis ir $C'' \in m$, $D' \in n$, tai $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D'C'}$. Lygiagrečiuoju postūmiu vektoriumi $\overrightarrow{AB}$, taškas D' atvaizduojamas į tašką C', o tiesė n – į tiesę n''. Taigi $C' \in n'$ bet $C' \in m$, todėl $C' \in n' \cap m$. Bet tiesės m ir n kertasi tik taške C, todėl taškai C ir C' sutampa. Todėl egzistuoja vienintelis lygiagretainis $ABCD$, tenkinantis uždavinio sąlygą.



2 pav.

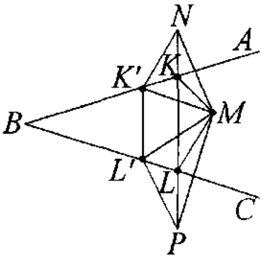
3. Jei atkarpos AC ir AD lygios, tai taškas A yra atkarpos CD vidurys, todėl centrine simetrija taško A atžvilgiu taškas C atvaizduojamas į tašką D. Jei ω'_1 – apskritimo ω_1 vaizdas, tai taškas D yra apskritime ω'_1. Bet $D \in \omega_2$ kertasi taške A, tai jie kertasi ir kitame taške D. Tiesė DA ieškomoji. Jei $C'D'$ – kita atkarpa, kurios galai yra duotuosiuose apskritimuose, o vidurio taškas – taškas A, tai taškai C' ir D' yra simetriški taško A atžvilgiu. Todėl $D' \in \omega'_1$ ir $D' \in \omega_2$ – taigi D' yra apskritimų ω'_1 ir ω_2 sankirtos taškas. Bet apskritimai ω'_1 ir ω_2 kertasi tik taškuose A ir D, todėl taškai D ir D' sutampa.



3 pav.

Ats.: Visuomet egzistuoja vienintelė uždavinio sąlygą tenkinanti tiesė.

4. Sakykime, kad taškai N ir P yra simetriški taškui M kampo kraštinių AB ir CB atžvilgiu. Tuomet suma $MK+KL+LM$ yra lygi $KN+KL+LP$ (nes $KM = KN$, $LP = LM$). Bet pastaroji suma mažiausia, kai taškai N, K, L ir P yra vienoje tiesėje. Todėl taškai K ir L yra tiesės NP ir kampo kraštinių sankirtos taškai.

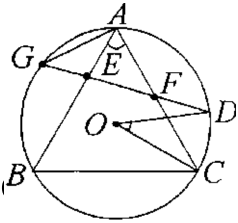


4 pav.

Ats.: Jei taškai N ir P – simetriški taškui M tiesių AB ir CB atžvilgiu, tai $K = NP \cap AB$, $L = NP \cap BC$.

5. Nagrinėjame posūkį apie tašką O 30° kampu, kuriuo taškas C atvaizduojamas į tašką D. Kadangi šiuo posūkiu apskritimas atvaizduojamas į save, o $CA=DG$, tai taškas A atvaizduojamas į tašką G, t.y. $\cup AG = 30°$. Be to, pagal posūkio savybę (žr. 2 užduotį) kampas AFG tarp tiesių AC ir GD lygus posūkio kampui, t.y. 30°. Tuomet

$\angle AEF = 180^\circ - \angle A - \angle AEF = 180^\circ - 30^\circ - 3$



5 pav.

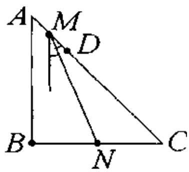
todėl $\cup AC = 150°$ ir $\cup AD = 120°$. Iš čia

$\angle AGD = 60^\circ$, t.y. trikampio AEG du kampai lygūs 60°, todėljis lygiakraštis.

Ats.•.60^0, 60^0, 60^0.

6. Kadangi atkarpos DC ir AB lygios ir nelygiagrečios, tai egzistuoja slenkančioji simetrija, kuria taškai A ir B atvaizduojami atitinkamai į taškus D ir C, šios simetrijos ašis yra tiesė, jungianti atkarpų AD ir BC vidurio taškus, t. y. tiesė MN. Iš slenkančiosios simetrijos apibrėžimo išplaukia, kad simetriškos atkarpos AB ir DC su simetrijos ašimi MN sudaro lygius kampus. Iš čia

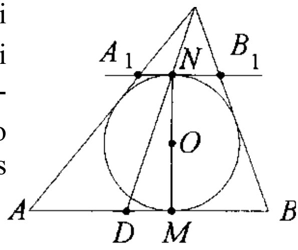
$\angle CMN = \frac{1}{2}\angle CAB = 20^\circ$.



6 pav.

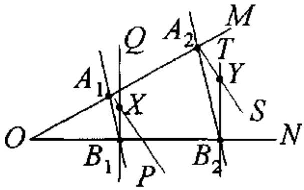
Ats.: 20°.

7. Per tašką N nubrėžkime apskritimui liestinę A_1B_1 ir nagrinėkime homotetiją, kurios centras – taškas C ir ja taškas A_1 atvaizduojamas į tašką A. Kadangi tiesė CB atvaizduojama į save, o $A_1B_1 \parallel AB$, tai taškas B_1 atvaizduojamas į tašką B. Todėl tiesė A_1B_1 atvaizduojama į tiesę AB, tai taško N vaizdas yra taškas D. Kadangi $CA_1 + A_1N = CB_1 + B_1N$ (šios sumos lygios apskritimo liestinių, nubrėžtų iš taško C, ilgiui), tai pagal homotetijos savybes teisinga lygybė $CA + AD = CB + BD$.



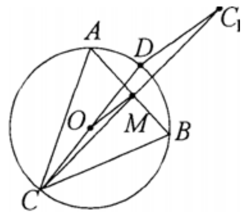
7 pav.

8. Nagrinėjame homotetiją, kurios centras – taškas O ir kuria taškas A_1 atvaizduojamas į tašką A_2. Tuomet taško B_1 vaizdas yra taškas B_2, nes tiesės A_1B_1 ir A_2B_2 lygiagrečios. Kadangi tiesės A_1P ir A_2S lygiagrečios, tai tiesė A_1P atvaizduojama į tiesę A_2S; analogiškai, tiesė B_1Q atvaizduojama į tiesę B_2T. Taigi tiesių A_1P ir B_1Q sankirtos taškas X atvaizduojamas į tiesių A_2S ir B_2T sankirtos tašką Y, t. y. taškai O, X ir Y yra vienoje tiesėje.



8 pav.

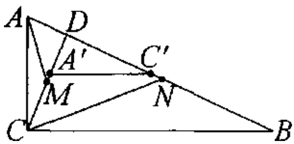
9. Nagrinėjame homotetiją, kurios centras C, o koeficientas $\frac{1}{2}$. Kadangi $OD = CO$, tai taško D vaizdas yra taškas O. Jei atkarpos AB vidurio taškas yra taškas M, tai jis yra taško C_1 vaizdas. Taigi tiesė C_1D atvaizduojama į tiesę OM, todėl šios tiesės lygiagrečios. Bet tiesė OM yra trikampio ABC kraštinės AB vidurio statmuo, todėl $OM \perp AB$ ir $C_1D \perp AB$.



9 pav.

Ats.: 90°.

10. Pasukame plokštumą apie tašką D 90° kampu, taško A vaizdas A' yra tiesėje $DC,$ o taško C vaizdas C' – tiesėje DB. Kadangi trikampiai ACD ir CBD panašūs, o ACD ir $A'C'D$ lygūs, tai tnkampiai $DA'C'$ ir DCB homotetiški, taškas D – homotetijos centras. Taigi homotetiniu posūkiu, kurio centras – taškas $D,$ kampas lygus 90°, o koeficientas $k = \dfrac{DC}{AD}$, trikampis ACD atvaizduojamas į trikampį CBD. Atliekant homotetinį posūkį, pusiaukraštinė AM atvaizduojama į pusiaukraštinę CN; kadangi posūkis tiesę pasuka 90° kampu, o homotetija tiesę atvaizduoja į lygiagrečią su ja tiesę, tai kampas tarp tiesės AM ir jos vaizdo CN yra lygus 90°.



10 pav.

Ats.: 90°.

TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tarkime $\sqrt{3x^2 - 4x + 3} = a \geq 0$. Išsiaiškinsime, su kuriomis a reikšmėmis gauta lygtis turės sprendinių. Surastosios a reikšmės ir sudarys funkcijos $f(x)$ reikšmių sritį, kai $x \in D(f(x))$.

Lygtis $\sqrt{3x^2 - 4x + 3} = 0$ kvadratinė. Ji turės sprendinių, kai $D = 12a^2 - 20 \geq 0$:

$$a^2 - \frac{5}{3} \geq 0 \Rightarrow a \in \left(-\infty;\ -\sqrt{\frac{5}{3}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{5}{3}};\ +\infty\right).$$

Tačiau $a \geq 0$, todėl $E\big(f(x)\big) = \left[\sqrt{\dfrac{5}{3}};\ +\infty\right)$.

Ats.: $\left[\sqrt{\dfrac{5}{3}};\ +\infty\right)$.

2. Ieškosime funkcijos $f(x)$ reikšmių sritį. Tarę, kad $\lg(2 - x^2) - 1$ įgyja reikšmes lygias a, išsiaiškinsime, su kuriomis a reikšmėmis lygtis $\lg(2-x^2)-1=a$ turi sprendinių, kai $x\in D\big(f(x)\big)$.

$$\lg(2-x^2)=1+a \Rightarrow 2-x^2=10^{1+a}.$$

Čia pastebime, kad

$$2-10^{1+a}\geq 0 \Rightarrow 10^{1+a}\leq 2.$$

Logaritmuojame pagrindu 10:

$$1+a\leq \lg 2 \Rightarrow a\leq \lg 2-1 \Rightarrow a\leq \lg 0{,}2.$$

Vadinasi $E\big(f(x)\big)=\big(-\infty;\ \lg 0{,}2\big]$.

$$f_{\max}=\lg 0{,}2.$$

Ats.: $\lg 0{,}2$.

3. Tegu $x+\dfrac{1}{x}+1=a$, surasime visas a reikšmes, su kuriomis gauta lygtis turi sprendinių, kai $x\in D\big(f(x)\big)$. Pertvarkę gauname lygtį

$$x^2+(1-a)x+1=0,$$

kuri turės sprendinių, kai $D=(1-a)^2-4\geq 0$. Tuomet

$$(1-a)(a-3)\geq 0 \Rightarrow a\in\big(-\infty;\ -1\big]\cup\big[3;\ +\infty\big)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow E\big(f(x)\big)=\big(-\infty;\ -1\big]\cup\big[3;\ +\infty\big).$$

Didžiausia neigiama funkcijos reikšmių srities reikšmė yra –1, o mažiausia teigiama yra 3. Todėl $|-1-3|=4$.

Ats.: 4.

4. Analizuoti pradėkime nuo logaritminės funkcijos

$$f(x)=\lg(9+2x-x^2).$$

Kadangi trinaris $9+2x-x^2$ didžiausią reikšmę 10įgyja, kai $x=1$, o funkcija $\lg y$ – didėjanti, tai su $x=1$ ir funkcijos $f(x)$ reikšmė bus didžiausia, t.y. $f_{\max}=f(1)=\lg 10=1$.

Išsiaiškinsime, kokias reikšmes gali įgyti reiškinys $\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Tarę, kad $\dfrac{2x}{x^2+1}=a$, panagrinėkime, su kuriomis a reikšmėmis ta lygtis turi sprendinių:

$$ax^2 - 2x + a = 0 \Rightarrow D = 4 - 4a^2 \geq 0 \Rightarrow a \in [-1; 1].$$

Vadinasi $E\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right) = [-1; 1]$, o reiškinio , t.y. $\dfrac{2x}{x^2+1}$, didžiausia reikšmė lygi 1. Nesunku patikrinti, jog ši reikšmė įgyjama, kai $x = 1$. Pagaliau $\cos^2(1-x) \in [0; 1]$.

Nesunku pastebėti, kad $\cos^2(1-x) = 1$, kai $x = 1$.

Iš atliktos uždavinio analizės matome, kad duotos nelygybės sprendinys yra tik vienas, t.y. $x = 1$.

Ats.:¨$\{1\}$.

5. Panagrinėkime lygties kairiosios ir dešiniosios pusės reiškinių reikšmių sritis. Kairiosios pusės funkcijos $y = \sin\dfrac{\pi x}{2}$ reikšmių sritis yra:

$$E\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right) = [-1; 1].$$

Dešiniosios lygybės pusės reikšmių sritį ieškosime reiškinį $6^{-x} + 6^x$ pažymėję *a*. Išsiaiškinsime, su kuriomis *a* reikšmėmis lygtis $6^{-x} + 6^x = a$ turi sprendinių, kai $x \in D(6^{-x} + 6^x)$. Kadangi $6^{-x} > 0$ ir $6^x > 0$, tai $a > 0$. Sprendžiame lygtį:

$(6^x)^2 - 6^x \cdot a + 1 = 0 \Rightarrow D = a^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow (a-2)(a+2) \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Tačiau $a > 0$, todėl $E(6^{-x} + 6^x) = [2; +\infty)$. Tuomet

$$E(6^{-x} + 6^x - 1) = [1; +\infty).$$

$$E_{\text{d.}}[2 - 1; +\infty) = [1; +\infty).$$

Kairiosios ir dėšiniosios lygybės pusės reikšmių sritys turi tik vieną bendrą elementą, t.y. 1. Tačiau $\sin\dfrac{\pi x}{2} = 1$, kai $x = 1$. Tuo tarpu, su $x = 1$ reiškinys tai $6^{-x} + 6^x - 1 \neq 1$. Vadinasi, lygtis

$\sin\dfrac{\pi x}{2} = 6^{-x} + 6^{x} - 1$ sprendinių neturi.

Įrodyta.

6. Duotosios lygties kairiosios pusės ir dešiniosios pusės reiškinių reikšmių sritys yra $E(\{x\}) = [0; 1)$ ir $E(3^{\{x\}}) = [1; 3)$. Šios aibės bendrų elementų neturi, todėl tokios x reikšmės, kuri tiktų lygybei $3^{\{x\}} = \{x\}$ nėra.

Ats.: nėra.

7. Funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritis nusakoma nelygybių sistema:

$$\begin{cases} [x] \neq 0, \\ 1 - x^2 \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \notin [0; 1), \\ x \in [-1; 1]. \end{cases}$$

Vadinasi, sistemos sprendiniai yra intervalo [–1; 0) skaičiai ir skaičius 1.

Ats.: $[-1; 0) \cup \{1\}$.

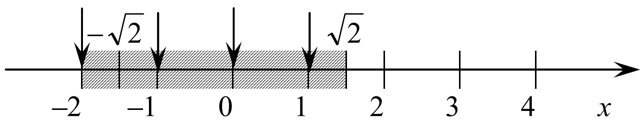
8. Reiškinį $\sin x + \cos x$ pertvarkome

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(x - \alpha).$$

Tuomet

$$E(\sin x + \cos x) = E(\sqrt{2}\cos(x - \alpha)) = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}].$$

Aibės $E([\sin x + \cos x])$ elementus lengvai surasime pasinaudoję brėžiniu



Vadinasi, $E([\sin x + \cos x]) = \{-2; 1; 0; 1\}$.

Funkcijos $2^{|\cos x|}$ reikšmių sritis – intervalas [1; 2]. Iš čia matyti, kad kairiosios nelygybės pusės reikšmės mažesnės už dešiniosios pusės reikšmes, o sutampa, kai $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$, t. y. $[1] \le 2^0$ nelygybė teisinga.

Įrodyta.

9. Kadangi $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$, tai $f\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = f(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} - 2} = \frac{x}{1-2x}$ ($x \ne 0$, $x \ne \frac{1}{2}$). Išspręskime lygtį: $\frac{x}{1-2x} = -\frac{2}{3} \Rightarrow 3x = -2 + 4x \Rightarrow x = 2$.

Vadinasi ir $f(2) = -\frac{2}{3}$, t. y. $-\frac{2}{3} \in E(f(x))$.

Ats.: taip.

10. Iš antrosios lygybės pastebime:

$$\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1, \\ y = 5 + |x-1|. \end{cases}$$

Iš antrosios lygties:

$$y - 5 = |x-1| \ge 0 \Rightarrow y \ge 5 \Rightarrow |y-5| = y - 5.$$

Dabar pirmoji sistemos lygtis bus tokia

$$|x-1| + y - 5 = 1 \Rightarrow |x-1| = 6 - y.$$

Taigi turime spręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} |x-1| = 6 - y, \\ |x-1| = y - 5. \end{cases}$$

Iš čia:

$y - 5 = 6 - y \Rightarrow 2y = 11 \Rightarrow y = 5{,}5$. $|x-1| = 0{,}5$. Vadinasi, $|x-1| = 6 - 5{,}5 \Rightarrow |x-1| = 0{,}5$. Iš čia $x = 0{,}5$ arba $x = 1{,}5$. Taigi duotoji sistema turi du sprendinius: –(0,5; 5,5) ir (1,5; 5,5).

Ats.: (0,5; 5,5); (1,5; 5,5).

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Įstatę binominių koeficientų išraiškas gauname

$$\frac{C_n^{m+1}}{C_n^m} = \frac{n!\,m!\,(n-m)!}{n!\,(m+1)!\,(n-m-1)!} = \frac{n-m}{m+1}\,.$$

Nustatykime, kada $C_n^{m+1} > C_n^m$, t. y. kada didėjant m koeficientai C_n^m didėja:

$$\frac{n-m}{m+1} > 1,\quad 2m < n-1,\quad m < \frac{n-1}{2}\,.$$

Kai $m > \dfrac{n-1}{2}$, tai $C_n^{m+1} < C_n^m$.

Jei n yra nelyginis. t. y. $n = 2k+1$, tai iš lygybės $\dfrac{n-m}{m+1} = 1$ gauname, kad $m = \dfrac{n-1}{2} = k$, taigi nelyginio n atveju yra du lygūs koeficientai:

$$C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n+1}{2}}\,.$$

Didžiausią C_n^m reikšmę gauname, kai $m = \left[\dfrac{n-1}{2}\right] + 1$.

Kai n nelyginis $\left[\dfrac{n-1}{2}\right] + 1 = \dfrac{n-1}{2} + 1 = \dfrac{n+1}{2}$.

Taigi šiuo atveju yra du didžiausi koeficientai $C_n^{\frac{n-1}{2}}$ ir $C_n^{\frac{n+1}{2}}$.

2. Lygybės gaunamos atlikus nesudėtingus pertvarkius:

$$C_n^m C_m^k = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \cdot \frac{m!}{k!\,(m-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!\,(n-m)!} = C_n^k C_{n-k}^{m-k}\,.$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{n}{m}\cdot\frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!} =$$
$$= \frac{n}{m}\cdot\frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-1-m+1)!} = \frac{n}{m}C_{n-1}^{m-1}.$$

3. Kai bent vienas iš skaičių a ir b lygus nuliui, lygybė yra triviali. Taigi tarkime, kad $a \neq 0$, $b \neq 0$ ir įstatykime į lygybę (2) $x = \dfrac{b}{a}$:

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + x^n,$$
$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = 1 + C_n^1 \frac{b}{a} + C_n^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \ldots + C_n^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Abi puses padauginę iš a^n ir pasinaudoję tuo, kad $a^n\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^n = (a+b)^n$ gausime lygybę, kurią reikėjo įrodyti.

4. Įstatę į lygybę

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + x^n$$

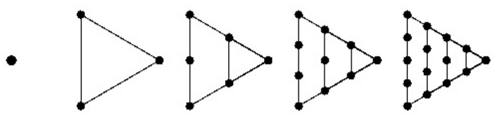
$x = 1$, gauname

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + 1 = 2^n,$$

o įstatę $x = -1$

$$1 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n = 0.$$

5. n-asis trikampis skaičius T_n lygus taškų, pažymėtų n-ajame trikampyje skaičiui



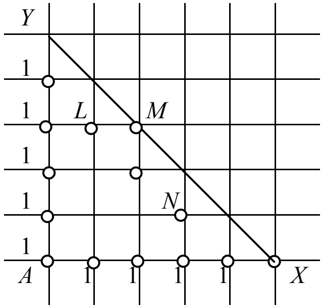
1 pav.

Nesunku pastebėti, kad

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n+1}{2}n = C_{n+1}^2.$$

Taigi trikampiai skaičiai yra Paskalio trikampyje ant tiesės $m = 2$.

6. Akivaizdu, kad į kvadratėlių viršūnes, esančias ant tiesių AX ir AY veda tik po vieną trumpiausią kelią, taigi šios viršūnės pažymėtos vienetais kaip ir Paskalio trikampio kraštinių taškai.



Susitarkime n-osios įstrižainės taškus numeruoti skaičiais 0, 1, … , n, pradedant nuo apačios. Žymėkime $K_{n,\,m}$ trumpiausių kelių, vedančių iš A į m-ąjį n-osios įstrižainės tašką skaičių. Tada $K_{n,\,0} = 1$, $K_{n,\,n} = 1$.

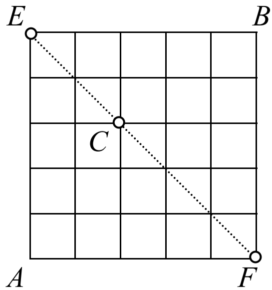
Nagrinėkime m-ąjį n-osios įstrižainės tašką M. Trumpiausieji keliai į šį tašką veda arba per tašką N (m–1-ąjį n–1-osios įstrižainės tašką) arba per tašką L (m-ąjį n–1-osios įstrižainės tašką). Taigi

$$K_{n,\,m} = K_{n-1,\,m-1} + K_{n-1,\,m}.$$

Matome, kad $K_{n,\,0} = C_n^0$, $K_{n,\,n} = C_n^n$, o kiti dydžiai $K_{n,\,m}$ skaičiuojami naudojantis tuo pačiu sąryšiu kaip ir dydžiai C_n^m. Taigi turi būti $K_{n,\,m} = C_n^m$. Iš esmės lygybę įrodėme matematinės indukcijos būdu tik samprotavimus išdėstėme nevisiškai griežtai.

7. Jeigu kvadratą papildysime iki plokštumos ketvirčio, padalyto kvadratėliais kaip 6 uždavinyje, tai taškas B bus $2n$-oje įstrižainėje, o jo numeris, numeruojant įstrižainės taškus skaičiais 0, 1, … , $2n$ nuo apačios bus lygus n. Taigi pasinaudoję 6 uždaviniu gauname, kad trumpiausių kelių iš A į B skaičius lygus C_{2n}^n.

8. Kvadrato su viršūnėmis taškuose A ir B įstrižainė, atskirianti šiuos taškus yra n-oji plokštumos ketvirčio, padalyto kvadratėliais įstrižainė. Į jos taškus iš A veda atitinkamai C_n^0, C_n^1, … , C_n^n trumpiausių kelių. Nagrinėkime trumpiausią kelią iš A į B, einantį per m-ąjį ($m = 0, 1, \ldots, n$)



įstrižainės EF tašką C. Iš taško A į C veda C_n^m trumpiausių kelių, iš taško B į C – irgi C_n^m trumpiausių kelių. Vadinasi, iš viso galime sudaryti $C_n^m \cdot C_n^m = \left(C_n^m\right)^2$ trumpiausių kelių, einančių iš A į B per tašką C. Tada iš viso trumpiausių kelių iš A į B bus

$$C_{2n}^n = \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^{n-1}\right)^2 + \left(C_n^n\right)^2 .$$

9. Jeigu kvadratą su viršūnėmis A ir B papildysime iki kvadratėliais padalyto plokštumos ketvirčio, tai kvadratėlių, esančių kraštinėje CD viršūnės bus atitinkamai n–1-oje, n-oje, … , $2n$–1-oje įstrižainėse, o visų jų eilės numeriai bus tie patys – n–1. Vadinasi į šios atkarpos taškus veda atitinkamai C_{n-1}^{n-1}, C_n^{n-1}, C_{n+1}^{n-1}, … , C_{2n-1}^{n-1} trumpiausių kelių. Kadangi iš bet kurio kraštinės CD taško į B nebegrįžtant į CD galime nukeliauti vienu keliu, tai kelių skaičiui teisinga lygybė

$$C_{2n}^n = C_{n-1}^{n-1} \cdot 1 + C_n^{n-1} \cdot 1 + C_{n+1}^{n-1} \cdot 1 + \ldots + C_{2n-1}^{n-1} \cdot 1 =$$
$$= C_{n-1}^{n-1} + C_n^{n-1} + C_{n+1}^{n-1} + \ldots + C_{2n-1}^{n-1} .$$

10. Panašiai kaip pateiktame pavyzdyje, n ilgio atkarpą A_0A_n padalykime taškais $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ į vienetinio ilgio atkarpas A_0A_1, A_1A_2, …, $A_{n-1}A_n$. Parinkę iš aibės $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}\}$ m–1-ą tašką A_{i_1}, A_{i_2}, … $A_{i_{m-1}}$ $(1 \le i_1 < \ldots < i_{m-1} \le n-1)$ gausime atkarpos A_0A_n skaidinį atkarpomis:

$$A_0A_{i_1} + A_{i_1}A_{i_2} + \ldots + A_{i_{m-1}}A_n = A_0A_n;$$

imdami atkarpų ilgius gauname skaičiaus n skaidinį, m natūraliųjų skaičių suma:

$$n = n_1 + \ldots + n_m.$$

Kiekvieną tokį skaidinį atitinka atkarpos A_0A_n skaidinys į m atkarpų. Taigi skaidinių yra tiek, kiek yra galimybių iš n–1-o elemento aibės $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}\}$ pasirinkti m–1-ą tašką.

PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Nežinomuosius galima eliminuoti pagal tokią schemą:

1) $-L_1 + 2L_2$, $-3L_1 + 2L_3$, $-2L_1 + L_4$ $-2L_1 + L_4$:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = \ \ 4, \\ \qquad 7x_2 - 11x_3 = -4, \\ \qquad 7x_2 - 11x_3 = -2, \\ \qquad 7x_2 - 11x_3 = -1. \end{cases}$$

2) $-L_2 + L_3$, $-L_2 + L_4$:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = \ \ 4, \\ \qquad 7x_2 - 11x_3 = -4, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = \ \ 2, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = \ \ 3. \end{cases}$$

Trečioji lygtis yra $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 2$, o ketvirtoji $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3$. Nė viena iš jų neturi sprendinių, todėl ir lygčių sistemos sprendinių aibė yra tuščia.

Ats. $\varnothing$.

2. Tegu a yra viso darbo apimtis, o x, y ir z – arimo tempas (suarto lauko dalis per vieną dieną) ariant atitinkamai pirmuoju, antruoju ir trečiuoju traktoriumi. Pagal uždavinio sąlygą turi galioti šios lygybės: $x+y+z=\dfrac{a}{4}$, $x+y=\dfrac{a}{6}$ ir $x+z=\dfrac{a}{8}$ $x+z=\dfrac{a}{8}$.

Išspręskime tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y+z=\dfrac{a}{4}, \\ x+y =\dfrac{a}{6}, \\ x +z=\dfrac{a}{8}. \end{cases}$$

Antrąją lygtį L_2 pakeiskime tiesiniu dariniu L_1-L_2, o trečiąją lygtį L_3 – tiesiniu dariniu L_1-L_3. Gausime ekvivalenčią tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y+z=\dfrac{a}{4}, \\ z=\dfrac{a}{12}, \\ y=\dfrac{a}{8}. \end{cases}$$

Taigi $\dfrac{y}{z}=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}1{,}5$.

Ats. Pusantro karto.

3. Sunkvežimiui skiriamą degalų normą pažymėkime n. Tegu x yra degalų kiekis, kurio reiktų visą darbo dieną vežiojant skaldą, o y ir z – vežiojant smėlį ir plytas. Pagal uždavinio sąlygą turi galioti šios lygybės: $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y=0{,}95n$, $\dfrac{1}{7}x+\dfrac{4}{7}y+\dfrac{2}{7}z=\dfrac{708}{700}n$, $\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{8}y+\dfrac{3}{8}z=\dfrac{405}{400}n$.

Taigi reikia išspręsti tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + \quad y \qquad = 1{,}9n, \\ x + 4y + 2z = 7{,}08n, \\ 2x + 3y + 3z = 8{,}1n. \end{cases}$$

Taikykime Gauso metodą:

1) $-L_1 + L_2$, $-2L_1 + L_3$:,:

$$\begin{cases} x + \quad y \qquad = 1{,}9n, \\ \qquad 3y + 2z = 5{,}18n, \\ \qquad\quad y + 3z = 4{,}3n; \end{cases}$$

2) $-L_2 + 3L_3$:

$$\begin{cases} x + \quad y \qquad = 1{,}9n, \\ \qquad 3y + 2z = 5{,}18n, \\ \qquad\qquad 7z = 7{,}72n. \end{cases}$$

Iš pastarosios sistemos apskaičiuojame kintamųjų z, y ir x reikšmes: $z = \dfrac{772}{700}n$, $y = \dfrac{694}{700}n$, $x = \dfrac{636}{700}n$. Matome, kad visą darbo dieną vežiodamas tik skaldą vairuotojas sunaudotų $\dfrac{636}{7} = 90\dfrac{6}{7}$ procentų degalų normos.

Ats. $90\dfrac{6}{7}$ %.

4. Ieškomąjį planą pažymėkime x, o jo komponentes – planuojamus vežti žvyro kiekius iš karjerų K_i, $i = 1, 2,$ statybos objektus O_j, $j = 1, 2,$ – x_{ij}. Tada planą x galima užrašyti lentele (matrica)

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

Tegu $P(x)$ yra bendrosios transporto išlaidos planui x įvykdyti. Pagal uždavinio sąlygą šių išlaidų skaičiavimo formulė yra

$$P(x) = 20x_{11} + 40x_{12} + 30x_{21} + 25x_{22},$$

o plano x komponentės turi tenkinti tokias lygybes: $x_{11}+x_{12}=60$, $x_{21}+x_{22}=70$, $x_{11}+x_{21}=50$, $x_{12}+x_{22}=80$. Iš pradžių panagrinėkime tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12} = 60, \\ x_{21}+x_{22}=70, \\ x_{11}+x_{21}=50, \\ x_{12}+x_{22}=80. \end{cases}$$

Tarkime, kad $x_{11}=t$, $0\le t\le 50$. Tada iš pirmos ir trečios lygčių $x_{12}=60-t$ ir $x_{21}=50-t$. Toliau iš antros ir ketvirtos lygčių gauname tokį pat rezultatą: $x_{22}=20+t$ $x_{22}=20+t$. Taigi

$$x=\begin{pmatrix} t & 60-t \\ 50-t & 20+t \end{pmatrix},\ 0\le t\le 50,$$

ir

$$P(x)=20t+40(60-t)+30(50-t)+25(20+t)=4400-25t.$$

Vadinasi, $P(x)=4150$, kai $4400-25t=4150$, t.y. $t=10$. Iš čia darome išvadą, kad ieškomasis žvyro gabenimo planas yra

$$x=\begin{pmatrix} 10 & 50 \\ 40 & 30 \end{pmatrix}.$$

Aišku, kad yra ir pigesnių žvyro gabenimo planų. Pakanka pasirinkti t reikšmę iš intervalo $(10; 50]$. Pigiausias žvyro gabenimo planas yra

$$x=\begin{pmatrix} 50 & 10 \\ 0 & 70 \end{pmatrix}.$$

Jo įvykdymo kaina lygi 3150Lt.

Ats.: 1) $\begin{pmatrix} 10 & 50 \\ 40 & 30 \end{pmatrix}$; 2) taip – $\begin{pmatrix} t & 60-t \\ 50-t & 20+t \end{pmatrix}$, $10<t\le 50$.

5. Kadangi plokštumų susikirtimo taško koordinatės $(x; y; z)$ turi tenkinti kiekvienos plokštumos lygtį, tai joms rasti reikią išspręsti sistemą

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 11, \\ 2x + 5y + z = 14, \\ x + y + 2z = 7. \end{cases}$$

Taikykime Gauso metodą:

1) $-2L_1 + 5L_2$, $-L_1 + 5L_3$:

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 11, \\ 21y + 3z = 48, \\ 3y + 9z = 24. \end{cases}$$

2) $\frac{1}{3}L_2$, $\frac{1}{3}L_3$:

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 11, \\ 7y + z = 16, \\ y + 3z = 8; \end{cases}$$

3) $-L_2 + 7L_3$:

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 11, \\ 7y + z = 16, \\ 20z = 40. \end{cases}$$

Iš pastarosios sistemos randame visų trijų nežinomųjų reikšmes: $z = 2$, $y = 2$, $x = 1$.

Ats. $(1; 2; 2)$.

6. Pagal uždavinio sąlygą parabolė eina per taškus $(8; 0)$ ir $(6; -12)$, todėl jų koordinatės turi tenkinti parabolės lygtį. Kitaip tariant, turi galioti šios lygybės: $64a + 8b + c = 0$ ir $36a + 6b + c = -12$. Parabolės viršūnė $(6; -12)$ turi tokią savybę – per ją nubrėžta liestinė yra lygiagreti su abscisių ašimi O_x. Šios liestinės (tiesės) krypties koeficientas $k = y'(6)$ turi būti lygus nuliui. Skaičiuodami gauname: $y' = 2ax + b$, $y'(6) = 12a + b$. Taigi parabolės lygties parametrams *a*, *b* ir *c* turime dar vieną lygtį: $12a + b = 0$.

Tiesinių lygčių sistema

$$\begin{cases} 64a+8b+c=0, \\ 36a+6b+c=-12, \\ 12a+\ \ b \qquad =0 \end{cases}$$

turi vienintelį sprendinį: $a=3$, $b=-36$, $c=96$.

Ats. $a=3$, $b=-36$, $c=96$.

7. Trinario reikšmė pagal sąlygą taške $x=6$ lygi nuliui, o taške $x=4$ lygi –8. Gauname dvi lygtis: $36m+6n+k=0$ ir $16m+4n+k=-8$.

Trinario mx^2+nx+k minimumo taške išvestinė $2mx+n$ $2mx+n$ yra lygi nuliui, todėl gauname trečią lygtį parametrams *m*, *n* ir *k* rasti: $8m+n=0$.

Tiesinių lygčių sistema

$$\begin{cases} 36m+6n+k=0, \\ 16m+4n+k=-8, \\ \ \ 8m+\ \ n \qquad =0 \end{cases}$$

turi vienintelį sprendinį: $m=2$, $n=-16$, $k=24$.

Ats.: $m=2$, $n=-16$, $k=24$.

8. Iš pradžių pertvarkykime kairiąją lygybės pusę:

$$\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{c}{2x+1}=\frac{(2a+c)x^2+(a+2b)x+b+c}{(x^2+1)(2x+1)}.$$

Lygybė

$$\frac{(2a+c)x^2+(a+2b)x+b+c}{(x^2+1)(2x+1)}=\frac{5x^2+4x+7}{(x^2+1)(2x+1)}$$

galioja, kai $2a+c=5$, $a+2b=4$ ir $b+c=7$. Išsprendę tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2a \qquad +c=5, \\ \ a+2b \qquad =4, \\ \qquad b+c=7, \end{cases}$$

gauname $a=0$, $b=2$ ir $c=5$.

Ats.: $a=0$, $b=2$, $c=5$.

9. Sumos dėmenys yra trupmenos $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$, $k=1, 2, \dots, n.$

Išskaidykime šias trupmenas pagal formulę

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{a}{2k-1}+\frac{b}{2k+1}.$$

Atlikę veiksmus dešinėje pusėje, gausime lygybę

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{(2a+2b)k+a-b}{(2k-1)(2k+1)}.$$

Ji galioja, kai $2a+2b=0$ ir $a-b=1$. Toliau sprendžiame tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2a+2b=0, \\ a-b=1 \end{cases}$$

ir gauname vienintelį sprendinį: $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{1}{2}$. Taigi

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right),\ k=1, 2, \dots, n.$$

Įrašę šias išraiškas į skaičiuojamą sumą, turėsime:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\dots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}.$$

Ats.: $\dfrac{n}{2n+1}$.

10. Sumos dėmenys yra trupmenos $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$, $k=1, 2, \dots, n.$ Jas išskaidykime neapibrėžtųjų koeficientų metodu:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+2},$$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{(a+b+c)k^2+(3a+2b+c)k+2a}{k(k+1)(k+2)},$$

$$\begin{cases} a+\ b+c=0, \\ 3a+2b+c=0, \\ 2a \qquad\quad =1. \end{cases}$$

Iš šios tiesinių lygčių sistemos apskaičiuojame a, b ir c reikšmes: $a=\frac{1}{2}$, $b=-1$, $c=\frac{1}{2}$.

Taigi $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)$, $k=1, 2, \ldots, n.$

Įrašę šias išraiškas į tiriamąją sumą, gausime

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\,n\,(n+1)}+\frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=\frac{n\,(n+3)}{4\,(n+1)(n+2)}.$$

Ats.: $\frac{n\,(n+3)}{4\,(n+1)(n+2)}$.

ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Lentoje užrašytų skaičių sumą pažymėkime S_0, o gaunamų po kiekvieno „ėjimo“ (t.y. prie išsirinktą dviejų skaičių pridėjus po vienetą) skaičių sumas - S_1, S_2, S_3, ... Aišku, kad $S_0=55$, $S_1=57$, $S_2=59$, $S_3=61$, ... Po n „ėjimų“ turėsime sumą $S_n=55+2n$. Ji yra nelyginis skaičius, todėl negali būti skaičiaus

10 kartotinis. Taigi neįmanoma pasiekti, kad visi dešimt skaičių pasidarytų vienodi.

Ats.: Negalima.

2. Pradinė skaičių suma lygi 1. Pridėjus po vieną prie pasirinktųjų dviejų skaičių, suma bus lygi 3. Po tolesnių „ėjimų“ gaunamos sumos taip pat bus nelyginiai skaičiai. Taigi niekada nepavyks gauti skaičiui 4 kartotinės sumos (tokia ji turėtų būti, jei visi keturi skaičiai pasidarytų lygūs).

Ats.: Negalima.

3. (Pagal LJMM klausytojo Vytauto Stepanausko sprendimą). Monetas sunumeruokime: m_1, m_2, ..., m_{2004}. Operaciją, kurios metu apverčiamos trys šalia esančios monetos, sakykime, m_k, m_{k+1} ir m_{k+2}, k=1, 2, ..., 2002, pažymėkime $O(m_k)$, o šių operacijų skaičių visoje „ėjimų“ sekoje pažymėkime $s(m_k)$.

Kad pirmoji moneta būtų padėta herbu į viršų, operacijų $O(m_1)$ skaičius $s(m_1)$ turi būti nelyginis. Atliekant operaciją $O(m_1)$ apverčiama ir antroji moneta. Kad antroji moneta galiausiai būtų padėta herbu į viršų, ją galima apversti lyginį skaičių kartų. Vadinasi, operacijų $O(m_2)$ skaičius $s(m_2)$ taip pat turi būti nelyginis, nes tik tuo atveju bendras antrosios monetos vertimų skaičius $s(m_1)+s(m_2)$ bus lyginis. Operacijų $O(m_3)$ skaičius $s(m_3)$ turi būti lyginis. Po šio operacijų $O(m_1)$, $O(m_2)$ ir $O(m_3)$ ciklo pirmosios trys monetos bus padėtos herbu į viršų. Likusių 2001 monetų eilėje pirmoji (t.y. m_4) moneta bus padėta skaičiumi, o visos likusios – herbu į viršų. Operacijų $O(m_4)$ ir $O(m_5)$ skaičiai $s(m_4)$ ir $s(m_5)$ vėl turi būti nelyginiai, o operacijų $O(m_6)$ skaičius $s(m_6)$ - lyginis. Po antrojo ciklo herbais į viršų „žiūrės“ pirmosios 6 monetos, o tarp likusių 1998 monetų – tik pirmoji bus padėta skaičiumi į viršų.

Minėtąsias trijų gretimų monetų apvertimo operacijas sugrupuokime po tris:

$$(O(m_1),\ O(m_2),\ O(m_3)),\ (O(m_4), O(m_5),\ O(m_6)),\ ...,\ (O(m_{1999}),\ O(m_{2000}),\ O(m_{2001})).$$

Dabar nesunku nustatyti visų monetų padėtis. Pirmosios monetos, t.y. m_1, m_2, ..., m_{2001}, „žiūrės“ herbais į viršų, o paskutiniosios trys taip: m_{2002} – skaičiumi, m_{2003} ir m_{2004} – herbu į viršų. Vadinasi, operacijų $O(m_{2002})$ skaičius $s(m_{2002})$ turi būti nelyginis. Bet tada m_{2003} ir m_{2004} monetos liks padėtos skaičiais į viršų.

Ats.: Ne.

4. Pradinėje eilutėje raidžių *V* skaičius yra lyginis, o norimoje gauti – raidžių *V* skaičius nelyginis. Keičiant grupę *VO* grupe *OVVOVOO* ir atvirkščiai naujoje eilutėje raidžių *V* skaičius išlieka lyginis. Nutrynus raidžių grupę *OO*, raidžių *V* skaičius išlieka tas pats, taigi lyginis. Vadinasi, leistinosios raidžių keitimo operacijos turi tokią invariantinę savybę – jos nekeičia raidžių *V* skaičiaus lyginumo ekrane matomų raidžių eilutėje. Išvada aiški – neįmanoma gauti raidžių eilutės *VOVOV*.

Ats.: Negalima.

5. Tegu S_k, k=1, 2, 3, ..., yra uždegtų lempučių skaičius po k-ojo „ėjimo“. Jei $S_k = m_k$, tai

$$S_k \in \{(m_k - t) + (26 - t) : t = 1,\ ...,\ l\} =$$
$$= \{m_k + 26 - 2t : t = 1,\ ...,\ l\},\ l = \min\{m_k ; 26\}$$

(čia $\min\{m_k ; 26\}$ reiškia mažesnįjį skaičių iš dviejų – m_k ir 26). Matome, kad uždegtų lempučių skaičiaus lyginumas nesikeičia. Pradinis skaičius $S_0 = 17$ yra nelyginis, todėl ir visi kiti uždegtų lempučių skaičiai (S_1, S_2, S_3, ...) yra nelyginiai. Vadinasi, nors viena lemputė nebus užgesinta.

Ats.: Negalima.

6. Tegu S_0 yra pradinis etikečių skaičius, o S_i, i=1, 2, ..., n, yra eitikečių skaičius po i-ojo keitimo. Jei $S_i = m$, tai pagal uždavinio sąlygą $S_{i+1} = (m-1)+4 = m+3$. Vadinasi, po n keitimų Jonas turės $S_n = 15+3n$ etikečių. Tarus, kad $S_n = 113$, turėtų galioti lygybė $15+3n = 113$. Tačiau tai neįmanoma, nes skaičius $15+3n$ dalijasi iš 3, o 113 – nesidalija iš 3.

Ats.: Negalima.

7. Sektoriuose įrašytų skaičių suma yra 21 – nelyginis skaičius. Pridėjus po vienetą prie bet kurių dviejų skaičių, suma padidės dviem – lyginiu skaičiumi. Taigi po kiekvieno tokio veiksmo visuose sektoriuose įrašytų skaičių suma išliks nelyginė. Jei visuose šešiuose sektoriuose skaičiai būtų lygūs, tai suma būtų lyginė. Vadinasi, norimo rezultato neįmanoma pasiekti.

Ats.: Negalima.

8. Pradinė figūrų eilutė baigiasi kvadratėliu □, o norimoji gauti eilutė - apskritimu O. Kadangi keičiamosios figūrų grupės ir jų keitiniai baigiasi apskritimu O, tai po kiekvieno veiksmo gautoji eilutė baigsis kvadratėliu □. Vadinasi, norimosios figūrų eilutės neįmanoma gauti.

Ats.: Negalima.

9. Pradinis skaičius 21 dalijasi iš 3. Po kiekvienos operacijos gaunamas skaičius taip pat dalijasi iš trijų, o siekiamasis skaičius 3001 iš 3 nesidalija.

Ats.: Negalima.

10. Žinome, kad bet kurio natūraliojo skaičiaus n ir jo skaitmenų sumos skirtumas dalijasi iš 9. Remdamiesi šia savybe, darome išvadą, kad skaičiaus 91 negalima gauti iš kurio nors skaičiaus atimant jo skaitmenų sumą. Vadinasi, skaičių 91 galbūt galima gauti tik prie tam tikro dviženklio skaičiaus, sakykime, $\overline{xy} = 10x + y$ pridėjus jo skaitmenų sumą $x + y$. Pradėję skaičiuoti 41, gauname tokią skaičių grandinę: 41→46→56→67→80→88→104.

Dabar jau galima daryti išvadą, kad pradėjus skaičiumi 41 uždavinio sąlygoje nurodytais veiksmais neįmanoma gauti skaičiaus 91.

Ats.: Negalima.

SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Sakykime, kad geometrinės progresijos vardiklis $q > 1$. Tada $x_2 = x_1 q$, $x_3 = x_1 q^2$, $x_4 = x_1 q^3$. Pagal Vijetos teoremą:

$$\begin{cases} x_1(1+q) = 3, \\ x_1 q^2 (1+q) = 12, \\ x_1^2 q = A, \\ x_1^2 q^5 = B. \end{cases}$$

Iš pirmųjų dviejų lygčių išplaukia, kad $q = 2$. Tada $x_1 = 1$, $A = 2$, $B = 32$.

Ats.: $A = 2$, $B = 32$.

2. Sakykime r_n – ančių skaičius, nenusileidusių į n-jį ežerą. Tada $r_0 = x$ – pradinis ančių skaičius būryje, o $r_7 = 0$ (visos antys nusileido į 7 ežerą). Turime:

$$r_n = r_{n-1} - \left(\frac{r_{n-1}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{r_{n-1}}{2} - \frac{1}{2},$$

t. y. $2r_n = r_{n-1} - 1$, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Ančių skaičių x galime rasti dviem būdais.

1 būdas. Rasime nehomogeninio sąryšio $2r_n - r_{n-1} = -1$ sprendinį, tenkinantį dvi sąlygas: $r_0 = x$ ir $r_7 = 0$.

Homogeninio sąryšio $2r_n = r_{n-1}$ bendrasis sprendinys yra $u_n = \dfrac{C}{2^n}$. Nehomogeninio sąryšio $2r_n - r_{n-1} = -1$ atskirojo sprendinio ieškosime tokio pavidalo: $v_n = b$. Turime $2b - b = -1$. Iš čia $b = -1$. Taigi nehomogeninio sąryšio bendrasis sprendinys yra $r_n = u_n + v_n = \dfrac{C}{2^n} - 1$.

Kai $n = 0$, $x = \dfrac{C}{2^0} - 1$. Iš čia $C = x + 1$. Vadinasi, $r_n = \dfrac{x+1}{2^n} - 1$.

Kai $n = 7$, turime $\dfrac{x+1}{2^7} - 1 = 0$, t. y. $x = 2^7 - 1 = 127$.

Ats. Būryje buvo 127 antys.

2 būdas. Kadangi $r_7 = 0$, tai iš sąryšio $r_{n-1} = 2r_n + 1$, gauname: $r_6 = 2r_7 + 1 = 1$.

Kai $n = 6$, $r_5 = 2r_6 + 1 = 3$,

Kai $n = 5$, $r_4 = 2r_5 + 1 = 7$,

Kai $n = 4$, $r_3 = 2r_4 + 1 = 15$,

Kai $n = 3$, $r_2 = 2r_3 + 1 = 31$,

Kai $n = 2$, $r_1 = 2r_2 + 1 = 63$,

Kai $n = 1$, $r_0 = x = 2r_1 + 1 = 127$.

3. Sakykime, po *n* metų Skūpaičio banko sąskaitoje yra K_n litų. Pagal sąlygą $K_0 = 25\,000$ ir $K_n = 1{,}04 \cdot K_{n-1} + 10\,000$.

Nehomogeninės tiesinės rekurenčiosios sekos atskirojo sprendinio ieškosime tokio pavidalo:

$v_n = b$ ($P_m(n) = 10\,000$).

Turime $b = 1{,}04b + 10\,000$, t. y. $b = -250\,000$.

Kadangi homogeninės rekurenčiosios sekos $K_n = 1{,}04 \cdot K_{n-1}$ bendrasis sprendinys yra $K_n = C \cdot (1{,}04)^n$, tai nehomogeninės sekos bendrasis sprendinys yra

$$K_n = u_n + v_n = C \cdot (1{,}04)^n - 250\,000.$$

Kai $n = 0$, turime $C - 250\,000 = 25\,000$, t. y. $C = 275\,000$. Taigi po n metų Skūpaičio banko sąskaitoje bus $K_n = (1{,}04)^n \cdot 275\,000 - 250\,000$ Lt.

Kai $n = 10$, $K_{10} \approx 157\,067$ Lt.

Ats.: $K_n = (1{,}04)^n \cdot 275\,000 - 250\,000$, 157 067 Lt.

4. Sakykime, kad n-asis ministras gavo x_n monetų. Tada

$$x_n = 2x_{n-1} + n, \; x_1 = 5, \; n \geq 2.$$

Taigi gavome pirmos eilės nehomogeninį rekurentinį sąryšį. Jo atskirojo sprendinio ieškosime tokio pavidalo: $v_n = An + B$ ($P_m(n) = n$).

Turime:

$$An + B = 2(A(n-1) + B) + n$$

t. y.

$$An + B = 2An - 2A + 2B + n.$$

Iš čia gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases} A = 2A + 1, \\ B = -2A + 2B \end{cases} \Rightarrow A = -1, \; B = -2.$$

Kadangi homogeninio sąryšio $x_n = 2x_{n-1}$ bendrasis sprendinys yra $u_n = C \cdot 2^n$, tai nehomogeninio sąryšio bendrasis sprendinys yra: $x_n = u_n + v_n = C \cdot 2^n - n - 2$.

Kai $n = 1$, turime: $2C - 1 - 2 = 5$. Iš čia $C = 4$. Taigi n-asis ministras gavo:

$$x_n = 4 \cdot 2^n - n - 2 = 2^{n+2} - n - 2 \text{ auksines monetas.}$$

Kai $n = 10$, $x_{10} = 2^{12} - 10 - 2 = 4084$.

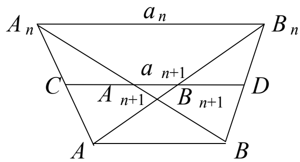
Ats.: $2^{n+2} - n - 2$, 4084.

5. Brėžinyje pavaizduota trapecija AA_nB_nB. Sakykime $A_nB_n = a_n$, o $A_{n+1}B_{n+1} = a_{n+1}$. Aišku, kad $A_1B_1 = a_1 = b$. Kadangi CD – trapecijos AA_nB_nB vidurio linija, tai

$$A_{n+1}B_{n+1} = CB_{n+1} - CA_{n+1} = \frac{1}{2}A_nB_n - \frac{1}{2}AB.$$

Taigi gavome rekurenčiąją seką:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}a, \; a_1 = b.$$



Šios sekos atskiras sprendinys $v_n = A$.

Turime $A = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}a$, iš čia $A = -a$. Kadangi homogeninės sekos $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ bendrasis sprendinys yra $u_n = C \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, tai nehomogeninės rekurenčiosios sekos bendrasis sprendinys yra

$$a_n = C \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - a.$$

Kai $n = 1$, gauname:

$\frac{1}{2}C = a + b$, t. y. $C = 2(a+b)$.

Vadinasi

$$a_n = A_nB_n = \frac{a+b}{2^{n-1}} - a,$$

o

$$a_{n+1} = A_{n+1}B_{n+1} = \frac{a+b}{2^n} - a.$$

Ats.: $A_{n+1}B_{n+1} = \frac{a+b}{2^n} - a$.

6. Sakykime r_n – medalių skaičius, likusių po n-os varžybų dienos medalių išdalinimo. Tada $r_n = r_{n-1} - n - \frac{1}{7}(r_{n-1} - n) = \frac{6}{7}(r_{n-1} - n)$. Be to, $r_0 = x$, $r_N = 0$.

Gavome pirmos eilės nehomogeninę tiesinę rekurenčiąją seką. Jos atskiro sprendinio ieškosime tokio pavidalo: $v_n = an + b$ $\left(P_m(n) = -\frac{6}{7}n\right)$.

Turime: $an + b = \frac{6}{7}(a(n-1) + b - n)$. Iš čia:

$$\begin{cases} a = \frac{6}{7}(a-1), \\ b = \frac{6}{7}(b-a); \end{cases} \Rightarrow a = -6\,;\ b = 36\,.$$

Kadangi homogeninio sąryšio $r_n = \frac{6}{7}r_{n-1}$ bendrasis sprendinys yra $u_n = C \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^n$, tai nehomogeninio sąryšio bendrasis sprendinys yra:

$$r_n = C \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^n - 6n + 36\,.$$

Kai $n = 0$, turime: $x = C - 6 \cdot 0 + 36$. Iš čia: $C = x - 36$. Gavome atskirą nehomogeninio sąryšio sprendinį:

$$r_n = (x - 36) \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^n - 6n + 36\,.$$

Kai $n = N$, turime

$(x - 36) \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^N - 6N + 36 = 0$, t. y. $x = \frac{7^N}{6^{N-1}}(N-6) + 36$.

Iš gautos formulės išplaukia, kad x yra sveikasis skaičius tik tada, kai $N - 6 \,\vdots\, 6^{N-1}$. Tai galima tik tada, kai $N - 6 = 0$, t. y. kai $N = 6$.

Kai $N = 6$, $x = 36$.

Ats. Olimpiada vyko 6 dienas ir joje buvo išdalinti 36 medaliai.

7. 1) Rekurenčiojo sąryšio $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n$ charakteringoji lygtis yra $r^2 - 4r + 4 = 0$. Jos sprendiniai $r_1 = r_2 = 2$. Taigi šio sąryšio bendrasis sprendinys yra:

$$x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot n \cdot 2^n .$$

Parametrų C_1 ir C_2 reikšmes rasime pasinaudoję pradinėmis sąlygomis.

Kai $n = 1$, $2C_1 + 2C_2 = 0$, o kai $n = 2$, $4C_1 + 8C_2 = 2$. Iš lygčių sistemos

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ 2C_1 + 4C_2 = 1 \end{cases}$$

randame $C_1 = -\frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}$. Taigi $x_n = 2^{n-1} + n \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}(n-1)$.

Ats.: $x_n = 2^{n-1}(n-1)$.

2) Šio sąryšio atskirojo sprendinio ieškosime tokio pavidalo: $v_n = an + b$.

Turime: $a(n+2) + b = a(n+1) + b + 2(an+b) + n$. Iš čia

$$\left.\begin{array}{l|l} n^1 & a = a + 2a + 1 \\ n^0 & 2a + b = a + b + 2b \end{array}\right\} .$$

Gautosios lygčių sistemos sprendinys: $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$ ir nagrinėjamojo sąryšio atskirasis sprendinys yra $v_n = -\frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$.

Homogeninio sąryšio $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$ charakteringoji lygtis yra $r^2 - r - 2 = 0$, o jo bendrasis sprendinys

$$u_n = C_1(-1)^n + C_2 \cdot 2^n .$$

Taigi duotojo sąryšio bendrasis sprendinys yra

$$x_n = C_1(-1)^n + C_2 \cdot 2^n - \frac{1}{2}n - \frac{1}{4} .$$

Konstantų C_1 ir C_2 reikšmes rasime iš pradinių sąlygų:

$$\begin{cases} -C_1 + 2C_2 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = 1, \text{ kai } n = 1, \\ C_1 + 4C_2 - 1 - \dfrac{1}{4} = -1, \text{ kai } n = 2. \end{cases}$$

Iš šių lygčių sistemos gauname:

$$C_1 = -\frac{13}{12} \text{ ir } C_2 = \frac{1}{3}.$$

$$\textit{Ats.: } x_n = (-1)^{n+1}\frac{13}{12} + \frac{1}{3}\cdot 2^n - \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}.$$

8. Kadangi $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$, tai

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = \frac{1}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - 2(-1)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + \right.$$

$$\left. = + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2} - 2(-1)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\cdot\frac{10+2\sqrt{5}}{4\cdot\sqrt{5}} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\frac{10-2\sqrt{5}}{4\cdot\sqrt{5}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right).$$

Taigi $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$.

9. Kadangi $p = \frac{3+\sqrt{17}}{2} + \frac{3-\sqrt{17}}{2} = 3$, o $q = -\frac{3+\sqrt{17}}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{17}}{2} = 2$, tai duotoji seka yra rekurenčiojo sąryšio $x_{n+2} = 3x_{n+1} + 2x_n$ sprendinys (žr. 2 teoremą).

Kadangi $x_1 = u_1 = 3$,

$$x_2 = u_2 = \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^2 = 13,$$

tai, akivaizdu, kad x_3, x_4, x_5, … yra sveikieji skaičiai. Be to, x_1 ir x_2 – nelyginiai skaičiai, tai x_3 taip pat nelyginis skaičius (lygus lyginio ir nelyginio skaičių sumai). Analogiškai įsitikiname, kad x_3, x_4, x_5, … taip pat nelyginiai skaičiai.

10. Dešimtženklis skaičius sudarytas tik iš dviejų skaitmenų 2 ir 5, kurių tarpe nėra greta dvejetų, suskirstykime į 2 klases:

1) skaičiai, kurių paskutinis skaitmuo yra 2;
2) skaičiai, kurių paskutinis skaitmuo yra 5.

Iš pirmos klasės skaičių, nubraukus paskutinius du skaitmenis 52, gauname aštuonženklius skaičius, kurių tarpe nėra greta dvejetų. Iš antros klasės skaičių, nubraukus paskutinį skaitmenį 5, gauname devynženklius skaičius, kurių tarpe nėra greta dvejetų. Akivaizdu, kad $a_{10} = a_8 + a_9$, čia a_{10} – dešimtženkliai skaičiai, a_8 – aštuonženkliai skaičiai, o a_9 – devynženkliai skaičiai, kurių tarpe nėra greta dvejetų. Ši lygybės yra gaunama iš rekurenčiojo sąryšio

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, \text{ kai } n = 10.$$

Tai Fibonačio rekurenčioji seka.

Kai $n = 1$, $a_1 = 2$ (iš dviejų skaitmenų 2 ir 5 galima sudaryti du skirtingus vienaženklius skaičius).

Kai $n = 2$, $a_2 = 3$ (trys skirtingi dviženkliai skaičiai: 25, 52 ir 55).

Dabar nesunku apskaičiuoti, kad

$$a_3 = a_1 + a_2 = 3 + 2 = 5,$$
$$a_4 = a_2 + a_3 = 3 + 5 = 8,$$
$$a_5 = a_3 + a_4 = 5 + 8 = 13,$$
$$a_6 = a_4 + a_5 = 8 + 13 = 21,$$
$$a_7 = a_5 + a_6 = 34,$$
$$a_8 = a_6 + a_7 = 55,$$
$$a_9 = a_7 + a_8 = 89,$$
$$a_{10} = 144.$$

Ats.: 144 dešimtženkliai skaičiai.

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Kvadratinė lygtis neturi realiųjų sprendinių tik tada, kai jos diskriminantas

$$D = (3^t - 2^t)^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} 6^{t-2} = 9^t - 13 \cdot 6^{t-1} + 4^t$$

yra neigiamas skaičius. Išspręskime (parametro t atžvilgiu) rodiklinę nelygybę $9^t - 13 \cdot 6^{t-1} + 4^t < 0$ ir rasime reikiamas parametro reikšmes:

$$9^t - 13 \cdot 6^{t-1} + 4^t < 0 \Rightarrow 6^t \left(\left(\frac{3}{2} \right)^t - \frac{13}{6} + \left(\frac{2}{3} \right)^t \right) < 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{3}{2} \right)^t - \frac{13}{6} + \left(\frac{2}{3} \right)^t < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \left(\frac{3}{2} \right)^t, \\ a - \frac{13}{6} + \frac{1}{a} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \left(\frac{3}{2} \right)^t, \\ 6a^2 - 13a + 6 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \left(\frac{3}{2} \right)^t, \\ \frac{2}{3} < a < \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} < \left(\frac{3}{2}\right)^t < \frac{3}{2} \Rightarrow -1 < t < 1.$$

Ats.: $t \in (-1; 1)$.

2. Iš pradžių išspręskime kvadratinę nelygybę $x^2 - 12x + m \le 0$. Ji turi realiųjų sprendinių tik tada, kai trinario $x^2 - 12x + m$ diskriminantas $D = 144 - 4m$ yra neneigiamas skaičius; taigi, kai $m \le 36$. Tada nelygybės sprendinių aibė yra intervalas $\left[6 - \sqrt{36-m};\ 6 + \sqrt{36-m}\right]$, $m \le 36$. Pagal sąlygą turi galioti dvi nelygybės: $6 - \sqrt{36-m} \le x \le 6 + \sqrt{36-m}$ ir $x \le 2$. Be to, tik vienas realusis skaičius turi tenkinti abi nelygybes. Aišku, kad taip bus tik tada, kai $6 - \sqrt{36-m} = 2$. Iš čia ir apskaičiuojame ieškomąją m reikšmę:

$$6 - \sqrt{36-m} = 2 \Rightarrow \sqrt{36-m} = 4 \Rightarrow 36 - m = 16 \Rightarrow m = 20.$$

Ats.: $m = 20$.

3. Ši lygtis turi du realiuosius sprendinius tik tada, kai trinario $x^2 - 2px - p$ diskriminantas $D = 4p^2 + 4p$ yra teigiamas skaičius; taigi, kai $p < -1$ arba $p > 0$. Sprendiniai tokie:

$$x_1 = p - \sqrt{p^2 + p} \quad \text{ir} \quad x_2 = p + \sqrt{p^2 + p}.$$

Pagal uždavinio sąlygą reikia nagrinėti sistemą

$$\begin{cases} p - \sqrt{p^2 + p} < 1, \\ p + \sqrt{p^2 + p} > 1; \quad p \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty). \end{cases}$$

Kai $p < -1$, tai nelygybė $p + \sqrt{p^2 + p} > 1$ sprendinių neturi:

$$p + \sqrt{p^2 + p} > 1 \Rightarrow \sqrt{p^2 + p} > 1 - p \Rightarrow p^2 + p > (1-p)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p > \frac{1}{3}.$$

Kai $p>0$, tai $p-\sqrt{p^2+p}<0$; taigi $p-\sqrt{p^2+p}<1$. Antrąją nelygybę užrašykime taip: $\sqrt{p^2+p}>1-p$. Lengva matyti, kad ji galioja, kai $p \geq 1$. Patyrinėkime ją, kai $0<p<1$:

$$\sqrt{p^2+p}>1-p \Rightarrow p^2+p>(1-p)^2 \Rightarrow 3p>1 \Rightarrow p>\frac{1}{3}.$$

Galutinė išvada: kvadratinės lygties $x^2-2px-p=0$ sprendiniai tenkina uždavinio sąlygas, kai $p>\frac{1}{3}$.

Ats.: $p>\frac{1}{3}$.

4. Iš pradžių nustatykime, su kuriomis parametro a reikšmėmis duotoji kvadratinė lygtis turi realiųjų sprendinių. Kitaip tariant raskime parametro a reikšmes, su kuriomis trinario

$$x^2+2(a^2-3a)x-(6a^3-14a^2+4)$$

diskriminantas $D=4(a^4-5a^2+4)$ yra neneigiamas. Gausime $a \leq -2$ arba $-1 \leq a \leq 1$, arba $a \geq 2$, t. y. $a \in (-\infty;-2] \cup [-1;1] \cup [2;+\infty)$. Lygties šaknų sumą pažymėkime $S(a)$. Pagal Vijeto teoremą $S(a)=-2(a^2-3a)=6a-2a^2$. Ieškant reiškinio $S(a)$ didžiausios reikšmės paranku išskirti pilnąjį kvadratą:

$$S(a)=6a-2a^2=-2(-3a+a^2)=-2\left(\left(a-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right)=\frac{9}{2}-2\left(a-\frac{3}{2}\right)^2.$$

Matome, kad pakanka rasti mažiausią kvadrato $\left(a-\frac{3}{2}\right)^2$ reikšmę, kai $a \in (-\infty;-2] \cup [-1;1] \cup [2;+\infty)$:

$$\min\left(a-\frac{3}{2}\right)^2=\left(1-\frac{3}{2}\right)^2=\left(2-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Taigi $\max S(a) = S(1) = S(2) = \frac{9}{2} - 2 \cdot \frac{1}{4} = 4$.

Ats.: $a \in \{1; 2\}$.

5. Funkcijos $f(x) = \frac{m}{x} - x + 7$ reikšmė kairiajame intervalo [1; 4] taške yra $f(1) = m + 6$. Kad ši reikšmė būtų didžiausia intervale [1; 4], turi galioti tokia sąlyga:

$$f(1) \geq f(x),\ 1 \leq x \leq 4,$$

t. y.

$$m + 6 \geq \frac{m}{x} - x + 7,\ 1 \leq x \leq 4.$$

Pertvarkykime nelygybę:

$$m + 6 \geq \frac{m}{x} - x + 7 \Rightarrow m \geq \frac{m}{x} - x + 1 \Rightarrow mx \geq m - x^2 + x \Rightarrow$$
$$(x-1)(m+x) \geq 0.$$

Nelygybė $(x-1)(m+x) \geq 0$ galioja su visais $x \in [1; 4]$ tik tada, kai su visais $x \in [1; 4]$ galioja nelygybė $m + x \geq 0$. Taigi $m \geq -1$.

Ats.: $m \geq -1$.

6. Žinome, kad funkcijos $g(x) = -2x^2 + x + a$ grafikas yra parabolė, kurios viršūnės taško koordinatės yra $\left(\frac{1}{4}; a + \frac{1}{8}\right)$, o šakos nukreiptos žemyn (žr. 1 pav.). Tačiau funkcijos

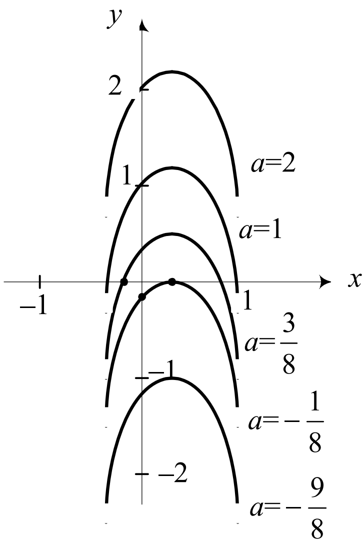
$$f(x) = |g(x)| = |-2x^2 + x + a|$$

grafikas nebūtinai yra parabolė. Apsiribokime tų grafikų fragmentais, atitinkančiais kintamojo *x* reikšmių intervalą [0; 1] (žr. 2 pav. ir 3 pav.).

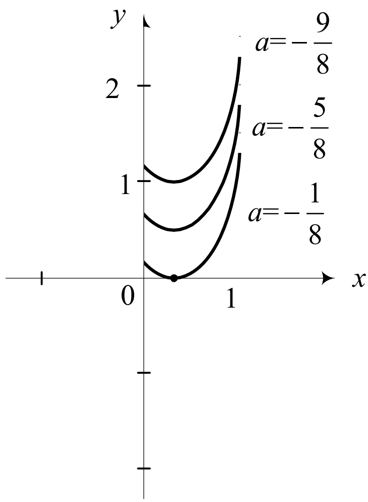
Nagrinėkime tris atvejus.

1 atvejis. Kai $g(x) = -2x^2 + x + a \geq 0$ su visais $x \in [0; 1]$, tai $f(x) = |g(x)| = -2x^2 + x + a$. Taip bus tada, kai $a \geq 2x^2 - x$ su visais $x \in [0; 1]$. Gauname $a \geq 1$.

Šiuo atveju $\max f(x) = a + \frac{1}{8}$ (tai parabolės $y = -2x^2 + x + a$ viršūnės taško ordinatė). Pats mažiausias maksimumas gaunamas su parametro reikšme $a = 1$. Taigi $\min(\max f(x)) = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$, kai $a \geq 1$.



1 pav.



2 pav.

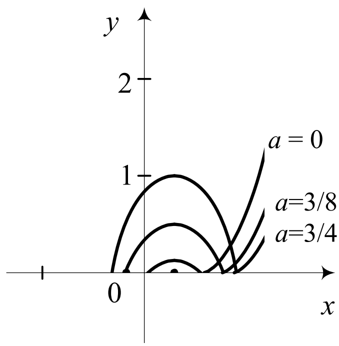
2 atvejis. Kai

$$g(x) = -2x^2 + x + a \leq 0$$

su visais $x \in [0; 1]$, tai

$$f(x) = |-2x^2 + x + a| = 2x^2 - x - a,$$

kai $x \in [0; 1]$. Apskaičiuokime galimas parametro reikšmes. Jas gausime iš sąlygos $a \leq 2x^2 - x$ su visais $x \in [0; 1]$. Mažiausioji reiškinio $2x^2 - x$ reikšmė



3 pav.

intervale [0; 1] yra lygi $-\dfrac{1}{8}$ (pasiekiama taške $x=-\dfrac{1}{4}$), todėl $a \le -\dfrac{1}{8}$.

Šiuo atveju kvadratinis trinaris $2x^2 - x - a$ didžiausią intervale [0; 1] reikšmę pasiekia, kai $x=1$ (t. y. dešiniajame intervalo taške). Taigi

$$\max f(x) = 2\cdot 1^2 - 1 - a = 1 - a\,,\ a \le -\frac{1}{8}.$$

Mažiausią šio maksimumo reikšmę gauname su parametro reikšme $a=-\dfrac{1}{8}$: $\min(\max f(x)) = 1-\left(-\dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{9}{8}$, kai $a \le -\dfrac{1}{8}$.

3 atvejis. Kai $-\dfrac{1}{8} < a < 1$, tai dalis trinario

$$g(x) = -2x^2 + x + a$$

reikšmių yra teigiamos, o dalis – neigiamos, kai $x \in [0; 1]$. Tas intervalo [0; 1] dalis nesunku nustatyti pagal trinario $-2x^2 + x + a$ šaknis: $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{1+8a}}{4}$, $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{1+8a}}{4}$. Antroji šaknis priklauso intervalui [0; 1], kai $-\dfrac{1}{8} < a < 1$. Taigi

$$f(x) = |-2x^2 + x + a| = \begin{cases} -2x^2 + x + a, & \text{kai } 0 \le x \le \dfrac{1+\sqrt{1+8a}}{4}; \\ 2x^2 - x - a, & \text{kai } \dfrac{1+\sqrt{1+8a}}{4} < x \le 1. \end{cases}$$

Didžiausiai reikšmei rasti paranku pasinaudoti grafiku (žr. 3 pav.). Iš jo matyti, kad didžiausią reikšmę intervale [0; 1] funkcija $f(x) = |-2x^2 + x + a|$, $-\dfrac{1}{8} < a < 1$, įgyja arba taške $x=\dfrac{1}{4}$, arba taške $x=1$. Taigi

$$\max f(x) = \max\left\{f\left(\frac{1}{4}\right);\ f(1)\right\} = \max\left\{a + \frac{1}{8}; 1 - a\right\}, \text{ kai } -\frac{1}{8} < a < 1.$$

Pačią mažiausią šio dydžio reikšmę gauname iš lygybės $a + \frac{1}{8} = 1 - a$, kuri galioja su $a = \frac{7}{16}$:

$$\min\left(\max f(x)\right) = \frac{7}{16} + \frac{1}{8} = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}, \text{ kai } -\frac{1}{8} < a < 1.$$

Palyginę visais trimis atvejais gautus rezultatus, darome tokią išvadą:

$$\min\left(\max f(x)\right) = \frac{9}{16}.$$

Šis rezultatas gaunamas su parametro reikšme $a = \frac{7}{16}$.

Ats.: $a = \frac{7}{16}$.

7. Kvadratiniame trinaryje $x^2 + (k+4)x + 2k + 3$ išskirkime pilnąjį kvadratą ir duotąją funkciją užrašykime taip:

$$f(x) = \left(x + \frac{k+4}{2}\right)^2 - \frac{k^2+4}{4}.$$

Toliau nagrinėkime tik pirmąjį dėmenį $\left(x + \frac{k+4}{2}\right)^2$. Jį pažymėkime $g(x)$; taigi

$$g(x) = \left(x + \frac{k+4}{2}\right)^2.$$

Aišku, kad funkcija $f(x)$ įgyja mažiausią reikšmę tame pačiame intervalo [0; 2] taške kaip ir funkcija $g(x)$. Be to,

$$\min f(x) = \min g(x) - \frac{k^2+4}{4}. \qquad (1)$$

Funkcijos $g(x) = \left(x + \frac{k+4}{2}\right)^2$ grafikas yra parabolė, kurios viršūnės taško abscisė yra $x_0 = -\frac{k+4}{2}$, o šakos eina į viršų. Vadinasi, mažiausią reikšmę ši funkcija įgyja arba taške x_0, arba taške $x = 0$, arba taške $x = 2$, – viskas priklauso nuo taško $x_0 = -\frac{k+4}{2}$ padėties intervalo [0; 2] atžvilgiu. Pagal tai išnagrinėkime tris atvejus.

1 atvejis. Tegu $x_0 < 0$, t. y. $k > -4$. Šiuo atveju funkcija $g(x)$ didėja intervale [0; 2], todėl

$$\min g(x) = g(0) = \left(\frac{k+4}{2}\right)^2 = \frac{(k+4)^2}{4}.$$

2 atvejis. Tegu $0 \le x_0 \le 2$, t. y. $-8 \le k \le -4$. Šiuo atveju

$$\min g(x) = g(x_0) = g\left(-\frac{k+4}{2}\right) = 0.$$

3 atvejis. Kai $x_0 > 2$, t. y. $k < -8$, funkcija $g(x)$ mažėja intervale [0; 2], todėl

$$\min g(x) = g(2) = \left(2 - \frac{k+4}{2}\right)^2 = \frac{(k+8)^2}{4}.$$

Pasinaudoję (1) formule, apskaičiuokime mažiausią intervale [0; 2] funkcijos $f(x) = x^2 + (k+4)x + 2k + 3$ reikšmę:

$$\min f(x) = \begin{cases} 4k + 15, \text{ kai } k < -8; \\ -\frac{k^2+4}{4}, \text{ kai } -8 \le k \le -4; \\ 2k + 3, \text{ kai } k > -4. \end{cases}$$

Belieka išspręsti lygtį $\min f(x) = -4$. Vėl turime tris atvejus (priklausomai nuo dydžio $\min f(x)$ išraiškos):

1) kai $k < -8$, tai

$4k+15=-4 \Rightarrow k=-4{,}75 \Rightarrow \varnothing;$

2) kai $-8 \le k \le -4$, tai

$$-\frac{k^2+4}{4}=-4 \Rightarrow k^2=12 \Rightarrow k=\pm 2\sqrt{3} \Rightarrow \varnothing;$$

1) kai $k>-4$, tai

$2k+3=-4 \Rightarrow k=-3{,}5$.

Ats.: $k=-3{,}5$.

8. Pertvarkykime lygtį:

$$\frac{2-\sin^2 x}{1+\sin x}=t \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x + t\sin x + (t-2)=0, \\ \sin x \ne -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{-t-\sqrt{(t-2)^2+4}}{2} \text{ arba } \sin x = \dfrac{-t+\sqrt{(t-2)^2+4}}{2}, \\ \sin x \ne -1. \end{cases}$$

Matome, kad vieną sprendinį intervale $[0; 2\pi]$ lygtis gali turėti vieninteliu atveju, – kai $\sin x = 1$, t. y. $x=\dfrac{\pi}{2}$. Kitais atvejais arba visai sprendinių nebus, arba ne vienas. Galimoms parametro t reikšmėms rasti reikia nagrinėti dvi sistemas:

$$1) \quad \begin{cases} t<0, \\ \dfrac{-t-\sqrt{(t-2)^2+4}}{2}=1 \end{cases} \qquad \text{ir}$$

$$2) \quad \begin{cases} t>0, \\ \dfrac{-t+\sqrt{(t-2)^2+4}}{2}=1 \end{cases}$$

(atvejis $t=0$ iš karto atpuola).

Pirmoji sistema sprendinių neturi, o antroji sistema turi vienintelį sprendinį – $t=\dfrac{1}{2}$.

Ats.: $t=\dfrac{1}{2}$.

9. Spręskime sistemą

$$\begin{cases} \lg(x^2 + px + 1{,}01) > -2, \\ x < 0. \end{cases}$$

Gausime:

$$\begin{cases} \lg(x^2 + px + 1{,}01) > -2, \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + px + 1{,}01 > 0, \\ x^2 + px + 1{,}01 > 0{,}01, \Rightarrow \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + px + 1{,}01 > -2, \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow \left(p \le 0 \text{ arba } \begin{cases} p > 0, \\ p^2 - 4 < 0 \end{cases} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \big(p \le 0 \text{ arba } 0 < p < 2\big) \Rightarrow p < 2.$$

Ats.: $p < 2$.

10. Kai $a \le 0$, tai $a - x^2 \le 0$ su visais realiaisiais skaičiais x. Vadinasi, turėtų galioti nelygybė $a + x - 2 > 0$. Gauname $x > 2 - a \ge 2$. Taigi su neteigiamomis parametro a reikšmėmis nelygybė $(a - x^2)(a + x - 2) < 0$ neturi sprendinių, kurie tenkintų nelygybę $x^2 \le 1$.

Toliau nagrinėkime atvejį, kai $a > 0$. Nelygybė $(a - x^2)(a + x - 2) < 0$ galioja tik tada, kai

$$\begin{cases} a - x^2 > 0, \\ a + x - 2 < 0 \end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases} a - x^2 < 0, \\ a + x - 2 > 0. \end{cases}$$

Pertvarkę turėsime tokią sistemų porą:

$$\begin{cases} x^2 < a, \\ x < 2 - a \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} x^2 > a, \\ x > 2 - a. \end{cases}$$

Pirmoji sistema neturi sprendinių, tenkinančių nelygybę $x^2 \le 1$ tik tada, kai $2 - a \le -1$, o antroji – tik tada, kai $2 - a \ge 1$ arba $a \ge 1$.

Kad nelygybė $(a - x^2)(a + x - 2) < 0$ neturėtų sprendinių, tenkinančių sąlygą $x^2 \le 1$, jų turi neturėti abi sistemos. Taigi turi galioti abi sąlygos, $2 - a \le -1$ ir ($2 - a \ge 1$ arba $a \ge 1$). Iš jų ir gauname ieškomąsias parametro a reikšmes: $a \ge 3$.

Ats.: $a \le 0$ arba $a \ge 3$.

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

1	2	3	4
$f(x) \in [2; +\infty)$	$\dfrac{n}{3n+1}$	$x_n = 3 \cdot 10^n + n - 2$	$m = 4$

Išleistose LJMM knygelėse buvo nagrinėtos tokios temos:

I KNYGA

I. J. Šinkūnas. *Kvadratinis trinaris.*
II. G. Stepanauskas. *Rekurenčiosios sekos.*
III. R. Kašuba. *Elementarinės matematikos uždavinių sprendimo metodai.*
IV. A.Skūpas. *Funkcija.*
V. V. Pekarskas. *Sveikoji ir trupmeninė skaičiaus dalis. Jų savybės.*
VI. P. Survila. *Kombinatorikos ir tikimybių skaičiavimo pradmenys.*
VII. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. *Grafai.*

II KNYGA

I. J. Šinkūnas, A. Urbonas. *Funkcija.*
II. E. Mazėtis. *Apskritimų geometrija. Įbrėžtiniai ir apibrėžtiniai daugiakampiai. Taisyklingieji daugiakampiai.*
III. B. Vasylienė. *Skaičiaus modulis algebros uždaviniuose.*
IV. J. Šinkūnas. *Figūrų panašumas. Talio teorema ir jos taikymai.*
V. D. Jurgaitis. *Matematinės indukcijos metodas.*
VI. A. Urbonas. *Lygčių, nelygybių bei jų sistemų ekvivalentumas.*
VII. B. Grigelionis. *Urnų schemos ir baigtinės Markovo grandinės.*
VIII. A. Juozapavičius, J. Šinkūnas. *Koordinačių sistemos. Žemėlapiai.*

III KNYGA

I. E. Stankus. *Skaičių dalumas.*
II. R. Skrabutėnas. *Grandininės trupmenos.*
III. V. Vitkus. *Vidurkiai.*
IV. E. Mazėtis. *Vektoriai.*
V. J. Šinkūnas. *Plokščių figūrų plotai.*
VI. S. Staknienė. *Iracionaliosios lygtys ir nelygybės.*
VII. A. Apynis, E. Stankus. *Trigonometrinės lygtys ir nelygybės.*
VIII. G. Stepanauskas. *Sekos.*

IV KNYGA

I. G. Stepanauskas. *Skaičiavimo sistemos.*
II. P. Vaškas. *Antrosios eilės kreivės.*
III. L. Maliaukienė. *Įdomioji logika.*
IV. A. Urbonas. *Atvirkštinės funkcijos.*
V. A. Apynis. *Optimizavimo uždaviniai.*
VI. P. Survila. *Kombinatorikos pradmenys.*
VII. P. Survila. *Tikimybių teorijos pradmenys.*
VIII. A. Nagelė. *Kompleksiniai skaičiai.*

V KNYGA

I. O. Jablonskienė. *Planimetrijos uždaviniai.*
II. V. Pekarskas. *Antrosios eilės kreivės.*
III. G. Stepanauskas. *Skaičių dalikliai.*
IV. V. Stakėnas. *Šifrai ir skaičiai.*
V. A. Apynis. *Tiesinių lygčių sistemos.*
VI. R. Skrabutėnas. *Algebrinės lygtys.*
VII. V. Vitkus. *Brėžimo uždaviniai.*
VIII. R. Kašuba. *Sudėtis, atimtis ir daugyba stulpeliu bei dalyba kampu.*