2021 metų Lietuvos mokinių matematikos olimpiados uždavinių sąlygos ir sprendimai

Artūras Dubickas[1]

69-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Organizuojama nuotoliniu būdu, 2021 04 01

`1 (9-10 klasės).`

a) Įrodykite, kad nelygybė

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geqslant x_3(x_1 + x_2)$$

teisinga su visais realiaisiais x_1, x_2, x_3.

b) Raskite visas natūraliąsias n reikšmes, kurioms nelygybė

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \geqslant x_{n+1}(x_1 + \cdots + x_n)$$

teisinga su visais realiaisiais $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

Sprendimas. Sudėję n nelygybių

$$0 \leqslant \left(x_j - \frac{x_{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^2 = x_j^2 + \frac{x_{n+1}^2}{n} - \frac{2}{\sqrt{n}} x_j x_{n+1}$$

(čia $j = 1, \ldots, n$), gauname tokią nelygybę:

$$0 \leqslant x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 - \frac{2}{\sqrt{n}} x_{n+1}(x_1 + \cdots + x_n).$$

Vadinasi,

$$\frac{\sqrt{n}}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2) \geqslant x_{n+1}(x_1 + \cdots + x_n)$$

su visais realiaisiais $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Jei $1 \leqslant n \leqslant 4$, tai $1 \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2}$, todėl kairioji šios nelygybės pusė (kuri yra neneigiama) neviršija $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2$.

Įrodėme, kad jei $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, tai b) dalyje nagrinėjama nelygybė yra teisinga su visais realiaisiais $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Kadangi a) dalis yra atskiras b) dalies atvejis (kai $n = 2$), tai a) dalies nelygybė taip pat įrodyta.

Tarkime, kad $n \geqslant 5$. Įrodysime, jog tada b) dalies nelygybė galioja ne su visais realiaisiais $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Iš tikrųjų, jei $x_1 = \cdots = x_n = 1$ ir $x_{n+1} = 2$,

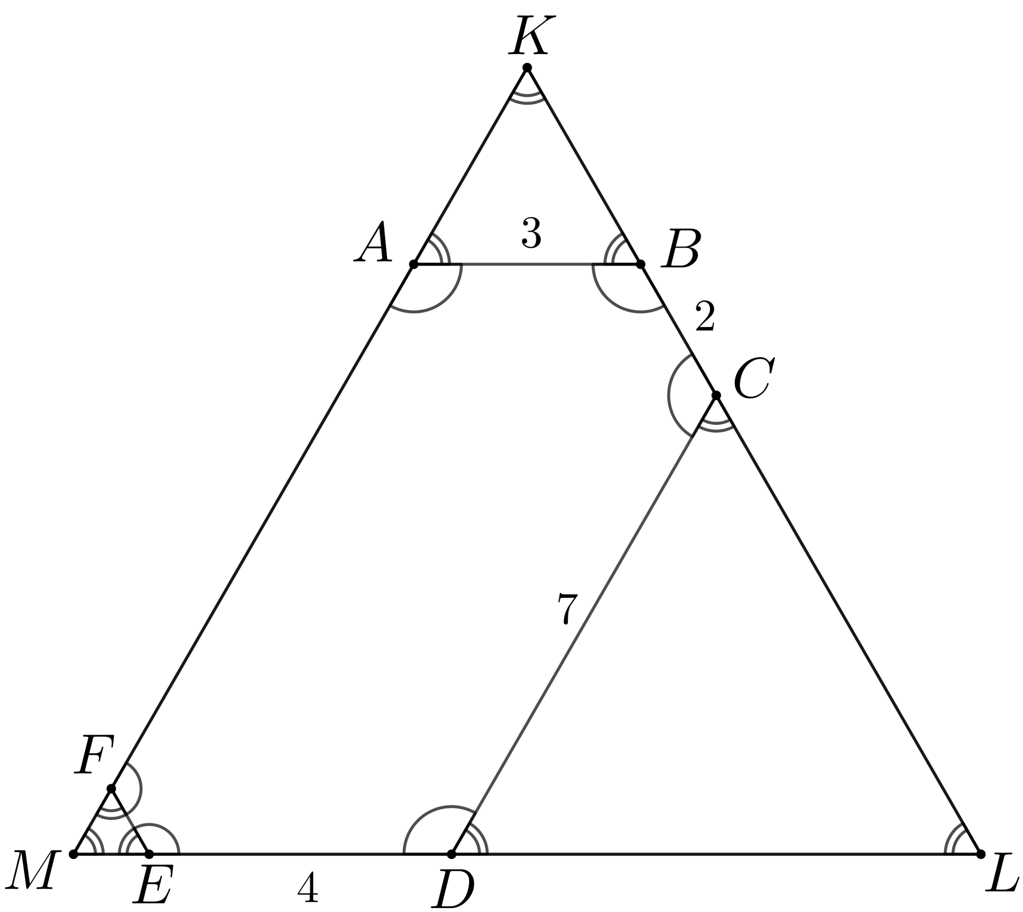
[1] Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Matematikos institutas, Naugarduko 24, Vilnius LT-03225. `http://www.mif.vu.lt/~dubickas/`

tai $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n+1}^2=n+4$ ir $x_{n+1}(x_1+\cdots+x_n)=2n$. Kadangi $n+4<2n$, kai $n\geqslant 5$, tai b) dalies nelygybė su šiais realiaisiais $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ neteisinga. Vadinasi, b) dalyje tinka tik n reikšmės iš aibės $\{1,2,3,4\}$.

Atsakymas: b) $n\in\{1,2,3,4\}$.

`2 (9-10 klasės).` Šešiakampio $ABCDEF$ visi kampai yra lygūs. Raskite jo plotą, jei $AB=3$, $BC=2$, $CD=7$ ir $DE=4$.

Sprendimas. Kadangi šešiakampio kampų suma yra $720°$, tai visi $ABCDEF$ kampai yra po $120°$. Tarkime, kad tiesės FA ir BC kertasi taške K.



Tada $\angle KAB=180°-\angle FAB=180°-120°=60°$. Taip pat ir $\angle ABK=60°$, taigi $\angle AKB=180°-60°-60°=60°$, ir todėl trikampis AKB – lygiakraštis. Analogiškai, trikampiai DCL ir MFE yra lygiakraščiai. (Čia L yra tiesių ED

ir BC sankirtos taškas, o M – tiesių FA ir ED sankirtos taškas.) Vadinasi, MKL taip pat lygiakraštis trikampis su kraštine

$$KL = KB + BC + CL = AB + BC + CD = 3 + 2 + 7 = 12.$$

Kadangi $ME = ML - ED - DL = 12 - 4 - 7 = 1$, o lygiakraščio trikampio, kurio kraštinė a, plotas lygus $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$, tai

$$S_{ABCDE} = S_{MKL} - S_{AKB} - S_{DCL} - S_{MFE} = \frac{\sqrt{3}(12^2 - 3^2 - 7^2 - 1^2)}{4} = \frac{85\sqrt{3}}{4}.$$

Atsakymas: $\frac{85\sqrt{3}}{4}$.

`3 (9-12 klasės).` Prie apskrito stalo sėdėjo m posėdžio dalyvių ($m \geqslant 3$). Posėdžio metu jie valgė saldainius, ir kiekvienas iš jų suvalgė po sveiką teigiamą skaičių saldainių. Be to, kiekvienas iš jų suvalgė arba aštuonis kartus daugiau saldainių nei jo kaimynas, sėdintis jam iš dešinės, arba dvidešimt keturiais saldainiais mažiau už tą kaimyną. Ar su kokia nors m reikšme jie visi kartu galėjo suvalgyti

a) mažiau kaip 1000 saldainių?

b) lygiai 2020 saldainių?

Sprendimas. Tarkime, kad kuris nors posėdžio dalyvis suvalgė x saldainių, o jo kaimynas iš kairės suvalgė $8x$ saldainių. Toliau, eidami kairėn nuo suvalgiusiojo $8x$ saldainių, kiekvieno posėdžio dalyvio suvalgytą saldainių skaičių vis mažinsime 24. Vadinasi, šio kaimynas iš kairės suvalgė $8x - 24$ saldainius, pastarojo kaimynas iš kairės – $8x - 24 \cdot 2$, ir t.t., vis 24 saldainiais mažiau iki pat pirmojo dalyvio, kuris suvalgė x saldainių. Tada, jei posėdyje dalyvavo m dalyvių, galioja lygybė $8x - 24(m - 1) = x$. Iš čia išplaukia, kad $7x = 24(m - 1)$. Ši lygybė teisinga, kai, pavyzdžiui, $m = 8$ ir $x = 24$. Aišku, kad tada visi kartu aštuoniese posėdžio dalyviai suvalgė

$$8x+8x-24+8x-24\cdot 2+\cdots+8x-24\cdot 7 = 64x-24\cdot\frac{7\cdot 8}{2} = 64\cdot 24-24\cdot 28 = 864$$

saldainius. Vadinasi, atsakymas į a) dalies klausimą yra teigiamas.

Įrodysime, kad kiekvieno posėdžio dalyvio suvalgytų saldainių skaičius dalijasi iš 8. Imkime posėdžio dalyvį, suvalgiusį mažiausiai saldainių (o jei tokie yra keli, tai bet kurį iš jų). Tarkime, kad jis suvalgė n saldainių. Kadangi $n - 24 < n$, tai jo kaimynas iš kairės suvalgė $8n$ saldainių. Pastarojo kaimynas iš kairės irgi suvalgė besidalijantį iš 8 skaičių saldainių, kadangi abu skaičiai $8 \cdot 8n$ ir $8n - 24$ dalijasi iš 8. Samprotaudami lygiai taip pat, matome, kad šio kaimynas iš kairės irgi suvalgė besidalijantį iš 8 skaičių saldainių ir taip toliau. Vadinasi, kiekvieno posėdžio dalyvio (įskaitant ir patį pirmąjį) suvalgytų saldainių skaičius dalijasi iš 8. Iš čia išplaukia, kad jų visų kartu suvalgytų saldainių skaičius taip pat dalijasi iš 8. Kadangi $2020 = 4 \cdot 5 \cdot 101$ nesidalija iš 8, tai lygiai 2020 saldainių jie visi kartu suvalgyti negalėjo, todėl atsakymas į b) dalies klausimą yra neigiamas.

Atsakymas: a) taip; b) ne.

`4 (9-10 klasės).` Duota lygtis

$$m^2 = n(n + 100).$$

a) Nurodykite bent vieną jos sprendinį natūraliaisiais skaičiais.
b) Raskite visus jos sprendinius natūraliaisiais skaičiais.

I sprendimas. Iš duotosios lygties akivaizdu, kad skaičiai m ir n yra arba abu lyginiai, arba abu nelyginiai. Be to, $m > n$, taigi $m - n = 2a$ ir $m + n = 2b$, čia $a, b \in \mathbb{N}$. Kadangi $m^2 = n(n + 100) = n^2 + 100n = (n + 50)^2 - 50^2$, tai

$$50^2 = (n + 50)^2 - m^2 = (n + 50 - m)(n + 50 + m) = (50 - 2a)(50 + 2b).$$

Padaliję abi puses iš 4, gauname lygtį

$$(25 - a)(25 + b) = 5^4.$$

Aišku, kad $25 - a > 0$, nes $25 + b > 0$. Kadangi skaičius 5 yra pirminis ir $0 < 25 - a < 25 + b$, tai galimi tik du 5^4 išskaidymo dviem natūraliaisiais dauginamaisiais būdai:

$$25 - a = 1,\ 25 + b = 5^4 \quad \text{ir} \quad 25 - a = 5,\ 25 + b = 5^3.$$

Pirmuoju atveju gauname $(a, b) = (24, 600)$, o antruoju – $(a, b) = (20, 100)$. Iš čia, remdamiesi lygybėmis $m = a + b$ ir $n = b - a$, gauname dvi poras $(m, n) = (624, 576)$ ir $(m, n) = (120, 80)$. Nesunku įsitikinti, kad abi šios poros tenkina duotąją lygtį.

Atsakymas: $(m, n) = (120, 80)$ ir $(m, n) = (624, 576)$.

II sprendimas. Kadangi $n^2 < m^2 < (n+50)^2$, tai $n < m < n+50$. Vadinasi, $m = n+k$, kur $k \in \{1, 2, \ldots, 49\}$. Duotoji lygtis

$$n^2 + 100n = m^2 = (n+k)^2 = n^2 + 2nk + k^2$$

ekvivalenti lygčiai $n(100-2k) = k^2$, iš kurios matome, kad k yra lyginis skaičius, $k = 2\ell$. Čia $\ell \in \{1, 2, \ldots, 24\}$. Taigi

$$n = \frac{k^2}{100-2k} = \frac{4\ell^2}{100-4\ell} = \frac{\ell^2}{25-\ell} = \frac{\ell^2 - 25\ell + 25\ell}{25-\ell} = -\ell + \frac{25\ell}{25-\ell} =$$
$$= -\ell + \frac{25(\ell-25)+25^2}{25-\ell} = -\ell - 25 + \frac{5^4}{25-\ell}.$$

Kadangi 5 yra pirminis skaičius ir $1 \leqslant 25-\ell \leqslant 24$, tai $25-\ell$ dalija 5^4 tada ir tik tada, kai $25-\ell = 1$ arba $25-\ell = 5$. Atitinkamai, $\ell = 24$ arba $\ell = 20$.

Jei $\ell = 20$, tai $n = -45 + 5^3 = 80$ ir $m = n + 2\ell = 80 + 40 = 120$, o jei $\ell = 24$, tai $n = -49 + 5^4 = 576$ ir $m = n + 2\ell = 576 + 48 = 624$. Abi šios poros $(m, n) = (120, 80)$ ir $(m, n) = (624, 576)$ tenkina duotąją lygtį.

Atsakymas: $(m, n) = (120, 80)$ ir $(m, n) = (624, 576)$.

`5 (11-12 klasės).` Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurioms lygybė

$$f(2x+3y) = 5f(x+y^3)f(x^2+y^7)$$

teisinga su visais $x, y \in \mathbb{R}$.

(Čia $\mathbb{R}$ žymi visų realiųjų skaičių aibę.)

Sprendimas. Jei $f(t) \neq 0$ su visais $t \in \mathbb{R}$, tai, imdami $x = y^3 - 3y$, gauname

$$f(2y^3 - 3y) = 5f(2y^3 - 3y)f((y^3-3y)^2 + y^7),$$

todėl $f((y^3-3y)^2 + y^7) = \frac{1}{5}$ su visais $y \in \mathbb{R}$. Kadangi $y^7 + (y^3-3y)^2$ yra nelyginio laipsnio polinomas, tai, kad ir koks bebūtų $z \in \mathbb{R}$, atsiras $y \in \mathbb{R}$, su kuriuo $y^7 + (y^3-3y)^2 = z$. Vadinasi, $f(z) = \frac{1}{5}$ su kiekvienu $z \in \mathbb{R}$. Akivaizdu, kad ši funkcija tenkina duotąją lygtį.

Priešingu atveju egzistuoja toks $t \in \mathbb{R}$, kad $f(t) = 0$. Įrašę $x = t - y^3$ į duotąją lygybę, gauname, kad

$$f(2t - 2y^3 + 3y) = 5f(t)f((t-y^3)^2 + y^7) = 0$$

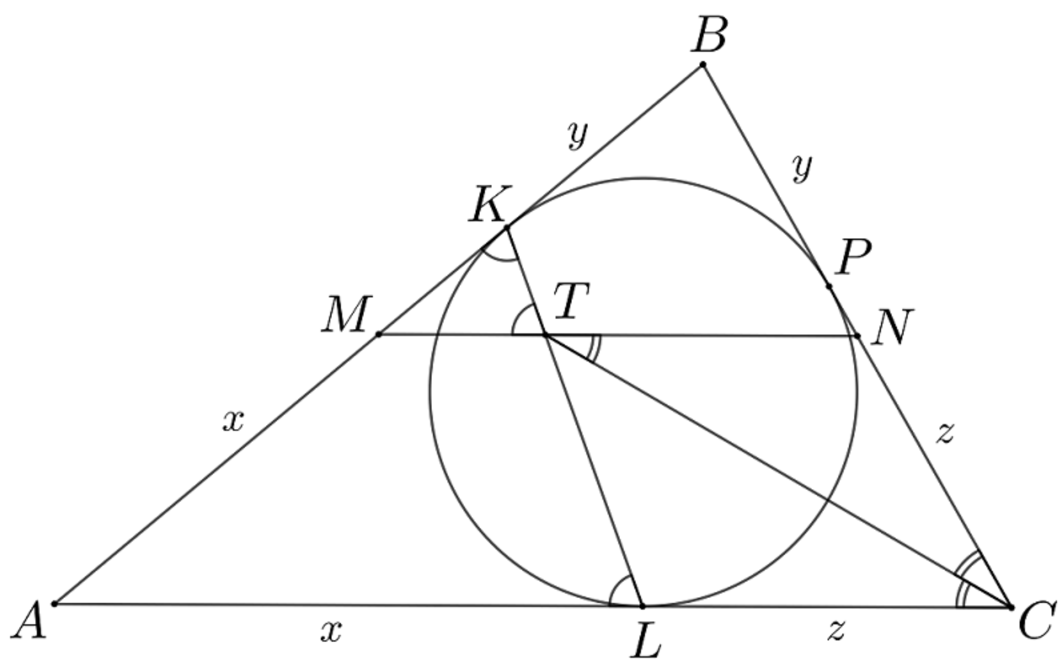
su visais $y \in \mathbb{R}$. Vėlgi, kad ir koks bebūtų $z \in \mathbb{R}$, atsiras toks $y \in \mathbb{R}$, kad $2t - 2y^3 + 3y = z$ (čia t yra fiksuotas realusis skaičius). Vadinasi, $f(z) = 0$ su kiekvienu $z \in \mathbb{R}$. Akivaizdu, kad ši funkcija taip pat tenkina duotąją lygtį.

Atsakymas: $f(x) = 0$ su visais $x \in \mathbb{R}$ ir $f(x) = \frac{1}{5}$ su visais $x \in \mathbb{R}$.

`6 (11-12 klasės).` Trikampio ABC kampai A ir B lygūs atitinkamai 40° ir 80°. Įbrėžtas į trikampį apskritimas liečia kraštines AB ir AC taškuose K ir L. Taškai M ir N yra kraštinių AB ir BC vidurio taškai. Tiesės MN ir KL kertasi taške T. Raskite kampą ACT.

Sprendimas. Pažymėkime trikampio kraštines $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Tarkime, kad įbrėžtas į trikampį apskritimas liečia kraštinę BC taške P. Pažymėkime $AK = AL = x$, $BK = BP = y$ ir $CP = CL = z$. Iš $x + y = c$, $y + z = a$ ir $z + x = b$ gauname, kad

$$x = \frac{b + c - a}{2} \quad \text{ir} \quad y = \frac{a + c - b}{2}.$$



Kadangi kampas A mažesnis už kampą B, tai $a < b$. Vadinasi, $x > y$, taigi taškas K priklauso atkarpai MB. Kadangi MN yra trikampio vidurio linija, o trikampis LAK lygiašonis, tai $\angle KTM = \angle KLA = \angle AKL = \angle MKT$. Vadinasi, trikampis KTM taip pat lygiašonis. Iš čia išplaukia, kad

$$MT = MK = MB - KB = \frac{c}{2} - y = \frac{c}{2} - \frac{a + c - b}{2} = \frac{b - a}{2},$$

todėl

$$TN = MN - MT = \frac{b}{2} - \frac{b-a}{2} = \frac{a}{2} = NC.$$

Taigi trikampis TNC – lygiašonis, $\angle TCN = \angle NTC$. Be to, $TN||AC$, todėl $\angle NTC = \angle ACT$. Taigi $\angle TCN = \angle ACT$. Įrodėme, kad CT yra kampo C pusiaukampinė. Vadinasi,

$$\angle ACT = \frac{\angle ACB}{2} = \frac{180^\circ - \angle CAB - \angle ABC}{2} = \frac{180^\circ - 40^\circ - 80^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Atsakymas: $\angle ACT = 30^\circ$.

`7 (11-12 klasės).` Natūraliųjų skaičių ketvertą (a, b, c, d) vadinsime *saulėtu*, jei skaičiai a, b, c, d yra paporiui tarpusavyje pirminiai ir tenkina lygybę

$$ab + cd + 210bd = ac.$$

a) Nurodykite bent vieną saulėtą ketvertą (a, b, c, d).
b) Įrodykite, kad saulėtų ketvertų yra be galo daug.
c) Raskite visus saulėtus ketvertus (a, b, c, d), kuriems suma $a + b + c + d$ įgyja mažiausią reikšmę.
d) Kokią mažiausią reikšmę, didesnę už 2020, gali įgyti suma $a + b + c + d$, kai ketvertas (a, b, c, d) – saulėtas?

Sprendimas. Iš sąlygos aišku, kad $a > d$ ir $c > b$. Perrašykime lygybę taip:

$$(a - d)(c - b) = ac - ab - cd + bd = 210bd + bd = 211bd.$$

Iš čia akivaizdu, kad (a, b, c, d) yra saulėtas ketvertas tada ir tik tada, kai ketvertas (c, d, a, b) – saulėtas.

Nuo šiol nagrinėsime ir *labai saulėtus* ketvertus, t.y. saulėtus ketvertus, kuriuose

$$\max(a, b, c, d) = a.$$

Jei $\max(a, b, c, d) > a$, tai $\max(a, b, c, d) = c$, o tada tokį saulėtą ketvertą visada galima gauti pakeičiant labai saulėtą ketvertą (a, b, c, d) ketvertu (c, d, a, b). Vadinasi, visų saulėtų ketvertų aibę sudaro labai saulėti ketvertai (a, b, c, d) ir iš jų gaunami ketvertai (c, d, a, b).

Įrodysime, kad labai saulėtame ketverte $d|(c-b)$. Iš tikrųjų, priešingu atveju, jei d nedalija $c - b$, tai egzistuoja toks d daliklis $e > 1$, kad $e|(a - d)$. Iš čia išplaukia, kad $e|a$, kas neįmanoma, nes tada $(a, d) \geqslant e > 1$. (Čia (u, v) žymi natūraliųjų skaičių u ir v didžiausią bendrą daliklį.) Vadinasi, $c-b=md$ su $m\in\mathbb{N}$. Analogiškai, gauname $a-d=nb$ su $n\in\mathbb{N}$. Iš lygybės

$$211bd=(a-d)(c-b)=nbmd=mnbd$$

išplaukia, kad $mn=211$. Kadangi 211 yra pirminis skaičius ir $m,n\in\mathbb{N}$, tai $m=1$ arba $n=1$. Pirmuoju atveju, kai $m=1$, galioja lygybė $c=b+d$, o antruoju atveju, kai $n=1$, – lygybė $a=b+d$. Įrašę $c=b+d$ į duotąją lygybę, gauname $ab+bd+d^2+210bd=ab+ad$. Ši lygybė ekvivalenti lygybei $a=211b+d$. Kita vertus, įrašę $a=b+d$ į duotąją lygybę, gausime $c=b+211d>a$, taigi toks ketvertas nėra labai saulėtas. Vadinasi, natūraliųjų skaičių ketvertas (a,b,c,d) gali būti labai saulėtas tik tada, kai

$$(a,b,c,d)=(211b+d,b,b+d,d).$$

Įrodysime, kad toks ketvertas yra labai saulėtas tada ir tik tada, kai

$$(b,d)=(d,211)=(b+d,210)=1.$$

Iš tikrųjų, pagal uždavinio sąlygą, ketvertas $(211b+d,b,b+d,d)$ gali būti saulėtas tik, kai $(b,d)=1$. Tada $(b+d,d)=(b+d,b)=1$ ir $(211b+d,b)=(b,d)=1$. Be to, kadangi $(b,d)=1$, tai lygybė $(211b+d,d)=(211b,d)=1$ teisinga tada ir tik tada, kai $(d,211)=1$. Belieka patikrinti, kada skaičiai $211b+d$ ir $b+d$ yra tarpusavyje pirminiai. Iš $(b+d,b)=1$ išplaukia, kad

$$(211b+d,b+d)=(210b,b+d)=(210,b+d).$$

Vadinasi, $(211b+d,b+d)=1$ tada ir tik tada, kai $(b+d,210)=1$. Teiginys įrodytas.

Parinkę, pavyzdžiui, $d=1$ ir $b=210t$ (čia $t\in\mathbb{N}$), matome, kad

$$(210t,1)=(1,211)=(210t+1,210)=1,$$

taigi visi ketvertai

$$(a,b,c,d)=(44310t+1,210t,210t+1,1)$$

yra labai saulėti, o tuo pačiu ir saulėti. Įrodėme uždavinio b) dalį, o a) dalyje galime paimti, pavyzdžiui, $t=1$. Tokiu būdu gauname saulėtą ketvertą $(a,b,c,d)=(44311,210,211,1)$.

Dabar rasime visus labai saulėtus ketvertus $(a,b,c,d)=(211b+d,b,b+d,d)$ su mažiausia įmanoma suma $S=a+b+c+d=213b+3d$. Aišku, kad jei $b\geqslant 2$, tai $S\geqslant 426+3d\geqslant 429$. Tarkime, kad $b=1$. Tada ketverto

$(211+d, 1, d+1, d)$ elementų suma yra $S = 213+3d$, taigi belieka rasti mažiausią natūralųjį d, kuriam galioja reikiama sąlyga. Nesunku įsitikinti, kad mažiausias toks d yra $d = 10$. Iš tikrųjų, kadangi $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, tai su kiekvienu $d = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ turime $(1 + d, 210) > 1$, o su $d = 10$ galioja sąlyga $(1, 10) = (10, 211) = (11, 210) = 1$. Tada $S = 213 + 3 \cdot 10 = 243 < 429$, taigi ketvertas $(a, b, c, d) = (221, 1, 11, 10)$ yra vienintelis labai saulėtas ketvertas, kurio elementų suma $a+b+c+d$ įgyja mažiausią reikšmę 243. Dar vieną saulėtą ketvertą gausime iš perstatos $(11, 10, 221, 1)$, o kitų tokių saulėtų ketvertų nėra.

Įrodėme, kad c) dalyje mažiausia saulėto ketverto elementų suma yra lygi 243, o tokią reikšmę įgyja lygiai dviejų saulėtų ketvertų $(221, 1, 11, 10)$ ir $(11, 10, 221, 1)$ elementų suma.

Belieka išspręsti uždavinio d) dalį. Įrodysime, kad mažiausia reikšmė, didesnė už 2020, kurią įgyja saulėto ketverto elementų suma, yra lygi 2031. Iš tikrųjų, kadangi

$$S = 213b + 3d = 3(71b + d) = 3(70b + (b + d)),$$

tai S dalijasi iš 3, bet nesidalija iš 2, 5 ir 7, nes $(b + d, 210) = 1$. Iš 3 dalijasi skaičiai $2022, 2025, 2028, 2031, \ldots$, tačiau pirmasis ir trečiasis šios sekos nariai dalijasi iš 2, o antrasis iš 5, taigi S negali įgyti jokios reikšmės nuo 2021 iki 2030. Jei $S = 2031$, tai $71b + d = 677$. Imdami, pavyzdžiui, $b = 1$ ir $d = 606$, matome, kad sąlyga $(1, 606) = (606, 211) = (607, 210) = 1$ galioja. Vadinasi,

$$(a, b, c, d) = (211b + d, b, b + d, d) = (817, 1, 607, 606)$$

yra saulėtas ketvertas, kurio elementų suma yra lygi 2031.

Atsakymas: a) pvz., $(a, b, c, d) = (44311, 210, 211, 1)$; c) $(221, 1, 11, 10)$ ir $(11, 10, 221, 1)$; d) 2031.