

69-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Organizuojama nuotoliniu būdu, 2021 04 01
9–10 klasės

1. a) Įrodykite, kad nelygybė

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq x_3(x_1 + x_2)$$

teisinga su visais realiaisiais x_1, x_2, x_3 .

- b) Raskite visas natūraliąsias n reikšmes, kurioms nelygybė

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 \geq x_{n+1}(x_1 + \dots + x_n)$$

teisinga su visais realiaisiais x_1, x_2, \dots, x_{n+1} .

2. Šešiakampio $ABCDEF$ visi kampai yra lygūs. Raskite jo plotą, jei $AB = 3$, $BC = 2$, $CD = 7$ ir $DE = 4$.
3. Prie apskrito stalo sėdėjo m posėdžio dalyvių ($m \geq 3$). Posėdžio metu jie valgė saldinius, ir kiekvienas iš jų suvalgė bent po vieną saldainį. Be to, kiekvienas iš jų suvalgė arba aštuonis kartus daugiau saldainių nei jo kaimynas, sėdintis jam iš dešinės, arba dvidešimt keturiais saldainiais mažiau už tą kaimyną. Ar su kokia nors m reikšme jie visi kartu galėjo suvalgyti
- mažiau kaip 1000 saldainių?
 - lygiai 2020 saldainių?

4. Duota lygtis

$$m^2 = n(n + 100).$$

- Nurodykite bent vieną jos sprendinį natūraliaisiais skaičiais.
- Raskite visus jos sprendinius natūraliaisiais skaičiais.

11–12 klasės

1. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kurioms lygybė

$$f(2x + 3y) = 5f(x + y^3)f(x^2 + y^7)$$

teisinga su visais $x, y \in \mathbb{R}$.

(Čia \mathbb{R} žymi visų realiųjų skaičių aibę.)

2. Trikampio ABC kampai A ir B lygūs atitinkamai 40° ir 80° . Įbrėžtas į trikampį apskritimas liečia kraštines AB ir AC taškuose K ir L . Taškai M ir N yra kraštinių AB ir BC vidurio taškai. Tiesės MN ir KL kertasi taške T . Raskite kampą ACT .
3. Prie apskrito stalo sėdėjo m posėdžio dalyvių ($m \geq 3$). Posėdžio metu jie valgė saldainius, ir kiekvienas iš jų suvalgė bent po vieną saldainį. Be to, kiekvienas iš jų suvalgė arba aštuonis kartus daugiau saldainių nei jo kaimynas, sėdintis jam iš dešinės, arba dvidešimt keturiais saldainiais mažiau už tą kaimyną. Ar su kokia nors m reikšme jie visi kartu galėjo suvalgyti
- mažiau kaip 1000 saldainių?
 - lygiai 2020 saldainių?
4. Natūraliųjų skaičių ketvertą (a, b, c, d) vadinsime *saulėtu*, jei skaičiai a, b, c, d yra paporiui tarpusavyje pirminiai ir tenkina lygybę

$$ab + cd + 210bd = ac.$$

- Nurodykite bent vieną saulėtą ketvertą (a, b, c, d) .
- Įrodykite, kad saulėtų ketvertų yra be galo daug.
- Raskite visus saulėtus ketvertus (a, b, c, d) , kuriems suma $a + b + c + d$ įgyja mažiausią reikšmę.
- Kokią mažiausią reikšmę, didesnę už 2020, gali įgyti suma $a + b + c + d$, kai ketvertas (a, b, c, d) – saulėtas?