

**XXXV LIETUVOS KOMANDINĖ MOKINIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROF. JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI**

Olimpiada skiriama prof. Jono Kubiliaus šimtosioms gimimo metinėms paminėti

**Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas
2021-10-02**

1. Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 6x + y + 2xy + 4x^2 = 7, \\ 2y + 2xy + y^2 = -3. \end{cases}$$

2. Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy + 6y = 32. \end{cases}$$

3. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kurioms lygybė

$$f(x^3 + y^3) = x^2 f(x) + y f(y^2)$$

galioja su visais realiaisiais x ir y .

4. Realieji skaičiai x ir y tenkina lygybę $x + y = 1$. Raskite didžiausią galimą reiškinio

$$(x^3 + 1)(y^3 + 1)$$

reikšmę.

5. Įrodykite, kad jei $x, y, z > 0$, tai

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} + 3 \geq \frac{4x}{x+z} + \frac{4y}{y+x} + \frac{4z}{z+y}.$$

6. Raskite visas tokias natūraliųjų skaičių poras (a, b) , kad $a \leq b$ ir

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{25}.$$

7. Domas užrašė 8 iš eilės einančius natūraliuosius skaičius ir pabraukė 4 iš jų. Pabrauktųjų skaičių kvadratų suma lygi nepabrauktųjų skaičių kvadratų sumai. Nustatykite mažiausio iš 8 užrašytųjų skaičių visas galimas reikšmes.

8. Rima lentoje užrašė 20 skaičių: 1, 2, 3, ..., 20, o tada kai kuriuos skaičius nutrynė. Bet kurių dviejų skirtingų lentoje užrašytų skaičių suma yra sudėtinis skaičius. Kiek mažiausiai skaičių buvo nutrinta?

9. Natūralusis skaičius a turi savybę: jokiame natūraliajam skaičiui n skaičius $n(a+n)$ nėra sveiką kvadrataus kvadratas. Raskite visas galimas skaičiaus a reikšmes.

10. Raskite visus tokius poromis skirtingų natūraliųjų skaičių trejetus (a, b, c) , kuriems skaičiai $2a - 1$, $2b - 1$ ir $2c - 1$ dalijasi atitinkamai iš b , c ir a .

11. Natūralųjų skaičių n vadinsime *proginiu apverstuku*, jei jis turi tokias dvi savybes: 1) skaičiaus n skaitmenis surašius priešinga tvarka, vėl gaunamas skaičius n ; 2) skaičiuje n yra keturių gretimų skaitmenų fragmentas 2021. Pavyzdžiui, skaičius 39202120293 yra proginis apverstukas. Nustatykite, kiek yra vienuolikaženklių proginų apverstukų.
12. Koridoriuje yra 16 durų į viešbučio kambarius: po 8 duris kairėje ir dešinėje. Reikia taip užsakyti 7 iš šių 16 kambarių, kad jokie du užsakyti kambariai, esantys vienoje koridoriaus pusėje, nebūtų gretimi. Keliais būdais galima užsakyti kambarius?
13. Lentoje viena eilute užrašytos kelios žvaigždutės: $** \dots *$. Jų skaičius nelyginis. Arnas ir Birutė žaidžia žaidimą, pakaitomis atlikdami ėjimus; pradeda Arnas. Ėjimo metu žaidėjas turi pasirinkti žvaigždutę, nutrinti ją ir jos vietoje parašyti skaitmenį. Draudžiama pirmąją žvaigždutę pakeisti skaitmeniu 0. Arnas laimi, jei skaičius, gautas visas žvaigždutes pakeitus skaitmenimis, dalijasi iš 11. Priešingu atveju laimi Birutė. Nustatykite, kuris žaidėjas turi pergalės strategiją, ir nurodykite šią strategiją.
14. Lina nori į 9×9 lentelės langelius taip surašyti visus skaičius $1, 2, \dots, 81$ (po vieną skaičių į langelį), kad skaičių sandauga k -tojoje (nuo viršaus) eilutėje būtų lygi skaičių sandaugai k -tajame (iš kairės) stulpelyje kiekvienam skaičiui $k = 1, 2, \dots, 9$. Ar tai įmanoma padaryti?
15. Linas į 8×8 lentelės langelius surašė visus skaičius $1, 2, \dots, 64$ (po vieną skaičių į langelį). Jis apibraukė lentelėje visus skaičius a , turinčius tokią savybę: skaičius a yra mažiausias skaičius savo eilutėje ir tuo pačiu metu – didžiausias skaičius savo stulpelyje. Lentelėje yra n apibrauktų skaičių. Raskite visas galimas skaičiaus n reikšmes.
16. Stačiojo trikampio įžambinės ilgis yra $\sqrt{3}$, o šio trikampio vienos pusiaukampinės, nuleistos į statinį, ilgis lygus 1. Raskite trikampio plotą.
17. Trikampio ABC pusiaukraštinės kertasi taške M . Taškas D dalija atkarpą AB pusiau. Raskite AB, BC, AC , jei $AD = 3, DM = 5, MA = 4$.
18. Trikampio ABC kampų didumai ir kraštinių ilgiai lygūs $\angle A = x^\circ, \angle B = y^\circ, \angle C = z^\circ, BC = a, CA = b, AB = c$. Įrodykite, kad

$$60 \leq \frac{ax + by + cz}{a + b + c} \leq 90.$$

19. Apskritimo besikertančiose stygose AB ir CD atitinkamai pažymėti tokie taškai E ir F , kad $AF \perp CD$ ir $DE \perp AB$. Tiesės AF ir DE kerta tiesę BC atitinkamai taškuose P ir Q . Įrodykite, kad taškai A, P, Q, D priklauso vienam apskritimui.
20. Trikampio ABC ($AC \neq BC$) viduje pažymėtas toks taškas D , kad $\angle ADB = 90^\circ + \frac{\angle ACB}{2}$. Trikampio ABC apibrėžtinio apskritimo liestinė taške C kerta tiesę AB taške M . Trikampio ACD apibrėžtinio apskritimo liestinė taške C kerta tiesę AD taške N . Įrodykite, kad $\angle BMN = \angle CMN$.