

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

*Jaunajam
matematikui*

8

2005–2007 metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Danieliaus leidykla

Vilnius, 2007

Leidinio sudarytojai:

Antanas APYNIS

Eugenijus STANKUS

Juozas ŠINKŪNAS

Leidinį redagavo Joana PRIBUŠAUSKAITĖ

Maketavo Kristina LYNDIENĖ

© Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, 2007

© Danieliaus leidykla, 2007

TURINYS

PRATARMĖ	4
METODINĖ MEDŽIAGA IR UŽDUOTYS	5
A. Apynis, E. Stankus, J. Šinkūnas. STOJAMOJI UŽDUOTIS ...	6
I. J. Šinkūnas. VIDURKIAI IR JŲ TAIKYMAI.....	8
PIRMOJI UŽDUOTIS	21
II. I. Bagdonienė. DIRICHLĖ PRINCIPAS	22
ANTROJI UŽDUOTIS	25
III. E. Stankus. DIOFANTINĖS LYGTYS	26
TREČIOJI UŽDUOTIS	35
IV. L. Papreckienė. DAUGIANARIŲ DALUMAS	36
KETVIRTOJI UŽDUOTIS	43
V. A. Apynis, J. Šinkūnas. NIUTONO BINOMAS.....	45
PENKTOJI UŽDUOTIS	56
VI. E. Tumėnaitė. LOGARITMINĖS IR RODIKLINĖS	
LYGTYS, NELYGYBĖS IR TAPATYBĖS	58
ŠEŠTOJI UŽDUOTIS	64
VII. E. Mazėtis. STEREOMETRIJOS UŽDAVINIAI	66
SEPTINTOJI UŽDUOTIS	76
VIII. A. Apynis. TRIGONOMETRINIAI UŽDAVINIAI	78
AŠTUNTOJI UŽDUOTIS	85
A. Apynis, E. Stankus, J. Šinkūnas. BAIGIAMOJI UŽDUOTIS .	86
UŽDUOČIŲ SPRENDIMAI	87
Stojamosios užduoties sprendimas	88
Pirmosios užduoties sprendimas	93
Antrosios užduoties sprendimas	101
Trečiosios užduoties sprendimas	103
Ketvirtosios užduoties sprendimas	106
Penktosios užduoties sprendimas	109
Šeštosios užduoties sprendimas	116
Septintosios užduoties sprendimas	120
Aštuntosios užduoties sprendimas	126
Baigiamosios užduoties atsakymai	131

PRATARMĖ

Šioje septintojoje Lietuvos jaunujų matematikų mokyklos knygelėje „Jaunajam matematikui“ yra pateikta 2005–2007 mokslo metais nagrinėtų temų metodinė medžiaga, užduotys LJMM klausytojams ir jų sprendimai.

Knygelės turinį sudaro šios temos: vidurkiai ir jų taikymai (J. Šinkūnas), Dirichlė principas (J. Bagdonienė); diofantinės lygtys (E. Stankus); daugianarių dalumas (L. Paprečkienė); Niutono binomas (A. Apynis, J. Šinkūnas); logaritminės ir rodiklinės lygtys, nelyybės ir tapatybės (E. Tumėnaitė); stereometrijos uždaviniai (E. Mazėtis); trigonometrijos uždaviniai (A. Apynis). Skaitytojas taip pat ras 2005 metų stojamąją užduotį ir jos sprendimą bei 2007 metų baigiamosios užduoties pavyzdį.

Kad būtų lengviau naudotis knygelėmis „Jaunajam matematikui“, šio leidinio paskutiniuose puslapiuose yra įdėtas ankstesnių šešerių LJMM mokslo metų temų sąrašas.

Nuoširdžiai dėkojame straipsnių autoriams ir redaktorei Joanai Pribušauskaitei.

Taip pat tariame nuoširdų ačiū kolegei Kristinai Lyndienei už tekstų rinkimą ir maketavimą.

Antanas Apynis,
Eugenijus Stankus,
Juozas Šinkūnas

Metodinė medžiaga ir užduotys



STOJAMOJI UŽDUOTIS

**Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)**

1. Išspręskite lygtį

$$\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10 \left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x} \right).$$

2. Apskaičiuokite (remdamiesi trigonometrinėmis formulėmis):

$$\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{7}.$$

3. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x(y+z) = 5, \\ y(z+x) = 10, \\ z(x+y) = 13. \end{cases}$$

4. Įrodykite, kad skaičius

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2004^3$$

dalijasi iš 2005.

5. Autobuse važiavo ne daugiau kaip 100 keleivių. Be to, sėdinčių keleivių buvo du kartus daugiau, negu stovinčių. Stotelėje išlipo 4% visų keleivių. Kiek keleivių liko autobuse?
6. Du broliai į turgų atvežė parduoti žąsis. Jie kiekvieną žąsį pardavė po tiek litų, kiek buvo atvežę žąsų. Broliai gautus pinigus nutarė pasidalyti po lygiai. Iš pradžių jiems teko po 10 Lt, tačiau liko vienas 10 Lt banknotas ir dar keli litai. Vyresnysis brolis likusį 10 Lt banknotą atidavė jaunesniajam, o pats pasiėmė kitus likusius litus. Kiek litų jaunesnysis brolis liko skolingas vyresniajam?
7. V–VIII klasių matematikos olimpiadoje dalyvavo dvyniai. Kai mokytojas paklausė, ar jie dar turi brolių ir koks jų amžius, dvyniai atsakė – „mes turime vieną brolių, o jo amžius užrašomas dviem

vienodais skaitmenimis; be to, mūsų visų trijų amžių suma yra dviženklis skaičius, kurio antrasis skaitmuo dvigubai didesnis už pirmąjį skaitmenį“. Kiek broliams metų?

8. Trikampio ABC kampo A pusiaukampinė, kraštinės AB vidurio statmuo ir aukštinė, išvesta iš viršūnės B , kertasi viename taške. Raskite kampo A didumą.
9. Iškiliojo keturkampio $ABCD$, kurio plotas lygus S , kraštinės pratęstos ir jų tęsinuose atidėtos atkarpos, lygios atitinkamoms kraštinėms: kraštinės AB tęsinyje – atkarpa $BM = AB$; kraštinės BC tęsinyje – atkarpa $CN = BC$; kraštinės CD tęsinyje – atkarpa $DP = CD$; kraštinės DA tęsinyje – atkarpa $AQ = AD$. Apskaičiuokite keturkampio $MNPQ$ plotą.
10. Trikampės piramidės pagrindas – statusis trikampis, o piramidės šoninės briaunos pasvirusios į pagrindo plokštumą 60° kampui. Be to, įbrėžto į piramidės pagrindą apskritimo lietimosi su įžambine taškas įžambinę dalija į dvi 3 cm ir 8 cm ilgio atkarpas. Apskaičiuokite piramidės tūrį.



I. VIDURKIAI IR JŲ TAIKYMAI

Juozas Šinkūnas

(Vilniaus pedagoginis universitetas)

Kelių skaičių aritmetinio vidurkio ir dviejų neneigiamų skaičių geometrinio vidurkio sąvokos žinomos iš pagrindinės mokyklos. Šiame straipsnyje apibrėšime ir kelių skaičių geometrinį, harmoninį bei kvadratinį vidurkius. Tirsime sąryšius tarp jų, daugiausiai dėmesio skirdami aritmetiniam ir geometriniam vidurkiams bei jų taikymams sprendžiant uždavinius.

Apibrėžimai. 1. Realiųjų skaičių a_1, a_2, \dots, a_n aritmetiniu vidurkiu vadinamas skaičius

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

2. Realiųjų neneigiamų skaičių a_1, a_2, \dots, a_n geometrinium vidurkiu vadinamas skaičius

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

3. Realiųjų teigiamų skaičių a_1, a_2, \dots, a_n harmoniniu vidurkiu vadinamas skaičius

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

4. Realiųjų skaičių a_1, a_2, \dots, a_n kvadratinium vidurkiu vadinamas skaičius

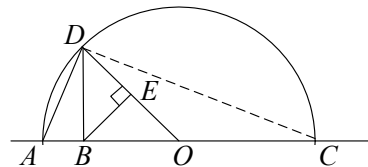
$$K_n = \sqrt[n]{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Yra įrodyta, kad

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq K_n.$$

Nelygybes $H_2 \leq G_2 \leq A_2$ galima pavaizduoti geometriškai.

1) Nubrėžkime tiesę ir joje vieną po kitos atidėkime dvi atkarpas $AB = a$ ir $BC = b$ (1 pav.).



1 pav.

2) Nubrėškime pusapskritimą, kurio skersmuo AC , o centras O .

3) Iš taško B iškelkime skersmeniui AC statmenį, kuris apskritimą kerta taške D .

Trikampis ADC yra statusis, nes kampas ADC yra įbrėžtinis ir remiasi į skersmenį.

a) Įrodysime, kad $G_2 \leq A_2$, t. y. $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. Kadangi

$\triangle ADB \sim \triangle DBC$ (pagal du kampus), tai $\frac{DB}{AB} = \frac{BC}{DB}$, t. y.

$BD^2 = AB \cdot BC$. Iš čia

$$DB = \sqrt{AB \cdot BC} = \sqrt{a \cdot b} = G_2.$$

Kita vertus, $AO = OD = \frac{a+b}{2} = A_2$ ir $DB \leq OD$, tai $G_2 \leq A_2$.

Lygybė $G_2 = A_2$ galima tik tada, kai $OD = DB$, t. y. kai taškas B sutampa su tašku O . Taškas B sutampa su tašku O tik tada, kai $a = b$.

b) Įrodysime, kad $H_2 \leq G_2$. t. y. $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$.

Iš taško B nubrėškime spinduliui OD statmenį BE . Kadangi

$\triangle OBD \sim \triangle BED$ (pagal du kampus), tai $\frac{DE}{DB} = \frac{DB}{OD}$, t. y.

$$DE = \frac{DB^2}{OD} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = H_2.$$

Kadangi $DE < BD$ (trikampio BED statinis trumpesnis už įžambinę), tai $H_2 \leq G_2$ ir $H_2 = G_2$ tik tada, kai $a = b$.

Taigi įsitikinome, kad $H_2 \leq G_2 \leq A_2$.

Sąryšis $H_2 < G_2 < A_2 < K_2$ geometriškai pavaizduotas [1] knygelėje.

Teorema. Neneigiamų skaičių a_1, a_2, \dots, a_n aritmetinis vidurkis ne mažesnis už tų skaičių geometrinį vidurkį, t. y.

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Irodymas. Teoremą įrodysime tik atskirais atvejais, kai $n = 2, 4, 3$. Šių atvejų dažnai pakanka sprendžiant praktinius uždavinius. Bendroju atveju teorema įrodoma remiantis indukcijos principu.

1 atvejis. Kai $n = 2$, reikia įrodyti nelygybę $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}$.

Irodymas. Akivaizdu, kad $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$, t. y. $a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 \cdot a_2} \geq 0$ arba $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}$. Lygybė galima tik tada, kai $a_1 = a_2$.

2 atvejis. Kai $n = 4$, įrodysime, kad

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4}.$$

Irodymas. Iš tikrųjų

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} &= \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2} \geq \\ &\geq \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{a_1 a_2} \cdot \sqrt{a_3 a_4}} = \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} \end{aligned}$$

(čia du kartus pritaikėme nelygybę tarp dviejų skaičių aritmetinio ir geometrinio vidurkių). Lygybė galima tik tada, kai $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

3 atvejis. Kai $n = 3$, įrodysime, kad

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}.$$

Irodymas. Kadangi

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \frac{\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} + a_1 + a_2 + a_3}{4},$$

tai

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[4]{\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \cdot a_1 a_2 a_3}$$

(pritaikėme nelygybę tarp keturių neneigiamų skaičių aritmetinio ir geometrinio vidurkių).

Šią nelygybę pakėlė ketvirtuoju laipsniu, gauname:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)^4 \geq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \cdot a_1 a_2 a_3.$$

Jeigu $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, t. y. $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, pastaroji nelygybė virsta tapatybe. Kai $a_1 + a_2 + a_3 \neq 0$, šią nelygybę padaliję iš $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$, gausime:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)^3 \geq a_1 a_2 a_3,$$

t. y.

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}.$$

Dažniausiai taikomos labai svarbios šios teoremos išvados.

1 išvada. Jeigu n teigiamų dėmenų ($n = 2, 3, 4, \dots$) suma yra pastovi, tai jų sandauga yra didžiausia, kai dėmenys lygūs.

Irodymas. Sakykime, $a_1 + a_2 + \dots + a_n = P$. Tada

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^n = \left(\frac{P}{n}\right)^n.$$

Taigi sandauga $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ ne didesnė už $\left(\frac{P}{n}\right)^n$. Ši sandauga

lygi $\left(\frac{P}{n}\right)^n$ (įgyja didžiausią reikšmę), kai $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

2 išvada. Jeigu n teigiamų dauginamųjų sandauga yra pastovi, tai jų suma yra mažiausia, kai dauginamieji lygūs.

Irodymas. Sakykime, kad $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = S$. Tada

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \sqrt[n]{S},$$

t. y.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{S}.$$

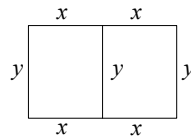
Taigi ši suma ne mažesnė už $n \sqrt[n]{S}$. Ji lygi $n \sqrt[n]{S}$ (įgyja mažiausią reikšmę), kai $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Pavyzdžiai.

1. Rasime kokie turi būti stačiakampio formos žemės sklypo, kurio plotas 2400 m^2 , matmenys, kad jam aptverti ir dar pertverti į du lygiapločius stačiakampius, reikėtų mažiausiai vielinio tinklo.

Sprendimas. Sklypas pavaizduotas 2 paveiksle.

Tvoros ilgis $S = 4x + 3y$, o sklypo plotas – $2xy = 2400$, t. y. $xy = 1200$. Iš čia $y = \frac{1200}{x}$. Šią y



2 pav.

išraišką įrašę į tvoros ilgio formulę, gauname

$$S = 4x + \frac{3 \cdot 1200}{x} = 4x + \frac{3600}{x} \geq 2 \sqrt{4x \cdot \frac{3600}{x}} = 240 \text{ (m)}.$$

Taigi tvoros ilgis ne mažesnis už 240 m. Tvoros ilgis lygus 240 m (mažiausia reikšmė), kai $4x = \frac{3600}{x}$, t. y. kai $x = 30 \text{ m}$. Tada

$$y = \frac{1200}{30} = 40 \text{ m}.$$

Ats.: Sklypo matmenys $60 \text{ m} \times 40 \text{ m}$.

2. Išspręskime lygtį

$$(x - 4,5)^4 + (x - 5,5)^4 = 1.$$

Sprendimas. Šią lygtį spręsimė įvedę naują kintamąjį y : reiškinių $(x - 4,5)$ ir $(x - 5,5)$ aritmetinį vidurkį, t. y.

$$y = \frac{x - 4,5 + x - 5,5}{2} = x - 5.$$

Tada $(x - 4,5)^4 + (x - 5,5)^4 = (y + 0,5)^4 + (y - 0,5)^4$. Taigi gauname lygtį

$$(y + 0,5)^4 + (y - 0,5)^4 = 1$$

arba

$$(y + 0,5)^2 \cdot (y + 0,5)^2 + (y - 0,5)^2 \cdot (y - 0,5)^2 = 1.$$

Kairėje lygties pusėje atlikę veiksmus (pakėlę kvadratu, sudauginę ir sutraukę panašius narius), gauname bikvadratinę lygtį

$$2y^4 + 3y^2 - 0,875 = 0.$$

Pažymėję $y^2 = t$, gauname lygtį $2t^2 + 3t - 0,875 = 0$. Jos sprendiniai: $t_1 = 0,25$, $t_2 = -0,25$. Taigi $y^2 = 0,25$. Iš čia $y_1 = -0,5$, $y_2 = 0,5$ (lygtis $y^2 = -0,25$ – sprendinių neturi). Vadinasi, $x_1 = 5 - 0,5 = 4,5$, $x_2 = 5 + 0,5 = 5,5$.

Ats.: 4,5, 5,5.

3. Viename inde yra 16 kg druskos tirpalo, o kitame – 25 kg druskos tirpalo (nebūtinai tos pačios koncentracijos). Kai į abu indus buvo įpilta vandens, pirmajame inde druskos koncentracija sumažėjo m kartų, o antrajame inde – n kartų. Žinoma, kad $mn = m + n + 3$. Rasime su kuriomis m ir n reikšmėmis į abu indus buvo įpilta mažiausiai vandens. Koks vandens kiekis buvo įpiltas?

Sprendimas. Sakykime, kad pirmame inde yra u kg druskos, o antrame inde – v kg druskos, ir į pirmą indą buvo įpilta x kg vandens, o į antrą indą – y kg vandens.

Druskos koncentracija pirmajame inde iš pradžių buvo $\frac{u}{16}$, o įpylus vandens – $\frac{u}{16+x}$. Antrajame inde druskos koncentracija iš pradžių buvo

$\frac{v}{25}$, o įpylus vandens – $\frac{v}{25+y}$. Pagal sąlygą:

$$\frac{\frac{u}{16}}{\frac{u}{16+x}} = m \quad \text{ir} \quad \frac{\frac{v}{25}}{\frac{v}{25+y}} = n$$

arba

$$\frac{16+x}{16} = m \quad \text{ir} \quad \frac{25+y}{25} = n.$$

Iš pirmosios lygties randame $x = 16m - 16$, o iš antrosios lygties – $y = 25n - 25$. Taigi į abu indus buvo įpilta $x + y = 16m + 25n - 41$ kg vandens. Kadangi

$$m = \frac{n+3}{n-1} = 1 + \frac{4}{n-1},$$

tai

$$x + y = 16 \left(1 + \frac{4}{n-1} \right) + 25n - 41 = 16 + \frac{64}{n-1} + 25(n-1) + 25 - 41 =$$

$$= \frac{64}{n-1} + 25(n-1) \geq 2 \sqrt{\frac{64}{n-1} \cdot 25(n-1)} = 80.$$

Taigi $x - y \geq 80$ (kg). Mažiausias vandens kiekis $x - y = 80$ įpilamas į abu indus, kai $\frac{64}{n-1} = 25(n-1)$, t. y. kai $n = \frac{13}{5}$ ir

$$m = 1 + \frac{4}{\frac{13}{5} - 1} = \frac{7}{2}.$$

Ats.: Į indą buvo įpilta 80 kg vandens, kai $m = \frac{7}{2}$ ir $n = \frac{13}{5}$.

4. Gaminant x vienetų produkcijos, gamybos kaštai skaičiuojami pagal formulę

$$K(x) = 2,5x^3 + 50x^2 + 60\,000.$$

Rasime kiek produkcijos vienetų reikia pagaminti, kad vidutinė produkcijos vieneto kaina būtų mažiausia.

Sprendimas. Vidutinė produkcijos vieneto kaina lygi $\frac{K(x)}{x} = 2,5x^2 + 50x + \frac{60\,000}{x}$. Ieškosime tokios x reikšmės (natūraliojo skaičiaus) su kuria funkcija $\frac{K(x)}{x}$ įgyja mažiausią reikšmę. Kadangi sandauga $2,5x^2 \cdot 50x \cdot \frac{60\,000}{x}$ nėra pastovus dydis, tai negalime remtis

2 išvada. Funkcijos $\frac{K(x)}{x}$ išraišką pertvarkome taip:

$$\frac{K(x)}{x} = 2,5x^2 + 50x + \frac{20\,000}{x} + \frac{20\,000}{x} + \frac{20\,000}{x}.$$

Turėsime:

$$\frac{K(x)}{x} \geq 5 \sqrt[3]{2,5x^2 \cdot 50x \cdot \frac{20\,000}{x} \cdot \frac{20\,000}{x} \cdot \frac{20\,000}{x}} = 5000,$$

t. y. $\frac{K(x)}{x} \geq 5000$. Mažiausia $\frac{K(x)}{x}$ reikšmė, lygi 5000, įgyjama, kai

$$25x^2 = 50x = \frac{20\,000}{x}, \text{ t. y. kai } x = 20.$$

Ats.: 20.

5. a) Rasime funkcijos $f(x) = \frac{8x}{x^4 + 3}$ didžiausią reikšmę;

b) Rasime funkcijos $f(x) = \sin x \cdot \sin 2x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ didžiausią ir mažiausią reikšmes.

Sprendimas. a) Funkcija apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje. Kai $x < 0$, funkcijos reikšmės yra neigiamos. Todėl didžiausia funkcijos reikšmė gali būti įgyta tik su teigiama x reikšme. Taigi nagrinėsime

funkciją $f(x) = \frac{8x}{x^4 + 3}$ intervale $(0; +\infty)$. Šiame intervale

$$f(x) = \frac{8x}{x^4 + 3} = \frac{8}{x^3 + \frac{3}{x}}. \text{ Kadangi}$$

$$x^3 + \frac{3}{x} = x^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq 4 \sqrt[4]{x^3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} = 4,$$

tai $f(x) \leq \frac{8}{4} = 2$. Funkcija didžiausią reikšmę, lygią 2, įgyja, kai

$$x^3 = \frac{1}{x}, \text{ t. y. kai } x = 1.$$

Ats.: $f_{\text{didž.}}(1) = 2$.

b) Kadangi funkcijos

$$f(x) = \sin x \cdot \sin 2x = 2 \sin^2 x \cos x$$

išraiškoje abu dauginamieji $\sin^2 x$ ir $\cos x$ intervale $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ yra teigiami,

o jų suma $\sin^2 x + \cos x$ nėra pastovus dydis, tai negalime taikyti pirmosios išvados. Ieškome funkcijos

$$f^2(x) = 4 \sin^4 x \cdot \cos^2 x,$$

o tuo pačiu ir $f(x)$, didžiausios reikšmės. Turime:

$$\begin{aligned} f^2(x) &= 2 \sin^2 x \cdot \sin^2 x \cdot (2 \cos^2 x) \leq \\ &\leq 2 \left(\frac{\sin^2 x + \sin^2 x + 2 \cos^2 x}{3} \right)^3 = 2 \left(\frac{2}{3} \right)^3 = \frac{16}{27}. \end{aligned}$$

Vadinasi, $f(x) \leq \frac{4}{3\sqrt{3}}$. Funkcija įgyja didžiausią reikšmę, lygią $\frac{4}{3\sqrt{3}}$, kai $\sin^2 x = 2 \cos^2 x$, t. y. kai $\operatorname{tg}^2 x = 2$. Iš čia $\operatorname{tg} x = \sqrt{2}$ ir $\operatorname{tg} x = -\sqrt{2}$. Kadangi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, tai lygtis $\operatorname{tg} x = \sqrt{2}$ turi vienintelį sprendinį $x = \operatorname{arctg} \sqrt{2} \approx 55^\circ$. Šiame intervale lygtis $\operatorname{tg} x = -\sqrt{2}$ sprendinių neturi. Kadangi $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $f(x) > 0$, kai $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, tai mažiausią reikšmę funkcija įgyja intervalo galuose.

Ats.: Didžiausia funkcijos reikšmė lygi $\frac{4}{3\sqrt{3}}$, kai $x \approx 55^\circ$, o mažiausia reikšmė lygi 0, kai $x = 0$ ir $x = \frac{\pi}{2}$.

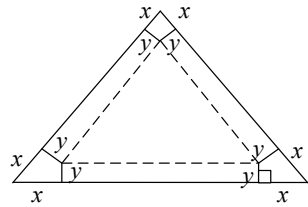
6. Įrodysime nelygybę

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}}.$$

Įrodymas. Turime:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} + \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} + \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}}. \end{aligned}$$

7. Iš taisyklingojo trikampio formos skardos lapo, kurio kraštinė lygi 60 cm, reikia pagaminti trikampės piramidės formos atvirą dėžutę trikampio kampuose iškerpant vienodus keturkampius ir sulenkiant trikampio kraštines (žr. 3 pav.). Rasime su kuria x reikšme dėžutės tūris yra didžiausias.



3 pav.

Sprendimas. Sakykime, dėžutės aukštis yra y . Dėžutės pagrindas – taisyklingasis trikampis, kurio kraštinė lygi $60 - 2x$. Pagrindo plotas

$$S = \frac{(60 - 2x)^2 \cdot \sqrt{3}}{4},$$

o dėžutės tūris –

$$V = Sy = \frac{(60 - 2x)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot y.$$

Kadangi $y = x \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{3}$, tai

$$\begin{aligned} V &= \frac{(60 - 2x)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{3} = \frac{(60 - 2x)^2 \cdot x}{4} = \\ &= \frac{(60 - 2x)(60 - 2x) \cdot (4x)}{4 \cdot 4} \leq \\ &\leq \frac{1}{16} \left(\frac{60 - 2x + 60 - 2x + 4x}{3} \right)^3 = \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{120}{3} \right)^3 = \\ &= \frac{1}{16} \cdot 40^3 = 4000 \text{ (cm}^3\text{)}. \end{aligned}$$

Taigi dėžutės tūris ne didesnis už 4000 cm^3 . Dėžutės tūris yra didžiausias ir lygus 4000 cm^3 , kai $60 - 2x = 4x$, t. y. kai $x = 10 \text{ cm}$.

Ats.: 10 cm.

8. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninė briauna lygi b . Rasime kokia turi būti piramidės aukštinė, kad piramidės tūris būtų didžiausias.

Sprendimas. 4 paveiksle pavaizduota taisyklingoji trikampė piramidė, kurios briauna $DC = b$, o pagrindas – taisyklingasis trikampis

ITEMA

ABC . Sakykime, piramidės aukštinė $DO = x$. Tada iš stačiojo trikampio DOC :

$$OC = \sqrt{DC^2 - DO^2} = \sqrt{b^2 - x^2},$$

o

$$CE = \frac{3}{2}OC = \frac{3}{2}\sqrt{b^2 - x^2}.$$

Iš stačiojo trikampio CEB :

$$BC^2 - BE^2 = BC^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 = CE^2,$$

t. y. $\frac{3}{4}BC^2 = CE^2$. Iš čia

$$BC^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{4}(b^2 - x^2) = 3(b^2 - x^2).$$

Kadangi $S_{ABC} = \frac{AC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}(b^2 - x^2)}{4}$, tai piramidės tūris

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot DO = \frac{\sqrt{3}(b^2 - x^2)}{4} \cdot x.$$

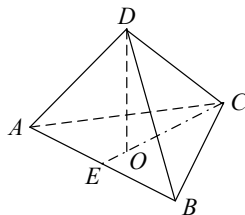
Ieškosime su kuria x reikšme $V^2(x) = \frac{3}{16}(b^2 - x^2)^2 \cdot x^2 = \frac{3}{16}(b^2 - x^2)(b^2 - x^2) \cdot (2x)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{32}(b^2 - x^2)(b^2 - x^2)(2x)^2$ įgyja didžiausią reikšmę. Su šią x reikšme ir $V(x)$ įgys didžiausią reikšmę. Turime:

$$V^2(x) \leq \frac{3}{32} \left(\frac{b^2 - x^2 + b^2 - x^2 + 2x^2}{3} \right)^3 = \frac{3}{32} \cdot \frac{8b^6}{27} = \frac{b^6}{36}.$$

Taigi $V(x) \leq \frac{b^3}{6}$. Piramidės tūris yra didžiausias ir lygus $\frac{b^3}{6}$, kai

$$b^2 - x^2 = 2x^2, \text{ t. y. kai } x = \frac{b\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ats.: } \frac{b\sqrt{3}}{3}.$$



4 pav.

9. Reikia pagaminti stačiakampio gretasienio formos akvariumą, kurio tūris V . Rasime kokie turi būti akvariumo matmenys, kad jo gamybai reikėtų mažiausiai medžiagos.

Sprendimas. Sakykime akvariumo ilgis x , plotis y , o aukštis – z . Tada tūris $V = xyz$, paviršiaus plotas – $T = xy + 2xz + 2yz \geq 3 \sqrt[3]{xy \cdot 2xz \cdot 2yz} = 3 \sqrt[3]{4x^2 y^2 z^2} = 3 \sqrt[3]{4V^2}$. Taigi akvariumo paviršiaus plotas ne mažesnis už $3 \sqrt[3]{4V^2}$. Akvariumo paviršiaus plotas yra mažiausias ir lygus $3 \sqrt[3]{4V^2}$, kai $xy = 2xz = 2yz$. Iš čia išplaukia, kad $x = y = 2z = \sqrt[3]{2V}$.

Ats.: Akvariumo pagrindas yra kvadratas, kurio kraštinė lygi $\sqrt[3]{2V}$, o aukštinė du kartus trumpesnė už pagrindo kraštinę.

10. a) Motociklininkas pusę kelio važiuoja greičiu v_1 km/h, o kitą pusę kelio – v_2 km/h greičiu. Rasime vidutinį motociklininko greitį.

b) Motociklininkas trečdalį kelio važiuoja greičiu v_1 km/h, antrą trečdalį kelio – v_2 km/h greičiu ir paskutinį trečdalį kelio – v_3 km/h greičiu. Rasime vidutinį motociklininko greitį.

Sprendimas. a) Sakykime motociklininkas iš viso nuvažiavo s km. Tada pirmąją pusę kelio jis nuvažiavo per $t_1 = \frac{s}{2v_1}$ h, o antrąją pusę kelio – per $t_2 = \frac{s}{2v_2}$ h. Motociklininko vidutinis greitis yra

$$v_{\text{vid.}} = \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{s}{\frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}.$$

Taigi motociklininko vidutinis greitis lygus greičių v_1 ir v_2 harmoniniam vidurkiui.

Pavyzdžiui, kai $v_1 = 40$ km/h, o $v_2 = 60$ km/h,

$$v_{\text{vid.}} = \frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = 48 \text{ km/h.}$$

b) Kaip ir atveju a), nesunku įsitikinti, kad $v_{\text{vid.}} = \frac{3}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}}$.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Į 0,9 ha stačiakampio formos žemės sklypą iš dviejų priešingų pusių reikia aptverti 1 m aukščio mūrine tvora, o iš kitų dviejų pusių – medine tvora. 1 m² mūrinės tvoros kainuoja 25 Lt, o 1 m² medinės tvoros – 10 Lt. Kokie turi būti žemės sklypo matmenys, kad tvora kainuotų pigiausiai?
2. Išspręskite lygtį $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$.
3. Vienoje cisternoje yra 900 kg druskos rūgšties tirpalo, o kitoje cisternoje – 1600 kg druskos rūgšties tirpalo (nebūtinai tos pačios koncentracijos). Kai į abi cisternas buvo įpilta vandens, pirmoje cisternoje druskos rūgšties koncentracija sumažėjo r kartų, o antroje cisternoje s kartų. Žinoma, kad $2rs = 18 - r$. Raskite su kuriomis r ir s reikšmėmis į abi cisternas buvo įpilta mažiausiai vandens. Koks vandens kiekis buvo įpiltas?
4. Gaminant x vienetų produkcijos, gamybos kaštai apskaičiuojami pagal formulę

$$K(x) = 2x^2 + 200x + 1\,280\,000.$$

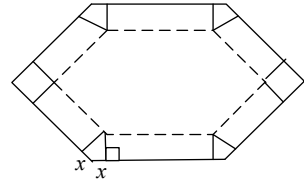
Raskite kiek produkcijos vienetų reikia pagaminti, kad produkcijos vieneto vidutiniai kaštai būtų minimalūs.

5. Raskite funkcijos $f(x) = x^{1500} + x^{400} + x^{105} + \frac{2005}{x}$, $0 < x < \infty$, mažiausią reikšmę.
6. Įrodykite nelygybes:

a) $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, kai $a \geq 0$, $b \geq 0$;

b) $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a+b+c$, kai $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

7. Taisyklingojo šešiakampio formos skardos lapo, kurio kraštinė lygi 90 cm, kampuose išpjauti lygūs keturkampiai. Sulenkus šešiakampio kraštines, gauta taisyklingosios šešiakampės prizmės formos dėžutė be dangčio (žr. 5 pav.). Raskite su kuria x reikšme dėžutės tūris yra didžiausias.



5 pav.

8. Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninė briauna lygi b . Raskite kokia turi būti piramidės aukštinė, kad piramidės tūris būtų didžiausias.
9. Reikia pagaminti stačiakampio gretasienio formos dėžę su dangčiu. Raskite kokie turi būti dėžės matmenys, kad jos gamybai reikėtų mažiausiai medžiagos.
10. Kūgio sudaromoji lygi l ir pasvirusi į pagrindo plokštumą kampų α . Raskite kūgio tūrį. Su kuria α reikšme tūris yra didžiausias?

Literatūra:

1. V. Vitkus. *Vidurkiai. Jaunajam matematikui*. Danieliaus leidykla, Vilnius, 2002, 25–31, 94–98.
2. J. Šinkūnas. *Ekstremumai be išvestinių*. Alfa plus omega, 2003, Nr. 3, 58–62.



II. DIRICHLE PRINCIPAS

Irena Bagdonienė

(Vilniaus licėjus)

Dirichle¹ principas, dažnai vadinamas *narvelių* ir *triušių* principu, formuluojamas taip:

jeigu į n narvelių reikia patalpinti daugiau negu n triušių, tai bent viename narvelyje teks patalpinti ne mažiau kaip du triušius.

Pavyzdžiui, negalima į tris narvelius patalpinti dešimties triušių taip, kad kiekviename narvelyje būtų ne daugiau kaip trys triušiai.

Bendresnė šio principo formuluotė tokia:

jeigu į n dėžių (*narvelių*) reikia patalpinti daugiau negu $n \cdot k$ rutulių (*triušių*), tai bus bent viena dėžė (*narvelis*), į kurią pateks daugiau negu k rutulių (*triušių*).

Išspręskime keletą uždavinių remdamiesi Dirichle principu.

1. Klasėje yra 25 mokiniai. Ar yra toks metų mėnuo, per kurį savo gimtadienius švęstų ne mažiau kaip 3 mokiniai?

Sprendimas. Čia *narveliai* – mėnesiai, o *triušiai* – mokiniai. Kadangi yra $25 = 12 \cdot 2 + 1$ mokiniai, o *narvelių* yra 12, tai pagal Dirichle principą yra toks metų mėnuo, kai savo gimtadienį švenčia ne mažiau kaip 3 mokiniai.

2. Klasėje 21 mokinys. Kristina gimtadienio proga į savo klasę atnešė 200 saldainių. Įrodykite, kad nors ir po kiek saldainių mokiniai suvalgytų (net jeigu kas nors ir visai nevalgytų), visada atsiras bent du mokiniai, suvalgę po vienodą saldainių skaičių.

Įrodymas. Tarkime, kad kiekvienas mokinys suvalgė po skirtingą saldainių skaičių. Sunumeruokime mokinius suvalgytų saldainių skaičiaus didėjimo tvarka. Tada pirmasis mokinys suvalgė ≥ 0 saldainių, antrasis – ≥ 1 saldainį, trečiasis – ≥ 2 saldainius, ..., 21–sis – ≥ 20 saldainių. Tada visi jie suvalgė ne mažiau kaip $\geq 0 + 1 + 2 + \dots + 20 = 210$ saldainių. Gavome prieštaravimą, nes saldainių buvo tik 200. Taigi mūsų prielaida, kad kiekvienas mokinys suvalgė skirtingą saldainių skaičių, yra neteisinga. Vadinasi, bent du mokiniai suvalgė po vienodą saldainių skaičių.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) – vokiečių matematikas

Dalumo uždaviniai

1. Įrodykite, kad tarp bet kurių šešių sveikųjų skaičių yra bent du skaičiai, kurių skirtumas dalijasi iš 5.

Įrodymas. Dalijant skaičius iš 5, galima gauti 5 skirtingas liekanas: 0, 1, 2, 3, 4. Tarkime, kad *narveliai* – liekanos, o *triušiai* – šeši sveikieji skaičiai. Kadangi *narvelių* yra 5, o skaičių – 6, tai yra *narvelis*, kuriame yra bent du skaičiai. Tų skaičių skirtumas dalijasi iš 5.

2. Įrodykite, kad tarp bet kurių 100 natūraliųjų skaičių visada galima rasti 15 tokių skaičių, jog bet kurių dviejų iš jų skirtumas dalysis iš 7.

Įrodymas. Dalijant skaičius iš 7, galime gauti daugiausiai 7 skirtingas liekanas. Kadangi $100 = 7 \cdot 14 + 2$, tai pagal Dirichle principą tarp duotųjų 100 skaičių yra mažiausiai 15 skaičių, kuriuos dalijant iš 7 gaunama ta pati liekana. Tuomet bet kurių dviejų skaičių, paimtų iš minėtų 15 skaičių, skirtumas dalijasi iš 7.

3. Įrodykite, kad tarp bet kurių 12 skirtingų dviženklių natūraliųjų skaičių, galima rasti bent du skaičius, kurių skirtumas būtų dviženklis skaičius su vienodais skaitmenimis.

Įrodymas. Dalijant skaičius iš 11, galima gauti ne daugiau kaip 11 skirtingų liekanų. Kadangi skaičių turime 12, tai yra mažiausiai 2 skaičiai, kuriuos dalydami iš 11 gauname vienodas liekanas. Tų skaičių skirtumas dalijasi iš 11 ir yra mažesnis už 99. Taigi šis skirtumas yra skaičiaus 11 kartotinis, o visų vienuolikos kartotinių, ne didesnių už 99, skaitmenys yra vienodi.

4. Iš sekos 1, 2, 3, ..., 200 išrinktas 101 skaičius. Įrodykite, kad tarp jų yra du skaičiai, iš kurių vienas yra kito daliklis.

Įrodymas. Tarp nagrinėjamos sekos skaičių yra 100 nelyginių skaičių, mažesnių už 200. Kiekvieno skaičiaus *a narveliu* vadinsime skaičių *a, 2a, 4a, 8a, 16a, ...*; aibę (*a* – nelyginis skaičius, mažesnis už 200). Čia *narveliai* – nelyginių skaičių, padaugintų iš dvejetainių laipsnių, rinkiniai, o *triušiai* – išrinktieji skaičiai. Kiekvienas iš jų patenka į vieną *narvelį*. Kadangi išrinktas 101 skaičius, o *narvelių* yra 100, tai pagal Dirichle principą bus *narvelis*, kuriame yra bent du skaičiai. Aišku, kad iš *narvelio* dviejų skaičių vienas dalijasi iš kito.

5. Įrodykite, kad yra skaičiaus 1579 (Vilniaus universiteto įkūrimo metai) kartotinis, kurio visi skaitmenys yra vienetai.

Įrodymas. Nagrinėkime skaičių seką 1, 11, 111, ... , $\underbrace{111\dots1}_{1580}$.

Dalydami šiuos skaičius iš 1579 pagal Dirichle principą rasime mažiausiai du skaičius su vienodomis liekanomis. Tarkime, kad tie skaičiai yra $\underbrace{111\dots1}_m$ ir $\underbrace{111\dots1}_{m+n}$. Iš didesniojo skaičiaus atėmę mažesnįjį,

gausime skaičių $\underbrace{111\dots1000\dots0}_n = \underbrace{111\dots1}_n \cdot 10^m$, kuris dalijasi iš 1579.

Kadangi skaičiai 10^m ir 1579 bendrų daliklių neturi, tai skaičius $\underbrace{111\dots1}_n$

dalijasi iš 1579. Vadinasi, ieškomasis skaičius yra $\underbrace{111\dots1}_n$.

Geometriniai uždaviniai

1. Keletas apskritimo lankų nuspalvinti raudonai. Nuspalvintų lankų ilgių suma didesnė už apskritimo ilgio pusę. Įrodykite, kad yra toks apskritimo skersmuo, kurio galai nuspalvinti raudonai.

Įrodymas. Nuspalvinkime mėlynai lankus, simetriškus raudoniesiems lankams apskritimo centro atžvilgiu. Kadangi raudonųjų lankų ilgių suma didesnė už pusę apskritimo ilgio, tai ir mėlynai nuspalvintų lankų ilgių suma didesnė už pusę apskritimo ilgio. Vadinasi, bus apskritimo lankelių, nuspalvintų abiem spalvomis. Skersmens, kurio vienas galas nuspalvintas dviem spalvomis, kitas galas yra nuspalvintas raudonai.

2. Įrodysime, kad ir kaip kvadrato, kurio kraštinė 1 m, pažymėtume 51 tašką, bent tris iš jų galima uždengti kvadratėliu, kurio kraštinė 0,2 m.

Įrodymas. Suskaidykime kvadratą į 25 lygius kvadratėlius, kurių kraštinė lygi 0,2 m. Įrodysime, kad bent viename jų bus bent 3 iš pažymėtųjų taškų. Jei kiekviename kvadratėlyje (viduje arba kraštinėse) būtų ne daugiau kaip 2 taškai, tai iš viso turėtume ne daugiau 50 taškų ($2 \cdot 25 = 50$). Vadinasi, yra bent vienas kvadratėlis, kuriame yra ne mažiau kaip 3 taškai.

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Klasėje yra 30 mokinių. Mikas Petraitis diktante padarė 13 klaidų, o kiti – mažiau. Įrodykite, kad bent 3 mokiniai padarė po vienodą klaidų skaičių (galbūt ir visai nepadarė klaidų).
2. Koks turėtų būti mažiausias mokinių skaičius mokykloje, kad bent du mokiniai švęstų savo gimtadienį tą patį mėnesį ir tą pačią dieną?
3. Vienoje mokykloje yra 1076 mokiniai, kurie mokosi 43 klasėse. Įrodykite, kad yra klasė, kurioje mokosi ne mažiau kaip 26 mokiniai.
4. Įrodykite, kad yra skaičiaus 2005 kartotinis, kurio visi skaitmenys tik vienetai ir nuliai.
5. Įrodykite, kad tarp bet kurių 65 natūraliųjų skaičių galima rasti 9 skaičius, kurių suma dalijasi iš 9.
6. Įrodykite, kad tarp bet kurių n natūraliųjų skaičių galima rasti keletą skaičių, kad jų suma dalytųsi iš n , arba vieną skaičių, kuris dalytųsi iš n .
7. Futbolo pirmenybėse dalyvauja 30 komandų, kurios tarpusavyje turi susitikti tik po vieną kartą. Įrodykite, kad bet kuriuo varžybų momentu yra bent dvi komandos, susitikusios po vienodą skaičių kartų.
8. Kvadrato kraštinės ilgis 1m, pažymėtas 51 taškas. Įrodykite, kad kurie nors trys iš pažymėtųjų taškų yra skritulio, kurio spindulys lygus $\frac{1}{7}$, viduje.
9. Nubrėžtos 7 atkarpos. Kiekviena iš jų ilgesnė už 10 cm, bet trumpesnė už 1 m. Įrodykite, kad iš šių atkarpų galima sudaryti bent vieną trikampį.
10. Kiekviena iš devynių tiesių dalija kvadratą į du keturkampius, kurių plotų santykis 1:3. Įrodykite, kad bent trys iš šių tiesių eina per vieną tašką.

III. DIOFANTINĖS LYGTYS

Eugenijus Stankus
(Vilniaus universitetas)

Ne kartą esame sprendę lygtis

$$ax + by = c, \quad (1)$$

kai a, b, c – realieji skaičiai, o x ir y – nežinomieji. Tokios lygties *sprendiniu* vadinama realiųjų skaičių pora (x, y) , tenkinanti (1) lygtį. Kai bent vienas iš koeficientų a arba b yra nelygus nuliui, ši lygtis turi be galo daug sprendinių. Jeigu, pavyzdžiui, $b \neq 0$, tai visų (1) lygties sprendinių aibę galime užrašyti taip: $\{(x, -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}), x \in \mathbb{R}\}$.

Lygtys, turinčios be galo daug sprendinių, vadinamos *neapibrėžtosiomis lygtimis*. Vadinasi, (1) lygtis yra neapibrėžtoji.

Vienas iš įdomesnių skaičių teorijos uždavinių yra neapibrėžtųjų algebrinių lygčių su sveikaisiais koeficientais sveikųjų sprendinių radimo uždavinys. Tokios lygtys dar vadinamos *diofantinėmis lygtimis*. Pavyzdžiui, kai (1) lygtyje $a, b, c \in \mathbb{Z}$, ir ieškoma šios lygties *sveikųjų sprendinių*, tai sakoma, jog sprendžiama *pirmojo laipsnio (1) diofantinė lygtis*. Tuomet sveikųjų skaičių pora (x, y) , $x, y \in \mathbb{Z}$, tenkinanti lygtį, vadinama tiesiog lygties *sveikuoju sprendiniu*.

Kartais tenka spręsti ir sudėtingesnes diofantines lygtis, pavyzdžiui, $x^2 - y^2 + xy = 0$ ar pan. Tokių lygčių sprendiniai taip pat yra sveikųjų skaičių poros (x, y) , tenkinančios lygtį.

Diofantines lygtis sprendė daug žymių matematikų – senovės graikų matematikas Pitagoras (VI a. pr. Kr.), Aleksandrijos matematikas Diofantas (II–III a. pr. Kr.), kurio vardu ir vadinamos tokios lygtys, šių laikų matematikai Ferma (XVII a.), Lagranžas (XVIII a.), Oileris (XVIII a.) ir daugelis kitų. Tačiau nepaisant visų kartų matematikų pastangų iki šiol diofantinių lygčių teorijoje yra likę daug neišspręstų uždavinių. Pavyzdžiui, ir dabar problemiška surasti trečiojo bei aukštesnių laipsnių diofantinių lygčių visus sprendinius. Netgi nežinoma, ar tokios lygtys turi be galo daug sprendinių, ar jų sprendinių aibę yra baigtinė.

1 pavyzdys. Nedideliame kolektyve renkant labdarą kiekvienas vyras į labdaros fondą įmokėjo po 5 Lt, o kiekviena moteris – po 3 Lt. Iš viso buvo surinkti 32 Lt. Kiek vyrų ir kiek moterų šiame kolektyve?

Norėdami atsakyti į šį klausimą, pažymėkime x – vyrų skaičių, o y – moterų skaičių kolektyve. Pagal sąlygą šie skaičiai yra natūralieji ir turi tenkinti lygtį $5x + 3y = 32$. Taigi turime rasti diofantinės lygties natūraliuosius sprendinius. Nesunku patikrinti, kad tokie sprendiniai yra $x = 1, y = 9$ arba $x = 4, y = 4$.

Matome, kad kartais diofantinių lygčių sprendinius galima nustatyti tiesioginiu perrinkimu. Sunkiau būtų užrašyti visus tokių lygčių sveikuosius sprendinius.

Nagrinėkime (1) lygtį ir laikykime, kad jos koeficientai a, b, c – sveikieji skaičiai, neturintys didesnio už vienetą bendrojo daliklio, t. y. $DBD(a, b, c) = 1$. Jeigu visi koeficientai dalytųsi iš skaičiaus, didesnio už vienetą, tai abi lygties puses galėtume padalyti iš šio skaičiaus.

Prisiminsime, kad sveikųjų skaičių a ir b didžiausiu bendru dalikliu vadinamas didžiausias skaičius, iš kurio dalijasi ir a , ir b . Jis žymimas $DBD(a, b)$ arba paprasčiau tiesiog (a, b) . Analogiškai didžiausias bendras daliklis suvokiamas ir kai skaičių yra ne du, o daugiau.

Kartais iš karto galime pasakyti, kuomet (1) lygtis sveikaisiais skaičiais neišsprendžiama.

1 teorema. Jeigu (1) lygties koeficientų a ir b didžiausias bendras daliklis yra didesnis už vienetą, t. y. $(a, b) = d > 1$, o c nesidalija iš d , tai lygtis sveikųjų sprendinių neturi.

Irodymas. Kadangi $(a, b) = d > 1$, tai $a = d \cdot a_1$ ir $b = d \cdot b_1$, $(a_1, b_1) = 1$. Įrašę šias išraiškas į lygtį, turėsime: $da_1x + db_1y = c \Leftrightarrow a_1x + b_1y = \frac{c}{d}$. Pastaroji lygtis sveikųjų sprendinių neturi, nes reiškinys

$\frac{c}{d}$ nėra sveikasis skaičius.

Išvada. Jeigu lygtis $ax + by = c$, $(a, b) = d > 1$, turi sprendinį, tai c dalijasi iš d .

Pirmiausia išstirkime paprasčiausius (1) diofantinės lygties atvejus.

2 teorema. Lygties $ax + by = 0$, $(a, b) = 1$, visi sveikieji sprendiniai užrašomi formulėmis $x = -bt, y = at$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Irodymas. Išreiškę iš lygties kintamąjį y , turėsime $y = -\frac{a}{b}x$. Šio kintamojo reikšmė bus sveikasis skaičius tik tuomet, kai kintamojo x reikšmė dalysis iš b . Paimkime $x = -b \cdot t$ ($t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Tuomet $y = a \cdot t$.

Pereinant prie bendrojo atvejo, iš pradžių įrodysime, kad užtenka žinoti vieną pirmojo laipsnio diofantinės lygties sprendinį – tuomet surasime ir visus.

3 teorema. Pažymėkime (x_0, y_0) kuri nors diofantinės lygties $ax + by = c$, $(a, b) = 1$, sprendinį. Tuomet šios lygties sprendinių aibė yra $\{(x, y) : x = x_0 - bt, y = y_0 + at, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

Irodymas. Tarkime, (x, y) yra bet kuris nagrinėjamos lygties sprendinys. Tuomet iš lygybės $ax + by = c$ atėmę lygybę $ax_0 + by_0 = c$, gausime $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$. Iš čia $y - y_0 = \frac{a(x_0 - x)}{b}$. Kadangi $y - y_0$ sveikasis skaičius, o a ir b yra tarpusavyje pirminiai, tai $x_0 - x = bt$, $t \in \mathbb{Z}$. Tuomet $y - y_0 = at$.

Taigi gavome diofantinės lygties $ax + by = c$ bendrąjį sprendinį

$$x = x_0 - bt, y = y_0 + at, t \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Ir atvirkščiai, bet kuri sveikųjų skaičių pora, užrašyta (2) formulėmis, yra diofantinės lygties $ax + by = c$ sprendinys (įsitikinkite).

Vadinasi, jeigu mokėsime surasti vieną tiesinės diofantinės lygties sprendinį, tai pagal 3 teoremą užrašysime ir visą šios lygties sprendinių aibę.

Dar atkreipkime dėmesį, kad 2 teorema yra atskirasis 3 teoremos atvejis su $c = 0$.

2 pavyzdys. Išspręskime diofantinę lygtį $5x + 3y = 32$, t. y. suraskime lygties bendrąjį sprendinį.

Sprendimas. Nagrinėjamos lygties bendrąjį sprendinį pagal 3 teoremą galime užrašyti iš karto, nes žinomi netgi du jos sprendiniai (žr. 1 pavyzdį). Taigi $x = 1 - 3t, y = 9 + 5t, t \in \mathbb{Z}$, yra bendrasis sprendinys. Taip pat bendrąjį sprendinį galima užrašyti ir taip: $x = 4 - 3t, y = 4 + 5t, t \in \mathbb{Z}$. Nesunku įsitikinti, kad tiek pirmoji, tiek

antroji bendrojo sprendinio išraiška reiškia tą pačią sveikųjų skaičių porų aibę.

Dabar įsivaizduokime, kad nežinome nė vieno lygties sprendinio. Pabandydysime surasti šios lygties bendrąjį sprendinį tokiu būdu (I būdas).

Iš lygties $5x + 3y = 32$ išreikškime kintamąjį y : $y = \frac{32 - 5x}{3} = -x + \frac{32 - 2x}{3}$. Kadangi x ir y – sveikieji skaičiai, tai ir $\frac{32 - 2x}{3}$ – sveikasis. Pažymėkime jį: $t_1 = \frac{32 - 2x}{3}$. Iš čia $x = \frac{32 - 3t_1}{2} = -t_1 + \frac{32 - t_1}{2}$.

Toliau $t_2 = \frac{32 - t_1}{2} \in \mathbb{Z}$ ir iš čia $t_1 = 32 - 2t_2$ yra sveikasis skaičius, kai $t_2 \in \mathbb{Z}$. Tuomet

$$x = \frac{32 - 3t_1}{2} = \frac{32 - 3(32 - 2t_2)}{2} = -32 + 3t_2,$$

$$y = \frac{32 - 5x}{3} = \frac{32 - 5(-32 + 3t_2)}{3} = 64 - 5t_2, t_2 \in \mathbb{Z}.$$

Užrašydami bendrąjį sprendinį, sveikąjį skaičių t_2 žymėkime tiesiog t . Tuomet bendrasis lygties sprendinys yra $x = -32 + 3t$, $y = 64 - 5t$, $t \in \mathbb{Z}$.

Pateiksime dar vieną metodą tokioms lygtims spręsti (II būdas). Šiuo metodu naudojantis tam tikra racionaliųjų skaičių išraiška (vadinama grandinine trupmena) galima gauti lygties atskirąjį sprendinį, o po to pagal 3 teoremą – užrašyti ir bendrąjį sprendinį.

Racionalųjį skaičių $\frac{5}{3}$ užrašykime taip:

$$\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}.$$

Šitoks trupmenos $\frac{5}{3}$ užrašymas vadinamas jos skleidiniu *grandinine trupmena*. Atmeskime iš šio skleidinio paskutinę jos grandį, t. y. trupmeną $\frac{1}{2}$. Gausime skaičių $1 + \frac{1}{1} = 2$, kurį atimkime iš pradinės

trupmenos: $\frac{5}{3} - 2 = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 5 - 3 \cdot 2 = -1$. Padauginę šios lygybės abi puses iš (-32) , turėsime $5 \cdot (-32) + 3 \cdot 64 = 32$. Sugretinę šią lygybę su nagrinėjama diofantine lygtimi $5x + 3y = 32$, matome, kad $(-32; 64)$ yra šios lygties sprendinys. Taigi bendrasis sprendinys gali būti užrašytas ir taip:

$$x = -32 - 3t, y = 64 + 5t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Išspręskime dar vieną diofantinę lygtį abiem paminėtais metodais.

3 pavyzdys. Suraskime diofantinės lygties $127x - 52y = 1$ bendrąjį sprendinį.

Sprendimas.

I būdas. Iš lygties $127x - 52y = 1$ išreiškiame y :

$$y = \frac{127x - 1}{52} = 2x + \frac{23x - 1}{52}.$$

Pažymėkime $t_1 = \frac{23x - 1}{52}$ ir tuomet

$$x = \frac{52t_1 + 1}{23} = 2t_1 + \frac{6t_1 + 1}{23}.$$

Pažymėkime $t_2 = \frac{6t_1 + 1}{23}$. Iš čia $t_1 = \frac{23t_2 - 1}{6} = 3t_2 + \frac{5t_2 - 1}{6}$. Tegu vėl:

$$t_3 = \frac{5t_2 - 1}{6} \Rightarrow t_2 = \frac{6t_3 + 1}{5} = t_3 + \frac{t_3 + 1}{5}. \text{ Toliau } t_4 = \frac{t_3 + 1}{5} \Rightarrow t_3 = 5t_4 - 1$$

- sveikasis skaičius, kai $t_4 \in \mathbb{Z}$. Tuomet:

$$t_2 = \frac{6t_3 + 1}{5} = \frac{6(5t_4 - 1) + 1}{5} = 6t_4 - 1$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{23t_2 - 1}{6} = \frac{23(6t_4 - 1) - 1}{6} = 23t_4 - 4 \Rightarrow$$

$$x = \frac{52t_1 + 1}{23} = \frac{52(23t_4 - 4) + 1}{23} = 52t_4 - 9, t_4 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$y = \frac{127x - 1}{52} = \frac{127(52t_4 - 9) - 1}{52} = 127t_4 - 22.$$

Taigi lygties bendrasis sprendinys (rašant $t_4 = t$) yra $x = 52t - 9, y = 127t - 22, t \in \mathbb{Z}$.

II būdas. Pirmiausia trupmeną $\frac{127}{52}$ užrašykime grandinine trupmena:

$$\frac{127}{52} = 2 + \frac{23}{52} = 1 + \frac{1}{\frac{52}{23}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{6}{23}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{23}{6}}}$$

$$2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{5}{6}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{6}{5}}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}$$

Sutrumpintai ši grandininė trupmena paprastai užrašoma taip: $\frac{127}{52} = [2, 2, 3, 1, 5]$. Atmeskime šios grandininės trupmenos paskutinę

grandį $\frac{1}{5}$ ir apskaičiuokime gautąją grandininę trupmeną $[2, 2, 3, 1]$:

$$2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}} = 2 + \frac{1}{\frac{9}{4}} = 2 + \frac{4}{9} = \frac{22}{9}.$$

Apskaičiavę $\frac{127}{52} - \frac{22}{9} = -\frac{1}{52 \cdot 9}$ ir abi šios lygybės puses padauginę iš skaičiaus $(-52 \cdot 9)$, gauname lygybę $127 \cdot (-9) - 52 \cdot (-22) = 1$. Taigi radome lygties sprendinį $(-9; -22)$. Pagal 3 teoremą bendrasis lygties sprendinys toks:

$$x = -9 + 52t, \quad y = -22 + 127t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Spręsdami pavyzdžius naudojome grandinines trupmenas. Tačiau ar visuomet diofantinės lygties $ax + by = c$, kai $(a, b) = 1$, koeficientų santykį $\frac{a}{b}$ galėsime užrašyti baigtine grandinine trupmena? Taip pat dar neaišku, ar iš to, kad c dalijasi iš $d = (a, b)$, išplaukia diofantinės lygties $ax + by = c$ išsprendžiamumas.

Norint atsakyti į šiuos klausimus, reikia kai kurių skaičių teorijos žinių.

Dalybos su liekana algoritmas. Bet kuriems dviems sveikiesiems skaičiams a, b ($a \neq 0, b \neq 0$) egzistuoja sveikieji skaičiai q ir r ($0 \leq r < |b|$), su kuriais galioja lygybė $a = b \cdot q + r$.

Tai įprastinė sveikųjų skaičių dalyba. Tik nustatant q ir r reikėtų atkreipti dėmesį į atvejus, kai bent vienas iš skaičių a, b yra neigiamas. Pavyzdžiui, kai $a = -26, b = 7$, taikant šį algoritmą reikia rašyti $-26 = 7 \cdot (-4) + 2$, tačiau ne $-26 = 7 \cdot (-3) - 5$. Taigi čia $q = -4, r = 2$. Plačiau skaičių dalumas nagrinėjamas leidinyje [2].

Euklido algoritmas. Euklido algoritmu vadinamas nuoseklus dalybos su liekana taikymas, kai iš pradžių sveikiesiems skaičiams a ir b surandami q_0 ir r , po to skaičiams b ir r surandami q_1 ir r_1 , po to skaičiams r ir r_1 surandami q_2 ir r_2 , ir taip procesas tęsiamas kol gaunama liekana, kuri lygi nuliui. Tarkime, kad $r_{k+1} = 0$. Tai galime užrašyti lygybėmis:

$$\begin{aligned}
 a &= bq_0 + r, 0 \leq r < |b|; \\
 b &= rq_1 + r_1, 0 \leq r_1 < r; \\
 r &= r_1q_2 + r_2, 0 \leq r_2 < r_1; \\
 &\dots\dots\dots \\
 r_{k-3} &= r_{k-2}q_{k-1} + r_{k-1}, 0 \leq r_{k-1} < r_{k-2}; \\
 r_{k-2} &= r_{k-1}q_k + r_k, 0 \leq r_k < r_{k-1}; \\
 r_{k-1} &= r_kq_{k+1}.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Taigi, pritaikę Euklido algoritmą skaičiams a ir b , gauname dalmenų $q_0, q_1, q_2, \dots, q_k, q_{k+1}$ seką (šie dalmenys vadinami *nepilnaisiais santykiais*) ir liekanų r, r_1, r_2, \dots, r_k seką [1].

Atkreipkime dėmesį, kad kiekviena liekana yra būtina mažesnė už prieš ją einančią liekaną. Dėl to *Euklido algoritmas visuomet turi pabaigą* – yra baigtinis.

Be to, *paskutinioji nelygi nuliui liekana r_k yra skaičių a ir b didžiausias bendras daliklis: $r_k = (a, b)$.*

Tai išplaukia iš (3) lygybių ir sveikųjų skaičių dalumo savybių. Tegu $(a, b) = d$. Tuomet iš pirmosios lygybės galime teigti, kad r dalijasi iš d , tuomet iš antrosios – r_1 dalijasi iš d , ir taip toliau, r_k dalijasi iš d .

Iš paskutiniosios lygybės matome, kad r_{k-1} dalijasi iš r_k , o iš aukštesnės lygybės – r_{k-2} dalijasi iš r_k , ir t.t. eidami aukštyn gausime, kad b dalijasi iš r_k ir a dalijasi iš r_k , taigi ir d dalijasi iš r_k . Kadangi r_k dalijasi iš d ir d dalijasi iš r_k , tai $r_k = d$.

4 pavyzdys. Pritaikykime Euklido algoritmą skaičiams $a = 127$, $b = 52$.

Sprendimas. Pagal (3) formules gauname:

$$127 = 52 \cdot 2 + 23,$$

$$52 = 23 \cdot 2 + 6,$$

$$23 = 6 \cdot 3 + 5,$$

$$6 = 5 \cdot 1 + 1,$$

$$5 = 1 \cdot 5.$$

Pastaba. Kadangi paskutinioji nelygi nuliui liekana yra 1, tai iš Euklido algoritmo matome, kad $(a, b) = 1$.

Dar atkreipkime dėmesį į Euklido algoritmo, pritaikyto sveikiesiems skaičiams a ir b , ryšį su trupmenos $\frac{a}{b}$ skleidiniu grandinine trupmena. Ką tik nagrinėto 4 pavyzdžio nepilnieji santykiai yra $2, 2, 3, 1, 5$ – tokie pat kaip ir grandininės trupmenos $[2, 2, 3, 1, 5] = \frac{127}{52}$ elementai.

Iš Euklido algoritmo išplaukia, kad *racionalusis skaičius $\frac{a}{b}$ vienareikšmiškai išreiškiamas baigtine grandinine trupmena, be to, jos elementai yra Euklido algoritmo, pritaikyto skaičiams a ir b , nepilnieji santykiai.*

Vėl grįžkime prie diofantinių lygčių.

4 teorema. Tarkime, $(a, b) = d$. Tuomet egzistuoja sveikieji skaičiai m ir n , su kuriais galioja lygybė $am + bn = d$.

Irodymas. Pritaikykime Euklido algoritmą. Iš (3) lygybių, pradėję priešpaskutiniąją ir nuosekliai įrašydami liekanų $r_{k-1}, r_{k-2}, \dots, r$ išraiškas, gausime:

$$\begin{aligned} d = r_k &= r_{k-2} - r_{k-1}q_k = r_{k-2} - (r_{k-3} - r_{k-2}q_{k-1})q_k = \\ &= -r_{k-3}q_k + r_{k-2}(1 + q_kq_{k-1}) = \dots = ma + nb. \end{aligned}$$

Čia m ir n – sveikieji skaičiai.

5 teorema. Lygtis $ax + by = c$, $(a, b) = d > 1$, turi sprendinį, tik tuomet, kai c dalijasi iš d .

Irodymas. Jeigu lygtis turi sprendinį, tai c dalijasi iš d (1 teoremos išvada).

Įrodykime: jei c dalijasi iš d , tai lygtis turi sprendinį.

Pagal 4 teoremą yra sveikieji skaičiai m ir n , su kuriais galioja lygybė $am + bn = d$. Kadangi c dalijasi iš d , tai $c = d \cdot u$, $u \in Z$. Tuomet $a(m \cdot u) + b(n \cdot u) = d \cdot u \Leftrightarrow a(m \cdot u) + b(n \cdot u) = c$. Taigi lygtis $ax + by = c$ turi sprendinį – pora $(m \cdot u, n \cdot u)$ yra lygties sprendinys.

Išsamiau išnagrinėjome tik pirmojo laipsnio su dviem nežinomaisiais diofantines lygtis. Minėti teiginiai nesunkiai apibendrinami ir pirmojo laipsnio diofantinėms lygtims su didesniu nežinomųjų skaičiumi. Tačiau šių klausimų, kaip ir aukštesnio laipsnio diofantinių lygčių, čia nenagrinėsime.

Literatūra

1. R. Skrabutėnas. Grandininės trupmenos. Jaunajam matematikui 3. Danieliaus leidykla, Vilnius, 2002, 15–4.
2. E. Stankus. Skaičių dalumas. Jaunajam matematikui 3. Danieliaus leidykla, Vilnius, 2002, 8–14.

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Raskite visus sveikuosius lygties $x + y = xy$ sprendinius.
2. Raskite visus sveikuosius lygties $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$ sprendinius.
3. Raskite sveikuosius skaičius q ir r , su kuriais galioja lygtybė $a = b \cdot q + r$, $0 \leq r < |b|$, kai $a = -38743$, $b = 213$.
4. Naudodamiesi Euklido algoritmu raskite skaičių 546 ir 231 bendrą didžiausią daliklį.
5. Raskite racionalųjį skaičių, užrašytą grandinine trupmena $[-7, 3, 1, 9]$.
6. Skaičių $\frac{129}{25}$ užrašykite grandinine trupmena.
7. Ar diofantinė lygtis $15x + 12y = 25$ turi sprendinių? Atsakymą pagrįskite.
8. Raskite diofantinės lygties $41x + 17y = 2$ bendrąjį sprendinį.
9. Išspręskite diofantinę lygtį $15x + 84y = 39$ jos bendrąjį sprendinį užrašydami dviem ekvivalenčiomis išraiškoms.
10. Raskite tiesės $10x + 11y = 15$ taškus su sveikosiomis koordinatėmis, kurių abscisės priklauso intervalui $[-10; 20]$.



IV. DAUGIANARIŲ DALUMAS

Laima Papreckienė

(Kauno technologijos universitetas)

1. Vienanariai ir daugianariai.

Vienanariu vadinama skaitinio koeficiento ir raidėmis pažymėtų kintamųjų sandauga. Pavyzdžiui, $2ab$, x^2y^2z , $3,14d$ ir t. t. *Panašiaisiais* vadinami vienanariai, kurie skiriasi tik koeficientais. Pavyzdžiui, vienanariai $5a^3bc^2$ ir $11a^3bc^2$ yra panašieji.

Daugianariais vadinama kelių vienanarių suma. Tokios sumos dar vadinamos *sveikaisiais racionaliaisiais reiškiniais*, siekiant juos atskirti nuo trupmeninių racionaliuųjų reiškinų, kuriuose skaičius ir raidinius kintamuosius be sudėties ir daugybos ženklų dar sieja ir dalybos ženklas.

Jeigu vietoj kiekvieno kintamojo įrašytume nurodytos aibės kurį nors skaičių, tai gautume to *daugianario skaitinę reikšmę*. Pavyzdžiui, daugianario $P(x) = 5x^3 - 3x^2 + x + 4$ reikšmė, kai $x = 2$, lygi

$$P(2) = 5 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 + 4 = 40 - 12 + 6 = 34.$$

Du daugianariai yra vadinami *tapačiaisiais*, jeigu su visomis kintamųjų reikšmėmis jų atitinkamos skaitinės reikšmės sutampa. Lygybė, siejanti tapačiuosius reiškinius, vadinama tapatybe. Reiškinių pakeitimas jam tapačiu reiškiniumi vadinamas *tapačiuoju pertvarkiu*.

Šioje temoje nagrinėsime *vienanarius* Ax^k , $k = 0, 1, 2, \dots$, su vienu kintamuoju ir iš jų sudarytus *daugianarius*:

$$P(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n, \quad A_n \neq 0.$$

Tokie daugianariai yra vadinami *kanoninės formos daugianariais*. Kartais daugianariai yra užrašomi kintamojo laipsnių mažėjimo tvarka.

Daugianario $P(x)$ *laipsniu* vadinamas didžiausias kintamojo x laipsnio rodiklis n , o daugianario *vyriausiuoju nariu* – narys A_nx^n , $A_n \neq 0$, su didžiausiuoju laipsnio rodikliu. Pirmojo laipsnio daugianariai paprastai yra vadinami *dvinaisiais*.

Daugianario $P(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n$ koeficientai $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ gali būti bet kurie realieji skaičiai ($A_n \neq 0$).

Matematikoje daug dėmesio skiriama daugianariams su sveikaisiais koeficientais. Tai susiję ir su tuo, kad kiekvieną daugianarį $P(x)$ su racionaliaisiais koeficientais galima išreikšti to paties laipsnio daugianariu $Q(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots + B_nx^n$ su sveikaisiais koeficientais: $P(x) = \lambda Q(x)$; čia λ – kuris nors racionalusis skaičius.

Algebros vadovėliuose įrodytos šios teoremos.

Teorema apie nulį. Jeigu su visomis realiosiomis kintamojo reikšmėmis daugianario reikšmė lygi nuliui, tai visi jo koeficientai lygūs nuliui.

Teorema apie tapatumą. Du n -tojo laipsnio daugianariai

$$P(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n$$

ir

$$Q(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots + B_nx^n$$

yra tapatūs (rašoma $P(x) \equiv Q(x)$) tik tada, kai jų atitinkami koeficientai prie vienodų kintamojo laipsnių yra lygūs, t. y. $A_k = B_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Teorema apie daugybą. Dviejų daugianarių

$$P(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n$$

ir

$$Q(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots + B_mx^m \quad (A_n \neq 0, B_m \neq 0)$$

sandauga yra $(m + n)$ laipsnio daugianaris.

Lengva sudauginti du dvinarius:

$$(A_0 + A_1x)(B_0 + B_1x) = A_0B_0 + (A_0B_1 + A_1B_0)x + A_1B_1x^2.$$

Pavyzdžiui, $(2 + 3x)(4 + 5x) = 8 + 22x + 15x^2$.

Daugiau atidumo reikia dauginant aukštesnio laipsnio daugianarius, nes kiekvieną pirmojo daugianario narį reikia sudauginti su kiekvienu antrojo daugianario nariu, sutraukti panašiuosius narius ir suteikti gautajam daugianariui kanoninę formą.

2. Daugianarių dalumas. Dviejų daugianarių dalyba yra panaši į sveikųjų skaičių dalybą, tačiau daug sudėtingesnė. Pirmiausia atkreipkime dėmesį, kad dalinio laipsnis turi būti nemažesnis už daliklio laipsnį.

Suformuluosime *daugianario* $P(x)$ dalybos iš *daugianario* $Q(x)$ taisyklę:

1) dalinį $P(x)$ ir daliklį $Q(x)$ išdėstyti kintamojo x laipsnių mažėjimo tvarka;

2) dalinio $P(x)$ vyriausiąjį narį padalyti iš daliklio $Q(x)$ vyriausiojo nario (gautasis vienanaris yra dalmens $T(x)$ pirmasis narys;

3) daliklį $Q(x)$ padauginti iš dalmens $T(x)$ pirmojo nario ir gautąjį rezultatą (daugianarį) atimti iš dalinio $P(x)$ (šis skirtumas yra pirmoji liekana $R_1(x)$);

4) pirmąją liekaną $R_1(x)$ dalyti iš $Q(x)$ (pagal šios taisyklės 2 ir 3 punktus); dalmens $T_1(x)$ pirmasis narys yra dalmens $T(x)$ antrasis narys, o antrasis narys yra dalmens $T(x)$ trečiasis narys.

Dalyba tęsiama tol, kol gaunama lygi nuliui liekana arba kol liekanos $R(x)$ laipsnis yra mažesnis už daliklio $Q(x)$ laipsnį.

Aišku, kad lygią nuliui liekaną taip pat galima žymėti simboliu $R(x)$; todėl abiem atvejais galioja formulė:

$$P(x) = Q(x) \cdot T(x) + R(x).$$

Kai dalybos liekana lygi nuliui, sakoma, kad *daugianaris* $P(x)$ *dalijasi iš daugianario* $Q(x)$. Šiuo atveju gauname lygybę: $P(x) = Q(x) \cdot T(x)$.

1 pavyzdys.

$$\begin{array}{r}
 \underline{3x^3 + 4x^2 + 7x + 2} \quad | \quad \underline{3x + 1} \\
 \underline{3x^3 + \quad x^2} \qquad \qquad \quad x^2 + x + 2 \\
 \hline
 1 \text{ liekana} \quad \underline{3x^2 + 7x + 2} \\
 \qquad \qquad \qquad \underline{3x^2 + \quad x} \\
 \hline
 2 \text{ liekana} \quad \underline{6x + 2} \\
 \qquad \qquad \qquad \underline{-6x + 2} \\
 \hline
 3 \text{ liekana} \quad \underline{0}
 \end{array}$$

2 pavydys.

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 4 \quad | 3x - 6 \\
 \hline
 x^2 - 2x \quad \quad \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \\
 \hline
 \quad 2x - 4 \\
 \quad \hline
 \quad \quad 2x - 4 \\
 \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

Abiejuose pavyzdžiuose liekanos yra lygios nuliui; todėl sakome, kad daugianaris $(3x^3 + 4x^2 + 7x + 2)$ dalijasi iš dvinarinio $(3x + 1)$, ir dvinaris $(x^2 - 4)$ dalijasi iš dvinarinio $(3x - 6)$. Antrojo dalmens koeficientai – trupmeniniai skaičiai.

Abu daugianarius galima išreikšti sandaugomis:

$$3x^3 + 4x^2 + 7x + 2 = (3x + 1)(x^2 + x + 2),$$

$$x^2 - 4 = (3x - 6) \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \right).$$

Daugianarių dalumo savybės:

1 savybė. Jei daugianariai $P(x)$ ir $S(x)$ dalijasi iš daugianario $Q(x)$, tai jų suma $P(x) + S(x)$ taip pat dalijasi iš daugianario $Q(x)$.

2 savybė. Jei daugianariai $P(x)$ ir $S(x)$ dalijasi iš daugianario $Q(x)$, tai jų sandauga $P(x)S(x)$ taip pat dalijasi iš daugianario $Q(x)$.

3 savybė. Jei daugianaris $P(x)$ dalijasi iš daugianario $Q(x)$, o $Q(x)$ – iš daugianario $U(x)$, tai $P(x)$ taip pat dalijasi iš $U(x)$.

Daugianarių $P(x)$ ir $Q(x)$ *bendruoju dalikliu* vadinamas daugianaris, iš kurio dalijasi šie abu daugianariai, o jų *didžiausiu bendruoju dalikliu* (žym. $D(P, Q)$) – daugianaris, kuris dalijasi iš kiekvieno jų bendrojo daliklio. Didžiausią bendrąjį daliklį $D(P, Q)$ galima rasti pagal vadinamąjį *Euklido algoritmą*. Tarus, kad daugianario $P(x)$ laipsnis yra nemažesnis už daugianario $Q(x)$ laipsnį, šį algoritmą galima užrašyti taip:

$$\begin{aligned}
 P(x) &= Q(x) \cdot T_1(x) + R_1(x), \\
 Q(x) &= R_1(x) \cdot T_2(x) + R_2(x), \\
 R_1(x) &= R_2(x) \cdot T_3(x) + R_3(x), \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

$$R_{m-2}(x) = R_{m-1}(x) \cdot T_m(x) + R_m(x),$$

$$R_{m-1}(x) = R_m(x) \cdot T_{m+1}(x);$$

tada

$$D(P, Q) = R_m(x).$$

3 pavyzdys. Pritaikę Euklido algoritmą raskime daugianarių

$$P(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 5x + 10$$

ir

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 8$$

bendrajį didžiausiąjį daliklį $D(P, Q)$.

Sprendimas. Daugianario $P(x)$ dalybos iš $Q(x)$ pirmoji *liekana* yra

$$R_1(x) = 4x^3 + 9x^2 + 13x + 10:$$

$$x^5 + x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 5x + 10 =$$

$$= (x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 8)x + (4x^3 + 9x^2 + 13x + 10).$$

Daugianario $Q(x)$ dalybos iš $R_1(x)$ *liekana* yra

$$R_2(x) = \frac{-39}{16}x^2 - \frac{39}{16}x - \frac{78}{16}:$$

$$(x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 8) =$$

$$= (4x^3 + 9x^2 + 13x + 10) \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{-39}{16}x^2 - \frac{39}{16}x - \frac{78}{16} \right).$$

Pirmoji *liekana* $R_1(x)$ dalijasi iš antrosios *liekanos* $R_2(x)$:

$$4x^3 + 9x^2 + 13x + 10 =$$

$$= \left(\frac{-39}{16}(x^2 + x + 2) \right) \left(\frac{-16}{39}(4x + 5) \right) = (x^2 + x + 2)(4x + 5).$$

Vadinasi, antroji *liekana* $R_2(x)$ yra ieškomasis daugianarių $P(x)$ ir $Q(x)$ didžiausias bendrasis daliklis:

$$D(P, Q) = -\frac{39}{16}x^2 - \frac{39}{16}x - \frac{78}{16}.$$

Šį daliklį galima užrašyti taip:

$$D(P, Q) = -\frac{39}{16}(x^2 + x + 2),$$

todėl daugianarį $(x^2 + x + 2)$ taip pat galima laikyti didžiausiu bendroju dalikliu.

3. Daugianario dalyba iš dvinario $(x-c)$.

Dalykime daugianarį

$$P(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + A_{n-2} x^{n-2} + \dots + A_1 x + A_0$$

iš dvinario $(x - c)$. Kadangi daliklis $(x - c)$ yra pirmojo laipsnio daugianaris, tai šios dalybos liekana R galėtų būti tik skaičius (nulinio laipsnio daugianaris); todėl toliau vietoj $R(x)$ rašysime R .

4 pavyzdys. Daugianarį $P(x) = 4x^3 + 9x^2 + 7x + 10$ dalykime iš dvinario $(x - c)$:

$$\begin{array}{r} 4x^3 + 9x^2 + 7x + 10 \quad | \quad x - c \\ \underline{4x^3 - 4cx^2} \\ (4c + 9)x^2 + 7x + 10 \\ \underline{(4c + 9)x^2 - (4c^2 + 9c)x} \\ (4c^2 + 9c + 7)x + 10 \\ \underline{(4c^2 + 9c + 7)x - (4c^3 + 9c^2 + 7c)} \\ 4c^3 + 9c^2 + 7c + 10 \end{array}$$

Taigi, gavome liekaną $R = 4c^3 + 9c^2 + 7c + 10$. Ši liekana yra daugianario $P(x)$ reikšmė taške $x = c$, t. y. $R = P(c)$.

Tokį pat rezultatą, t. y. $R = P(c)$ gautume dalydami iš dvinario $(x - c)$ bet kurio laipsnio daugianarį $P(x)$.

Šį teiginį 1779 m. paskelbė Bezu (*Bezout*¹), nagrinėjęs algebrinių lygčių teoriją.

Bezu teorema. Daugianario $P(x)$ dalybos iš dvinario $(x - c)$ liekana R yra lygi $P(c)$.

Skaičius c , su kuriuo galioja lygybė $P(c) = 0$, yra vadinamas *daugianario $P(x)$ šaknimi*.

¹ Etienne Bezout (1730–1783) – prancūzų matematikas.

IV TEMA

Taigi, galima teigti, kad *daugianaris* $P(x)$ dalijasi iš $(x - c)$ tada ir tik tada, kai c yra $P(x)$ šaknis.

Daugianario $P(x)$ dalybos iš dvinario $(x - c)$ dalmenį

$$T(x) = B_{n-1}x^{n-1} + B_{n-2}x^{n-2} + \dots + B_0$$

ir liekaną R galima rasti tiesiogiai dalijant kampu $P(x)$ iš $(x - c)$.

Pagal dalybos apibrėžimą turi galioti tapatybė:

$$\begin{aligned} A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + A_{n-2} x^{n-2} + \dots + A_1 x + A_0 &\equiv \\ &\equiv (B_{n-1} x^{n-1} + B_{n-2} x^{n-2} + \dots + B_0)(x - c) + R \end{aligned}$$

Sudauginus ir atlikus veiksmus, ją galima užrašyti taip:

$$\begin{aligned} A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + A_{n-2} x^{n-2} + \dots + A_1 x + A_0 &\equiv \\ \equiv B_{n-1} x^n + (B_{n-2} - B_{n-1}c)x^{n-1} + (B_{n-3} - B_{n-2}c)x^{n-2} + \dots + \\ + (B_0 - B_1c)x + R - B_0c. \end{aligned}$$

Remdamiesi teorema apie daugianarių tapatumą, gauname tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} B_{n-1} &= A_n, \\ B_{n-2} - B_{n-1}c &= A_{n-1}, \\ B_{n-3} - B_{n-2}c &= A_{n-2}, \\ \dots & \\ B_0 - B_1c &= A_1, \\ R - B_0c &= A_0. \end{cases}$$

Iš šios sistemos nesunku rasti koeficientus $B_{n-1}, B_{n-2}, B_{n-3}, \dots, B_1, B_0$ ir liekaną R .

Dalmens $T(x)$ koeficientams $B_k, k=0,1,2,\dots, n-1$, bei liekanai R apskaičiuoti sudaroma lentelė, kuri vadinama *Hornerio schema*:

	A_n	A_{n-1}	A_{n-2}
c	$B_{n-1} = A_n$	$B_{n-2} = A_{n-1} + B_{n-1} \cdot c$	$B_{n-3} = A_{n-2} + B_{n-2} \cdot c$
...		A_1	A_0
...		$B_0 = A_1 + B_1 \cdot c$	$R = A_0 + B_0 \cdot c$

Šį metodą 1802 m. paskelbė Ruffinis (*Ruffini*¹, o 1819 m. –Horneris (*Horner*²). Tačiau Kinijos matematikai jį žinojo žymiai anksčiau ir vadino Tian Juanio metodu.

Pritaikę Hornerio schemą, rasime jau nagrinėto (žr. 4 pvz.) daugianario $P(x) = 4x^3 + 9x^2 + 7x + 10$ dalybos iš dvinario $(x - c)$ liekaną. Lentelės pirmoje eilutėje įrašę šio daugianario koeficientus, antroje eilutėje rašome skaičių c ir su juo apskaičiuotus dalmens koeficientus ir liekaną:

	4	9	7	10
c	4	$9 + 4c$	$7 + (4c + 9) \cdot c =$ $= 4c^2 + 9c + 7$	$10 + (4c^2 + 9c + 7) \cdot c =$ $= 4c^3 + 9c^2 + 7c + 10$

5 pavyzdys. Įsitikinkime, kad skaičius 1 yra daugianario $x^3 + x - 2$ šaknis.

Sprendimas. Hornerio lentelės pirmoje eilutėje įrašome koeficientus prie x^3 , x^2 , x ir laisvąjį narį -2 , o antroje – skaičių 1 ir gaunamus rezultatus:

	1	0	1	-2
1	1	$0 + 1 = 1$	$1 + 1 = 2$	$R = -2 + 2 = 0$

Kadangi $R = 0$, tai 1 yra daugianario $(x^3 + x - 2)$ šaknis.

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Raskite daugianarių

$P(x) = 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 7$ ir $Q(x) = 5x^3 + 13x^2 + x + 21$ didžiausią bendrąjį daliklį $D(P, Q)$.

2. Raskite daugianarių

$P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 8x - 6$ ir $Q(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 8$ didžiausią bendrąjį daliklį $D(P, Q)$.

¹ Paolo Ruffini (1765-1822) – italų matematikas.

² William George Horner (1786–1837) – anglų matematikas.

3. Pritaikę Bezu teoremą, raskite daugianario $(x^3 + 6x^2 + 10x + 8)$ dalybos iš $(x + 4)$ ir iš $(x - 4)$ liekanas.

4. Pritaikę Bezu teoremą, patikrinkite, ar daugianaris

$$P(x) = 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 7$$

dalijasi iš dvinaro $(x - 1)$.

5. Daugianario $(6x^3 - 7x^2 - 16x + m)$ viena šaknis lygi 2. Raskite koeficientą m ir kitas dvi šio daugianario šaknis.

6. Su kuriomis koeficientų m ir n reikšmėmis daugianaris $(2x^3 + mx^2 - 13x + n)$ turi šaknis 2 ir 3? Apskaičiuokite ir trečiąją šaknį.

7. Pritaikę Hornerio schemą, apskaičiuokite daugianario

$$P(x) = 7x^6 - 14x^5 + 3x^3 - 7x^2 + 3x - 2$$

dalybos iš dvinaro

a) $x - 1$; **b)** $x + 1$; **c)** $x - 2$; **d)** $x + 2$

dalmens koeficientus ir liekaną.

8. Pritaikę Hornerio schemą, nustatykite, ar daugianaris $(4x^3 + 9x^2 + 13x + 10)$ dalijasi iš dvinaro $(x + 2)$.

9. Su kuria koeficiento m reikšme daugianaris

$$x^4 - x^3 + mx^2 + 10x - 4$$

turi dvi šaknis, kurių sandauga lygi 2?

10. Raskite didžiausią laipsnio rodiklį n , su kuriuo daugianaris $(x^5 - x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 11x + 3)$ dalijasi iš $(x - 1)^n$.



V. NIUTONO BINOMAS

Antanas Apynis, Juozas Šinkūnas

(Vilniaus universitetas, Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Kiek poabių turi aibė? Pirmiausia prisiminkime, kad aibė yra suvokiama kaip tam tikra matematinių objektų (skaičių, geometrinių figūrų ir kt.) visuma. Žodis „visuma“ čia tėra „aibės“ sinonimas. Visumą (aibę) sudarantys objektai yra vadinami *aibės elementais*. Aibės paprastai žymimos didžiosiomis raidėmis, pavyzdžiui, A, B, C, \dots , o jų elementai – mažosiomis. Užrašas $a \in A$ reiškia, kad a yra aibės A elementas, o užrašas $a \notin A$ reiškia, kad a nepriklauso aibei A (nėra jos elementas). Aibių elementai išvardijami arba kitaip apibūdinami vartojant skliaustelių porą $\{\dots\}$.

Tegu A ir B yra dvi aibės, kurių elementus sieja toks sąryšis:

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Tada sakoma, kad aibė A yra aibės B *poaibis*, o matematiniais simboliais užrašoma taip: $A \subset B$.

Pasirinkime aibę A , turinčią n elementų $a_i, i = 1, 2, \dots, n$. Ją galima užrašyti taip: $A = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$.

Atkreipkime dėmesį į tai, kad elementų rašymo tvarka (eiliškumas) yra visai nesvarbi, nes aibę nusako tik jos elementai. Pabandykime išsiaiškinti, kiek poabių turi aibė A .

Pirmiausia sugrupuokime aibės A poaibius pagal elementų skaičių juose. Turėsime vieną aibę be elementų (tai tuščioji aibė \emptyset – ji irgi laikoma poaibiu) ir vieną aibę, turinčią n elementų (tai aibė A). Aišku, kad galima sudaryti n poabių po vieną elementą:

$$\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}.$$

Tiek pat yra ir poabių po $(n-1)$ elementą:

$$\{a_1; a_2; \dots; a_{n-1}\}, \{a_1; a_2; \dots; a_{n-2}; a_n\}, \dots, \{a_2; a_3; \dots; a_n\}.$$

Aibės A poabių po k elementų ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) skaičių pažymėkime C_n^k . Apatinis indeksas n rodo aibės A elementų skaičių, o viršutinis indeksas k yra poaibio elementų skaičius. Tada bendras aibės A poabių skaičius (jį pažymėkime m) yra

$$m = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n. \quad (1)$$

Jau žinome, kad $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^{n-1} = n$ ir $C_n^n = 1$. Apskaičiuokime C_n^2, \dots, C_n^{n-2} . Pasirinkime $k \in \{2; \dots; n-2\}$ ir nagrinėkime aibės A poaibius po k elementų. Tegu G_1 yra poaibių, kuriems priklauso elementas a_1 , grupė, G_2 – poaibių, kuriems priklauso elementas a_2 , grupė. Analogiškai apibūdinkime poaibių grupes G_3, \dots, G_n . Aišku, kad kiekvienoje iš šių grupių yra C_{n-1}^{k-1} aibės A poaibių po k elementų. Susumavę visų grupių (G_1, G_2, \dots, G_n) poaibių skaičius gausime skaičių $n C_{n-1}^{k-1}$.

Lengva suvokti, kad, pavyzdžiui, poaibis $\{a_1; a_2; \dots; a_k\}$ yra k grupėse – G_1, G_2, \dots, G_k . Aišku, kad ir bet kuris kitas poaibis yra k grupėse. Vadinasi, skaičių C_n^k galima užrašyti tokia formule:

$$C_n^k = \frac{n C_{n-1}^{k-1}}{k}, \quad (k = 2, 3, \dots, n-2). \quad (2)$$

Pagal šią formulę gauname:

$$C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1) \cdot C_{n-2}^{k-2}}{k-1},$$

$$C_{n-2}^{k-2} = \frac{(n-2) \cdot C_{n-3}^{k-3}}{k-2},$$

$$\begin{aligned} \dots\dots\dots \\ C_{n-(k-2)}^{k-(k-2)} = C_{n-k+2}^2 = \frac{(n-k+2) \cdot C_{n-(k-1)}^{k-(k-1)}}{k-(k-2)} = \\ = \frac{(n-k+2) \cdot C_{n-k+1}^1}{2}, \end{aligned}$$

$$C_{n-k+1}^1 = n-k+1.$$

Nuosekliai įrašydami šias išraiškas į (2) formulę, gausime:

$$\begin{aligned} C_n^k &= \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \frac{n-2}{k-2} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+2}{2} \cdot (n-k+1) = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+2)(n-k+1)(n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{k(k-1)(k-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot (n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \end{aligned}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Taigi išvedėme formulę

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (k = 2, 3, \dots, n-2). \quad (3)$$

Atkreipkime dėmesį į tai, kad simboliui $0!$ yra priskiriama reikšmė 1 ($0! = 1$). Tada pagal (3) formulę gauname:

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!n!} = 1,$$

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = 1.$$

Taip pat gauname:

$$C_n^1 = n \text{ ir } C_n^{n-1} = n.$$

Matome, kad (3) formulė tinka poabiems skaičiuoti ir tada, kai $k \in \{0; 1; n-1; n\}$.

Išvada tokia: aibės $A = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ poabių po k elementų skaičių C_n^k , $k = 0, 1, 2, \dots, n$, galima rasti pagal formulę

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (4)$$

Pastaba. Aibės $A = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ poabiai po k elementų kombinatorikoje yra vadinami aibės A elementų *deriniais* po k elementų. Tada skaičius C_n^k yra vadinamas *derinių skaičiumi iš n elementų po k elementų* ($k = 0, 1, 2, \dots, n$).

Dar turėtume atsakyti į klausimą, kiek iš viso poabių turi aibė $A = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$. Kitaip sakant, turėtume rasti (1) sumą:

$$m = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n.$$

Tačiau šią problemą atidėkime. Prie jos sugrįšime nagrinėdami dvinario $(x+a)$ laipsnius $(x+a)^n$, $n = 1, 2, \dots$.

2. Dvinario kėlimas laipsniu. Nagrinėkime dvinario $(x+a)$ laipsnius $(x+a)^n$, kai n yra natūralieji skaičiai, o x ir a – kurie nors realieji skaičiai. Gerai žinome, kad

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$

$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3.$$

Gana lengva rasti ir aukštesnių laipsnių skleidinius:

$$\begin{aligned} (x + a)^4 &= (x + a)^3(x + a) = \\ &= (x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3) \cdot (x + a) = \\ &= x^4 + 3ax^3 + 3a^2x^2 + a^3 + ax^3 + 3a^2x^2 + 3a^3x + a^4 = \\ &= x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x + a)^5 &= (x + a)^4(x + a) = \\ &= x^5 + 4ax^4 + 6a^2x^3 + 4a^3x^2 + a^4x + ax^4 + 4a^2x^3 + 6a^3x^2 + 4a^4x + a^5 = \\ &= x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5. \end{aligned}$$

Analogiškai galima skaičiuoti ir toliau. Tačiau toks skaičiavimo būdas nelabai patogus. Todėl pabandykime atidžiau išsižūrėti kaip susidaro skleidinio koeficientai.

Pirmiausia atkreipkime dėmesį į tai, kad laipsnį $(x + a)^n$ su natūraliuoju rodikliu n galima suvokti kaip dvinarių $(x + a_1)$, $(x + a_2)$, ..., $(x + a_n)$ sandaugą

$$(x + a_1)(x + a_2) \cdots (x + a_n)$$

su sąlyga $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$.

Matome, kad

$$\begin{aligned} (x + a_1)(x + a_2) &= x^2 + (a_1 + a_2)x + a_1a_2, \\ (x + a_1)(x + a_2)(x + a_3) &= \\ &= x^3 + (a_1 + a_2)x^2 + a_1a_2x + a_3x^2 + (a_1 + a_2)a_3x + a_1a_2a_3 = \\ &= x^3 + (a_1 + a_2 + a_3)x^2 + (a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)x + a_1a_2a_3. \end{aligned}$$

Lengva suprasti, kad

$$\begin{aligned} (x + a_1)(x + a_2)(x + a_3)(x + a_4) &= x^4 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)x^3 + \\ &+ (a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4)x^2 + \\ &+ (a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4)x + a_1a_2a_3a_4. \end{aligned}$$

Dėsningumas aiškus – sandauga

$$(x + a_1)(x + a_2) \cdot \dots \cdot (x + a_n)$$

yra dauginanaris

$$x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_kx^{n-k} + \dots + b_{n-1}x + b_n,$$

kurio koeficientai $b_1, b_2, \dots, b_k, \dots, b_n$ yra tokie:

b_1 – skaičių a_1, a_2, \dots, a_n suma;

b_2 – sandaugų $a_i a_j$, $i < j$, suma;

.....

b_k – visų galimų sandaugų $a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_k}$, ($i_1 < i_2 < \dots < i_k$) suma, kai $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ yra aibės $\{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ skaičiai;

$$b_n = a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n.$$

Kai $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$, šiuos skleidinio koeficientus galima užrašyti tokiomis formulėmis:

$$b_1 = B_n^1 a, \quad b_2 = B_n^2 a^2, \quad \dots, \quad b_k = B_n^k a^k, \quad \dots, \quad b_n = B_n^n a^n.$$

Aišku, kad koeficientas B_n^1 yra aibės $A = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ poaibių po vieną elementą skaičius, koeficientas B_n^2 – šios aibės poaibių po du elementus skaičius ir t. t. Taigi

$$B_n^k = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

todėl

$$\begin{aligned} (x + a)^n &= x^n + B_n^1 a x^{n-1} + B_n^2 a^2 x^{n-2} + \dots + B_n^{n-1} a^{n-1} x + B_n^n a^n = \\ &= C_n^0 a^0 x^n + C_n^1 a x^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1} x^1 + C_n^n a^n x^0, \end{aligned}$$

o vartojant sumavimo simbolį Σ (sigma) – formule

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k x^{n-k}. \tag{5}$$

Gautoji formulė yra vadinama *Niutono binomu*. Formulės dėmenys $C_n^k a^k x^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, vadinami *Niutono binomo nariais*, o koeficientai C_n^k , $k = 0, 1, 2, \dots, n$ – *binominiais koeficientais*.

Kai x yra kintamasis dydis, o a – pastovus, tai pagal Niutono binomo formulę (5) gauname laipsnio $(x+a)^n$ skleidinį daugianariu dydžio x laipsniais:

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1} x + a^n.$$

Skaičiai $1, C_n^1 a, C_n^2 a^2, \dots, C_n^{n-1} a^{n-1}$ yra vadinami šio *skleidinio koeficientais*, o a^n – *laisvuju nariu*. Bendroji skleidinio koeficiento prie x^{n-k} formulė yra $C_n^k a^k$, $k=0, 1, 2, \dots, n-1$. Ji tinka ir laisvajam nariui (imant $k=n$).

Pastaba. Numeruodami Niutono binomo narius

$$C_n^k a^k x^{n-k}, \quad k=0, 1, 2, \dots, n,$$

vertosime tik natūraliuosius skaičius. Todėl narį $C_n^0 a^0 x^{n-0} = C_n^0 x^n = x^n$

vadinisime pirmuoju nariu, narį $C_n^1 a^1 x^{n-1} = C_n^1 a x^{n-1}$ – antruoju nariu ir t. t.

3. Binominių koeficientų savybės ir jų taikymo pavyzdžiai

1 savybė. $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$ (6)

Irodymas. Pagal Niutono binomo formulę gauname:

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n.$$

Taigi (6) lygybė tikrai galioja.

Išvada. Aibės $A = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ poabių skaičius yra lygus 2^n .

Ši išvada išplaukia iš (1) ir (6) formulių.

2 savybė. Su visais k , priklausančiais aibei $\{1; 2; \dots; n\}$ galioja lygybė

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \quad (7)$$

Irodymas. Pagal (5) formulę

$$(x+a)^{n+1} = C_{n+1}^0 x^{n+1} + C_{n+1}^1 a x^n + \\ + C_{n+1}^2 a^2 x^{n-1} + \dots + C_{n+1}^n a^n x + C_{n+1}^{n+1} a^{n+1},$$

o pagal laipsnio apibrėžimą ir tą pačią (5) formulę gauname:

$$(x+a)^{n+1} = (x+a)^n (x+a) = (C_n^0 x^n + C_n^1 a x^{n-1} + \\ + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1} x + C_n^n a^n)(x+a) =$$

$$\begin{aligned}
 &= C_n^0 x^{n+1} + C_n^1 a x^n + C_n^2 a^2 x^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1} x^2 + C_n^n a^n x + C_n^0 a x^n + \\
 &+ C_n^1 a^2 x^{n-1} + \dots + C_n^{n-2} a^{n-1} x^2 + C_n^{n-1} a^n x + C_n^n a^{n+1} = \\
 &= C_n^0 x^{n+1} + (C_n^1 + C_n^0) a x^n + (C_n^2 + C_n^1) a^2 x^{n-1} + \dots + \\
 &+ (C_n^{n-1} + C_n^{n-2}) a^{n-1} x^2 + (C_n^n + C_n^{n-1}) a^n x + C_n^n a^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Sugretinę abu rezultatus, matome, kad

$$C_{n+1}^0 = C_n^0 = 1, \quad C_{n+1}^n = C_n^n = 1$$

ir

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}, \quad \text{kai } k = 1, 2, \dots, n.$$

Atkreipkime dėmesį į tai, kad (7) formulė sutampa su Paskalio trikampio skaičių formule. Žinių apie Paskalio trikampį yra įvairiose matematikos knygose, taip pat V. Stakėno straipsnelyje „Paskalio trikampis“, kurį galima rasti LJMM šeštojoje knygelėje „Jaunajam matematikui“ (V.: Danieliaus leidykla, 2005) arba LJMM interneto svetainėje (www.mif.vu.lt/ljmm; 2003–2005, ketvirtoji užduotis).

$$\mathbf{3 \text{ savybė.}} \quad C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0. \quad (8)$$

Irodymas. Kai $x = 1$ ir $a = -1$, pagal Niutono formulę (5) gauname:

$$(1 + (-1))^n = C_n^0 + C_n^1 \cdot (-1) + C_n^2 \cdot (-1)^2 + \dots + C_n^{n-1} (-1)^{n-1} + C_n^n (-1)^n.$$

Taigi (8) formulė galioja.

Atkreipkime dėmesį, kad (8) formulę galima užrašyti ir kitaip.

Tarkime, kad n yra lyginis natūralusis skaičius. Tada jį galima užrašyti pavidalu $n = 2m$, m – natūralusis skaičius. Šiuo atveju

$(-1)^n = (-1)^{2m} = 1$, todėl (8) formulėje teigiamų dėmenų būtų tiek pat, kiek neigiamų, o jų sumos būtų lygios. Taigi turėtume formulę

$$C_{2m}^0 + C_{2m}^2 + \dots + C_{2m}^{2m} = C_{2m}^1 + C_{2m}^3 + \dots + C_{2m}^{2m-1}.$$

Nelyginio skaičiaus n atveju gautume tokią formulę:

$$C_{2m-1}^0 + C_{2m-1}^2 + \dots + C_{2m-1}^{2m-2} = C_{2m-1}^1 + C_{2m-1}^3 + \dots + C_{2m-1}^{2m-1}.$$

$$\mathbf{4 \text{ savybė.}} \quad C_n^k = C_n^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Irodymas. Taikydami (3) formulę, gauname:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ir

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Sugretinę abu rezultatus, matome, kad iš tiesų (9) lygybė galioja su visais k , kurie priklauso aibei $\{0; 1; 2; \dots; n\}$.

Išspręskime kelis uždavinius.

1 uždavinys. Apskaičiuokime sumą

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n,$$

kai C_n^k , $k = 1, 2, 3, \dots, n$, yra binominiai koeficientai.

Sprendimas. Pagal 4 savybę, t. y. (9) formulę

$$C_n^1 = C_n^{n-1}, \quad C_n^2 = C_n^{n-2}, \quad C_n^3 = C_n^{n-3}, \quad \dots, \quad C_n^n = C_n^0,$$

todėl

$$\begin{aligned} C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n &= \\ &= C_n^{n-1} + 2C_n^{n-2} + 3C_n^{n-3} + \dots + (n-1)C_n^1 + nC_n^0. \end{aligned}$$

Iš čia (ieškomąją sumą pažymėję S_n) gauname:

$$\begin{aligned} 2S_n &= (C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n) + \\ &+ (nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 + (n-3)C_n^3 + \dots + C_n^{n-1}) = \\ &= n(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n) = n \cdot 2^n \Rightarrow \\ &\Rightarrow S_n = n2^{n-1}. \end{aligned}$$

$$\text{Ats.: } C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n2^{n-1}.$$

2 uždavinys. Niutono binomo $(\sqrt[4]{3} + \sqrt[3]{4})^n$ trečio nario ir trečio nuo galo nario binominių koeficientų suma yra lygi 9 900. Raskime šio skleidinio racionaliuųjų narių skaičių.

Sprendimas. Pagal 4 savybę $C_n^2 = C_n^{n-2}$, todėl

$$C_n^2 + C_n^{n-2} = 9\,900 \Rightarrow 2C_n^2 = 9\,900 \Rightarrow C_n^2 = 4\,950.$$

Iš čia gauname $n = 100$.

Skleidinio (pagal Niutono binomo formulę) narius pažymėkime T_k , $k = 0, 1, 2, \dots, 100$.

Pagal (5) formulę:

$$T_k = C_{100}^k \cdot 4^{\frac{k}{3}} \cdot 3^{\frac{100-k}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 100.$$

Skaičius T_k yra racionalus tik tada, kai $k = 3l$ ir $100 - k = 4p$; čia l ir p – kurie nors neneigiami sveikieji skaičiai. Tada

$$100 - 4p = 3l \Rightarrow 4(25 - p) = 3l \Rightarrow 25 - p$$

dalijasi iš 3 $\Rightarrow p \in \{1; 4; 7; 10; 13; 16; 19; 22; 25\}$.

Ats.: devyni nariai.

3 uždavinys. Raskime x reikšmę, su kuria Niutono binomo

$$\left(\sqrt{2^{x-1}} + \sqrt[3]{2^{-x}} \right)^n$$

ketvirtasis narys yra 20 kartų didesnis už n , jeigu ketvirtojo nario binominio koeficiento ir antrojo nario binominio koeficiento santykis yra 5:1.

Sprendimas. Pagal sąlygą gauname:

$$C_n^3 : C_n^1 = 5 : 1 \Rightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} : \frac{n!}{1!(n-1)!} = 5 : 1 \Rightarrow n^2 - 3n - 28 = 0 \Rightarrow n = 7.$$

Toliau sprendžiame lygtį:

$$C_7^3 \left(\sqrt[3]{2^{-x}} \right)^3 \cdot \left(\sqrt{2^{x-1}} \right)^{7-3} = 20 \cdot 7 \Rightarrow \frac{7!}{3!4!} \cdot 2^{-x} \cdot 2^{2x-2} = 140 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 35 \cdot 2^{x-2} = 140; \quad x = 4.$$

Ats.: 4.

4. Polinominė formulė. Susipažinkime su dėsningumais, kuriuos galima stebėti skaičiuojant sumos $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$ laipsnį $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$, kai laipsnio rodiklis yra bet kuris natūralusis skaičius. Aišku, kad $m = 2$ atveju gautume Niutono binomo formulę

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x_1^{n-k} x_2^k.$$

Pažymėję $k_1 = n - k$, $k_2 = k$ ir pasinaudoję (3) formule, šį skleidinį galėtume užrašyti taip:

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{k_1+k_2=n} \frac{n!}{k_1!k_2!} x_1^{k_1} x_2^{k_2}; \quad (10)$$

čia simbolis „ $\sum_{k_1+k_2=n}$ “ reiškia, kad sumuojami visi dėmenys

$\frac{n!}{k_1!k_2!} x_1^{k_1} x_2^{k_2}$, kuriuose k_1 ir k_2 yra neneigiami sveikieji skaičiai, o jų suma ($k_1 + k_2$) lygi skaičiui n .

Taikydami Niutono binomo formulę, galėtume rasti trijų skaičių, tarkime x_1, x_2 ir x_3 sumos $(x_1 + x_2 + x_3)$ laipsnio $(x_1 + x_2 + x_3)^n$ skleidinį:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + x_3)^n &= ((x_1 + x_2) + x_3)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (x_1 + x_2)^{n-k} x_3^k = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\sum_{l=0}^{n-k} C_{n-k}^l x_1^{n-k-l} x_2^l \right) x_3^k. \end{aligned} \quad (11)$$

Atkreipkime dėmesį į vieną atvejį skaičiuojant sumą $\sum_{l=0}^{n-k} C_{n-k}^l x_1^{n-k-l} x_2^l$. Kai $k = n$, tai gausime $n - k = 0$. Tada turėsime

formalią sumą $\sum_{l=0}^0 C_0^l x_1^{-l} x_2^l$, sudarytą iš vienintelio dėmens

$$C_0^0 x_1^0 x_2^0 = C_0^0 = \frac{0!}{0!0!} = 1 \quad (\text{čia prisiminkime,}$$

kad $0! = 1$).

Pažymėję $k_1 = n - k - l$, $k_2 = l$ ir $k_3 = k$, (11) reiškinių galėtume užrašyti taip:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n = \sum_{k_3=0}^n \sum_{k_2=0}^{n-k_1-k_3} C_n^{k_3} C_{n-k_3}^{k_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}, \quad k_1 = n - k_2 - k_3.$$

Skaičiuodami sandaugą $C_n^{k_3} \cdot C_{n-k_3}^{k_2}$, gauname:

$$C_n^{k_3} \cdot C_{n-k_3}^{k_2} = \frac{n!}{k_3!(n-k_3)!} \cdot \frac{(n-k_3)!}{k_2!(n-k_3-k_2)!} = \frac{n!}{k_1! k_2! k_3!}.$$

Taigi

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n = \sum_{k_3=0}^n \sum_{k_2=0}^{n-k_1-k_3} \frac{n!}{k_1! k_2! k_3!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3};$$

čia $k_1 = n - k_2 - k_3$, t. y. $k_1 + k_2 + k_3 = n$.

Pastaroji formulė paprastai užrašoma taip:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{k_1! k_2! k_3!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}. \quad (12)$$

Nesigilindami į skaičiavimo bei įrodymo subtilumus, pateiksime tik galutinį laipsnio $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$ skleidinio daugianariu formulę:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}. \quad (13)$$

Ši formulė yra vadinama *polinomie formule*. Joje k_1, k_2, \dots, k_m yra sveikieji skaičiai, priklausantys aibei $\{0; 1; 2; \dots; n\}$. Sumuojama sudarant visus įmanomus jų rinkinius taip, kad laipsnių rodiklių suma $(k_1 + k_2 + \dots + k_m)$ būtų lygi n .

4 uždavinys. Raskime laipsnio $(1 + 2x + 3x^2)^{10}$ skleidinio x laipsniais koeficientą prie x^4 .

Sprendimas. Taikykime polinominę formulę (12), kai $x_1 = 1$, $x_2 = 2x$, $x_3 = 3x^2$. Gausime:

$$\begin{aligned} (1 + 2x + 3x^2)^{10} &= \sum_{k_1+k_2+k_3=10} \frac{10!}{k_1! k_2! k_3!} 1^{k_1} (2x)^{k_2} (3x^2)^{k_3} = \\ &= \sum_{k_1+k_2+k_3=10} \frac{10!}{k_1! k_2! k_3!} 1^{k_1} \cdot 2^{k_2} \cdot 3^{k_3} \cdot x^{k_2+2k_3}. \end{aligned} \quad (14)$$

Dėmenį su laipsniu x^4 turėsime tik tada, kai $k_2 + 2k_3 = 4$ ir $k_1 + k_2 + k_3 = 10$. Spręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} k_2 + 2k_3 = 4, \\ k_1 + k_2 + k_3 = 10. \end{cases}$$

Gausime tokius skaičius k_1, k_2 ir k_3 trejetus $(k_1 + k_2 + k_3)$: $(6; 4; 0)$, $(7; 2; 1)$, $(8; 0; 2)$.

Vadinasi, (14) sumoje yra trys dėmenys su x^4 . Belieka sudėti koeficientus:

$$\frac{10!}{6!4!0!}2^4 \cdot 3^0 + \frac{10!}{7!2!1!}2^2 \cdot 3^1 + \frac{10!}{8!0!2!}2^0 \cdot 3^2 = 8\,085.$$

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Apskaičiuokite:

$$3C_n^1 + 7C_n^2 + 11C_n^3 + \dots + (4n-1)C_n^n.$$

2. Esant kurioms x reikšmėms Niutono binomo $(5+2x)^{16}$ skleidinio ketvirtasis narys yra didesnis už gretimus jo narius?

3. Niutono binomo $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^n$ skleidinio trečiajame naryje nėra x .

Esant kurioms x reikšmėms šis narys lygus Niutono binomo $(1+x^3)^{30}$ skleidinio antrajam nariui?

4. Raskite Niutono binomo $\left(n + \frac{1}{n}\right)^n$ skleidinio didžiausią binominį koeficientą, jeigu ketvirtojo nuo pradžios ir ketvirtojo nuo galo narių sandauga lygi 14 400.

5. Skirtumas tarp Niutono binomo $(a+b)^{n+1}$ skleidinio trečiojo nario ir Niutono binomo $(a+b)^n$ skleidinio trečiojo nario binominių koeficientų lygus 225. Raskite Niutono binomo $(\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y})^n$ skleidinio narių su sveikaisiais x ir y laipsniais skaičių.

6. Niutono binomo

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}} \right)^n$$

skleidinio pirmieji trys koeficientai prie kintamojo x sudaro aritmetinę progresiją. Raskite visus skleidinio narius su sveikaisiais x laipsniais.

7. Kurio iš skleidinių, $(1+x^2-x^3)^{1000}$ ar $(1-x^2+x^3)^{1000}$, koeficientas prie x^{17} yra didesnis?

8. Raskite reiškinio $\left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2\right)^{10}$ skleidinio narį, kuriame nėra x .

9. Kiek yra narių su skirtingais x laipsniais reiškinio $(1+x^2+x^5)^{20}$ skleidinyje?

10. Raskite visus Niutono binomo $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ skleidinio narius su sveikaisiais x laipsniais, jeigu binominių koeficientų, esančių lyginėse skleidinio vietose, suma yra lygi 2048.



VI. LOGARITMINĖS IR RODIKLINĖS LYGTYS, NELYGYBĖS IR TAPATYBĖS

Erika Tumėnaitė
(Panevėžio Juozo Balčikonio gimnazija)

Ši tema yra vidurinės mokyklos matematikos programos dalis, todėl priminsime tik svarbiausias sąvokas ir savybes, kurių prireiks atliekant užduotį.

Rodiklinėmis lygtimis vadinamos tokios lygtys, kurių nežinomasis yra laipsnio rodiklyje, o *logaritminėmis* – tokios, kurių nežinomasis yra po logaritmo ženkle.

Sprendžiant rodiklines lygtis remiamasi šiuo teiginiu: jei $a > 0$, $a \neq 1$, tai

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

Rodiklinių lygčių sprendimo būdai:

- 1) suvienodinant pagrindus,
- 2) iškeliant prieš skliaustus bendrą daugiklį,
- 3) keičiant kintamąjį.

Sprendžiant logaritmines lygtis labai praverčia logaritmo pagrindo keitimo formulė

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (a > 0, a \neq 1; b > 0; c > 0, c \neq 1),$$

kurios atskirasis atvejis yra formulė

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (b \neq 1).$$

Neužmirškime ir kitų formulių:

$$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b;$$

$$\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b;$$

$$\log_c(b^m) = m \log_c b;$$

$$\log_{c^n} b = \frac{1}{n} \log_c b;$$

$$\log_{c^k}(b^k) = \log_c b.$$

LOGARITMINĖS IR RODIKLINĖS LYGTYS, NELYGYBĖS IR TAPATYBĖS

Šiose formulėse $a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1, n \neq 0, k \neq 0$.

Taip pat yra svarbūs šie teiginiai:

1. Logaritminė lygtis

$$\log_a f(x) = b$$

yra ekvivalenti lygčiai

$$f(x) = a^b;$$

čia $a > 0, a \neq 1$.

2. Logaritminė lygtis

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$$

yra ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1. \end{cases}$$

Logaritminėmis ir rodiklinėmis tapatybėmis yra vadinamos lygtys, kurių sprendinių aibės sutampa su šių lygčių apibrėžimo sritimis.

Rodiklinėmis nelygybėmis yra vadinamos nelygybės, kurių kintamasis yra laipsnio rodiklyje, o *logaritminėmis* – tokios, kurių kintamasis yra po logaritmo ženkle. Ir rodiklinių nelygybių, ir logaritminių nelygybių sprendimas yra grindžiamas tuo, kad funkcijos $y = a^x$ ir $y = \log_a x$ yra didėjančios, kai $a > 1$, ir mažėjančios, kai $0 < a < 1$.

Sprendžiant nelygybes reikia atkreipti dėmesį į šiuos teiginius:

3. Rodiklinė nelygybė

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$$

yra ekvivalenti nelygybei $f(x) \geq g(x)$, kai $a > 1$; ji yra ekvivalenti nelygybei $f(x) \leq g(x)$, kai $0 < a < 1$.

4. Logaritminė nelygybė

$$\log_{a(x)} f(x) \geq \log_{a(x)} g(x)$$

yra ekvivalenti nelygybių sistemai

$$\begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) > 0, \\ a(x) > 1 \end{cases}$$

arba nelygybių sistemai

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) > 0, \\ 0 < a(x) < 1. \end{cases}$$

Išnagrinėkime kelis pavyzdžius.

1 pavyzdys. Išspręskime logaritminę lygtį

$$\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt[4]{3}} x + \log_{\sqrt[6]{3}} x + \dots + \log_{\sqrt[16]{3}} x = 36.$$

Sprendimas. Matome, kad $x = 1$ nėra šios lygties sprendinys. Aišku, turi būti $x > 0$.

Pertvarkykime lygtį keisdami logaritmų pagrindus:

$$\frac{1}{\log_x \sqrt{3}} + \frac{1}{\log_x \sqrt[4]{3}} + \frac{1}{\log_x \sqrt[6]{3}} + \dots + \frac{1}{\log_x \sqrt[16]{3}} = 36,$$

$$\frac{2}{\log_x 3} + \frac{4}{\log_x 3} + \frac{6}{\log_x 3} + \dots + \frac{16}{\log_x 3} = 36,$$

$$\frac{1}{\log_x 3} (2 + 4 + 6 + \dots + 16) = 36.$$

Skliaustuose parašytos sumos dėmenys sudaro aritmetinę progresiją, kurios suma lygi 72. Todėl gauname:

$$\frac{1}{\log_x 3} \cdot 72 = 36,$$

$$\frac{1}{\log_x 3} = \frac{1}{2},$$

$$\log_x 3 = 2.$$

Iš čia

$$x = \sqrt{3}.$$

Ats.: $\sqrt{3}$.

2 pavyzdys. Išspręskime logaritminę lygtį

$$\log_{\sqrt{3}} x \cdot \sqrt{\log_{\sqrt{3}} 3 - \log_x 9} + 4 = 0.$$

Sprendimas. Kad lygties kairioji pusė būtų lygi 0, būtina, kad pirmas dėmuo būtų neigiamas; todėl $\log_{\sqrt{3}} x < 0$. Vadinas, $x \in (0; 1)$.

Tada $\log_x 9 < 0$ ir todėl $\log_{\sqrt{3}} 3 - \log_x 9 > 0$. Toliau:

$$\log_{\sqrt{3}} x \cdot \sqrt{\log_{\sqrt{3}} 3 - \log_x 9} = -4,$$

$$\log_{\sqrt{3}}^2 x \cdot (2 - 2 \log_x 3) = 16,$$

$$\log_{\sqrt{3}}^2 x \cdot \left(2 - \frac{4}{\log_{\sqrt{3}} x} \right) = 16,$$

$$2 \log_{\sqrt{3}}^2 x - 4 \log_{\sqrt{3}} x - 16 = 0.$$

Šią lygtį sprendžiame keisdami kintamąjį. Tegu $z = \log_{\sqrt{3}} x$.

Gauname:

$$2z^2 - 4z - 16 = 0,$$

$$z^2 - 2z - 8 = 0,$$

$$z \in \{-2; 4\}.$$

Tolesnei analizei tinka tik $z = -2$, nes $\log_{\sqrt{3}} x < 0$. Taigi

$$\log_{\sqrt{3}} x = -2 \text{ ir } x = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Ats.: } \frac{1}{3}.$$

3 pavyzdys. Nustatykite, su kuriomis parametro a reikšmėmis lygtis

$$\log_a \sqrt{4+x} + 3 \log_a 2(4-x) - \log_a 4(16-x^2)^2 = 2$$

turi sprendinių, ir raskime šiuos sprendinius.

Sprendimas. Aišku, kad lygties apibrėžimo sritis yra intervalas $(-4; 4)$; taip pat turi galioti šios sąlygos: $a > 0$, $a \neq 1$.

Suvienodinę logaritmų pagrindus, gauname:

$$\log_a 2(4+x) + 3 \log_a 2(4-x) - \log_a 2(16-x^2)^2 = 2,$$

$$\log_{a^2} \frac{(4+x)(4-x)^3}{16-x^2} = 2,$$

$$\log_{a^2} (4-x)^2 = 2,$$

$$2 \log_{a^2} (4-x) = 2,$$

$$\log_{a^2} (4-x) = 1,$$

$$4-x = a^2,$$

$$x = 4 - a^2.$$

Galimoms parametro a reikšmėms rasti sprendžiame dvigubą nelygybę

$$-4 < 4 - a^2 < 4.$$

Prie visų šios nelygybės narių pridėję (-4) , gauname dvigubą nelygybę $-8 < -a^2 < 0$, o iš jos $0 < a^2 < 8$.

Kadangi $a > 0$, $a \neq 1$, tai

$$0 < a < 1 \text{ arba } 1 < a < 2\sqrt{2}.$$

Ats.: $x = 4 - a^2$, $a \in (0; 1) \cup (1; 2\sqrt{2})$.

4 pavyzdys. Išspręskime nelygybę

$$\log_2(2^x - 1) \cdot \log_2(2^{x+1} - 2) < 2.$$

Sprendimas. Šią nelygybę pertvarkome taip:

$$\log_2(2^x - 1) \cdot \log_2(2^x \cdot 2 - 2) < 2,$$

$$\log_2(2^x - 1) \cdot \log_2(2(2^x - 1)) < 2,$$

$$\log_2(2^x - 1) \cdot (\log_2 2 + \log_2(2^x - 1)) < 2,$$

$$\log_2(2^x - 1) \cdot (1 + \log_2(2^x - 1)) < 2,$$

$$\log_2(2^x - 1) + \log_2^2(2^x - 1) - 2 < 0.$$

Keitiniu $t = \log_2(2^x - 1)$ gauname kvadratinę nelygybę $t^2 + t - 2 < 0$. Jos sprendiniai sudaro intervalą $(-2; 1)$. Taigi,

$$-2 < \log_2(2^x - 1) < 1,$$

$$\log_2 2^{-2} < \log_2(2^x - 1) < \log_2 2,$$

$$\frac{1}{4} < 2^x - 1 < 2,$$

$$\frac{5}{4} < 2^x < 3,$$

$$\log_2 \frac{5}{4} < \log_2 2^x < \log_2 3,$$

$$\log_2 \frac{5}{4} < x < \log_2 3.$$

Ats.: $x \in \left(\log_2 \frac{5}{4}; \log_2 3 \right).$

5 pavyzdys. Išspręskime rodiklinę nelygybę

$$(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x < 4.$$

Sprendimas. Pažymėkime $u = (2 + \sqrt{3})^x$. Tada

$$(2 - \sqrt{3})^x = \left(\frac{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{2 + \sqrt{3}} \right)^x = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^x} = \frac{1}{u}.$$

Gauname nelygybę $u + \frac{1}{u} < 4$. Kadangi $u > 0$, tai ji yra ekvivalenti

nelygybei $u^2 - 4u + 1 < 0$. Šios nelygybės sprendiniai sudaro intervalą $(2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$.

Toliau sprendžiame dvigubą nelygybę

$$2 - \sqrt{3} < (2 + \sqrt{3})^x < 2 + \sqrt{3}.$$

Kadangi $2 - \sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^{-1}$, gauname $x \in (-1; 1)$.

Ats.: $x \in (-1; 1)$.

6 pavyzdys. Išspręskime logaritminę nelygybę

$$\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1.$$

Sprendimas. Ši logaritminė nelygybė yra ekvivalenti nelygybių sistemai

$$\begin{cases} 0 < 2x < 1, \\ x^2 - 5x + 6 > 2x \end{cases}$$

arba nelygybių sistemai

$$\begin{cases} 2x > 1, \\ x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x^2 - 5x + 6 < 2x. \end{cases}$$

Pirmosios sistemos sprendinių aibė yra intervalas $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, o antrosios – aibė $\left(\frac{1}{2}; 2\right) \cup (3; 6)$.

$$\text{Ats.: } x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right) \cup (3; 6).$$

7 pavyzdys. Įrodykite, kad

$$\log_a x \cdot \log_b x + \log_b x \cdot \log_c x + \log_c x \cdot \log_a x = \frac{\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x}{\log_{abc} x};$$

čia $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $x > 0$; $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$, $x \neq 1$.

Sprendimas. Pertvarkykime įrodomosios lygybės dešiniąją pusę:

$$\begin{aligned} \frac{\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x}{\log_{abc} x} &= (\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x) \cdot \log_x(abc) = \\ &= (\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x) \cdot (\log_x a + \log_x b + \log_x c) = \\ &= (\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x) \cdot \left(\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x} \right) = \\ &= \log_b x \cdot \log_c x + \log_a x \cdot \log_c x + \log_a x \cdot \log_b x. \end{aligned}$$

Gavome įrodomosios lygybės kairėje pusėje esantį reiškinį.

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Išspręskite rodiklinę lygtį

$$(\sqrt{2} + 1)^x + (\sqrt{2} - 1)^x = 2\sqrt{2}.$$

2. Išspręskite logaritminę lygtį

$$\lg\left(4^{-1} \cdot 2^{\sqrt{x}} - 1\right) - 1 = \lg\left(\sqrt{2^{\sqrt{x-2}}} + 2\right) - 2 \lg 2.$$

3. Išspręskite lygtį

$$2^x + 2^y + 2^z = 2336,$$

kai x, y, z yra natūralieji skaičiai ir tenkina sąlygą $x < y < z$.

4. Nesinaudodami nei logaritmų lentelėmis, nei skaičiuokliais, įrodykite, kad

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2.$$

5. Išspręskite logaritminę nelygybę

$$\log_{x^2+3x} (x+1) < 1.$$

6. Nustatykite, su kuriomis a reikšmėmis rodiklinė lygtis

$$25^x - (a-4)5^x - 2a^2 + 10a - 12 = 0$$

neturi sprendinių.

7. Raskite išreikštinę kintamojo y priklausomybę $y = f(x)$ nuo kintamojo x , kai

$$\log_y x + \log_x y = 2,$$

ir nubraižykite jos grafiką.

8. Tarkime, kad a ir b yra stačiojo trikampio statiniai, o c – jo įžambinė. Įrodykite, kad

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

9. Įrodykite, kad

$$\lg 2 = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \dots \cdot \log_{10} 9.$$

10. Įrodykite, kad

$$\log_3 \log_3 \underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\dots \sqrt[3]{3}}}}_{n \text{ kartų}} = -n.$$

VII. STEREOMETRIJOS UŽDAVINIAI

Edmundas Mazėtis
(Vilniaus pedagoginis universitetas)

Stereometrija (iš graikų kalbos „stereos“ – erdvė, „metreo“ – matuojų) – tai erdvės geometrija. Stereometrija nagrinėja erdvinių figūrų savybes. Kas tai yra plokštuma, visi išsivaizduoja; planimetrijoje plokštuma nagrinėjama nepriklausomai nuo ją supančios erdvės. Tuo tarpu stereometrijoje plokštumos suprantamos kaip erdvės taškų aibės, be to, kiekvienoje plokštumoje galioja planimetrija – plokštumos geometrija. Taigi nagrinėdami erdvės geometriją ir sprendami uždavinius, naudosime planimetrijos sąvokas, teiginius ir formules.

Geometrijoje kaip ir bet kurioje kitoje matematikos mokslo šakoje pradiniai faktai gaunami iš praktikos, jie yra vaizdūs ir akivaizdūs. Tie faktai yra vadinami aksiomomis, aksiomos apibūdina taip vadinamas pirmines sąvokas, t. y. Tas sąvokas, kurios nėra apibrėžiamos. Kitos sąvokos yra apibrėžiamos, naudojant pirmines sąvokas ir jau apibrėžtas sąvokas. Kiti geometrijos faktai vadinami teoremomis – įrodomi naudojant aksiomas ir jau įrodomas teoremas.

Stereometrijos aksiomos apibūdina tokias sąvokas: taškas, tiesė, plokštuma. Išvardysime jas:

1. Bet kuriems trimis erdvės taškams egzistuoja plokštuma, kuriai tie taškai priklauso. Tuomet sakoma, kad ši plokštuma eina per duotuosius taškus.

2. Jei dvi plokštumos turi bendrą tašką, tai jos turi bendrą tiesę. Tuomet sakoma, kad dviejų plokštumų sankirta yra tiesė.

3. Jei teisei priklauso du plokštumos taškai, tai visi tiesės taškai yra toje plokštumoje. Tuomet sakoma, kad tiesė yra plokštumoje.

Iš šių aksiomų lengvai įrodomos tokios stereometrijos teoremos:

1 teorema. Jei trys taškai nėra vienoje tiesėje, tai egzistuoja vienintelė plokštuma, kuriai priklauso tie trys taškai.

2 teorema. Per tiesę ir jai nepriklausantį tašką eina vienintelė plokštuma.

3 teorema. Per dvi susikertančias tieses eina vienintelė plokštuma.

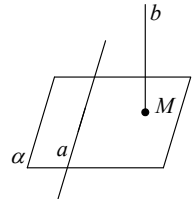
Dvi erdvės tiesės a ir b yra vadinamos *prasilenkiančiomis*, jei nėra tokios plokštumos, kuriai priklauso ir tiesė a , ir tiesė b . Jei tiesės a ir b yra vienoje plokštumoje, tai jos arba turi vienintelį bendrą tašką (jos yra

susikertančios), arba neturi bendrų taškų (tiesės a ir b lygiagrečios, $a \parallel b$).

4 teorema. Per dvi lygiagrečias tieses eina vienintelė plokštuma.

Tiesė a ir plokštuma α gali turėti vieną bendrą tašką (tiesė kerta plokštumą), neturėti nė vieno bendro taško (tiesė lygiagreti su plokštuma), o taip pat tiesė gali priklausyti plokštumai.

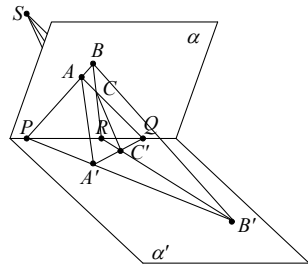
5 teorema (prasilenkiančių tiesių požymis). Jei tiesė a yra plokštumoje α , o tiesė b kerta plokštumą α taške M , nepriklausančiame tiesei a , tai tiesės a ir b yra prasilenkiančios (1 pav.).



1 pav.

6 teorema. Kokia bebūtų tiesė a ir jai nepriklausantis taškas A , per tašką A eina vienintelė tiesė b , lygiagreti su tiese a .

1 pavyzdys. Du trikampiai ABC ir $A'B'C'$ yra skirtingose susikertančiose plokštumose α ir α' atitinkamai, be to, tiesės AA' , BB' ir CC' kertasi viename taške S . Jei trikampių atitinkamos kraštinės nelygiagrečios, tai tiesių AB ir $A'B'$ sankirtos taškas P , tiesių AC ir $A'C'$ sankirtos taškas Q , bei tiesių BC ir $B'C'$ sankirtos taškas R yra vienoje tiesėje. Įrodysime tai (2 pav.).



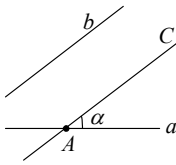
2 pav.

Kadangi tiesės AA' ir BB' kertasi taške S , tai pagal 3 teoremą per šias tieses eina plokštuma β . Kadangi tiesės AB ir $A'B'$ yra nelygiagrečios ir priklauso plokštumai β , tai jos susikerta taške P , kuris yra tiek plokštumoje α (nes taškai A ir B yra plokštumoje α), tiek plokštumoje α' (nes taškai A' ir B' yra plokštumoje α'). Taigi taškas P yra bendras plokštumų α ir α' taškas, tai pagal 2 aksiomą jis priklauso plokštumų α ir α' sankirtos tiesei. Analogiškai įrodome, kad ir taškai Q bei R irgi priklauso plokštumų α ir α' sankirtos tiesei.

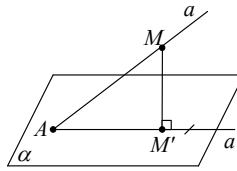
Įrodytasis teiginys geometrijoje vadinamas *Desargo teorema*, pagerbiant žymų prancūzų geometrą G. Dezargą (Gerard Desargues, 1591–1661).

Jei a ir b – dvi prasilenkiančios tiesės, taškas A yra tiesėje a , tai pagal 6 teoremą per tašką A eina vienintelė tiesė c , lygiagreti su tiese b (3 pav.). Tuomet kampas α tarp tiesių a ir c yra vadinamas kampu tarp

tiesių a ir b . Akivaizdu, jog taip apibrėžtas kampas tarp prasilenkiančių tiesių nepriklauso nuo taško A parinkimo.



3 pav.



4 pav.

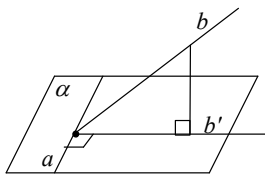
Tiesė a yra vadinama statmena plokštumai α , jei ji statmena bet kuriai tos plokštumos tiesei.

7 teorema. Tiesė yra statmena plokštumai tada ir tik tada, kai ji statmena dviems susikertančioms tos plokštumos tiesėms.

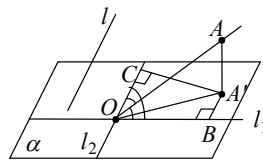
8 teorema. Per bet kurią tašką A eina vienintelė tiesė a , statmena duotajai plokštumai α .

9 teorema. Tiesė, nepriklausanti plokštumai, yra lygiagreti su ta plokštuma, jei ji lygiagreti bent su viena tos plokštumos tiese.

Sakykime, kad tiesė a kerta plokštumą α taške A (4 pav.). Iš bet kurio tiesės taško M nuleiskime statmenį į plokštumą α ; šis statmuo kerta plokštumą α taške M' , kuris vadinamas taško M ortogonalioji projekcija plokštumoje α . Visų tiesės a taškų ortogonaliosios projekcijos plokštumoje α yra tiesėje a' , kuri vadinama tiesės a ortogonalioji projekcija plokštumoje α . Kampas φ tarp tiesės a ir jos ortogonaliosios projekcijos plokštumoje α yra vadinamas kampu tarp tiesės a ir plokštumos α .



5 pav.



6 pav.

10 teorema (trijų statmenų teorema). Plokštumos tiesė a yra statmena tiesei b tada ir tik tada, kai ji statmena tiesės b ortogonaliajai projekcijai toje plokštumoje (5 pav.).

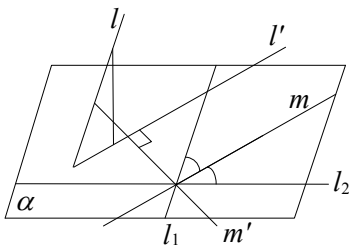
1 pavyzdys. Tiesė l , nestatmena plokštumai α , sudaro vienodus kampus su šios plokštumos susikertančiomis tiesėmis l_1 ir l_2 . Įrodysime, kad šios tiesės ortogonalioji projekcija plokštumoje α irgi sudaro vienodus kampus su tiesėmis l_1 ir l_2 (6 pav.).

Sakykime, kad plokštumoje α esančios tiesės l_1 ir l_2 kertasi taške O . Nubrėžkime tiesę OA , lygiagrečią su tiese l . Akivaizdu, kad tiesė OA sudaro vienodus kampus su tiesėmis l_1 ir l_2 . Kadangi tiesių l ir OA ortogonaliosios projekcijos lygiagrečios, tai užtenka įsitikinti, kad tiesės OA ortogonalioji projekcija sudaro vienodus kampus su tiesėmis l_1 ir l_2 . Iš taško A nuleidžiame statmenį AA' į plokštumą α ir nubrėžiame statmenis $A'B \perp l_1$, $A'C \perp l_2$. Pagal trijų statmenų teoremą $AB \perp l_1$, $AC \perp l_2$. Tuomet trikampiai OAC ir OAB yra lygūs (jie statūs, įžambinė OA bendra, o smailieji kampai AOB ir AOC lygūs pagal sąlygą). Iš čia $OB = OC$ ir tuomet lygūs statieji trikampiai $A'OB$ ir $A'OC$ (jų statiniai OB ir OC lygūs, o įžambinė OA' bendra). Todėl $\angle A'OB = \angle A'OC$, kas ir reikėjo įrodyti.

Pastebėkime, kad atvirksčias teiginys irgi teisingas (įsitikinkite tuo savarankiškai).

Iš įrodyto teiginio seka, kad tiesė l sudaro vienodus kampus su dviem susikertančiomis tiesėmis tada ir tik tada, kai ji statmena vieno iš tų tiesių sudaromo kampo pusiaukampinei.

Tikiu, jei tiesė l yra statmena plokštumai α , kuriai priklauso tiesės l_1 ir l_2 , tai ji statmena bet kuriai plokštumos α tiesei, taigi ir kampo tarp tiesių pusiaukampinei. Jei tiesė l



7 pav.

nėra statmena plokštumai α , tai pagal 2 pavyzdį jos projekcija l' sudaro vienodus kampus su tiesėmis l_1 ir l_2 (7 pav.), t. y. tiesė l yra lygiagreti su vieno iš kampo tarp tiesių l_1 ir l_2 pusiaukampinėm. Bet kadangi kito kampo tarp tiesių l_1 ir l_2 pusiaukampinė m' yra

statmena pusiaukampinei m , tai ji statmena ir tiesei l' . Tuomet pagal trijų statmenų teoremą tiesės l ir m' yra statmenos.

Atvirkščiai, jei tiesė l statmena kampo tarp tiesių l_1 ir l_2 pusiaukampinei m' , tai ir jos ortogonalioji projekcija plokštumoje α (tiesė l') irgi statmena tiesei m' , t. y. tiesė l' yra lygiagreti su kito kampo tarp tiesių l_1 ir l_2 pusiaukampine m , taigi ji sudaro vienodus kampus su tiesėmis l_1 ir l_2 . Pagal 2 pavyzdį ta savybe pasižymi ir tiesė l .

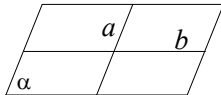
Dvi plokštumos α ir β yra vadinamos *lygiagrečiomis*, jei jos neturi bendrų taškų.

11 teorema. Jei plokštumos α susikertančios tiesės a ir b yra lygiagrečios su plokštumos β susikertančiomis tiesėmis, a' ir b' , tai plokštumos α ir β lygiagrečios (8 pav.).

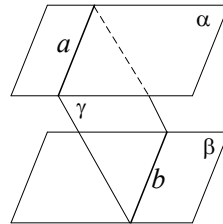
12 teorema. Jei plokštuma kerta vieną iš lygiagrečių plokštumų, tai ji kerta ir kitą, o susikirtimo tiesės yra lygiagrečios (9 pav.).

13 teorema. Per tašką A , nepriklausantį plokštumai α , eina vienintelė plokštuma, lygiagreti su plokštuma α .

14 teorema. Dvi plokštumos, statmenos tai pačiai tiesi, yra lygiagrečios.



8 pav.



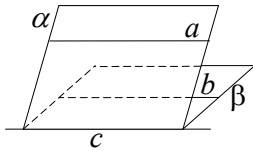
9 pav.

3 pavyzdys. Tiesės a ir b yra lygiagrečios. Per tiesę a eina plokštuma α , lygiagreti su tiese b , o per tiesę b eina plokštuma β , lygiagreti su tiese a . Jei plokštumos α ir β susikerta, tai jų sankirtos tiesė lygiagreti su tiesėmis a ir b . Įrodysime tai (10 pav.).

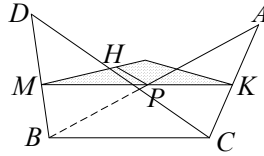
Kadangi tiesės a ir $c = \alpha \cap \beta$ yra vienoje plokštumoje α , tai pakanka įsitikinti, kad jos nesikerta. Jei jos kirstųsi, tai sankirtos taškas būtų ir

tiesėje a ir plokštumoje β , bet to būti negali, nes tiesė a lygiagreti su plokštuma β . Analogiškai įrodomas tiesių b ir c lygiagretumas.

4 pavyzdys. Trikampiai ABC ir DBC yra skirtingose plokštumose α ir β , taškai M, H, K yra atitinkamai atkarpų BD, CD, AC vidurio taškai. Plokštuma γ eina per taškus M, H, K ir kerta atkarpą AB taške P . Įrodysime, kad atkarpos PH ir MK kertasi ir susikirtimo taške dalijasi pusiau (11 pav.).



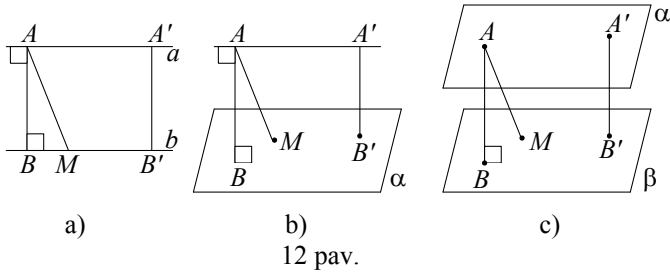
10 pav.



11 pav.

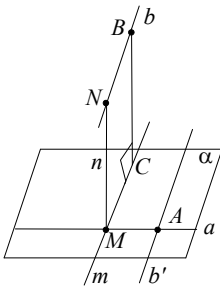
Kadangi atkarpa MH yra trikampio DBC vidurio linija, tai $MH \parallel BC$. Kadangi atkarpa HK yra trikampio CAD vidurio linija, tai $HK \parallel AD$. Pažymėkime δ plokštumą, einančią per taškus A, B ir D . Kadangi plokštumos γ ir δ eina per lygiagrečias tieses HK ir AD , tai jų sankirtos tiesė PM yra lygiagreti ir su tiese HK , ir su tiese AD (3 pavyzdys). Analogiškai plokštumos α ir γ eina per lygiagrečias tieses BC ir MN , todėl jų sankirtos tiesė PK yra lygiagreti ir su tiese BC , ir su tiese MH . Iš to kad $PM \parallel HK$ ir $PK \parallel MH$ išplaukia, kad keturkampis $MHKP$ yra lygiagretainis, taigi jo įstrižainės MK ir PH susikerta ir sankirtos taške dalijasi pusiau.

Geometrijoje atstumu tarp bet kurių figūrų (t. y. aibių taškų) F_1 ir F_2 yra vadinamas trumpiausias atstumas tarp tų figūrų taškų $A \in F_1$ ir $B \in F_2$. Akivaizdu, kad atstumas tarp lygiagrečių tiesių, arba tarp tiesės ir su ja lygiagrečios plokštumos, arba tarp lygiagrečių plokštumų yra lygus jų bendrojo statmens ilgiui ir vienodas visuose taškuose (12 pav.).

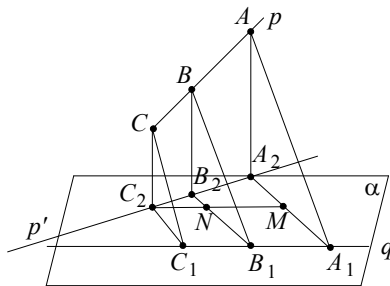


Šie atstumai yra trumpiausi iš visų atstumų, jungiančių tiesės a taškus su tiesės b taškais (tiesės a taškus su plokštumos α taškais, plokštumos α taškus su plokštumos β taškais.)

Sakykime, kad a ir b dvi prasilenkiančios tiesės, taškas A yra tiesėje a , per jį eina tiesė b' , lygiagreti su tiese b (13 pav.). Tuomet plokštuma α , einanti per tieses a ir b' yra lygiagreti su tiese b (9 teorema). Tiesėje b parinkime bet kokį tašką B ir nuleiskime statmenį BC į plokštumą α . Tiesė BC yra statmena tiesei a ir tiesei b . Kadangi tiesės a ir b – prasilenkiančios, tai tiesės a ir m kertasi taške M . Iš taško M iškeliamo statmenį plokštumai α . Kadangi taškai B, C, M yra vienoje plokštumoje, einančioje per lygiagrečias tieses b ir m , tai statmuo kerta tiesę b taške N . Tiesė MN yra statmena tiesėms a ir b , be to abi jas kerta. Ši tiesė yra vadinama *prasilenkiančių tiesių bendroju statmeniu*. Atkarpos MN ilgis yra trumpiausias atstumas tarp tiesių a ir b taškų, nes jis lygus atstumui nuo tiesės b iki plokštumos α . Taigi atstumas tarp prasilenkiančių tiesių yra lygus jų bendrojo statmens ilgiui.



13 pav.



14 pav.

5 pavyzdys. Tiesėje p pažymėti taškai A, B, C taip, kad taškas B yra atkarpoje AC ir $AB = 27, BC = 18$. Tiesė q yra prasilenkianti su tiese p

ir nuo taškų A , B ir C nutolusi atitinkamai 17, 10 ir 8. Rasime atstumą tarp tiesių p ir q .

Sakykime, kad α yra plokštuma, einanti per tiesę q ir lygiagreti su tiese p (14 pav.), taškai A_1 , B_1 ir C_1 yra taškų A , B ir C ortogonaliosios projekcijos tiesėje q , o taškai A_2 , B_2 , C_2 – taškų A , B , C ortogonaliosios projekcijos plokštumoje α . Trikampiai AA_1A_2 , BB_1B_2 ir CC_1C_2 yra statūs, jų statiniai AA_2 , BB_2 ir CC_2 yra lygūs ieškomajam atstumui tarp tiesių p ir q . Kadangi $AA_1 = 17$, $BB_1 = 10$, $CC_1 = 8$, tai pažymėję $A_1A_2 = x$, $B_1B_2 = y$, $C_1C_2 = z$, gauname, kad

$$17^2 - x^2 = 10^2 - y^2 = 8^2 - z^2 \quad (1)$$

Tiesė q statmena tiesėms AA_1 , BB_1 , CC_1 , todėl pagal trijų statmenų teoremą ji statmena ir jų ortogonaliosioms projekcijoms A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 , t. y. Keturkampis $A_1C_1C_2A_2$ yra stačiakampė trapecija. Nubrėžę tiesę $C_2M \parallel q$, kuri kerta tiesę B_1B_2 taške N , iš trikampių C_2A_2M ir C_2B_2N panašumo gauname, kad $\frac{A_2M}{B_2N} = \frac{A_2C_2}{B_2C_2}$. Kadangi

$$\begin{aligned} A_2M &= x - z, \quad B_2N = y - z, \\ A_2C_2 &= AC = 45, \quad B_2C_2 = BC = 18, \end{aligned}$$

tai

$$\frac{x - z}{y - z} = \frac{45}{18} = \frac{5}{2}. \quad (2)$$

Sprendžiame sistemą, sudarytą iš (1) ir (2) lygčių. Pažymėję $x - z = 5u$, $y - z = 2u$, iš (1) lygybių randame

$$17^2 - 8^2 = (x - z)(y + z),$$

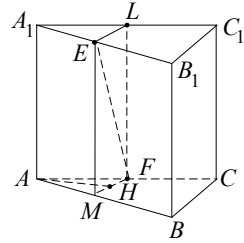
t. y. $y + z = \frac{18}{u}$. Iš čia gauname $x = \frac{1}{2}\left(5u + \frac{45}{u}\right)$, $y = u + \frac{9}{u}$. Pažymėję

$u + \frac{9}{u} = t$, gauname $17^2 - \left(\frac{5}{2}t\right)^2 = 10^2 - t^2$, t. y. $t^2 = 36$. Kadangi x ir y

– neneigiami skaičiai, tai tinka tik teigiama t reikšmė $t = 6$. Taigi

$x = \frac{5}{2} \cdot 6 = 15$, ir ieškomasis atstumas $AA_2 = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$.

6 pavyzdys. Stačiosios prizmės $ABCA_1B_1C_1$ pagrindai ABC ir $A_1B_1C_1$ yra lygiakraščiai trikampiai, o jų kraštinės lygios $4\sqrt{3}$. Taškai E ir F yra atkarpų A_1B_1 ir AC vidurio taškai. Rasime atstumą tarp tiesių AA_1 ir EF .

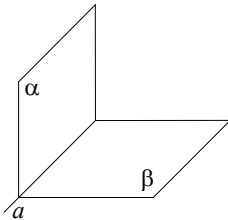


15 pav.

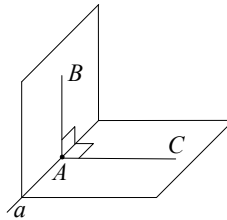
Sakykime, kad taškai L ir M yra atitinkamai briaunų A_1C_1 ir AB vidurio taškai (15 pav.). Tuomet plokštuma, einanti per taškus E, L, F ir M , eina per tiesę EF ir lygiagreti su tiese AA_1 , nes $AA_1 \parallel EM$ (9 teorema). Taigi atstumas nuo tiesės AA_1 iki plokštumos, einančios per taškus E, L, F ir M yra lygus ieškomajam atstumui tarp tiesių AA_1 ir EF . Kadangi FM yra trikampio ABC vidurio linija, tai trikampis AMF yra lygiakraštis, jo kraštinė lygi $2\sqrt{3}$, o aukštinė AH lygi ieškomajam atstumui. Taigi

$$AH = \frac{AM\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3,$$

t. y. ieškomasis atstumas lygus 3.



16 pav.



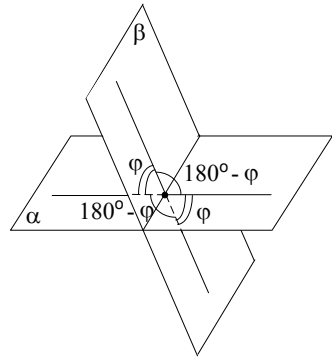
17 pav.

Dvisienį kampą sudaro dvi pusplokštumės, turinčios bendrą kontūro tiesę (16 pav.). Tos pusplokštumės vadinamos dvisienio kampo sienomis, o bendroji jų kontūro tiesė – dvisienio kampo briauna. Sakykime, kad dvisienio kampo briaunoje – tiesėje a – pažymime bet kokį tašką A ir kiekvienoje kampo sienoje išvedame spindulius AB ir AC , statmenus tiesei a (17 pav.).

Kampas CAB yra vadinamas nagrinėjamo dvisienio kampo *tiesiniu kampu*. Visi dvisienio kampo tiesiniai kampai yra lygūs (t. y. nepriklauso

nuo taško $A \in a$ parinkimo). Dvisienio kampo didumu vadinamas jo *tiesinio kampo didumas*.

Dvi nelygiagrečios plokštumos α ir β sudaro keturis dvisienius kampus. Jei vieno jų didumas φ , tai kitų didumai lygūs $180^\circ - \varphi$, φ ir $180^\circ - \varphi$ (18 pav.).



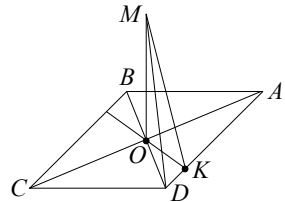
18 pav.

Jei $\varphi = 90^\circ$, tai ir visi keturi kampai yra statūs, tuomet plokštumos α ir β yra statmenos.

15 teorema. Jei plokštumoje α yra tiesė a , statmena plokštumai β , tai plokštumos α ir β yra statmenos.

7 pavyzdys. Rombo $ABCD$ kraštinės ilgis lygus a , o kampas A lygus 60° . Taškas M nėra rombo plokštumoje ir vienodai nutolęs nuo rombo kraštinių. Plokštuma β , einanti per taškus A, M ir D , su rombo plokštuma sudaro 45° kampą. Rasime atstumą nuo taško M iki plokštumos α .

Kadangi taškas M vienodai nutolęs nuo rombo kraštinių, tai jo ortogonalioji projekcija rombo plokštumoje α yra rombo įstrižainių susikirtimo taškas O , irgi pasižymintis ta pačia savybe (19 pav.). Nubrėžkime tiesę OK , statmeną tiesei AD . Pagal trijų statmenų teoremą tiesės MK ir AD taip pat statmenos, todėl kampas OKM yra dvisienio kampo tarp plokštumų α ir β tiesinis kampas. Iš trikampio OKM randame, kad $OM = OK$. Kadangi rombo



19 pav.

plotas S lygus $2OK \cdot AD$ arba $AB^2 \sin \angle A$, tai iš čia

$$OK = \frac{AB^2 \sin \angle A}{2AD} = \frac{a^2 \sin 60^\circ}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Taigi ieškomasis atstumas lygus $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1. Duotos dvi prasilenkiančios tiesės a ir b ir joms nepriklausantis taškas. Ar visuomet egzistuoja tiesė, einanti per tašką O ir kertanti tieses a ir b ?
2. Trikampiai ABC ir $A'B'C'$ yra skirtingose susikertančiose plokštumose α ir α' , tiesių AB ir $A'B'$, tiesių AC ir $A'C'$, tiesių BC ir $B'C'$ sankirtos taškai yra vienoje tiesėje. Jei tiesės AA' , BB' ir CC' yra nelygiagrečios, tai jos kertasi viename taške. Įrodykite.
3. Trys plokštumos α tarpusavyje susikertančios tiesės sudaro vienodus kampus su tiese l . Įrodykite, kad tiesė l statmena plokštumai α .
Nurodymas. Pasinaudokite 2 pavyzdžiu ir iš jo gauta išvada.
4. Trapecija $ABCD$, kurios pagrindas AD du kartus ilgesnis už pagrindą BC , ir trikampis ADP yra skirtingose plokštumose. Per tiesę BC ir atkarpos PD vidurio tašką K nubrėžta plokštuma, kertanti tiesę AP taške M . Įrodykite, kad atkarpos MC ir BK susikerta ir sankirtos taške dalijasi pusiau.
5. Kubo $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ briaunos ilgis lygus 1, taškas K yra briaunos DD_1 vidurio taškas. Raskite kampą tarp tiesių CK ir $A_1 D$.
6. Lygiagrečios tiesės AB ir CD yra dvisienio kampo skirtingose sienose. Dvisienio kampo didumas lygus 60° ; taškai A ir D nutolę nuo kampo briaunos atitinkamai 8 ir 6,5. Raskite atstumą tarp tiesių AB ir CD .
7. Kubo briaunos ilgis lygus a . Raskite atstumą tarp jo briaunos ir su ja prasilenkiančios kubo įstrižainės.
8. Vienoje dvisienio kampo sienoje yra tiesė l . Kampas tarp tiesės l ir kubo dvisienio kampo sienos yra didžiausias, kai tiesė l yra statmena dvisienio kampo briaunai. Įrodykite.

9. Atkarpos AB ir CD , kurių ilgiai atitinkamai lygūs $2\sqrt{5}$ ir $2\sqrt{7}$, yra prasilenkiančiose tiesėse, kampas tarp jų lygus $\arccos\frac{\sqrt{35}}{10}$. Taškai E ir F yra atkarpų AB ir vidurio taškai, atkarpa EF lygi $\sqrt{13}$ ir statmena tiesėms AB ir CD . Raskite kampą ACB .
10. Taškas M yra vienodai nutolęs nuo visų stačiojo trikampio ABC viršūnių ir nėra trikampio plokštumoje. Trikampio statinių AC ir CB ilgiai lygūs a . Plokštuma, einanti per taškus M , B ir C su trikampio ABC plokštuma sudaro 60° kampą. Raskite atstumą nuo taško M iki trikampio plokštumos.



VIII. TRIGONOMETRIJOS UŽDAVINIAI

Antanas Apynis
(Vilniaus universitetas)

Pateikiamos užduoties uždaviniams išspręsti turėtų pakakti trigonometrijos žinių, kurių galima rasti mokykliniuose vadovėliuose. Todėl teorinėje temos dalyje apsiribosime pavyzdžiais ir glaustais jų analizės komentarais.

1. Trigonometrinių reiškinių skaičiavimas ir tapatūs pertvarkiai.

1 pavyzdys. Apskaičiuokime

$$\frac{2 \sin 2\alpha - 3 \cos 2\alpha}{4 \sin 2\alpha + 5 \cos 2\alpha},$$

kai $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

Sprendimas. Iš pradžių dvigubo argumento sinusą ir kosinusą išreikškime kampo α tangentu:

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Taikydami šias formules, gauname:

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin 2\alpha - 3 \cos 2\alpha}{4 \sin 2\alpha + 5 \cos 2\alpha} &= \frac{4 \operatorname{tg} \alpha - 3(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{8 \operatorname{tg} \alpha + 5(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \frac{4 \cdot 3 - 3(1 - 9)}{8 \cdot 3 + 5(1 - 9)} = \frac{12 + 24}{24 - 40} = \\ &= -\frac{36}{16} = -\frac{9}{4} = -2,25. \end{aligned}$$

Ats.: $-2,25$.

2 pavyzdys. Apskaičiuokime sandaugą $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, kai

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin(\alpha + \beta)$, $\alpha + \beta \neq \pi n$, $n \in Z$.

Sprendimas. Taikydami žinomas formules, gauname:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

Uždavinio sąlygą $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin(\alpha + \beta)$ pertvarkykime (turėdami mintyje, kad $\alpha + \beta \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$) taip:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin(\alpha + \beta) \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \\ &= 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2}. \end{aligned}$$

Tada

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Ats.: $\frac{1}{3}$.

3 pavyzdys. Įrodykite tapatybę

$$4 \sin \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \sin 3\alpha.$$

Sprendimas. Iš pradžių pertvarkykime sandaugą $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) &= \\ &= \frac{\cos\left(\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) - \left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\right) - \cos\left(\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\right)}{2} = \\ &= \frac{\cos 2\alpha - \cos \frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{2 \cos 2\alpha + 1}{4}. \end{aligned}$$

Tada $4 \sin \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = 2 \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha + \sin \alpha =$
 $= \sin(\alpha - 2\alpha) + \sin(\alpha + 2\alpha) + \sin \alpha = -\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin \alpha = \sin 3\alpha.$

Matome, kad lygybė $4 \sin \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \sin 3\alpha$

galioja su visais realiaisiais skaičiais α ; taigi, ji yra tapatybė.

2. Trigonometrinės lygtys.

4 pavyzdys. Išspręskime lygtį $\operatorname{tg}2x \cdot \sin 5x = 0$.

Sprendimas. Pirmiausia atkreipkime dėmesį į abiejų funkcijų, $y = \operatorname{tg}2x$ ir $y = \sin 5x$, apibrėžimo sritis. Žinome, kad sinusas yra apibrėžtas visoje realiųjų skaičių tiesėje, o tangentas nėra apibrėžtas tuose taškuose, kuriuose kosinusas yra lygus nuliui. Vadinasi, nagrinėdami šią lygtį, turėtume atsižvelgti į tai, kad $2x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$, t.y. $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in Z$.

Spręsdami lygtį, remsimės akivaizdzia sandaugos savybe: dviejų dauginamųjų sandauga lygi nuliui tik tada, kai nors vienas iš jų yra lygus nuliui. Taigi,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}2x \cdot \sin 5x = 0 &\Leftrightarrow \operatorname{tg}2x = 0 \text{ arba } \sin 5x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2x = k\pi, k \in Z) \text{ arba } (5x = m\pi, m \in Z) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z \right) \text{ arba } \left(x = \frac{m\pi}{5}, m \in Z \right). \end{aligned}$$

Aišku, kad taškų $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in Z$, nėra nei aibėje $\left\{ x : x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z \right\}$, nei aibėje $\left\{ x : x = \frac{m\pi}{5}, m \in Z \right\}$; todėl jų nebus ir šių aibių sąjungoje

$$\left\{ x : x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z \right\} \cup \left\{ x : x = \frac{m\pi}{5}, m \in Z \right\}.$$

Abiems sprendinių aibėms priklauso tik taškai $x = n\pi$, $n \in Z$. Likusius pirmosios aibės taškus galima užrašyti formule $x = \frac{(2n+1)\pi}{2}$, $n \in Z$.

$$\text{Ats.: } \frac{m\pi}{5}, m \in Z; \frac{(2n+1)\pi}{2}, n \in Z.$$

5 pavyzdys. Išspręskime lygtį $(\cos x + 1) \cdot \operatorname{ctgx} = \sin 2x$.

Sprendimas. Lygties apibrėžimo sričiai nepriklauso taškai, kuriuose $\sin x = 0$. Taigi, $x \neq k\pi$, $k \in Z$. Tada $\cos x + 1 > 0$.

Taikydami žinomas formules, pertvarkykime lygtį:

$$\begin{aligned} (\cos x + 1) \cdot \operatorname{ctgx} = \sin 2x, \sin x \neq 0 &\Leftrightarrow (\cos x + 1)\cos x = 2\sin^2 x \cos x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\cos x + 1)\cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x &= 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\cos^2 x + \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x + 1)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Ši lygtis yra ekvivalenti lygčiai (kai $x \neq k\pi$, $k \in Z$)
 $\cos x\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0$.

Jei $\cos x = 0$, tai $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$. Lygties $\cos x - \frac{1}{2} = 0$ sprendinių aibę sudaro taškai $\pm \frac{\pi}{3} + 2m\pi$, $m \in Z$. Abi šios aibės bendrų taškų neturi.

$$\text{Ats. : } \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z; \pm \frac{\pi}{3} + 2m\pi, m \in Z.$$

3. Trigonometrinės nelygybės.

6 pavyzdys. Įrodykite, kad nelygybė

$$a \sin^2 x + \frac{b}{\sin^2 x} \geq 2\sqrt{ab}$$

galioja, kai $x \neq k\pi$, $k \in Z$, $a > 0, b > 0$.

Sprendimas. Nagrinėkime kairiosios pusės ir dešinėsios pusės reiškinių skirtumą. Gausime:

$$\begin{aligned} \left(a \sin^2 x + \frac{b}{\sin^2 x}\right) - 2\sqrt{ab} &= (\sqrt{a} \sin x)^2 - 2\sqrt{ab} + \left(\frac{\sqrt{b}}{\sin x}\right)^2 = \\ &= \left(\sqrt{a} \sin x - \frac{\sqrt{b}}{\sin x}\right)^2 \geq 0, \text{ kai } x \neq k\pi, k \in Z. \end{aligned}$$

Vadinasi:

$$a \sin^2 x + \frac{b}{\sin^2 x} \geq 2\sqrt{ab}, \text{ kai } x \neq k\pi, k \in Z, a > 0, b > 0.$$

7 pavyzdys. Išspręskime nelygybę

$$2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{3} \cos 2x > 0. \quad (1)$$

Sprendimas. Taikydami formulę $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$, gauname:

$$2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 - \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) = 1 + \sin 2x.$$

Vadinasi, pradinė nelygybė yra ekvivalenti šiai nelygybei:

$$1 + \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x > 0. \quad (2)$$

Remdamiesi formule:

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta),$$

gausime:

$$\begin{aligned} \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) = \\ &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos 2x + \sin \frac{\pi}{6} \sin 2x \right) = 2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

Irašę šią išraišką į (2), turėsime tokią nelygybę:

$$2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) > -1.$$

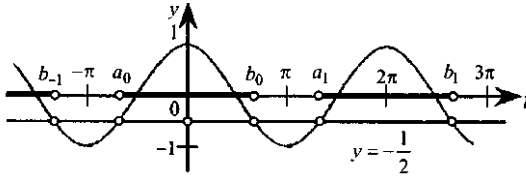
Pažymėkime $t = 2x - \frac{\pi}{6}$ ir spręskime nelygybę

$$\cos t > -\frac{1}{2}.$$

Lygties $\cos t = -\frac{1}{2}$ sprendiniai yra $t = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$. Jų reikia

nelygybės $\cos t > -\frac{1}{2}$ sprendinių aibei užrašyti. Kad būtų lengviau,

nubrėškime funkcijos $y = \cos t$ grafiką – kosinusoidę ir tiesę $y = -\frac{1}{2}$ (žr. 1 pav.).



1 pav.

Matome, kad kosinusoidės dalies, kuri yra virš tiesės $y = -\frac{1}{2}$ taškų $(t; \cos t)$ ordinatės $\cos t$ yra didesnės už $-\frac{1}{2}$. Šių taškų abscisės t sudaro intervalus $(a_0; b_0)$, $(a_k; b_k)$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$; čia $a_0 = -\frac{2\pi}{3}$, $b_0 = \frac{2\pi}{3}$, $a_k = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $b_k = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Taigi, nelygybės $\cos t > -\frac{1}{2}$ sprendinių aibę galima užrašyti taip:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < t < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in Z.$$

Irašę $t = 2x - \frac{\pi}{6}$, gausime (1) nelygybės sprendinių aibę:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2x - \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in Z;$$

$$-\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in Z;$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) < x < \frac{1}{2} \left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right), \quad k \in Z;$$

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + k\pi, \quad k \in Z.$$

$$\text{Ats.: } \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{5\pi}{12} + k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

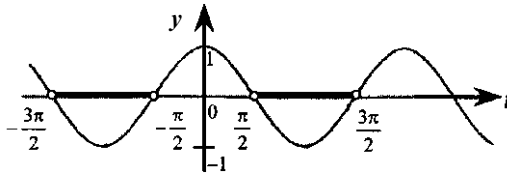
8 pavyzdys. Išspręskime nelygybę

$$|\sin x| > |\cos x|.$$

Sprendimas. Aišku, kad

$$|\sin x| > |\cos x| \Leftrightarrow |\sin x|^2 > |\cos x|^2 \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x < 0 \Leftrightarrow \cos 2x < 0.$$

Taigi nelygybė $|\sin x| > |\cos x|$ yra ekvivalenti nelygybei $\cos 2x < 0$.



2 pav.

Pažymėję $t = 2x$, turėsime nelygybę $\cos t < 0$.

Lygties $\cos t = 0$ sprendinių aibę sudaro taškai

$$\frac{(2m+1)\pi}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Nelygybės $\cos t < 0$ sprendinių aibė yra intervalų

$$\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

(žr. 2 pav.) sąjunga. Ieškamuosius kintamojo x reikšmių intervalus nesunku rasti iš dvigubos nelygybės

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi.$$

Gausime

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ats.: } \left(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Įrodykite, kad su visais realiaisiais skaičiais α ir β galioja lygybė $\sin^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha - \beta) + \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta = 1$.
2. Įrodykite tapatybę $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5 + 3\cos 4x}{8}$.
3. Apskaičiuokite $\cos \frac{x}{2}$, kai $\cos x = \frac{1}{3}$, $2\pi < x < 3\pi$.
4. Išspręskite lygtį $\cos 3x = \cos 5x$.
5. Išspręskite lygtį $\sin 4x + |\sin 5x| = 2$.
6. Išspręskite lygtį $\sin 6x \cdot \cos 8x = 1$.
7. Įrodykite, kad su visais realiaisiais skaičiais x galioja nelygybė $\sin^4 x + \cos^4 x \geq \frac{1}{2}$.
8. Išspręskite nelygybę $2\sin^2 x - 3\cos x - 1 \geq 0$.
9. Išspręskite nelygybę $\cos 2x \geq \sin x$.
10. Raskite $\sin \alpha$, kai $\sin 2\alpha \geq \frac{3}{5}$ ir $\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{1}{3}$.



BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus (Vilniaus universitetas),
Juozas Šinkūnas (Vilniaus pedagoginis universitetas)

1. Į 0,7 litrų ir 0,9 litrų talpos stiklainius reikia supilstyti 21,5 litrų uogienės. Kiek mažiausiai stiklainių reikia?
2. Išspręskite nelygybę: $\log_x(2-x) < 2$.
3. Išspręskite lygtį: $(\operatorname{tg}x + 1)\sin x - \operatorname{tg}x = 1$.
4. Taškas M vienodai nutolęs nuo visų stačiojo trikampio ABC ($\angle C = 90^\circ$) viršūnių ir nėra trikampio plokštumoje. Plokštuma, einanti per taškus M , B ir C , su trikampio ABC plokštuma sudaro 60° kampą. Raskite taško M atstumą iki trikampio plokštumos, jeigu $AC = 6$ cm.



Užduočių sprendimai



STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Pažymėkime $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{x}$. Tuomet:

$$y^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{8}{3} + \frac{16}{x^2} \Rightarrow 3y^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} - 8 \Rightarrow 3y^2 + 8 = 10y \Rightarrow$$

$$3y^2 - 10y + 8 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{3} \Rightarrow y_1 = 2, y_2 = \frac{4}{3}.$$

Toliau:

$$1) \frac{x}{3} - \frac{4}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 6x - 12 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{21};$$

$$2) \frac{x}{3} - \frac{4}{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x_3 = 6, x_4 = -2.$$

$$\text{Ats.: } 3 \pm \sqrt{21}, 6, -2.$$

$$2. \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{7} = -\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} =$$

$$= -\frac{\left(2 \sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7}\right) \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} =$$

$$= -\frac{\sin \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{4 \sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} =$$

$$= -\frac{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin \frac{\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8}.$$

$$\text{Ats.: } \frac{1}{8}.$$

3. Tegu $t = xy$, $u = xz$, $v = yz$. Įrašę į lygčių sistemą, gausime:

$$\begin{cases} t + u = 5, \\ t + v = 10, \\ u + v = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 5 - t, \\ v = 10 - t, \\ 15 - 2t = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 5 - t, \\ v = 10 - t, \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 4, \\ v = 9, \\ t = 1. \end{cases}$$

Toliau spęskime taip:

$$\begin{cases} xy = 1, \\ xz = 4, \\ yz = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x}, \\ z = \frac{4}{x}, \\ \frac{4}{x^2} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x}, \\ z = \frac{4}{x}, \\ x^2 = \frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x}, \\ z = \frac{4}{x}, \\ x = \pm \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}, \\ z = 6, \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

arba
$$\begin{cases} y = -\frac{3}{2}, \\ z = -6, \\ x = -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

$$\text{Ats.: } \left(-\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}; -6\right), \left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}; 6\right).$$

4. Pertvarkykime sumą:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2004^3 &= (1^3 + 2004^3) + (2^3 + 2003^3) + \\ &+ (3^3 + 2002^3) + \dots + (1002^3 + 1003^3) = \\ &= (1 + 2004)(1^2 - 1 \cdot 2004 + 2004^2) + \\ &+ (2 + 2003)(2^2 - 2 \cdot 2003 + 2003^2) + \\ &+ (3 + 2002)(3^2 - 3 \cdot 2002 + 2002^2) + \\ &+ \dots + (1002 + 1003)(1002^2 - 1002 \cdot 1003 + 1003^2) = \\ &= 2005(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 1002^2 + 1003^2 + \dots + \\ &+ 2002^2 + 2003^2 + 2004^2 - 1 \cdot 2004 - 2 \cdot 2003 - 3 \cdot 2002 - \dots - \\ &- 1002 \cdot 1003). \end{aligned}$$

Dabar jau akivaizdu, kad suma $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2004^3$ dalijasi iš 2005.

5. Keleivių skaičių pažymėkime n ($1 \leq n \leq 100$). Pagal sąlygą stovinčių keleivių skaičius buvo $\frac{n}{3}$; taigi $n = 3m$, $m \in \{1; 2; \dots; 33\}$.

Išlipusių stotelėje keleivių skaičius $0,04n = 0,12m = \frac{3m}{25}$; taigi $m = 25k$, $k = 1$. Išvada tokia: autobuse važiavo 75 keleiviai, o trims išlipus stotelėje autobuse liko 72 keleiviai.

Ats.: 72.

6. Žasų skaičių pažymėkime n . Tada n^2 yra gautoji pinigų suma. Pasidalijus po 10 litų, dar liko 10 litų ir keli litai. Pastarųjų litų skaičių pažymėkime m , $m \in \{1; 2; \dots; 9\}$. Taigi gauname lygtį su dviem nežinomaisiais:

$$n^2 - 20 = 10 + m, \quad m \in \{1; 2; \dots; 9\}.$$

Ji ekvivalenti lygčiai

$$n^2 = 30 + m, \quad m \in \{1; 2; \dots; 9\},$$

ir turi vienintelį sprendinį: $m = 6$, $n = 6$.

Nepasidalyta 16 litų, todėl kiekvienas turi gauti dar po 8 litus. Pagal tolesnę uždavinio sąlygą gauname, kad jaunesnysis brolis turi gražinti $10 - 8 = 2$ litus vyresniajam broliui.

Ats.: 2 Lt.

7. Tegu x yra dvynių amžius; \overline{aa} – dvynių brolio amžius; \overline{bc} – visų trijų brolių amžių suma. Pagal sąlygą $c = 2b$, todėl

$$\overline{bc} = 10b + c = 10b + 2b = 12b.$$

Aišku, kad b priklauso aibei $\{1; 2; 3; 4\}$.

Nagrinėkime lygybę

$$2x + \overline{aa} = 12b,$$

kurią galima užrašyti ir taip:

$$2x + 11a = 12b.$$

Iš čia

$$2x = 12b - 11a.$$

Nežinomųjų a , b ir x reikšmės turi būti sveikieji teigiami skaičiai. Be to, $b \in \{1; 2; 3; 4\}$. Tada didžiausia a reikšmė galėtų būti 2. Sudarykime skaičių $2x$ lentelę poruodami galimas a ir b reikšmes:

$a \backslash b$	1	2	3	4
1	1	13	25	37
2	–	2	14	26

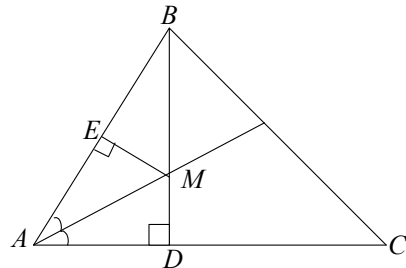
Joje matome tik du lyginius skaičius: 14 ir 26. Pirmąjį atmetame, nes gautume $x = 7$ (tai pirmoko amžius). Antrasis skaičius tinka, nes gauname $x = 13$. Šis skaičius atitinka $a = 2$, todėl dvynių brolio amžius yra 22 metai.

Ats.: 13, 13 ir 22 metai.

8. Pagal uždavinio sąlygą
 $\angle DAM = \angle MAE$,

$$\begin{aligned} AE &= EB, \\ ME &\perp AB, \\ BD &\perp AC. \end{aligned}$$

Aišku, kad
 $\triangle DAM = \triangle MAE =$
 $= \triangle MEB.$



Taigi

1 pav.

$$\angle DAM = \angle MAE = \angle EBM = 30^\circ.$$

Tada $\angle A = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.

Ats.: 60° .

9. Keturkampį $ABCD$ padalykime įstrižaine AC į dvi dalis. Trikampio ABC plotą pažymėkime S_1 , o $\triangle ACD$ plotą pažymėkime S_2 . Pagal sąlygą $S_1 + S_2 = S$. Nubrėžkime atkarpas AP ir CM . Palyginę susidariusių trikampių plotus gausime:

$$\begin{aligned} S_{\triangle BMC} &= S_{\triangle CMN} = S_{\triangle ABC} = S_1, \\ S_{\triangle APQ} &= S_{\triangle ADP} = S_{\triangle ACD} = S_2. \end{aligned}$$

Vadinasi,

$$\begin{aligned} S_{\Delta BMN} + S_{\Delta DPQ} &= \\ &= 2S_1 + 2S_2 = 2S. \end{aligned}$$

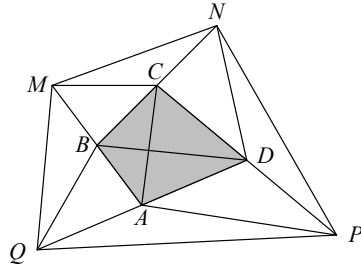
Analogiškai (nubrėžę įstrižainę BD ir atkarpas BQ bei DN) gauname, kad

$$S_{\Delta AQM} = 2S_{\Delta ABD},$$

$$S_{\Delta CNP} = 2S_{\Delta BCD}.$$

ir todėl

$$S_{\Delta AQM} + S_{\Delta CNP} = 2(S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD}) = 2S.$$



2 pav.

Taigi

$$\begin{aligned} S_{MNPQ} &= (S_{\Delta BMN} + S_{\Delta DPQ}) + (S_{\Delta AQM} + S_{\Delta CNP}) + \\ &+ S_{ABCD} = 2S + 2S + S = 5S. \end{aligned}$$

Ats.: $5S$.

10. Kadangi visos trys piramidės šoninės briaunos yra pasvirusios į pagrindo plokštumą vienodu kampu, tai piramidės aukštinės pagrindas yra apibrėžta apie piramidės pagrindo trikampi apskritimo centras. Pagrindo trikampis yra statusis, todėl apibrėžto apie jį apskritimo centras yra įžambinės vidurio taškas, o šio apskritimo spindulys R yra lygus $6,5$. Taigi piramidės aukštinės ilgis H apskaičiuojamas taip:

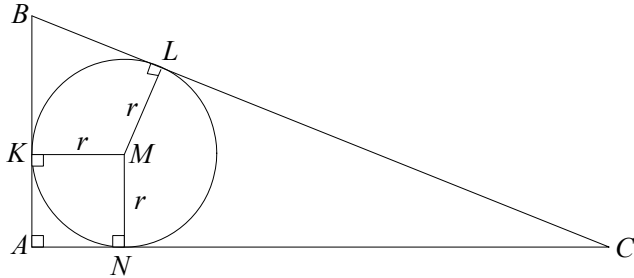
$$H = R \operatorname{tg} 60^\circ = 6,5 \cdot \sqrt{3}.$$

Apskaičiuokime pagrindo (žr. pav.) plotą. Pagal sąlygą trikampis ABC yra statusis, o L yra įbrėžtinio apskritimo ir įžambinės lietimosi taškas. Todėl trikampio ABC plotą galima apskaičiuoti pagal formulę $S_{\Delta ABC} = BL \cdot LC$. Gauname $S_{\Delta ABC} = 3 \cdot 8 = 24$. Šį plotą galima rasti ir „standartiškai“.

Įbrėžtojo apskritimo spindulį pažymėkime r . Tada $BK = BL = 3$, $CL = CN = 8$, $AB = 3 + r$, $AC = 8 + r$. Pagal Pitagoro teoremą $(3+r)^2 + (8+r)^2 = 11^2$. Iš čia gauname lygtį

$$r^2 + 11r - 24 = 0, \text{ kuri turi vieną teigiamą sprendinį } r = \frac{\sqrt{217} - 11}{2}.$$

Taigi



3 pav.

$$AB = \frac{\sqrt{217} - 11}{2} + 3 = \frac{\sqrt{217} - 5}{2},$$

$$AC = \frac{\sqrt{217} - 11}{2} + 8 = \frac{\sqrt{217} + 5}{2},$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{217} - 5}{2} \cdot \frac{\sqrt{217} + 5}{2} = \frac{217 - 25}{8} = 24.$$

Belieka apskaičiuoti piramidės tūrį:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 6,5\sqrt{3} = 44\sqrt{3}.$$

Formulės $S_{\Delta ABC} = BL \cdot LC$ įrodymas. Sakykime, kad $CL = x$, $LB = y$. Tada $BC = x + y$, $AC = x + r$, $AB = y + r$. Pagal Pitagoro teoremą $(x + y)^2 = (x + r)^2 + (y + r)^2 \Rightarrow r^2 + (x + y)r = xy$. Kita vertus, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) \cdot r = \frac{1}{2}(x + y + x + r + y + r) \cdot r = (x + y + r) \cdot r = r^2 + (x + y)r$. Taigi $S_{\Delta ABC} = x \cdot y$.

$$\text{Ats.: } 44\sqrt{3}.$$

PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Sakykime x – stačiakampio kraštinės, kurią reikia tvirti mūrine siena, ilgis, o y – stačiakampio kraštinės, kurią reikia tvirti medine tvora, ilgis. Tada stačiakampio plotas $xy = 9000$ (m²), o tvoros kaina

$$K = 25x \cdot 2 + 10y \cdot 2 = 50x + 20y. \text{ Kadangi } y = \frac{9000}{x}, \text{ tai}$$

$$\begin{aligned} K(x) &= 50x + 20 \cdot \frac{9000}{x} = 50x + \frac{180\,000}{x} \geq 2\sqrt{50x \cdot \frac{180\,000}{x}} = \\ &= 2 \cdot 3000 = 6000 \text{ (Lt)}. \end{aligned}$$

Mažiausia tvoros kaina, lygi 6000 Lt, yra tada, kai $50x = \frac{180\,000}{x}$,

t. y. kai $x = 60$ (m). Tada $y = \frac{9000}{60} = 150$ (m).

Ats.: Žemės sklypo matmenys 60 m × 150 m.

2. Sakykime $y = \frac{x+3+x+5}{2} = x+4$. Tada lygtyje kintamąjį x pakeitę kintamuoju $y-4$, gauname lygtį:

$$\begin{aligned} (y-1)^4 + (y+1)^4 &= 16 \text{ arba} \\ (y-1)^2 \cdot (y-1)^2 + (y+1)^2 \cdot (y+1)^2 &= 16. \end{aligned}$$

Pakėlus kairioje lygties pusėje esančius reiškinius kvadratu, sudauginus ir suprastinus panašius narius, gausime bikvadratinę lygtį

$$y^4 + 6y^2 - 7 = 0.$$

Jos sprendiniai yra: $y_1 = -1$, $y_2 = 1$. Tada $x_1 = y_1 - 4 = -1 - 4 = -5$, $x_2 = y_2 - 4 = 1 - 4 = -3$.

Ats.: -5; -3.

3. Sakykime pirmojoje statinėje yra u kg druskos rūgštis, antrojoje statinėje – v kg druskos rūgštis ir į pirmąją statinę buvo įpilta x kg vandens, o į antrąją statinę – y kg vandens. Tada pirmojoje statinėje

druskos rūgštis tirpalo koncentracija iš pradžių buvo $\frac{u}{900}$, o įpylus vandens – $\frac{u}{900+x}$. Antroje statinėje druskos rūgštis koncentracija iš pradžių buvo $\frac{v}{1600}$, o įpylus vandens – $\frac{v}{1600+y}$.

Pagal sąlygą:

$$\frac{\frac{u}{900}}{\frac{u}{900+x}} = r \quad \text{ir} \quad \frac{\frac{v}{1600}}{\frac{v}{1600+y}} = s,$$

t. y.

$$900+x=900r \quad \text{ir} \quad 1600+y=1600s.$$

Iš čia

$$x+y=900r+1600s-2500.$$

Kadangi

$$s = \frac{18-r}{2r} = \frac{9}{r} - \frac{1}{2},$$

tai

$$\begin{aligned} x+y &= 900r + 1600\left(\frac{9}{r} - \frac{1}{2}\right) - 2500 = \left(900r + \frac{1600 \cdot 9}{r}\right) - 3300 \geq \\ &\geq 2\sqrt{900r \cdot \frac{1600 \cdot 9}{r}} - 3300 = \\ &= 2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot 3 - 3300 = 7200 - 3300 = 3900 \text{ (kg)}. \end{aligned}$$

Taigi mažiausiai vandens (3900 kg) galėjo būti įpilta į abi statines tik tada, kai $900r = \frac{1600 \cdot 9}{r}$, t. y. kai $r = 4$, o $s = \frac{7}{4}$.

Ats.: 3900 kg.

4. Vieno produkcijos vieneto vidutiniai kaštai apskaičiuojami pagal formulę

$$\frac{K(x)}{x} = 2x + 200 + \frac{1\,280\,000}{x},$$

čia x – produkcijos kiekis. Kadangi

$$2x + \frac{1\,280\,000}{x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{1\,280\,000}{x}} = 2 \cdot 1600 = 3200,$$

tai $\frac{K(x)}{x} \geq 3200 + 200 = 3400$ (Lt). Mažiausi vieno produkcijos

vieneto kaštai, lygūs 3400 lt, yra tada, kai $2x = \frac{1\,280\,000}{x}$, t. y. kai $x = 800$.

Ats.: 800.

5. Funkcijos išraišką pertvarkome taip:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{1500} + x^{400} + x^{105} + \frac{2005}{x} = \\ &= \left(x^{1500} + \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x}}_{1500\ k} \right) + \left(x^{400} + \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x}}_{400\ k} \right) + \\ &\quad + \left(x^{105} + \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x}}_{105\ k} \right). \end{aligned}$$

Remdamiesi sąryšiu tarp aritmetinio ir geometrinio vidurkių, gauname:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 1501 \sqrt[1501]{x^{1500} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x}}_{1500\ k}} + 401 \sqrt[401]{x^{400} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x}}_{400\ k}} + \\ &\quad + 106 \sqrt[106]{x^{105} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x}}_{105\ k}} = 1501 + 401 + 106 = 2008. \end{aligned}$$

Taigi funkcijos reikšmės ne mažesnės už 2008. Mažiausią reikšmę lygią 2008, funkcija įgyja, kai $x^{1500} = x^{400} = x^{105} = \frac{1}{x}$, t. y. kai $x = 1$.

Ats.: 2008.

6. a) Akivaizdu, kad $(a - b)^2 \geq 0$, t. y. $a^2 + b^2 \geq 2ab$; čia lygybė galima tik tada, kai $a = b$. Prie šios nelygybės abiejų pusių pridėję po reiškinį $a^2 + b^2$, gauname: $2(a^2 + b^2) \geq a^2 + 2ab + b^2$, t. y.

$$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 \text{ arba } \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \frac{(a + b)^2}{4}. \text{ Iš čia išplaukia,}$$

$$\text{kad } \frac{a + b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

b) Reiškini $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}$ pertvarkome taip:

$$\begin{aligned} \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} &= \frac{1}{2} \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \right) \geq \\ &\geq \sqrt{\frac{bc}{a} \cdot \frac{ac}{b}} + \sqrt{\frac{ac}{b} \cdot \frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a}} = a + b + c. \end{aligned}$$

Taigi $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$. Lygybė galima tik tada, kai $a = b = c$.

7. Kadangi dėžutės pagrindas taisyklingasis šešiakampis, kurio kraštinės ilgis $(90 - 2x)$ cm, o dėžutės aukštis $h = x \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}x$, tai dėžutės tūris

$$\begin{aligned} V(x) &= 6 \cdot \frac{(90 - 2x)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3}x = \frac{9}{2} (90 - 2x)^2 \cdot x = \\ &= \frac{9}{2} (90 - 2x)(90 - 2x)(4x) \cdot \frac{1}{4} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{9}{8}(90-2x)(90-2x)(4x) \leq \frac{9}{8} \left(\frac{90-2x+90-2x+4x}{3} \right)^3 = \\
 &= \frac{9}{8} \cdot 60^3 = 243000 \text{ (cm}^3\text{)}.
 \end{aligned}$$

Taigi dėžutės tūris ne didesnis už 243 dm³. Didžiausia galima jo reikšmė lygi 243 dm³, kai 90 - 2x = 4x, t. y. kai x = 15 cm.

Ats.: 15 cm.

8. Paveikslėlyje pavaizduota taisyklingoji keturkampė piramidė S_{ABCD} , kurios šoninė briauna $SC = b$.

Sakykime piramidės aukštinė $SO = x$. Tada iš stačiojo trikampio SOC :

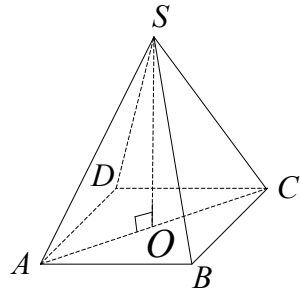
$$OC = \sqrt{b^2 - x^2} \quad \text{ir} \quad AC = 2\sqrt{b^2 - x^2}.$$

Piramidės pagrindo plotas $S_{ABCD} = \frac{AC^2}{2} = 2(b^2 - x^2)$,

o piramidės tūris $V(x) = \frac{1}{3} \cdot 2(b^2 - x^2) \cdot x = \frac{2}{3}(b^2 - x^2) \cdot x$.

Kadangi dauginamųjų $b^2 - x^2$ ir x suma nėra pastovi, tai ieškosime tokios x reikšmės, su kuria $V^2(x)$ įgyja didžiausią reikšmę (o tuo pačiu ir $V(x)$!). Turime:

$$\begin{aligned}
 V^2(x) &= \frac{4}{9}(b^2 - x^2)^2 \cdot x^2 = \\
 &= \frac{4}{9}(b^2 - x^2)(b^2 - x^2) \cdot (2x^2) \cdot \frac{1}{2} = \\
 &= \frac{2}{9}(b^2 - x^2)(b^2 - x^2) \cdot (2x^2) \leq \\
 &\leq \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{b^2 - x^2 + b^2 - x^2 + 2x^2}{3} \right)^3 = \\
 &= \frac{2}{9} \cdot \frac{8b^6}{27} = \frac{16b^6}{243}.
 \end{aligned}$$



1 pav.

Taigi $V^2(x) \leq \frac{16b^6}{243}$ arba $V(x) \leq \frac{4b^3}{9\sqrt{3}}$.

Piramidės tūris yra didžiausias ir lygus $\frac{4\sqrt{3} b^3}{27}$, kai

$$b^2 - x^2 = 2x^2, \text{ t. y. kai } x = \frac{b\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ats.: } x = \frac{b\sqrt{3}}{3}.$$

9. Sakykime dėžės ilgis yra x , plotis y , o aukštis z . Tada dėžės pilno paviršiaus plotas $T = 2xy + 2xz + 2yz$, o tūris $V = xyz$. Kadangi

$$T = 2xy + 2xz + 2yz \geq 3\sqrt[3]{(2xy)(2xz)(2yz)} = 6\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2},$$

tai $T \geq 6\sqrt[3]{V^2}$. Dėžės pilnas paviršiaus plotas yra mažiausias ir

lygus $6\sqrt[3]{V^2}$, kai $2xy = 2xz = 2yz$, t. y. kai $x = y = z = \sqrt[3]{V}$.

$$\text{Ats.: } \sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}.$$

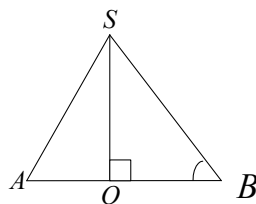
10. Paveiksle pavaizduotas kūgio ašinis pjūvis ASB ; čia $SB = l$ – kūgio sudaromoji ir $\angle SBO = \alpha$. Kūgio tūris

$$V = \frac{1}{3} OB^2 \cdot SO. \quad \text{Kadangi}$$

$$SO = l \sin \alpha, \quad OB = l \cos \alpha, \text{ tai}$$

$$V(\alpha) = \frac{1}{3} l^2 \cos^2 \alpha \cdot l \sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{3} l^3 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha.$$



2 pav.

Ieškosime su kuria α reikšme $V^2(\alpha) = \frac{1}{9} l^6 \sin^2 \alpha \cdot \cos^4 \alpha$

įgyja didžiausią reikšmę. Su šia α reikšme ir $V(\alpha)$ įgys didžiausią reikšmę. Turime:

$$V^2(\alpha) = \frac{1}{9} l^6 \sin^2 \alpha \cdot \cos^4 \alpha = \frac{1}{9} l^6 \cdot \frac{1}{2} (2 \sin^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \leq \\ \leq \frac{1}{18} l^6 \left(\frac{2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{3} \right)^3 = \frac{1}{18} l^6 \left(\frac{2}{3} \right)^3 = \frac{4}{243} l^6$$

ir $V(\alpha) \leq \frac{2}{9\sqrt{3}} l^3 = \frac{2\sqrt{3}}{27} l^3$. Kūgio tūris yra didžiausias ir lygus

$$\frac{2\sqrt{3}}{27} l^3, \text{ kai } 2 \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha, \text{ t.y. kai } \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{2}. \text{ Kadangi}$$

$$\alpha \in (0; 90^\circ), \text{ tai } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha \approx 35^\circ.$$

$$\text{Ats.: } \frac{1}{3} l^3 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha; \alpha \approx 35^\circ.$$

ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Čia „triušiai“ – mokiniai, „narveliai“ – padarytų klaidų skaičius. Į „narvelių“ 0 „patalpinkime“ visus, kurie nepadarė nė vienos klaidos, į „narvelių“ 1 – tuos, kurie padarė vieną klaidą, o į „narvelių“ 2 – kurie padarė dvi klaidas ir taip iki 13 „narvelio“, į kurį pateko vienas Mikas. Dabar taikykite Dirichlé principą. Įrodykite prieštaros būdu. Sakykite, jokie trys mokiniai nepadarė vienodai klaidų, t.y. į kiekvieną „narvelių“ 0, 1, 2, ..., 12 pateko mažiau kaip 3 mokiniai. Tuomet kiekviename jų yra du arba mažiau mokinių, o visuose 13 narvelių ne daugiau kaip $2 \cdot 13 = 26$ mokiniai. Pridėję Miką Petraitį, negausime 30 mokinių. Gavome prieštaravimą. Tai rodo, kad uždavinio teiginys teisingas, t.y. bent trys mokiniai padarė vienodai klaidų.
2. *Atsakymas.* Jeigu metai ne keliamieji, tai 366, jeigu keliamieji – 367.

3. Jeigu kiekvienoje klasėje mokytūsi mažiau negu 26 mokiniai, tai 43–jose klasėse mokytūsi ne daugiau kaip 1075 mokiniai ($25 \cdot 43 = 1075$). Kadangi mokykloje mokosi 1076 mokiniai, tai yra bent viena klasė, kurioje mokosi daugiau kaip 25 mokiniai.

4. Išnagrinėkime eilutę 1, 11, 111, 1 111, ..., $\underbrace{111\dots 1}_{2006}$. Pagal Dirichlé principą egzistuoja du šios eilutės skaičiai, kuriuos dalijant iš 2005, gaunamos vienodos liekanos. Iš didesniojo skaičiaus atėmę mažesnįjį, gausime skaičių užrašytą vienetais ir nuliais, kuris bus skaičiaus 2005 kartotinis.

5. Išnagrinėkime du atvejus.

Tarkime, kad yra 9 skaičiai, kuriuos dalijant iš 9 gaunamos 9 skirtingos liekanos. Tuomet liekanų suma lygi 36 ($0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$) ir skaičių suma dalijasi iš 9 be liekanos.

Kitas atvejis. Tarkime, kad nėra 9 skaičių, kuriuos dalijant iš 9 gautume 9 skirtingas liekanas. Tuomet didžiausias skirtingų liekanų skaičius gali būti 8. Kadangi $65 = 8 \times 8 + 1$, tai pagal Dirichlé principą yra bent 9 skaičiai, kuriuos dalijant iš 9 gaunama vienoda liekana. Tų skaičių suma bus dali iš 9.

6. Tegul $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ - duotieji skaičiai.

Sudarykime n sumų:

$$\begin{aligned} & a_1, \\ & a_1 + a_2, \\ & a_1 + a_2 + a_3, \\ & \dots, \\ & a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n. \end{aligned}$$

Jei bent viena iš šių sumų dalijasi iš n , tai teiginys teisingas. Sakykime, kad nei viena iš jų nesidalija iš n . Tada dalijamos iš n jos gali duoti tik liekanas 1, 2, ..., $n-1$. Sumų yra n , o skirtingų nenulinių liekanų, gaunamų dalijant sveikuosius skaičius iš n , yra $n-1$.

Čia „narveliai“ – liekanos, o „triušiai“ – sumos. Kadangi „narvelių“ yra $n-1$, o sumų n , tai pagal Dirichlé principą bus „narvelis“, kuriame yra daugiau kaip viena suma, t.y. bent dvi sumos. Tų sumų skirtumas dalijasi iš n ir jis yra lygus kuriam nors duotajam skaičiui arba kelių skaičių sumai.

7. Sudarykime 30 „narvelių“: 0 – komandoms, nežaidusioms nei vienu rungtynių, 1 – komandoms, sužaidusioms vienerias rungtynes, 2 – dvejas, ... , 29 – dvidešimt devynias rungtynes (didžiausias galimų rungtynių skaičius). „Narvelis 0“ arba „Narvelis 29“ turi būti tuščias, nes negali būti taip, kad viena komanda nesužaidė nei vienu rungtynių, o kita tuo pačiu metu sužaidė 29 rungtynes. Abiem atvejais 29-iems „narveliams“ tenka 30 komandų. Vadinasi nors viename „narvelyje“ yra bent dvi komandos.

8. Padalinkime kvadratą į 25 lygius kvadratėlius, kurių kiekvieno kraštinė lygi $\frac{1}{5}$.

Tuomet bus bent vienas kvadratėlis, kuriame bus bent trys taškai ($51 > 25 \cdot 2$), o apie jį apibrėžto apskritimo spindulys mažesnis už $\frac{1}{7}$.

9. Išdėstykite atkarpas pagal jų ilgį: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_7$. Iš atkarpų $a_k \leq a_{k+1} \leq a_{k+2}$ galima sudaryti trikampį tada ir tik tada, kai $a_k + a_{k+1} \geq a_{k+2}$. Sakykime, kad uždavinio teiginys neteisingas. Vadinasi, kad $a_k + a_{k+1} \leq a_{k+2}$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$). Tuomet atkarpos a_7 ilgis būtų mažiausias, kai $a_1 = a_2 = 10 \text{ cm}$ ir $a_k + a_{k+1} = a_{k+2}$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$). Bet netgi šiuo atveju $a_7 = 130 \text{ cm}$. Gavome prieštaravimą sąlygai.

10. Nubrėžkime kvadrato $ABCD$ vidurinę liniją MN ir nagrinėkime bet kurią iš devynių duotųjų tiesių, pavyzdžiui KL . Ji dalija kvadratą į dvi trapecijas (atskiru atveju stačiakampius), kurių plotų santykis 1:3. Kadangi trapecijos plotas lygus vidurinės linijos ir aukštinės

sandaugai, tai $MO:ON = 1:3$. Taigi bet kuri iš devynių duotųjų tiesių eina per tašką, kuris kvadrato vidurinę liniją dalija santykiu $1:3$. Tokių taškų, kurie vidurinę liniją dalija santykiu $1:3$, yra du. Du, tokia savybe pasižymintys taškai, yra ir kitoje kvadrato vidurinėje linijoje. Kadangi yra devynios tiesės, tai per bent vieną iš tų keturių taškų eis ne mažiau kaip trys tiesės.

TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Užrašykime lygtį pavidalu $(x-1)(y-1)=1$. Dviejų sveikųjų skaičių sandauga lygi 1 tik tuomet, kai ši skaičių pora yra $(-1; -1)$ arba $(1; 1)$. Taigi $x=0, y=0$ arba $x=2, y=2$.

Ats.: $x=0, y=0$; $x=2, y=2$.

2. Išreikškime iš lygties kintamąjį y :

$$y = \frac{5x}{x-5} = \frac{5x-25+25}{x-5} = 5 + \frac{25}{x-5}.$$

Kintamasis y bus sveikasis skaičius tik tuomet, kai $|x-5|$ yra skaičiaus 25 daliklis, t. y. arba $|x-5|=1$, arba $|x-5|=5$, arba $|x-5|=25$. Iš pirmosios lygties $x=4$ arba $x=6$, iš antrosios $x=0$ (šią reikšmę turime atmesti) arba $x=10$, iš trečiosios $x=30$ arba $x=-20$. Apskaičiuojame atitinkamas kintamojo y reikšmes: $y=-20, y=30, y=10, y=6, y=4$.

Ats.: $(4; -20), (6; 30), (10; 10), (30; 6), (-20; 4)$.

3. Kadangi $-38743 = 213 \cdot (-182) + 23$, tai $q = -182, r = 23$.

Ats.: $q = -182, r = 23$.

4. Taikome Euklido algoritmą: $546 = 231 \cdot 2 + 84, 231 = 84 \cdot 2 + 63, 84 = 63 \cdot 1 + 21, 63 = 21 \cdot 3$. Paskutinioji nelygi nuliui liekana, t. y. duotųjų skaičių bendras didžiausias daliklis, yra 21.

Ats.: 21.

$$5. \quad -7 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9}}} = -7 + \frac{1}{3 + \frac{9}{10}} = -7 + \frac{1}{\frac{39}{10}} = -7 + \frac{10}{39} = \frac{-273 + 10}{39} =$$

$$= -\frac{263}{39}.$$

$$\text{Ats.: } -\frac{263}{39}.$$

$$6. \quad \frac{129}{25} = 5 + \frac{4}{25} = 5 + \frac{1}{\frac{25}{4}} = 5 + \frac{1}{6 + \frac{1}{4}} = [5, 6, 4].$$

$$\text{Ats.: } [5, 6, 4].$$

7. Kadangi $(15, 12) = 3$, o 25 nesidalija iš 3, tai pagal 1 teoremą duotoji diofantinė lygtis sprendinių neturi.

Ats.: neturi.

8. Iš lygties $41x + 17y = 2$ išreiškiame y :

$$y = \frac{-41x + 2}{17} = -2x + \frac{-7x + 2}{17}.$$

Pažymėkime $t_1 = \frac{-7x + 2}{17}$ ir tuomet

$$x = \frac{-17t_1 + 2}{7} = -2t_1 + \frac{-3t_1 + 2}{7}.$$

Pažymėkime $t_2 = \frac{-3t_1 + 2}{7}$. Iš čia

$$t_1 = \frac{-7t_2 + 2}{3} = -2t_2 + \frac{-t_2 + 2}{3}.$$

Toliau $t_3 = \frac{-t_2 + 2}{3} \Rightarrow t_2 = -3t_3 + 2$ - sveikasis skaičius, kai $t_3 \in \mathbb{Z}$. Tuomet

$$t_1 = \frac{-7t_2 + 2}{3} = \frac{-7(-3t_3 + 2) + 2}{3} = 7t_3 - 4 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-17t_1 + 2}{7} = \frac{-17(7t_3 - 4) + 2}{7} = -17t_3 + 10, t_3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$y = \frac{-41x + 2}{17} = \frac{-41(-17t_3 + 10) + 2}{17} = 41t_3 - 24.$$

Taigi lygties bendrasis sprendinys (rašant $t_3 = t$) yra $x = -17t + 10$, $y = 41t - 24$, $t \in \mathbb{Z}$.

Ats.: $x = -17t + 10$, $y = 41t - 24$, $t \in \mathbb{Z}$.

9. Iš lygties $x = \frac{-84y + 39}{15} = -5y + \frac{-9y + 39}{15}$. Tegū $t_1 = \frac{-9y + 39}{15}$.

Tuomet

$$y = \frac{-15t_1 + 39}{9} = -t_1 + \frac{-6t_1 + 39}{9},$$

$$t_2 = \frac{-6t_1 + 39}{9} \Rightarrow t_1 = \frac{-9t_2 + 39}{6} = -t_2 + \frac{-3t_2 + 39}{6}, t_3 = \frac{-3t_2 + 39}{6}$$

$\Rightarrow t_2 = -2t_3 + 13$ – sveikasis skaičius, kai $t_3 \in \mathbb{Z}$. Tada

$$t_1 = \frac{-9t_2 + 39}{6} = \frac{-9(-2t_3 + 13) + 39}{6} = 3t_3 - 13 \Rightarrow$$

$$y = \frac{-15t_1 + 39}{9} = \frac{-15(3t_3 - 13) + 39}{9} = -5t_3 + 26 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-84y + 39}{15} = \frac{-84(-5t_3 + 26) + 39}{15} = 28t_3 - 143, t_3 = t \in \mathbb{Z}.$$

Vadinasi, $x = 28t - 143$, $y = -5t + 26$, $t \in \mathbb{Z}$.

Vietoje t įrašykime, pavyzdžiui, $t + 1$ - gausime ekvivalenčią bendrojo sprendinio išraišką: $x = 28t - 115$, $y = -5t + 21$, $t \in \mathbb{Z}$.

Ats.: $x = 28t - 143$, $y = -5t + 26$, $t \in \mathbb{Z}$; $x = 28t - 115$, $y = -5t + 21$, $t \in \mathbb{Z}$.

10. Užrašykime duotąją lygtį taip: $11y + 10x = 15$. Ją išspręskime naudodamiesi grandininėmis trupmenomis. Trupmeną $\frac{11}{10}$

užrašykime grandinine trupmena: $\frac{11}{10} = 1 + \frac{1}{10} = [1, 10]$. Atmetę paskutinę jos grandį, gausime „trupmena“ 1. Skirtumas yra $\frac{11}{10} - 1 = \frac{1}{10}$. Padauginkime abi šios lygybės puses iš 10. Gausime lygybę $11 \cdot 1 + 10 \cdot (-1) = 1$ (kurią galėjome užrašyti ir iš karto). Tuomet ją padauginę iš 15, turėsime $11 \cdot 15 + 10 \cdot (-15) = 15$. Taigi duotosios lygties $11y + 10x = 15$ atskirasis sprendinys yra $y_0 = 15, x_0 = -15$. Pagal 3 teoremą bendrasis šios lygties sprendinys toks: $y = 15 - 10t, x = -15 + 11t, t \in \mathbb{Z}$.

Dabar raskime t reikšmes, su kuriomis galioja nelygybė $-10 \leq -15 + 11t \leq 20$. Ši nelygybė ekvivalenti nelygybei $5 \leq 11t \leq 35$, kurios sveikieji sprendiniai yra $t = 1, t = 2, t = 3$. Kai $t = 1$, tai $x = -4, y = 5$. Kai $t = 2$, tai $x = 7, y = -5$. Kai $t = 3$, tai $x = 18, y = -15$.

Ats.: $(-4; 5), (7; -5), (18; -15)$.

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Pagal Euklido algoritmą gauname:

$$P(x) = Q(x) \cdot (x-3) + (40x^2 - 16x + 56);$$

$$Q(x) = (40x^2 - 16x + 56) \cdot (x/8 + 3/8) + 0.$$

Antroji liekana lygi nuliui, todėl didžiausias bendrasis daliklis yra pirmoji liekana $40x^2 - 16x + 56 = 8(5x^2 - 2x + 7)$.

Ats.: $D(P; Q) = 5x^2 - 2x + 7$.

2. Pagal Euklido algoritmą gauname:

$$P(x) = Q(x) \cdot (x-5) + (17x^2 + 34x + 34);$$

$$Q(x) = (17x^2 + 34x + 34) \cdot (x+4) + 0.$$

Antroji liekana lygi nuliui, todėl didžiausias bendrasis daliklis yra pirmoji liekana $17x^2 + 34x + 34 = 17(x^2 + 2x + 2)$.

Ats.: $D(P; Q) = x^2 + 2x + 2$.

3. Pagal Bezu teoremą daugianario $P(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 8$ dalybos iš $x + 4 = x - (-4)$ liekana yra

$$P(-4) = (-4)^3 + 6 \cdot (-4)^2 + 10(-4) + 8;$$

o dalybos iš $(x - 4)$ liekana lygi

$$P(4) = 4^3 + 6 \cdot 4^2 + 10 \cdot 4 + 8 = 208.$$

Ats.: 0; 208.

4. Apskaičiuavę daugianario reikšmę taške $x=1$, gauname $P(1) = 5 - 2 + 2 + 2 - 7 = 0$. Šis rezultatas rodo (pagal Bezu teoremą), kad daugianaris $P(x)$ dalijasi iš dvinario $(x - 1)$.

Ats.: taip.

5. Padalykime daugianarį $(6x^3 - 7x^2 - 16x + m)$ iš dvinario $(x - 2)$:

$$\begin{array}{r} \underline{6x^3 - 7x^2 - 16x + m} \quad | \underline{x - 2} \\ \underline{6x^3 - 12x^2} \qquad \qquad \quad 6x^2 + 5x - 6 \\ \underline{-5x^2 - 16x} \\ \underline{5x^2 - 10x} \\ \underline{-6x + m} \\ \underline{-6x + 12} \\ m - 12 \end{array}$$

Skaičius 2 yra daugianario šaknis, kai liekana $(m - 12)$ yra lygi nuliui. Taigi, $m = 12$. Kitas dvi šaknis rasime išsprendę kvadratinę

lygtį $6x^2 + 5x - 6 = 0$; gausime $\frac{2}{3}$ ir $-\frac{3}{2}$.

Ats.: 2; $\frac{2}{3}$; $-\frac{3}{2}$.

6. Kad daugianaris $(2x^3 + mx^2 - 13x + n)$ turėtų šaknis 2 ir 3, jis turi dalytis ir iš $(x - 2)$, ir iš $(x - 3)$; taigi iš sandaugos $(x - 2) \cdot (x - 3) = x^2 - 5x + 6$. Dalydami kampu gauname:

$$\begin{array}{r} \underline{2x^3+mx^2-13x+n} \quad | \quad \underline{x^2-5x+6} \\ \underline{2x^3-10x^2+12x} \qquad \qquad \qquad 2x+(10+m) \\ \quad \quad \quad \underline{-(10+m)x^2-25x+n} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{(10+m)x^2-(50+5m)x+(60+6m)} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad (25+5m)x+(n-60-6m) \end{array}$$

Liekana lygi nuliui, kai $m = -5$; $n = 30$.

Tuomet įrašę $m = -5$ į lygtį $2x + (10 + m) = 0$, gauname:

$$2x + 5 = 0 \Rightarrow x = -2,5.$$

Ats.: $m = 5$, $n = 30$; $-2,5$.

7.

	7	-14	0	3	-7	3	-2	liekana
1	7	-7	-7	-4	-11	-8	-10	-10
-1	7	-21	21	-18	11	-8	6	6
2	7	0	0	3	-1	1	0	0
-2	7	-28	56	-109	211	-419	836	836

8.

	4	9	13	10	liekana
-2	4	1	11	-11	-11

Ats.: ne.

9. Tegū x_1 ir x_2 yra daugianario šaknys, kurių sandauga lygi 2. Tada daugianaris dalijasi ir iš dvinaro $(x - x_1)$, ir iš dvinaro $(x - x_2)$. Taigi, jis dalijasi iš sandaugos $(x - x_1)(x - x_2)$, kurią galima užrašyti trinariu $(x^2 + ax + 2)$; čia $a = -(x_1 + x_2)$.

Dalydami daugianarį iš trinario $(x^4 - x^3 + mx^2 + 10x - 4)$ iš trinario $(x^2 + ax + 2)$ gauname:

$$\begin{aligned} x^4 - x^3 + mx^2 + 10x - 4 &= \\ &= (x^2 + ax + 2)(x^2 - (a+1)x + (a^2 + a - 2 + m)) + \\ &\quad + (12 + 4a - am - a^2 - a^3)x - (2m + 2a + 2a^2). \end{aligned}$$

Liekana yra lygi nuliui tik tada, kai $12 + 4a - am - a^2 - a^3 = 0$ ir $2m + 2a + 2a^2 = 0$. Toliau sprendžiame lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 12 + 4a - am - a^2 - a^3 = 0, \\ 2m + 2a + 2a^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 + 4a - a(m + a + a^2) = 0, \\ 2(m + a + a^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12 + 4a = 0, \\ m + a + a^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3, \\ m = -a - a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3, \\ m = -6. \end{cases}$$

Dar reikia patikrinti, ar egzistuoja realieji skaičiai x_1 ir x_2 , tenkinantys sąlygas ir $x_1 \cdot x_2 = 2$; todėl sprendžiame lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 \cdot x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3 - x_1, \\ x_1(3 - x_1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3 - x_1, \\ x_1^2 - 3x_1 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3 - x_1, \\ x_1 \in \{1; 2\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2, \\ x_1 = 1 \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} x_2 = 1, \\ x_1 = 2. \end{cases}$$

Matome, kad su m reikšme, lygia -6 , daugianaris $(x^4 - x^3 + mx^2 + 10x - 4)$ turi dvi šaknis, kurių sandauga yra 2.

Ats.: -6 .

10. Keturis kartus pritaikę Hornerio schemą, gauname $n = 4$.

PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

$$\begin{aligned} 1. \quad & 3C_n^1 + 7C_n^2 + 11C_n^3 + \dots + (4n-1)C_n^n = \\ & = 4(C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n) - (C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n) = \\ & = 4 \cdot n2^{n-1} - (2^n - 1) = n2^{n+1} - 2^n + 1. \end{aligned}$$

Ats.: $n2^{n+1} - 2^n + 1$.

2. Niutono binomo $(5+2x)^{16}$ skleidinio ketvirtasis narys yra $C_{16}^3 \cdot 5^{13} \cdot (2x)^3$, o gretimi jam – trečiasis narys $C_{16}^2 \cdot 5^{14} \cdot (2x)^2$ ir penktasis $C_{16}^4 \cdot 5^{12} \cdot (2x)^4$. Pagal uždavinio sąlygą reikia išspręsti dviejų nelygybių sistemą

$$\begin{cases} C_{16}^3 \cdot 5^{13} \cdot (2x)^3 > C_{16}^2 \cdot 5^{14} \cdot (2x)^2, \\ C_{16}^3 \cdot 5^{13} \cdot (2x)^3 > C_{16}^4 \cdot 5^{12} \cdot (2x)^4. \end{cases}$$

Gauname:

$$\begin{cases} \frac{16!}{3!13!} \cdot 5^{13} \cdot 8x^3 > \frac{16!}{2!14!} \cdot 5^{14} \cdot 4x^2, \\ \frac{16!}{3!13!} \cdot 5^{13} \cdot 8x^3 > \frac{16!}{4!12!} \cdot 5^{12} \cdot 16x^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x^3}{3} > \frac{5x^2}{14}, \\ \frac{5x^3}{13} > \frac{x^4}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2(28x-15) > 0, \\ x^3(13x-10) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{15}{28}, \\ x^3(13x-10) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{15}{28}, \\ x > \frac{10}{13}. \end{cases}$$

$$\text{Ats.: } \frac{15}{28} < x < \frac{10}{3}.$$

3. Niutono binomo $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^n$ skleidinio trečiasis narys yra

$$C_n^2 \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 (2x)^{n-2} = C_n^2 \cdot 2^{n-2} \cdot x^{n-6}.$$

Pagal uždavinio sąlygą $n-6=0$, t.y. $n=6$; taigi turime Niutono binomą $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^6$, kurio skleidinio trečiasis narys yra

$$C_6^2 \cdot 2^4 = \frac{6!}{2!4!} \cdot 16 = 240.$$

Niutono binomo $(1+x^3)^{30}$ skleidinio antrasis narys yra $C_{30}^1 x^3 = 30x^3$. Pagal uždavinio sąlygą reikia išspręsti lygtį $240 = 30x^3$. Gauname $x = 2$.

Ats.: 2.

4. Niutono binomo $\left(n + \frac{1}{n}\right)^n$ skleidinio ketvirtasis narys yra

$$C_n^3 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot n^{n-3} = C_n^3 \cdot n^{n-6}, \text{ o ketvirtasis nuo galo narys yra}$$

$$C_n^{n-3} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{n-3} \cdot n^3 = C_n^{n-3} \cdot n^{6-n}. \text{ Toliau sprendžiame lygtį:}$$

$$C_n^3 \cdot n^{n-6} \cdot C_n^{n-3} \cdot n^{6-n} = 14\,400 \Rightarrow C_n^3 \cdot C_n^{n-3} = 14\,400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} \cdot \frac{n!}{(n-3)!3!} = 14\,400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\right)^2 = 14\,400 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n(n-1)(n-2) = 720 \Rightarrow n = 10.$$

Taigi turime Niutono binomą $\left(10 + \frac{1}{10}\right)^{10}$. Jo skleidinys turi

11 narių, todėl didžiausią binominį koeficientą turi šeštasis narys.

Šis koeficientas yra $C_{10}^5 = 252$.

Ats.: 252.

5. Niutono binomų $(a+b)^{n+1}$ ir $(a+b)^n$ skleidinių trečiųjų narių binominiai koeficientai yra atitinkamai C_{n+1}^2 ir C_n^2 . Pagal uždavinio sąlygą $C_{n+1}^2 - C_n^2 = 225$. Spęsdami šią lygtį, gauname:

$$\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} - \frac{n!}{2!(n-2)!} = 225 \Rightarrow \frac{(n+1)n}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = 225 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 225.$$

Toliau nagrinėkime Niutono binomą $(\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y})^{225}$. Jo skleidinio narius pažymėkime T_{k+1} , $k = 0, 1, \dots, 225$. Tada

$$T_{k+1} = C_{225}^k \cdot (\sqrt[4]{y})^k \cdot (\sqrt[5]{x})^{225-k} = C_{225}^k \cdot x^{\frac{225-k}{5}} \cdot y^{\frac{k}{4}}.$$

Abu laipsnio rodikliai $\left(\frac{225-k}{5} \text{ ir } \frac{k}{4}\right)$ turi būti sveikieji skaičiai,

tarkime, p ir m .

Sprendžiame sistemą:

$$\begin{cases} \frac{225-k}{5} = p, \\ \frac{k}{4} = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 225-k = p, \\ k = 4m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 225-4m = 5p, \\ k = 4m \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} 5(45-p) = 4m, \\ k = 4m. \end{cases}$$

Matome, kad skaičius $45-p$ turi dalytis iš 4; todėl $p \in \{1; 5; 9; 13; \dots; 45\}$; šiuos skaičius galima užrašyti formule

$$p = 4l + 1, \quad l = 0, 1, 2, \dots, 11.$$

Tada $m = 5(11-l)$ ir $k = 20(11-l)$; $l = 0, 1, 2, \dots, 11$. Vadinasi, skleidinyje yra 12 narių su sveikaisiais x ir laipsnio rodikliais.

Ats.: 12.

6. Niutono binomo $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ skleidinio pirmieji trys nariai

(pažymėkime juos T_1 , T_2 ir T_3) yra tokie:

$$T_1 = C_n^0 \left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^0 (\sqrt{x})^n = x^{\frac{n}{2}},$$

$$T_2 = C_n^1 \frac{1}{2\sqrt[4]{x}} \cdot (\sqrt{x})^{n-1} = \frac{n}{2} \cdot x^{\frac{2n-3}{4}},$$

$$T_3 = C_n^2 \left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^2 (\sqrt{x})^{n-2} = \frac{n(n-1)}{8} \cdot x^{\frac{n-3}{2}}.$$

Šių narių koeficientai (prie kintamojo x) 1 , $\frac{n}{2}$ ir $\frac{n(n-1)}{8}$ sudaro aritmetinę progresiją; todėl gauname $n = 8$.

Toliau nagrinėjame Niutono binomą $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^8$. Jo skleidinio narius pažymėję T_{k+1} , $k = 0, 1, 2, \dots, 8$, gauname:

$$T_{k+1} = C_8^2 \left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^k \cdot (\sqrt{x})^{8-k} = C_8^2 \cdot \frac{1}{2^k} \cdot x^{\frac{16-3k}{4}};$$

$$\frac{16-3k}{4} = m, \quad m \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = \frac{4(4-m)}{3}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow k \in \{0; 4; 8\}.$$

Taigi turime tris narius su sveikaisiais kintamojo x laipsnio rodikliais:

$$T_1 = x^4, \quad T_5 = C_8^4 \cdot \frac{1}{2^4} \cdot x = \frac{35x}{8}, \quad T_9 = C_8^8 \cdot \frac{1}{2^8} \cdot x^{-2} = \frac{x^{-2}}{256}.$$

$$\text{Ats.: } x^4, \frac{35x}{8}, \frac{x^{-2}}{256}.$$

7. Remsimės polinomine formule

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}.$$

Taikydami ją laipsniui $(1+x^2-x^3)^{1000}$, gausime:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n = \sum_{k_1+k_2+k_3=1000} \frac{(-1)^{k_3} \cdot 1000!}{k_1!k_2!k_3!} x^{2k_2+3k_3}.$$

Laipsnį x^{17} pagal šią formulę gausime tik tada, kai $k_1 = 983$, $2k_2 + 3k_3 = 17$ (čia k_2 ir k_3 yra neneigiami sveikieji skaičiai). Aišku, kad yra galimos tik tokios k_2 ir k_3 poros: $k_2 = 7$, $k_3 = 1$; $k_2 = 4$, $k_3 = 3$; $k_2 = 1$, $k_3 = 5$. Todėl turėsime tokią koeficiento prie x^{17} išraišką:

$$-\frac{1000!}{983! 7! 1!} - \frac{1000!}{983! 4! 3!} - \frac{1000!}{983! 1! 5!}.$$

Analogiškai nagrinėdami laipsnio $(1-x^2+x^3)^{1000}$ skleidinį,

gausime tokią koeficiento prie x^{17} išraišką:

$$-\frac{1000!}{983! 7! 1!} + \frac{1000!}{983! 4! 3!} - \frac{1000!}{983! 1! 5!}.$$

Aišku, kad šis skaičius yra didesnis už pirmojo skleidinio koeficientą prie x^{17} .

Ats.: skleidinio $(1-x^2+x^3)^{1000}$ koeficientas prie x^{17} yra didesnis už $(1+x^2-x^3)^{1000}$ skleidinio koeficientą prie x^{17} .

8. Pagal polinominę formulę

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{k_1! k_2! k_3!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3},$$

gausime:

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2\right)^{10} &= \sum_{k_1+k_2+k_3=10} \frac{10!}{k_1! k_2! k_3!} \cdot 2^{k_1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{k_2} \cdot (x^2)^{k_3} = \\ &= \sum_{k_1+k_2+k_3=10} \frac{(-1)^{k_2} \cdot 2^{k_1} \cdot 10!}{k_1! k_2! k_3!} \cdot x^{\frac{4k_3-k_2}{2}}. \end{aligned}$$

Aišku, kad kintamojo x neturės tie dėmenys, kuriuose $4k_3 - k_2 = 0$; čia k_1 , k_2 ir k_3 yra neneigiami sveikieji skaičiai, tenkinantys sąlygą $k_1 + k_2 + k_3 = 10$. Galimi šie skaičių k_1 , k_2 ir k_3 trejetai: (0; 8; 2), (5; 4; 1), (10; 0; 0).

Vadinasi, yra trys skleidinio nariai, neturintys kintamojo x :

$$\frac{(-1)^8 \cdot 2^0 \cdot 10!}{0! 8! 2!} = \frac{10!}{8! 2!} = 45,$$

$$\frac{(-1)^4 \cdot 2^5 \cdot 10!}{5! 4! 1!} = \frac{32 \cdot 10!}{5! 4!} = 40\,320,$$

$$\frac{(-1)^0 \cdot 2^{10} \cdot 10!}{10! 0! 0!} = 2^{10} = 1024.$$

Ats.: 45, 40 320 ir 1024.

9. Taikydami polinominę formulę

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{k_1! k_2! k_3!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3},$$

gauname:

$$\begin{aligned} (1 + x^2 + x^5)^{20} &= \sum_{k_1+k_2+k_3=20} \frac{20!}{k_1! k_2! k_3!} (x^2)^{k_2} (x^5)^{k_3} = \\ &= \sum_{k_1+k_2+k_3=20} \frac{20!}{k_1! k_2! k_3!} \cdot x^{2k_2+5k_3}. \end{aligned}$$

Mažiausia laipsnio rodiklio $(2k_2 + 5k_3)$ reikšmė yra lygi nuliui (kai $k_1 = 20$, $k_2 = k_3 = 0$), o didžiausia – lygi šimtui (kai $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 20$). Nagrinėdami reiškinį $(2k_2 + 5k_3)$, įsitikiname, kad formulėje nebus narių su šiais kintamojo x laipsnio rodikliais: 1, 3, 93, 96, 98, 99. Taigi turėsime $101 - 6 = 95$ daugianario (gauto sutraukus panašiuosius narius) dėmenis su skirtingais kintamojo x laipsniais.

Ats.: 95.

10. Niutono binomo skleidinio visų binominių koeficientų suma yra lygi 2^n (pagal 1 savybę), o pagal 3 savybę lyginėse vietose esančių narių binominių koeficientų suma yra lygi nelyginėse vietose esančių narių binominių koeficientų sumai; todėl

$$2^n = 2 \cdot 2048 = 4096 \Rightarrow n = 12.$$

Niutono binomo $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ skleidinio narius pažymėkime

T_{k+1} , $k = 0, 1, 2, \dots, 12$. Skaičiuodami gausime:

$$T_{k+1} = C_{12}^k \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k \left(\sqrt[3]{x}\right)^{12-k} = C_{12}^k \cdot x^{\frac{24-5k}{6}}.$$

Laipsnio rodiklis $\frac{24-5k}{6}$, $k = 0, 1, 2, \dots, 12$, yra sveikasis skaičius tik su $k \in \{0; 6; 12\}$. Taigi skleidinyje yra trys nariai su sveikaisiais

x laipsniais:

$$T_1 = C_{12}^0 x^4 = x^4,$$

$$T_7 = C_{12}^6 x^{-1} = 924x^{-1},$$

$$T_{13} = C_{12}^{12} x^{-6} = x^{-6}.$$

$$\text{Ats.: } x^4, 924x^{-1}, x^{-6}.$$

ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Kadangi $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$, tai spęskime lygtį

$$\left(\sqrt{2} + 1\right)^x + \frac{1}{\left(\sqrt{2} + 1\right)^x} = 2\sqrt{2}.$$

Pažymęję $t = \left(\sqrt{2} + 1\right)^x$, gauname:

$$t + \frac{1}{t} = 2\sqrt{2} \Rightarrow t^2 - 2\sqrt{2} \cdot t + 1 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

arba $t = \sqrt{2} + 1$.

Vadinasi

$$\left(\sqrt{2} + 1\right)^x = \sqrt{2} - 1 \text{ arba } \left(\sqrt{2} + 1\right)^x = \sqrt{2} + 1.$$

Pirmuoju atveju gauname $x = -1$, o antruoju gauname $x = 1$.

Ats.: ± 1 .

2. Iš pradžių raskime lygties apibręžimo sritį:

$$\begin{cases} 4^{-1} \cdot 2^{\sqrt{x}} - 1 > 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{\sqrt{x}-2} > 1, \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x > 4.$$

Turędami mintyje, kad $x > 4$, pertvarkykime sprendžiamą lygtį:

$$\lg\left(4^{-1} \cdot 2^{\sqrt{x}} - 1\right) - \lg 10 = \lg\left(\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}} + 2\right) - \lg 4,$$

$$\lg \frac{2^{\sqrt{x}-2} - 1}{10} = \lg \frac{\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}} + 2}{4},$$

$$\frac{2^{\sqrt{x}-2} - 1}{10} = \frac{\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}} + 2}{4},$$

$$2^{\sqrt{x}} - 4 = 10\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}} + 20,$$

$$2^{\sqrt{x}} - 10 \cdot 2^{\frac{\sqrt{x}-2}{2}} - 24 = 0,$$

$$2^{\sqrt{x}} - 10 \cdot 2^{\frac{\sqrt{x}-1}{2}} - 24 = 0,$$

$$2^{\sqrt{x}} - 5 \cdot 2^{\frac{\sqrt{x}}{2}} - 24 = 0.$$

Pažymėję $z = \frac{\sqrt{x}}{2}$, gauname lygtį $z^2 - 5z - 24 = 0$, turinčią du sprendinius: 8 ir -3 , pastarasis netinka, nes $z > 0$. Toliau sprendžiame lygtį $2^{2z} = 8$ ir gauname $x = 36$.

Ats.: 36.

3. Ieškosime lygties natūraliųjų sprendinių:

$$2^x + 2^y + 2^z = 2336 \Rightarrow 2^x \cdot (1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}) = 2336 \Rightarrow$$

$$2^x \cdot (1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}) = 2^5 \cdot 73 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 5 \quad \text{ir} \quad 1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} = 73.$$

Spręsdami antrąją lygtį, gauname:

$$2^{y-x} + 2^{z-x} = 72 \Rightarrow 2^{y-5} + 2^{z-5} = 72 \Rightarrow$$

$$2^{y-5} (1 + 2^{z-y}) = 2^3 \cdot 9 \Rightarrow y - 5 = 3 \quad \text{ir} \quad 1 + 2^{z-y} = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 8 \quad \text{ir} \quad z = 11.$$

Taigi, $x = 5$, $y = 8$, $z = 11$.

Ats.: (5; 8; 11).

4. Skaičiuodami skirtumą tarp $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi}$ ir 2, gauname:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} \right) - 2 &= \log_{\pi} 2 + \log_{\pi} 5 - 2 = \\ &= \log_{\pi} 10 - 2 > \log_{\pi} (\pi)^2 - 2 = 2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Vadinasi, $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2$.

5. Nelygybė $\log_{x^2+3x}(x+1) < 1$ yra ekvivalenti nelygybei

$$\log_{x^2+3x}(x+1) < \log_{x^2+3x}(x^2+3x),$$

todėl

$$1) \begin{cases} x^2 + 3x > 1, \\ x + 1 > 0, \\ x + 1 < x^2 + 3x, \end{cases} \quad \text{arba} \quad 2) \begin{cases} 0 < x^2 + 3x < 1, \\ x + 1 > x^2 + 3x. \end{cases}$$

Iš pirmosios sistemos gauname $x \in (\sqrt{2} - 1; +\infty)$, o iš antrosios

$$- x \in \left(0; \frac{\sqrt{13} - 3}{2} \right). \text{ Taigi, } x \in \left(0; \frac{\sqrt{13} - 3}{2} \right) \cup (\sqrt{2} - 1; +\infty).$$

$$\text{Ats.: } x \in \left(0; \frac{\sqrt{13} - 3}{2} \right) \cup (\sqrt{2} - 1; +\infty).$$

6. Pažymėkime $z = 5^x$; tada turėsime lygtį

$$z^2 - (a - 4)z - 2a^2 + 10a - 12 = 0.$$

Jos diskriminantas yra

$$\begin{aligned} D &= (a - 4)^2 - 4 \cdot (-2a^2 + 10a - 12) = \\ &= a^2 - 8a + 16 + 8a^2 - 40a + 48 = 9a^2 - 48a + 64 = (3a - 8)^2, \end{aligned}$$

todėl lygties sprendiniai tokie:

$$z_1 = \frac{a-4-3a+8}{2} = \frac{4-2a}{2} = 2-a,$$

$$z_2 = \frac{a-4+3a-8}{2} = \frac{4a-12}{2} = 2a-6.$$

Vadinasi, $5^x = 2-a$ arba $5^x = 2a-6$.

Pirmoji lygtis neturi sprendinių, kai $a \geq 2$, o antroji – kai $a \leq 3$. Taigi, $a \in [2; 3]$.

Ats.: $2 \leq a \leq 3$.

7. Pagal logaritmo apibrėžimą $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$. Pakeitę antrojo logaritmo pagrindą, gausime:

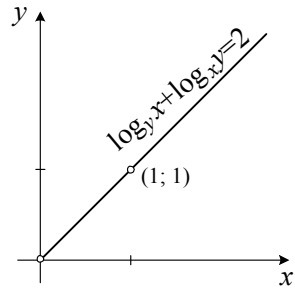
$$\log_y x + \frac{1}{\log_y x} = 2 \Rightarrow$$

$$\log_y^2 x - 2 \log_y x + 1 = 0. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_y x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = y.$$

Taigi, $y = x$, $x > 0$, $x \neq 1$.

Ats.: $y = x$, $x > 0$, $x \neq 1$.



1 pav.

8. 1) Kai $a \neq 1$, gauname:

$$\begin{aligned} \log_{c+b} a + \log_{c-b} a &= \frac{1}{\log_a(c+b)} + \frac{1}{\log_a(c-b)} = \\ &= \frac{\log_a(c-b) + \log_a(c+b)}{\log_a(c+b) \cdot \log_a(c-b)} = \frac{\log_a((c-b)(c+b))}{\log_a(c+b) \cdot \log_a(c-b)} = \\ &= \log_a a^2 \cdot \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a. \end{aligned}$$

2) Kai $a = 1$, lygybė akivaizdi.

9. Pritaikę formulę $\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}$, gauname:

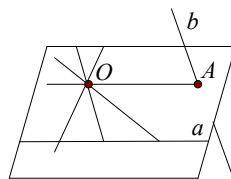
$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \dots \cdot \log_{10} 9 = \frac{\lg 2}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 3}{\lg 4} \cdot \frac{\lg 4}{\lg 5} \cdot \dots \cdot \frac{\lg 9}{\lg 10} = \lg 2.$$

10. Pastebėję, kad $\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\dots\sqrt[3]{3}}}}_{n \text{ kartų}} = 3^{\frac{1}{3^n}}$, gauname:

$$\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{\dots\sqrt[3]{3}}} = \log_3 \log_3 \left(3^{\frac{1}{3^n}} \right) = \log_3 \frac{1}{3^n} = -\log_3 3^n = -n.$$

SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

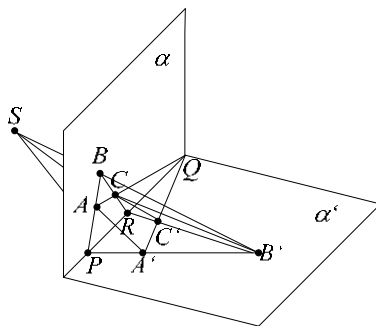
1. Visos tiesės, einančios per tašką O ir kertančios tiesę a , yra plokštumoje α , einančioje per tašką O ir tiesę a (1 pav.). Jei plokštuma α kerta tiesę b taške A , o tiesė OA nėra lygiagreti su tiesę a , tai tiesė OA – ieškomoji. Bet jei plokštuma α lygiagreti su tiesę b , arba tiesė b su plokštuma α kertasi taške A taip, kad tiesės OA ir a lygiagrečios, tai uždavinio sąlygą tenkinančių tiesių nėra.



1 pav.

Ats.: nevisada.

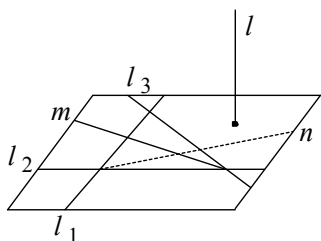
2. Kadangi tiesės AB ir $A'B'$ kertasi, tai jos yra vienoje plokštumoje β . Kadangi tiesės AA' ir BB' , einančios plokštumoje β , nelygiagrečios, tai jos kertasi taške S (2 pav.). Analogiškai parodome, kad ir tiesės AA' bei CC' yra vienoje plokštumoje β' , o tiesė CC' kerta tiesę AA' taške T . Kadangi tiesė AA' yra plokštumoje β , o tiesė CC' kerta tiesę AA' taške T , tai taške T tiesė CC' kerta plokštumą β . Kadangi tiesė BB' yra plokštumoje β , o tiesės CC' ir BB' kertasi, tai jų sankirtos taškas yra ir tiesėje CC' ,



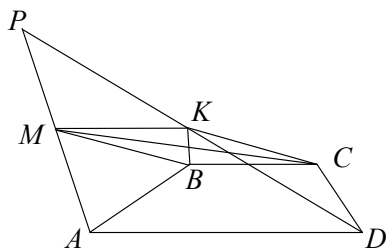
2 pav.

ir plokštumoje β , t. y. tiesės CC' ir BB' kertasi taške T . Taigi taškas T yra ir tiesėje AA' , ir tiesėje BB' , t. y. jis sutampa su tašku S , kuris priklauso tiesėms AA' , BB' ir CC' .

3. Sakykime, kad plokštumoje α yra trys nelygiagrečios tiesės l_1 , l_2 ir l_3 , sudarančios vienodus kampus su tiesė l (3 pav.). Pagal 2 pavyzdį tiesė l statmena vieno iš kampų tarp tiesių l_1 ir l_2 pusiaukampinei n ir vieno iš kampų tarp tiesių l_2 ir l_3 pusiaukampinei m . Tiesės m ir n susikerta, nes jos yra trikampio kampų (ar jo priekampių) pusiaukampinės. Tuomet pagal 7 teoremą tiesė l statmena plokštumai α .



3 pav.



4 pav.

4. Sakykime, kad trikampis ADP yra plokštumoje α (4 pav.). Kadangi tiesės AD ir BC lygiagrečios, o tiesė AD yra plokštumoje α , tai tiesės BC lygiagreti su plokštuma α (9 teorema). Plokštuma β , einanti per taškus B , C ir K pagal 9 teoremą lygiagreti su tiesė AD . Pagal 3 pavyzdį plokštumų α ir β sankirtos tiesė MK yra lygiagreti ir su tiesė BC , ir su tiesė AD . Kadangi taškas K yra atkarpos PD vidurio taškas, o $MK \parallel AD$, tai atkarpa MK yra trikampio APD vidurio linija ir $MK = \frac{1}{2}AD = BC$. Taigi keturkampio $BCKM$ priešingos kraštinės BC ir MK lygios ir lygiagrečios, t. y. šis keturkampis lygiagretainis ir jo įstrižainės KB ir MC susikerta ir sankirtos taške dalijasi pusiau.

5. Kadangi kubo sienų įstrižainės CB_1 ir DA_1 yra lygiagrečios, tai kampas KCB_1 yra lygus ieškomajam kampui (5 pav.). Pagal kosinusų teoremą trikampiu KCB_1 turime

$$\cos \angle KCB_1 = \frac{KC^2 + CB_1^2 - KB_1^2}{2KC \cdot CB_1}.$$

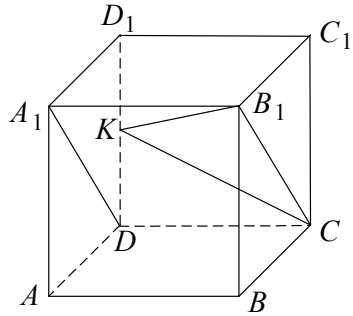
Kadangi

$$KC = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad CB_1 = \sqrt{2}, \quad KB_1 = \sqrt{KD_1^2 + D_1B_1^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{3}{2}, \text{ tai}$$

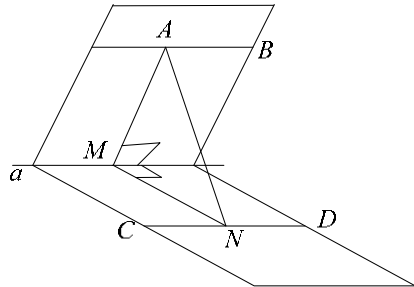
$$\cos \angle KCB_1 = \frac{\frac{5}{4} + 2 - \frac{9}{4}}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{Ats.: } \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}.$$



5 pav.

6. Pastebėkime, kad tiesės AB ir CD yra lygiagrečios su dvisienio kampo briauna a (6 pav.). Tikrai, jei tiesės AB ir a kirstųsi, tai tiesė AB kirstų antrąją dvisienio kampo sieną taške, nepriklausančiame tiesei CD , todėl tiesės AB ir CD būtų prasilenkiančios (5 teorema). Nuleiskime iš taško A statmenį AM į tiesę a , o iš taško M iškelkime statmenį MN į tiesę a , $N \in CD$. Pagal sąlygą $AM = 8$, $MN = 6,5$, $\angle AMN = 60^\circ$. Kadangi tiesė MN yra tiesės AN ortogonalioji projekcija plokštumoje, kuriai priklauso tiesė CD ir $MN \perp CD$, tai pagal trijų statmenų teoremą $AN \perp CD$.



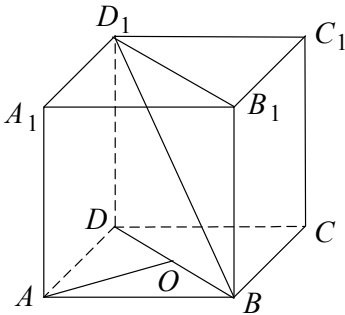
6 pav.

Taigi AN yra tiesių AB ir CD bendras statmuo ir jo ilgis lygus ieškomajam atstumui. Iš trikampio AMN randame

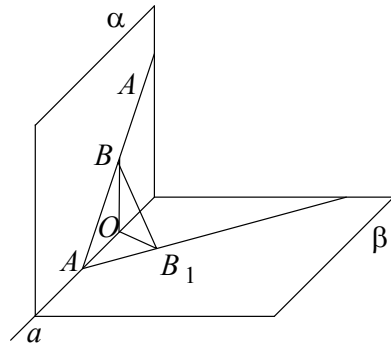
$$AN^2 = AM^2 + MN^2 - 2AM \cdot MN \cdot \cos 60^\circ = \frac{217}{4}.$$

$$\text{Ats.: } \frac{\sqrt{217}}{2}.$$

7. Sakykime, kad $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – duotasis kubas, BD_1 – jo įstrižainė, AA_1 – su ja prasilenkianti kubo briauna (7 pav.). Kadangi tiesės AA_1 ir BB_1 lygiagrečios, tai plokštuma α , einanti per taškus B , D , D_1 ir B_1 , eina per tiesę BD_1 ir yra lygiagreti su tiese AA_1 (9 teorema). Nuleiskime statmenį AO į tiesę BD . Kadangi $ABCD$ –



7 pav.



8 pav.

kvadratas, kurio kraštinė lygi a , tai $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Bet atkarpa AO yra bendrasis tiesės AA_1 ir plokštumos α statmuo, todėl jos ilgis lygus ieškomajam atstumui.

$$\text{Ats.: } \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

8. Sakykime, kad plokštumų α ir β sudaromo dvisienio kampo briauna – tiesė a , o tiesė l yra plokštumoje α ir kerta tiesę a taške A (8 pav.). Sakykime, kad taškas B yra tiesėje l ir atstumas AB lygus a . Jei taškas B_1 yra taško B ortogonalioji projekcija plokštumoje β , o taškas O – taško B ortogonalioji projekcija tiesėje a , tai $OB \perp a$.

$BB_1 \perp AB_1$, ir pagal trijų statmenų teoremą $OB_1 \perp a$. Iš stačiųjų trikampių BAB_1 , AOB_1 ir OB_1B randame:

$$\sin \angle BAB_1 = \frac{BB_1}{AB} = \frac{BB_1}{a}; \quad BB_1 = OB \sin \angle BOB_1,$$

$$OB = a \sin \angle BAO.$$

Taigi

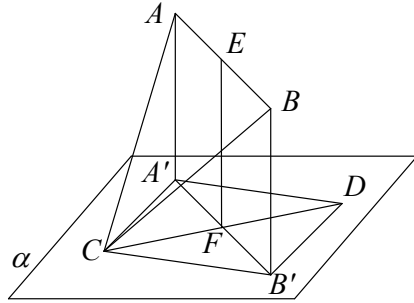
$$BB_1 = a \sin \angle BOB_1 \cdot \sin \angle BAO$$

ir $\sin \angle BAB_1 = \sin \angle BOB_1 \cdot \sin \angle BAO$.

Kadangi kampas BOB_1 yra dvisienio kampo tarp plokštumų α ir β tiesinis kampas, tai kampo BAB_1 sinusas didžiausias tada, kai didžiausią reikšmę įgyja kampo BAO sinusas, t. y. kai $\angle BAO = 90^\circ$, kas ir reikėjo įrodyti.

9. Pažymėkime α plokštumą, einančią per tiesę CD ir lygiagrečią su tiese AB (9 pav.).

Sakykime, kad taškai A' ir B' yra taškų A ir B ortogonaliosios projekcijos plokštumoje α , akivaizdu, kad taško E ortogonalioji projekcija yra taškas F . Kadangi $AB \parallel \alpha$, tai $AA' = BB' = EF = \sqrt{13}$.



9 pav.

Keturkampis $ABB'A'$ yra stačiakampis, todėl

$A'B' = AB = 2\sqrt{5}$. Kadangi taškas F yra atkarpu $A'B'$ ir CD vidurio taškas, tai keturkampis $A'DB'C$ yra lygiagretainis, kurio įstrižainių ilgiai $A'B' = 2\sqrt{5}$, $CD = 2\sqrt{7}$, o kampas tarp jų

$\arccos \frac{\sqrt{35}}{10}$. Tuomet pagal kosinusų teoremą

$$B'D^2 = A'C^2 = FD^2 + FB'^2 - 2FD \cdot FB' \cdot \cos \left(\arccos \frac{\sqrt{35}}{10} \right) =$$

$$= 7 + 5 - 2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{35}}{10} = 5,$$

$$CB'^2 = A'D^2 = FD^2 + FB'^2 - 2FD \cdot FB' \cdot \cos \left(180^\circ - \arccos \frac{\sqrt{35}}{10} \right) =$$

$$= 7 + 5 + 2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{35}}{10} = 19.$$

Iš stačiųjų trikampių $CA'A$ ir $CB'B$ randame:

$$AC^2 = A'C^2 + AA'^2 = 5 + 13 = 18,$$

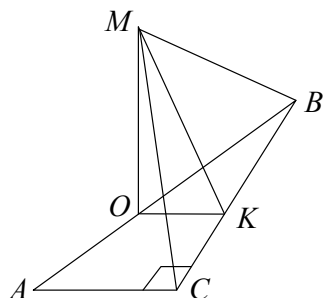
$$CB^2 = CB'^2 + BB'^2 = 19 + 13 = 32.$$

Iš trikampio ABC gauname

$$\cos \angle ACB = \frac{AC^2 + CB^2 - AB^2}{2AC \cdot CB} = \frac{18 + 32 - 20}{2 \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{32}} = \frac{5}{8}.$$

$$\text{Ats.: } \arccos \frac{5}{8}.$$

10. Kadangi taškas M yra vienodai nutolęs nuo trikampio viršūnių, tai jo ortogonalioji projekcija trikampio ABC plokštumoje α yra trikampio įžambinės AB vidurio taškas O (10 pav.). Nubrėžkime trikampio ABC vidurio liniją $OK \parallel AC$, tai $OK \perp BC$, ir pagal trijų statmenų teoremą $MK \perp BC$. Taigi kampas OKM yra dvisienio kampo tarp uždavinio sąlygoje nurodytų plokštumų tiesinis kampas. Iš trikampio OKM randame $OM =$



10 pav.

$$= OK \cdot \operatorname{tg} \angle OKM = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ats.: } \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Iš pradžių patyrinėkime sandaugą $\cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta$:

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) = \\ &= ((\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \beta + \sin \beta))((\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \beta - \sin \beta)) = \\ &= ((\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) + (\sin \alpha \cos \beta + \\ &\quad + \sin \beta \cos \alpha)) \cdot ((\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) - \\ &\quad - (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)) = \\ &= (\cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))(\cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)) = \\ &= \cos^2(\alpha - \beta) - \sin^2(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Remdamiesi gautąja formule (tapatybe), turėsime:

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha - \beta) + \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta &= \\ = \sin^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) - \sin^2(\alpha + \beta) &= \\ = \sin^2(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) = 1. \end{aligned}$$

2. Taikydami dvigubo argumento kosinuso formulę bei kitas žinomas tapatybes, gauname:

$$\begin{aligned} \frac{5 + 3 \cos 4x}{8} &= \frac{5 + 3(\cos^2 2x - \sin^2 2x)}{8} = \frac{2 + 6 \cos^2 2x}{8} = \\ &= \frac{1 + 3 \cos^2 2x}{4} = \frac{\sin^2 2x + 4 \cos^2 2x}{4} = \\ &= \frac{\sin^2 2x}{4} + \cos^2 2x = \frac{\sin^2 2x}{4} + (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = \\ &= \frac{\sin^2 2x}{4} + (\cos^4 x - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^4 x) = \\ &= \frac{\sin^2 2x}{4} + (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \\ &= \frac{\sin^2 2x}{4} + (\sin^2 x \cos^4 x + \sin^4 x \cos^2 x) + \\ &\quad + (\cos^6 x + \sin^6 x) - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin^2 2x}{4} + \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + (\cos^6 x + \sin^6 x) - \\
 &- 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{\sin^2 2x}{4} + (\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \\
 &= \frac{\sin^2 2x}{4} + (\cos^6 x + \sin^6 x) - \frac{\sin^2 2x}{4} = \cos^6 x + \sin^6 x.
 \end{aligned}$$

3. Iš sąlygos $2\pi < x < 3\pi$ gauname sąlygą $\pi < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{2}$. Vadinasi,

$$\cos \frac{x}{2} \in (-1; 0).$$

Pertvarkykime $\cos x$:

$$\cos x = \cos \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1.$$

$$\text{Todėl } \cos x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Kadangi } \cos \frac{x}{2} < 0, \text{ tai } \cos \frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\text{Ats.: } -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

4. Skirtumą $(\cos 3x - \cos 5x)$ pakeiskime sandauga $2 \sin x \sin 4x$.

Tada vietoj $\cos 3x = \cos 5x$ turėsime lygtį $2 \sin x \sin 4x = 0$. Jos sprendinių aibę sudaro lygčių $\sin x = 0$ ir $\sin 4x = 0$ sprendinių aibių sąjunga. Lygties $\sin x = 0$ sprendinių aibę sudaro realieji skaičiai $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, o lygties $\sin 4x = 0$ – realieji skaičiai

$$x = \frac{k\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \text{Aibė } \{x : x = n\pi, n \in \mathbb{Z}\} \text{ yra aibės}$$

$$\{x : x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\} \text{ poaibis, todėl šių aibių sąjunga yra aibė}$$

$$\{x : x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\text{Ats.: } \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

5. Žinome, kad $-1 \leq \sin 4x \leq 1$, $0 \leq |\sin 5x| \leq 1$; todėl lygybė $\sin 4x + |\sin 5x| = 2$ įmanoma tik tada, kai $\sin 4x = 1$ ir $|\sin 5x| = 1$. Turime išspręsti trigonometrinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} \sin 4x = 1, \\ |\sin 5x| = 1. \end{cases}$$

Pirmosios lygties sprendinių aibę sudaro taškai $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$,

o antrosios – taškai $x = \frac{\pi}{10} + \frac{m\pi}{5}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Ieškant šių aibių sankirtos (sistemos sprendinių aibės), reikia rasti tokias sveikųjų skaičių k ir m poras, su kuriomis galiotų lygybė

$$\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{10} + \frac{m\pi}{5}.$$

Iš čia gauname tokį sąryšį tarp k ir m :

$$20k = 8m - 1, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Tačiau lygtis $20k = 8m - 1$ neturi sveikųjų sprendinių ($20k$ yra lyginis skaičius, o $(8m - 1)$ – nelyginis skaičius, kai $k \in \mathbb{Z}$ ir $m \in \mathbb{Z}$).

Ats.: lygtis sprendinių neturi.

6. Lygybė $\sin 6x \cdot \cos 8x = 1$ yra galima tik dviem atvejais:

a) $\sin 6x = 1$ ir $\cos 8x = 1$;

b) $\sin 6x = -1$ ir $\cos 8x = -1$.

Pirmuoju atveju gauname:

$$\begin{cases} \sin 6x = 1, \\ \cos 8x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{m\pi}{4}, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} = \frac{m\pi}{4}, \\ x = \frac{m\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = \frac{3(m+1)}{4} - 1, \\ x = \frac{m\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+1 = 4n, \\ x = \frac{m\pi}{4}; n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Antrąjį atvejį nagrinėjame analogiškai:

$$\begin{cases} \sin 6x = -1, \\ \cos 8x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{m\pi}{4}, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} = \frac{\pi}{8} + \frac{m\pi}{4}, \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{m\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8k = 6m + 5, \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{m\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \emptyset.$$

$$\text{Ats.: } -\frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

7. $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)^2 + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x =$

$$= \cos^2 2x + \frac{\sin^2 2x}{2} = \frac{1 + \cos^2 2x}{2} \geq \frac{1}{2}$$

su visais realiaisiais skaičiais x .

8. Pertvarkykime kairiąją nelygybės pusę:

$$2\sin^2 x - 3\cos x - 1 =$$

$$= 2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x - 1 = 1 - 2\cos^2 x - 3\cos x.$$

Turėsime išspręsti kvadratinę nelygybę

$$2\cos^2 x + 3\cos x - 1 \leq 0. \text{ Gausime:}$$

$$-1 \leq \cos x \leq \frac{-3 + \sqrt{17}}{4},$$

$$\arccos \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} + 2n\pi \leq x \leq \left(2\pi - \arccos \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \right) + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Ats.:

$$\left[\arccos \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} + 2n\pi; \left(2\pi - \arccos \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \right) + 2n\pi \right], n \in \mathbb{Z}.$$

9. Pagal dvigubo argumento formulę

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x;$$

todėl spęskime ekvivalenęią nelygybę

$$1 - 2\sin^2 x \geq \sin x:$$

$$1 - 2\sin^2 x \geq \sin x \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$-\frac{7\pi}{6} + 2n\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ats.: } \left[-\frac{7\pi}{6} + 2n\pi; \frac{\pi}{6} + 2n\pi \right], n \in \mathbb{Z}.$$

10. Išspęskime nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \geq \frac{3}{5}, \\ \operatorname{tg} \alpha \leq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \geq \frac{3}{5}, \\ \operatorname{tg} \alpha \leq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \geq \frac{3}{5}, \\ \operatorname{tg} \alpha \leq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{3}{5} \geq 0, \\ \operatorname{tg} \alpha \leq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{10 \operatorname{tg} \alpha - 3 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{5(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} \geq 0, \\ \operatorname{tg} \alpha \leq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 10 \operatorname{tg} \alpha + 3 \leq 0, \\ \operatorname{tg} \alpha \leq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} \leq \operatorname{tg} \alpha \leq 3, \\ \operatorname{tg} \alpha \leq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}.$$

Tada $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{3}{5}$. Toliau sprendžiame lygęių

sistemą:

$$\begin{cases} 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{3}{5}, \\ \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 3 \sin \alpha, \\ 6 \sin^2 \alpha = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 3 \sin \alpha, \\ \sin^2 \alpha = \frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 3 \sin \alpha, \\ \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}. \end{cases}$$

$$\text{Ats.: } \pm \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

1	2	3	4
25	$(0; 1) \cup (1; 2)$	$-\frac{\pi}{4} + k\pi$	$3\sqrt{3}$ cm



Išleistose LJMM knygelėse buvo nagrinėtos tokios
temos:

I KNYGA

- I. J. Šinkūnas. *Kvadratinis trinaris.*
- II. G. Stepanauskas. *Rekurenčiosios sekos.*
- III. R. Kašuba. *Elementarinės matematikos uždavinių sprendimo metodai.*
- IV. A. Skūpas. *Funkcija.*
- V. V. Pekarskas. *Sveikoji ir trupmeninė skaičiaus dalis. Jų savybės.*
- VI. P. Survila. *Kombinatorikos ir tikimybių skaičiavimo pradmenys.*
- VII. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. *Grafai.*

II KNYGA

- I. J. Šinkūnas, A. Urbonas. *Funkcija.*
- II. E. Mazėtis. *Apskritimų geometrija. Įbrėžtiniai ir apibrėžtiniai daugiakampiai. Taisyklingieji daugiakampiai.*
- III. B. Vasylienė. *Skaičiaus modulis algebros uždaviniuose.*
- IV. J. Šinkūnas. *Figūrų panašumas. Talio teorema ir jos taikymai.*
- V. D. Jurgaitis. *Matematinės indukcijos metodas.*
- VI. A. Urbonas. *Lygčių, nelygybių bei jų sistemų ekvivalentumas.*
- VII. B. Grigelionis. *Urnių schemas ir baigtinės Markovo grandinės.*
- VIII. A. Juozapavičius, J. Šinkūnas. *Koordinacių sistemas. Žemėlapiai.*

III KNYGA

- I. E. Stankus. *Skaičių dalumas.*
- II. R. Skrabutėnas. *Grandininės trupmenos.*
- III. V. Vitkus. *Vidurkiai.*
- IV. E. Mazėtis. *Vektoriai.*
- V. J. Šinkūnas. *Plokščių figūrų plotai.*
- VI. S. Staknienė. *Iracionaliosios lygtys ir nelygybės.*
- VII. A. Apynis, E. Stankus. *Trigonometrinės lygtys ir nelygybės.*
- VIII. G. Stepanauskas. *Sekos.*

IV KNYGA

- I. G. Stepanauskas. *Skaičiavimo sistemos.*
- II. P. Vaškas. *Antrosios eilės kreivės.*
- III. L. Maliaukienė. *Įdomioji logika.*
- IV. A. Urbonas. *Atvirkštinės funkcijos.*
- V. A. Apynis. *Optimizavimo uždaviniai.*
- VI. P. Survila. *Kombinatorikos pradmenys.*
- VII. P. Survila. *Tikimybių teorijos pradmenys.*
- VIII. A. Nagelė. *Kompleksiniai skaičiai.*

V KNYGA

- I. O. Jablonskienė. *Planimetrijos uždaviniai.*
- II. V. Pekarskas. *Antrosios eilės kreivės.*
- III. G. Stepanauskas. *Skaičių dalikliai.*
- IV. V. Stakėnas. *Šifrai ir skaičiai.*
- V. A. Apynis. *Tiesinių lygčių sistemos.*
- VI. R. Skrabutėnas. *Algebrinės lygtys.*
- VII. V. Vitkus. *Brėžimo uždaviniai.*
- VIII. R. Kašuba. *Sudėtis, atimtis ir daugyba stulpeliu bei dalyba kampu.*

VI KNYGA

- I. A. Bakštys. *Finansų matematika.*
- II. E. Mazėtis. *Geometrinės transformacijos.*
- III. B. Galbogienė. *Funkcijos reikšmių sritis.*
- IV. V. Stakėnas. *Paskalio trikampis.*
- V. A. Apynis. *Tiesinių lygčių sistemų taikymo uždaviniai.*
- VI. L. Narkevičius. *Invariantų metodas.*
- VII. J. Šinkūnas. *Tiesinės rekurencijos sekos.*
- VIII. A. Apynis. *Uždaviniai su parametru.*

VII KNYGA

- I. E. Stankus. *Skaičių dalumas, dalumo požymiai.*
- II. E. Mazėtis. *Nelygybės geometrijoje.*
- III. J. Šinkūnas. *Kraštinio elemento principas.*
- IV. A. Apynis, E. Stankus. *Indukcijos principas.*
- V. L. Maliaukienė, J. Šinkūnas. *Grafai. Oilerio formulė.*
- VI. J. Vainavičienė. *Geometrinės vietos.*
- VII. A. Apynis. *Aibės, taikymo uždaviniai.*
- VIII. A. Skūpas. *Išvestinės ir integralai.*

ISBN 978-9955-476-70-2



9 789955 476702