LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Jaunajam matematikui

18

2015–2017 mokslo metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Vilnius, 2017

Leidinio sudarytojai:
Antanas APYNIS
Edmundas MAZĖTIS
Eugenijus STANKUS
Juozas ŠINKŪNAS

Leidinį redagavo

Maketavo Kristina LYNDIENĖ

TURINYS

PRATARMĖ

Šioje aštuonioliktoje Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos knygelėje „Jaunajam matematikui“ yra pateikta 2015–2017 mokslo metais nagrinėtų temų metodinė medžiaga, užduotys LJMM klausytojams ir jų sprendimai.

Knygelės turinį sudaro šios temos: procentų uždaviniai (A. Apynis, J. Šinkūnas), Čevos ir Menelajaus teoremos (E. Mazėtis), Farėjaus sekos (E. Stankus), algebrinės lygtys (A. Apynis, J. Šinkūnas), erdviniai kūnai (E. Mazėtis), judėjimo uždaviniai (A. Apynis), trigonometrinės lygtys (A. Apynis), tikimybių skaičiavimas (E. Stankus). Skaitytojas taip pat ras 2015 metų stojamąją užduotį ir jos sprendimą bei 2017 metų baigiamosios užduoties pavyzdį.

Antanas Apynis
Edmundas Mazėtis
Eugenijus Stankus
Juozas Šinkūnas

Metodinė medžiaga ir užduotys

STOJAMOJI UŽDUOTIS

**Antanas Apynis, Edmundas Mazėtis,
Eugenijus Stankus, Juozas Šinkūnas,**

1. Raskite keturženklį skaičių, kurį dalijant iš 131 gaunama liekana 51, o dalijant iš 132 – liekana 36.

2. Iš kokio dviženklio skaičiaus dalijant skaičių 180 gaunama liekana, lygi 25 % dalmens?

3. Pie sugalvoto natūraliojo skaičiaus iš dešinės pusės prirašytas vie– nas skaitmuo, o iš gauto skaičiaus atimtas sugalvoto skaičiaus kvadratas. Gautas skirtumas yra 8 kartus didesnis už sugalvotą skaičių. Nustatykite, koks galėtų būti pradinis natūralusis skaičius ir koks skaitmuo buvo prie jo prirašytas.

4. Yra du tų pačių dviejų metalų lydiniai. Viename lydinyje tų metalų masių santykis yra 1:2, o kitame – 2:3. Koks turėtų būti tokių lydinių masių santykis, kad gautame lydinyje metalų masių santykis būtų 17:27?

5. Įrodykite, kad lygtis $x^2 + y^2 = 2015$ neturi sveikųjų sprendinių (sveikųjų skaičių *x* ir *y* porų (*x*; *y*), tenkinančių lygtį).

6. Nesulaukęs autobuso stotelėje *A*, Antanukas nutarė į stotelę *B* eiti pėsčiomis. Nuėjęs trečdalį kelio, jis pastebėjo link stotelės *A* atvažiuojantį autobusą. Jeigu jis bėgtų į stotelę *A* arba į stotelę *B*, tai suspėtų įsėsti į autobusą (ir jis, ir autobusas stotelėje atsidurtų tuo pačiu metu). Kokiu greičiu turėtų bėgti Antanukas, jeigu autobusas važiuoja 30 km/h greičiu?

7. Tarkime, kad dabar laikrodis rodo lygiai 12 valandą. Po kurio (trumpiausio) laiko tarpo abi laikrodžio rodyklės vėl sutaps?

8. Į lygiašonį trikampį, kurio perimetras 56, įbrėžto apskritimo spindulys lygus $\frac{2}{7}$ į pagrindą nubrėžtos aukštinės ilgio. Raskite trikampio kraštinių ilgius.

9. Lygiašonės trapecijos šoninė kraštinė yra 3 kartus ilgesnė už trumpesnįjį pagrindą, o bukųjų kampų pusiaukampinės susikerta ilgesniajam pagrindui priklausančiame taške. Koks yra trapecijos ir trikampio, sudaryto iš jos trumpesniojo pagrindo ir bukųjų kampų pusiaukampinių, plotų santykis?

10. Stačiakampio gretasienio visų sienų plotų suma lygi 22 dm^2, o visų jo briaunų ilgių suma – 24 dm. Apskaičiuokite šio gretasienio įstrižainės ilgį.

I. PROCENTŲ UŽDAVINIAI

Antanas Apynis, Juozas Šinkūnas

Paskutinį kartą procentų tema Lietuvos jaunųjų matematikų mokyk–loje buvo nagrinėjama 2011–2013 mokslo metais. Šį kartą pateikiame tą pačią teorinę medžiagą ir naują užduotį LJMM mokiniams.

Procento sąvoka įvedama penktoje klasėje. Penktoje ir šeštoje klasėse sprendžiami patys paprasčiausi procentų uždaviniai. Sudėtingesni procentų uždaviniai sutinkami tik vyresnėse klasėse; taip pat įvairiuose matematikos uždavinių sprendimo konkursuose ir olimpiadose.

Procentai skaičiuojami ne tik buityje, versle, ekonomikoje. Jie svarbūs beveik visose mokslo šakose. Šioje LJMM mokiniams skirtoje temoje apsiribosime gana paprastais procentų taikymo uždaviniais. Nors procentų uždavinių teorija yra paprasta, tačiau, sprendžiant uždavinius, atsiranda įvairių sunkumų. Kad būtų paprasčiau spręsti uždavinius, pateiksime porą tokių uždavinių sprendimo schemų ir jų taikymo pavyzdžių. Tikimės, kad, perskaitę čia pateiktus metodinius nurodymus ir išnagrinėję pavyzdžių sprendimus, visi LJMM mokiniai sėkmingai išspręs pirmąją užduotį. Žinoma, uždavinius galima spręsti ir nesinaudojant pateikiamomis schemomis.

Pirmiausia prisiminkime, kad *procentu* vadinama viena šimtoji skaičiaus ar kokio nors dydžio dalis; žymima 1 %. Pavyzdžiui, 1 % skaičiaus 1 yra 0,01; 1 % skaičiaus n yra $0{,}01n$. Vienas procentas metro yra vienas centimetras, vienas procentas k tonų yra $0{,}01k$ tonų, o b procentų skaičiaus n yra $0{,}01bn$.

Lyginant du skaičius, tarkim, a ir b, palyginimo rezultatas dažnai išreiškiamas procentais. Pavyzdžiui, skaičius a sudaro $\frac{a}{b}\cdot 100$ procentų skaičiaus b $\left(\frac{a}{b}\cdot 100\ \%\right)$. Skaičius a yra $\frac{a-b}{b}\cdot 100$ procentų $\left(\frac{a-b}{b}\cdot 100\ \%\right)$ didesnis už skaičių b (žinoma, kai $a > b$), o skaičius b yra $\frac{a-b}{a}\cdot 100$ procentų $\left(\frac{a-b}{a}\cdot 100\ \%\right)$ mažesnis už skaičių a.

Skaičių palyginimą pailiustruokime konkrečiu pavyzdžiu. Sakykime, kad kurioje nors pradinėje mokykloje mokosi 30 berniukų ir 120 mergaičių. Sugretinus šiuos skaičius, galima pasakyti, kad:

1) berniukų skaičius sudaro $\frac{30}{150}\cdot 100 = 20$ procentų visų mokinių skaičiaus;

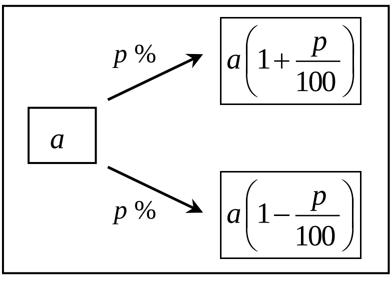
2) mergaičių skaičius yra 300 procentų $\left(\frac{120-30}{30}\cdot 100\ \%\right)$ didesnis už berniukų skaičių;

3) berniukų skaičius 75 procentais $\left(\frac{120-30}{120}\cdot 100\ \%\right)$ mažesnis už mergaičių skaičių;

4) mergaičių skaičius sudaro 400 procentų berniukų skaičiaus, o berniukų skaičius sudaro 25 procentus mergaičių skaičiaus.

Atkreipkime dėmesį į tai, kad kalbant apie bet kurių dydžių pokyčius, vartojama ne tik procento, bet ir procentinio punkto sąvoka. Pavyzdžiui, galima išgirsti sakant, kad prekės kaina iš pradžių sumažėjo 10 %, o paskui – dar vienu procentiniu punktu. Tai reiškia, kad iš viso prekės kaina sumažėjo 11 procentų.

1. Kainų kitimo ir bankinių operacijų uždaviniai. Tarkime, kad pradinė prekės kaina buvo a litų, o paskui pasikeitė p % – padidėjo arba sumažėjo. Kainos pokytis, aišku, sudaro $\frac{ap}{100}$ litų. Taigi pabrangusios prekės kaina yra $a + \frac{ap}{100} = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ litų, o atpigusios prekės kaina yra

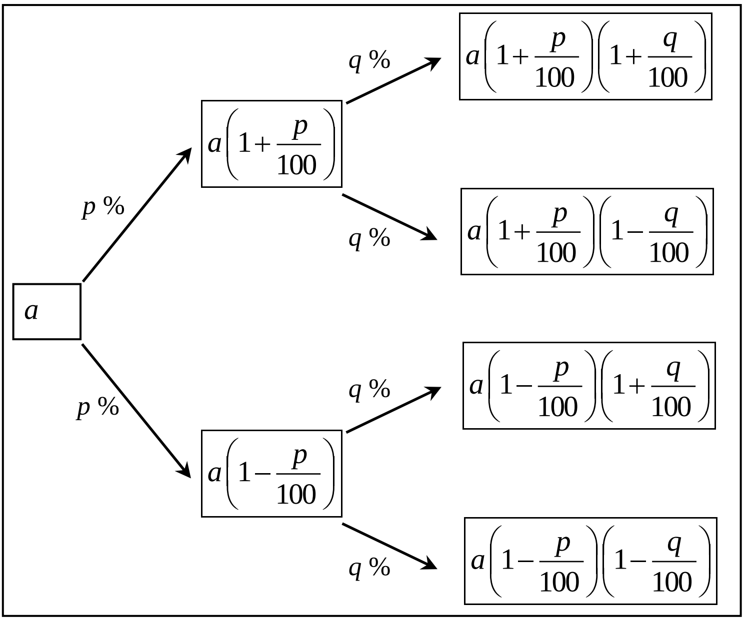


1 pav.

$a - \dfrac{ap}{100} = a\left(1 - \dfrac{p}{100}\right)$ litų. Sudarykime kainos kitimo schemą (žr. 1 pav.), kurioje kainos padidėjimas vaizduojamas rodykle $\nearrow$, o sumažėjimas – rodykle $\searrow$. Simbolis „p % $\nearrow$“ reiškia kainos padidėjimą p procentais, o simbolis „p % $\searrow$“ reiškia kainos sumažėjimą p procentais. Taikant tą patį principą, kainos kitimo schemą galima pratęsti, papildant ją tolesnio kainos kitimo galimybėmis (žr. 2 pav.). Jei pabrangusios prekės kaina $a\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)$ pasikeistų (padidėtų ar sumažėtų) q %, tai pokytis sudarytų $a\left(1 + \dfrac{p}{100}\right) \cdot \dfrac{q}{100}$ litų, o prekės naujoji kaina būtų

$$a\left(1 + \frac{p}{100}\right) + a\left(1 + \frac{p}{100}\right)\frac{q}{100} = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{q}{100}\right) \text{ litų}$$

arba



2 pav.

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)-a\left(1+\frac{p}{100}\right)\frac{q}{100}=a\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{q}{100}\right) \text{ litų.}$$

Analogiškai gaunami ir atpigusios prekės kainos $a\left(1-\frac{p}{100}\right)$ pasikeitimo q % skaičiavimo rezultatai: $a\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{q}{100}\right)$ – prekei pabrangus q % ir $a\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{q}{100}\right)$ – prekei atpigus q %.

Glaustai aptarkime sudėtinių palūkanų skaičiavimą. Nagrinėkime atvejį, kai bankas moka p % metines palūkanas už jame laikomus indėlius, kurios, pasibaigus palūkanų periodui, priskaičiuojamos prie indėlio. Jei pradinio indėlio didumas yra B_0 litų, tai per metus sukaupiamos $B_0 \cdot \frac{p}{100}$ litų palūkanos, o indėlis išauga iki $B_1 = B_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)$ litų. Po dvejų metų indėlis B_0 išaugtų iki $B_2 = B_1 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) = B_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$; po trejų – iki $B_3 = B_2 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) = B_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$ ir t. t. Po n metų indėlis B_0 išaugtų iki

$$B_n = B_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n \tag{1}$$

litų. Gautoji indėlio perskaičiavimo formulė (1) vadinama *sudėtinių palūkanų formule*.

Suskaidžius metus į m vienodos trukmės dalinių periodų, kiekvieno periodo palūkanų norma būtų $i=\frac{p}{m}$ procentų. Tarus, kad po kiekvieno dalinio periodo palūkanos priskaičiuojamos prie indėlio, pradinis indėlis B_0 per pirmuosius metus išaugtų iki

$$B_0 \cdot \left(1+\frac{i}{100}\right)^m = B_0\left(1+\frac{p}{m\cdot 100}\right)^m;$$

jį pažymėkime $B_1(m)$. Per antruo–sius metus indėlis B_0 išaugtų iki

$$B_2(m) = B_1(m)\left(1+\frac{i}{100}\right)^m = B_1(m)\left(1+\frac{p}{m\cdot 100}\right)^m = B_0\left(1+\frac{p}{m\cdot 100}\right)^{2m}$$

ir t. t. Po n metų indėlio didumas būtų

$$B_n(m) = B_0\left(1+\frac{p}{m\cdot 100}\right)^{nm}. \qquad (2)$$

Dabar pereikime prie pavyzdžių analizės.

1 pavyzdys. Išnagrinėkime tris kainų keitimo schemas ir atsakykime į formuluojamus klausimus.

a) Prekės kaina buvo didinama du kartus – pirmą kartą 20 %, o antrą kartą 30 %. Keliais procentais pabrango prekė ir kokia buvo jos pradinė kaina, jeigu po antrojo pabrangimo ji pakilo iki 390 Lt?

b) Prekės kaina buvo mažinama du kartus. Abu kartus po p %. Raskime p, jeigu per abu kartus prekės kaina sumažėjo 36 %.

c) Iš pradžių prekės kaina buvo sumažinta p %, o paskui padidinta 25 %. Koks procentų skaičius p, jeigu per abu keitimus prekės kaina sumažėjo 20 %?

Sprendimas. a) Pradinę prekės kainą pažymėkime x. Pagal uždavinio sąlygą gauname lygtį

$$x\left(1+\frac{20}{100}\right)\left(1+\frac{30}{100}\right) = 390.$$

Jos sprendinys yra $x = 250$. Taigi pradinė prekės kaina buvo 250 Lt.

Kadangi $\frac{390-250}{250}\cdot 100 = 56,$ tai darome išvadą, kad prekė pabrango 56 %. Aišku, kad prekės pabrangimas matosi ir iš sandaugos $\left(1+\frac{20}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{30}{100}\right) = 1{,}2\cdot 1{,}3 = 1{,}56.$

Ats.: pradinė kaina 250 Lt; prekė pabrango 56 %.

b) Pradinę kainą pažymėję *x*, gauname lygtį

$$x\left(1-\frac{p}{100}\right)^2 = x\left(1-\frac{36}{100}\right),$$

o iš jos – lygtį

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)^2 = 0{,}64.$$

Kadangi $p < 100$, tai

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)^2 = 0{,}64 \Rightarrow 1-\frac{p}{100} = 0{,}8 \Rightarrow p = 20.$$

Ats.: $p = 20$.

c) Tarkime, kad iš pradžių prekė kainavo *x* Lt. Tada (pagal uždavinio sąlygą) turi galioti tokia lygybė:

$$x\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{25}{100}\right) = x\left(1-\frac{20}{100}\right).$$

Iš jos gauname:

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot 1{,}25 = 0{,}8 \Rightarrow 1-\frac{p}{100} = 0{,}64 \Rightarrow p = 36.$$

Ats.: $p = 36$.

2 pavyzdys. Tarkime, kad banko metinė palūkanų norma yra 8 %, o pradinis indėlininko įnašas 1000 Lt. Apskaičiuokime indėlio didumą po 10 metų šiais atvejais:

a) palūkanos priskaičiuojamos kiekvienų metų gale;

b) palūkanos priskaičiuojamos kas ketvirtį;

c) palūkanos priskaičiuojamos kas mėnesį;

d) palūkanos priskaičiuojamos kasdien.

Sprendimas. a) Pagal (1) formulę

$$B_{10} = 1000(1+0{,}08)^{10} = 2158{,}92 \text{ (Lt).}$$

b) Šiuo atveju metai suskaidomi į 4 dalinius palūkanų periodus, todėl kiekvieno dalinio periodo palūkanų norma yra $i = \dfrac{8}{4 \cdot 100} = 0{,}02.$ Taikydami (2) formulę, gauname:

$$B_{10}(4) = 1000(1 + 0{,}02)^{4 \cdot 10} = 1000 \cdot 1{,}02^{40} = 2208{,}04 \text{ (Lt).}$$

c) Šiuo atveju metus sudaro 12 dalinių palūkanų periodų, o kiekvieno dalinio periodo palūkanų norma yra $i = \dfrac{8}{12 \cdot 100} = \dfrac{1}{150}.$ Taikydami (2) formulę, gauname

$$B_{10}(12) = 1000\left(1 + \frac{1}{150}\right)^{12 \cdot 10} = 1000 \cdot \left(\frac{151}{150}\right)^{120} = 2219{,}64 \text{ (Lt).}$$

d) Pagal (2) formulę

$$B_{10}(365) = 1000\left(1 + \frac{0{,}08}{365}\right)^{365 \cdot 10} = 2225{,}35 \text{ (Lt).}$$

Ats.: $B_{10} = 2158{,}92$ Lt; $B_{10}(4) = 2208{,}04$ Lt; $B_{10}(12) = 2219{,}64$ Lt; $B_{10}(365) = 2225{,}35$ Lt.

3 pavyzdys. Pilietis į banką įnešė 5000 Lt. Po metų, priskaičiavus palūkanas, jis atsiėmė iš banko 1000 Lt. Laikant banke likusius pinigus, per antruosius metus susidarė 168 Lt palūkanos. Kokia banko metinė palūkanų norma? Skaičiuokite, turėdami mintyje, kad palūkanų periodas – metai.

Sprendimas. Banko metinę palūkanų normą pažymėkime p %. Pagal uždavinio sąlygą reikia išspręsti lygtį

$$\left(5000\left(1 + \frac{p}{100}\right) - 1000\right) \cdot \frac{p}{100} = 168.$$

Gausime:

$$(4000 + 50p) \cdot \frac{p}{100} = 168 \Rightarrow 40p + \frac{p^2}{2} = 168 \Rightarrow p^2 + 80p - 336 = 0 \Rightarrow p = 4.$$

Ats.: 4 %.

2. Lydinių, tirpalų ir mišinių uždaviniai. Tarkime, kad lydinys (mišinys, tirpalas) sudarytas iš dviejų medžiagų, sakykim, *A* ir *B*.

Medžiagos A masę lydinyje pažymėkime m_A, o medžiagos B masę pažymėkime m_B. Skaičius $k_A = \dfrac{m_A}{m_A + m_B}$ vadinamas medžiagos A *koncentracija*, o skaičius $k_B = \dfrac{m_B}{m_A + m_B}$ vadinamas medžiagos B koncentracija lydinyje. Skaičius $p_A = 100 k_A$ yra medžiagos A, o skaičius $p_B = 100 k_B$ yra medžiagos B *procentinė koncentracija* lydinyje. Aišku, kad $k_A + k_B = 1$ ir $p_A + p_B = 100$.

Analogiškai apibrėžiama medžiagos koncentracija bei procentinė koncentracija ir tada, kai lydinį sudaro trys ar daugiau medžiagų.

Jei nagrinėjant lydinius, tirpalus ir mišinius kalbama apie jų užimamus tūrius, tai, apibrėžiant kiekvienos juos sudarančios medžiagos koncentraciją, medžiagos masė pakeičiama jos užimamu tūriu.

Kad būtų paprasčiau, masės m lydinį, sudarytą iš medžiagų A ir B, kurių koncentracija yra atitinkamai k_A ir k_B, žymėsime $L(k_A, k_B, m)$. Simboliu $L(p_A, p_B, m)$ žymėsime lydinį, kurio masė lygi m, o jį suda–rančių medžiagų A ir B procentinė koncentracija yra atitinkamai p_A ir p_B.

Tirpalus žymėsime simboliais $T(k_A, k_B, m)$ ir $T(p_A, p_B, m)$, o mišinius – simboliais $M(k_A, k_B, m)$ ir $M(p_A, p_B, m)$.

Analogiškais simboliais paranku žymėti ir lydinius, tirpalus bei mišinius, sudarytus iš trijų ar daugiau medžiagų.

Jei du lydiniai, tarkim, $L_1(k_{1A}, k_{1B}, m_1)$ ir $L_2(k_{2A}, k_{2B}, m_2)$ sulydomi į vieną lydinį, tai naujojo lydinio $L(k_A, k_B, m)$ mase laikysime sulydomų lydinių masių sumą $(m = m_1 + m_2)$.

Siekdami suglaudinti paaiškinimus, vartosime tokią dviejų lydinių (taip pat tirpalų ir mišinių) jungimo į vieną lydinį schemą:

$$\boxed{\begin{array}{l} \quad L_1(k_{1A}, k_{1B}, m_1) \\ + \qquad\qquad\qquad \Rightarrow \\ \quad L_2(k_{2A}, k_{2B}, m_2) \end{array}} \boxed{L(k_A, k_B, m)}.$$

Šioje schemoje galioja tokios lygybės:

$$m = m_1 + m_2, \tag{3}$$

$$k_{1A}m_1 + k_{2A}m_2 = k_A m, \tag{4}$$

$$k_{1B}m_1 + k_{2B}m_2 = k_B m. \tag{5}$$

Lydinių $L_1(p_{1A}, p_{1B}, m_1)$ ir $L_2(p_{2A}, p_{2B}, m_2)$ jungimo į vieną lydinį $L(p_A, p_B, m)$ schemoje

$$\boxed{\begin{array}{l} \quad L_1(p_{1A}, p_{1B}, m_1) \\ + \qquad\qquad\qquad \Rightarrow \\ \quad L_2(p_{2A}, p_{2B}, m_2) \end{array}} \boxed{L(p_A, p_B, m)}$$

medžiagų koncentracijas sieja tokios lygybės:

$$p_{1A}m_1 + p_{2A}m_2 = p_A m, \tag{6}$$

$$p_{1B}m_1 + p_{2B}m_2 = p_B m. \tag{7}$$

Sprendžiant įvairius tirpalų ir mišinių uždavinius, taip pat galima taikyti analogiškas jų jungimo schemas ir (3)–(7) formules.

Išspręskime kelis uždavinius.

4 pavyzdys. Viename lydinyje yra 20 % vario, o kitame – 30 % vario. Juos sulydžius, gaunamas 10 kg masės lydinys, kuriame yra 27 % vario. Raskime abiejų lydinių mases.

Sprendimas. Pirmo lydinio masę pažymėkime x. Tada (pagal (3) formulę) antro lydinio masė yra $10 - x$. Turime tokią lydinių jungimo schemą:

$$\boxed{\begin{array}{l} \quad L_1(20, 80, x) \\ + \qquad\qquad\qquad \Rightarrow \\ \quad L_2(30, 70, 10 - x) \end{array}} \boxed{L(27, 73, 10)}.$$

Joje turi galioti ir (6), ir (7) lygybės. Iš lygčių

$$20x + 30(10 - x) = 27 \cdot 10$$

ir

$$80x + 70(10 - x) = 73 \cdot 10$$

gauname tą patį rezultatą: $x = 3$. Todėl uždaviniui išspręsti pakanka imti vieną iš (6) ir (7) sąlygų. Taigi pirmo lydinio masė yra 3 kg, o antro – 7 kg.

Ats.: 3 kg ir 7 kg.

5 pavyzdys. Sidabro ir vario lydinį sulydžius su 3 kg gryno sidabro, būtų gaunamas lydinys, kuriame yra 90 % sidabro, o sulydžius pradinį lydinį su 2 kg lydinio, kuriame yra 90 % sidabro, būtų gaunamas 84 % sidabro turintis lydinys. Kokia yra pradinio lydinio masė ir kiek procentų sidabro yra jame?

Sprendimas. Tegu sidabro koncentracija pradiniame lydinyje yra x %, o lydinio masė y kg. Pagal uždavinio sąlygą galima sudaryti dvi lydinių jungimo schemas:

$$\boxed{\begin{array}{c} L_1(x, 100-x, y) \\ + \qquad\qquad\qquad \Rightarrow \\ L_2(100, 0, 3) \end{array}} \boxed{L(90, 10, y+3)}$$

ir

$$\boxed{\begin{array}{c} L_1(x, 100-x, y) \\ + \qquad\qquad\qquad \Rightarrow \\ \overline{L}_2(90, 10, 2) \end{array}} \boxed{\overline{L}(84, 16, y+2)}.$$

Pagal pirmą schemą turi galioti lygybė

$$xy + 300 = 90(y+3),$$

o pagal antrą schemą turi galioti lygybė

$$xy + 180 = 84(y+2).$$

Išsprendę dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} xy + 300 = 90(y+3), \\ xy + 180 = 84(y+2), \end{cases}$$

gauname vienintelės nežinomųjų reikšmes: $x = 80, \quad y = 3.$

Ats.: 3 kg, 80 %.

6 pavyzdys. 500 kg celiuliozės masėje yra 85 % vandens. Kiek kilogramų vandens reikia išgarinti, kad liktų 75 % vandens turinti celiuliozės masė?

Sprendimas. Pradinę celiuliozės masę pažymėkime simboliu $T_1(85, 15, 500)$, išgarinamą vandenį pažymėkime simboliu $T_2(100, 0, x)$, o siekiamą gauti celiuliozės masę, turinčią 75 % vandens, – simboliu $T\,(75, 25, 500-x)$. Tada vandens išgarinimo procesą galėsime užrašyti tokia schema:

$$\boxed{\begin{array}{lr} \quad T_1(85, 15, 500) & \\ - & \Rightarrow \\ \quad T_2(100, 0, x) & \end{array}} \boxed{T(75, 25, 500-x)}.$$

Pagal šią schemą sudarykime lygtį

$$15 \cdot 500 - 0 \cdot x = 25\,(500 - x)$$

ir gausime, kad $x = 200$ (kilogramų).

Ats.: 200kg.

7 pavyzdys. Indas, kurio talpa V litrų, pripiltas a % koncentracijos druskos rūgšties tirpalo. Iš šio indo nupylus b litrų tirpalo, į jį įpilama tiek pat vandens. Kokia bus tirpalo koncentracija, tokią pilstymo procedūrą atlikus n kartų? Po kelių pilstymų druskos rūgšties inde bus mažiau negu vandens, jeigu $V = 100\ l,\ \ b = 10\ l,\ \ a = 80$?

Sprendimas. Druskos rūgšties koncentraciją po pirmo pilstymo pažymėkime a_1, po antro pilstymo a_2 ir t. t.

Pirmą pilstymą galima užrašyti tokia schema:

$$\boxed{\begin{array}{lr} \quad T_1(a, 100-a, V-b) & \\ + & \Rightarrow \\ \quad T_2(0, 100, b) & \end{array}} \boxed{T(a_1, 100-a_1, V)}.$$

Pagal ją sudarykime lygtį

$$a \cdot (V - b) + 0 \cdot b = a_1 V$$

ir gausime, kad

$$a_1 = a \cdot \frac{V-b}{V}.$$

Analogiškai galima apskaičiuoti druskos koncentraciją tirpale po antro ir kitų pilstymų:

$$a_2 = a_1 \cdot \frac{V-b}{V},$$

$$a_3 = a_2 \cdot \frac{V-b}{V},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n = a_{n-1} \cdot \frac{V-b}{V}.$$

Iš čia

$$a_n = a \cdot \left(\frac{V-b}{V}\right)^n.$$

Kai $V=100,$ $a=80,$ $b=10,$ gausime formulę

$$a_n = 80 \cdot (0{,}9)^n.$$

Ieškomam pilstymų skaičiui n rasti reikia išspręsti nelygybę $80 \cdot (0{,}9)^n < 50.$ Mažiausias sprendinys yra $n=5.$

Ats.: $a \cdot \left(\frac{V-b}{V}\right)^n$; 5.

3. Procentai ir procentiniai punktai.

8 pavyzdys. Iš pradžių gamybos brokas sudarė 5 % gaminamos produkcijos, o paskui, patobulinus technologinį procesą, sumažėjo keturiais procentiniais punktais. Turėdami mintyje, kad gaminamos produkcijos apimtis yra pastovi, apskaičiuokime, keliais procentais sumažėjo gamybos brokas.

Sprendimas. Gamybos produkcijos apimtį pažymėkime a. Vadinasi, brokas iš pradžių sudarė $a \cdot \frac{5}{100} = 0{,}05a$ kiekio vienetų, o paskui (sumažėjus jam keturiais procentiniais punktais) $a \cdot \frac{1}{100} = 0{,}01a$ vienetų. Todėl gamybos brokas sumažėjo $\frac{0{,}05a - 0{,}01a}{0{,}05a} \cdot 100 = 80$ procentų.

Ats.: 80 %.

9 pavyzdys. Į tirpalą, kuriame yra 40 g druskos, įpylė 200 g vandens. Kiek vandens tirpale buvo iš pradžių ir koks buvo procentinis druskos kiekis, jeigu: 1) dabar procentinis druskos kiekis yra mažesnis 10 procentinių punktų; 2) dabar procentinis druskos kiekis yra mažesnis 10 %?

Sprendimas. Ieškomą vandens kiekį (gramais) pažymėkime x, pra– dinę druskos koncentraciją pažymėkime d_1, o dabartinę druskos kon– centraciją d_2. Pagal uždavinio sąlygą pradinė tirpalo masė buvo $x+40$, procentinis druskos kiekis $d_1 = \dfrac{40}{x+40}\cdot 100 = \dfrac{4000}{x+40}$, o vandens procentinis kiekis $\dfrac{x}{x+40}\cdot 100 = \dfrac{100x}{x+40}$. Taigi pradinį tirpalą galima užrašyti simbolius $T_1\left(\dfrac{4000}{x+40}, \cdot \dfrac{100x}{x+40}, x+40\right)$.

Įpiltą vandenį galima užrašyti simboliu $T_2(0, 100, 200)$, o gautąjį tirpalą – simboliu $T_2(d_2, 100-d_2, x+240)$.

Pagal schemą

$$\boxed{\begin{array}{l} T_1\left(\dfrac{4000}{x+40}, \dfrac{100x}{x+40}, x+40\right) \\ + \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \\ T_2(0, 100, 200) \end{array}} \ \boxed{T(d_2, 100-d_2, x+240)}$$

sudarykime lygtį

$$\frac{4000}{x+40}\cdot(x+40) + 0\cdot 200 = d_2(x+240)$$

ir apskaičiuokime pradinį vandens kiekį x. Gausime

$$x = \frac{4000}{d_2} - 240. \qquad (8)$$

Pirmu atveju

$$d_2 = \frac{4000}{x+40} - 10 = \frac{3600-10x}{x+40},$$

$$\frac{4000}{d_2} = \frac{4000}{\dfrac{3600-10x}{x+40}} = \frac{400(x+40)}{360-x},$$

todėl

$$x = \frac{400(x+40)}{360-x} - 240.$$

Spręsdami šią lygtį, gauname:

$$x(360-x)=400(x+40)-240(360-x),$$
$$360x-x^2=640x-70400,$$
$$x^2+280x-70400=0.$$

Jos sprendiniai yra 160 ir –440.

Taigi šiuo atveju pradinis vandens kiekis tirpale buvo 160 gramų, o druskos procentinė koncentracija $d_1=\dfrac{4000}{160+40}=20$ procentų.

Antru atveju $d_2=d_1-0{,}1d_1=0{,}9d_1=\dfrac{0{,}9\cdot 4000}{x+40}=\dfrac{3600}{x+40}$,

todėl (pagal (8)) gauname, kad

$$x=\frac{4000(x+40)}{3600}-240=\frac{10(x+40)}{9}-240=\frac{10x-1760}{9}.$$

Iš čia $9x=10x-1760$ ir $x=1760$.

Tada

$$d_1=\frac{4000}{1760+40}=\frac{20}{9}-240=2\frac{2}{9}.$$

Vadinasi, antru atveju pradinis vandens kiekis tirpale buvo 1760 g, o druskos kiekis tirpale sudarė $2\frac{2}{9}$ %.

Ats.: 1) 160 g, 20 %; 2) 1760 g, $2\frac{2}{9}$ %.

4. Įvairūs procentų uždaviniai.

10 pavyzdys. Per mero rinkimus už Antanaitį, Jonaitį ir Petraitį rengiasi balsuoti atitinkamai 15 %, 20 % ir 25 % rinkėjų. Kiti rinkėjai dar neapsisprendę. Apskaičiuokime, kiek procentų neapsisprendusių rinkėjų turėtų suagituoti Antanaitis, kad jis laimėtų rinkimus.

Sprendimas. Pagal sąlygą neapsisprendusių rinkėjų yra 40 %. Tegu a yra rinkėjų skaičius, o x yra ieškomas neapsisprendusių rinkėjų procentų skaičius. Tada apsisprendusių balsuoti už Antanaitį rinkėjų skaičius būtų $0{,}15a+0{,}4a\cdot\dfrac{x}{100}$. Jeigu visi likusieji (iš neapsisprendusių) apsispręstų balsuoti už Petraitį, tai šis kandidatas gautų

$0{,}25\,a+\left(0{,}4a-0{,}4a\cdot\frac{x}{100}\right)$ balsų. Išsprendę nelygybę

$$0{,}15\,a+0{,}4a\cdot\frac{x}{100}>0{,}25a+\left(0{,}4a-0{,}4a\cdot\frac{x}{100}\right),\text{ gausime } x>62{,}5.$$

Taigi Antanaitis, siekdamas laimėti mero rinkimus, turėtų suagituoti daugiau kaip 62,5 % neapsisprendusių (už ką balsuoti) rinkėjų.

Ats.: daugiau kaip 62,5 %.

11 pavyzdys. Rudens kroso varžybose dalyvavo pagrindinės mokyklos moksleivių būrys. Kroso distancijos nebaigė daugiau kaip 2,8 %, bet mažiau kaip 3,2 % dalyvių. Raskite mažiausią kroso dalyvių skaičių.

Sprendimas. Kroso dalyvių skaičių pažymėkime *n*, o distancijos nebaigusių skaičių pažymėkime *m*. Pagal uždavinio sąlygą

$$2{,}8<\frac{m}{n}\cdot 100<3{,}2.$$

Iš čia

$$2{,}8n<100m<3{,}2n.$$

Kai $m=1,$ tai $\frac{100}{3{,}2}<n<\frac{100}{2{,}8},$ t. y. $31{,}25<n<35\frac{5}{7}.$

Taigi mažiausias kroso dalyvių skaičius yra 32.

Ats.: 32.

12 pavyzdys. Iš stačiakampio formos kartono lapo, kurio kraštinių ilgių santykis 2:3, iškirptas didžiausio ploto stačiakampis, kurio kraštinių ilgių santykis 1:2. Apskaičiuokite kartono likučio procentą.

Sprendimas. Tarkime, kad kartono lapo kraštinių ilgiai 2*a* ir 3*a*. Didžiausio ploto stačiakampio, kurio kraštinių ilgių santykis 1:2, kraštinių ilgiai yra 1,5*a* ir 3*a*; jo plotas lygus $4{,}5a^2$. Kartono likučio plotas yra $6a^2-4{,}5a^2=1{,}5a^2$. Jis sudaro $\frac{1{,}5a^2}{6a^2}\cdot 100=25$ procentus viso kartono ploto.

Ats.: 25 %.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Skaičius *A* yra 150 % didesnis už skaičių *B*, kuris lygus 80 % skaičiaus *C*. Keliais procentais skaičius *C* yra mažesnis už skaičių *A*?

2. Vienos valstybės mieste *A* būsto kaina nacionaline valiuta nukrito 20 %, o eurais – 40 %. Šios valstybės mieste *B* būsto kaina nukrito 10 %. Keliais procentais būsto kaina mieste *B* nukrito eurais?

3. Mieste *N* per pastaruosius metus gyventojų skaičius sumažėjo 4 %, o bedarbių skaičius padidėjo 5 %. Kiek procentų miesto gyventojų yra bedarbiai, jeigu prieš metus jų buvo 8 %?

4. Tarp turistinės kelionės po Europą dalyvių yra 26, kurie moka anglų kalbą, ir 31 dalyvis, kuris moka vokiečių kalbą. Be to, 14 procentų kelionės dalyvių moka abi kalbas. Kiek iš viso yra šios turistinės kelionės dalyvių, jeigu kiekvienas dalyvis moka bent vieną iš minėtų kalbų?

5. Obuoliuose yra 80 % vandens. Džiovinant obuolius vandens masė sumažėjo 60 procentinių punktų. Apskaičiuokite, kiek procentų vandens išgaravo džiovinant obuolius ir keliais procentais sumažėjo obuolių masė.

6. Pardavus prekes trijose parduotuvėse bendras pelnas sudarė 26,8 %. Pirmoje parduotuvėje buvo parduota 60 % visų prekių, antroje parduotuvėje – 40 % likusių prekių, o visos kitos prekės buvo parduotos trečioje parduotuvėje. Kiek procentų pelno gavo trečia parduotuvė, jeigu pirmos parduotuvės pelnas buvo 30 %, o antros – 25 %?

Nurodymas. Skaičiuodami turėkite mintyje, kad prekių visose trijose parduotuvėse buvo ta pati.

7. Akcinė bendrovė pardavė 1000 akcijų, taikydama 10 % nuolaidą kiekvienai penktajai akcijai ir 25 % nuolaidą kiekvienai tryliktajai akcijai. Abiems nuolaidoms sutapus, buvo taikoma didesnioji nuolaida. Kokią pinigų sumą gavo akcinė bendrovė, jeigu vienos akcijos kaina buvo 1000 eurų?

8. Yra du lydiniai, sudaryti iš cinko, vario ir alavo. Yra žinoma, kad pirmame lydinyje yra 40 % alavo, o antrame – 26 % vario. Procentinis cinko kiekis abiejuose lydiniuose yra vienodas. Sulydžius 150 kg pirmo lydinio ir 250 kg antro lydinio, buvo gautas lydinys, kuriame yra 30 % cinko. Apskaičiuokite, kiek kilogramų alavo yra gautajame lydinyje.

9. Yra du aukso ir sidabro lydiniai. Pirmame lydinyje procentinis aukso kiekis yra 2,5 karto didesnis už procentinį aukso kiekį kitame lydinyje. Kelis kartus pirmo lydinio masė turėtų būti didesnė už antro lydinio masę, kad juos sulydžius būtų gautas lydinys, turintis 60 % sidabro, jeigu žinoma, kad sulydžius vienodas abiejų lydinių mases gaunamas lydinys, kuriame yra 35 % aukso?

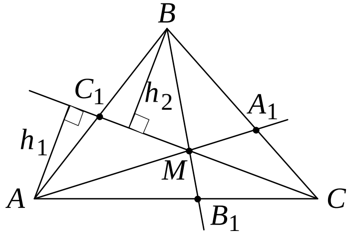
10. Pirmame lydinyje yra 30 % nikelio ir 70 % vario, antrame – 10 % vario ir 90 % marganco, o trečiame lydinyje yra 15 % nikelio, 25 % vario ir 60 % marganco. Iš šių trijų lydinių reikia pagaminti lydinį, turintį 40 % marganco. Nustatykite, koks gali būti mažiausias ir koks gali būti didžiausias vario procentinis kiekis tokiame lydinyje.

II. ČEVOS IR MENELAJAUS TEOREMOS

Edmundas Mazėtis

1. Matematikos pamokose sužinojote, kad trikampio pusiau–kraštinės susikerta viename taške, kad trikampio pusiaukampinės bei aukštinės pasižymi analogiška savybe. Šie teiginiai yra vienos bendros teoremos atskiri atvejai. Ši teorema vadinama Čevos teorema (Giovanni Ceva (1648–1734) – italų matematikas).

Teorema (Čevos teorema). Tiesėse, kuriose yra trikampio *ABC* kraštinės *BC*, *AC* ir *AB*, atitinkamai pažymėti su trikampio viršūnėmis nesutampantys taškai A_1, B_1, C_1 . Tiesės AA_1, BB_1, CC_1 susikerta viename taške tada ir tik tada, kai $\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$.



1 pav.

Įrodymas. Iš pradžių tarkime, kad taškai C_1, B_1 ir A_1 yra trikampio *ABC* kraštinėse. Sakykime, kad atkarpos AA_1, BB_1, CC_1 kertasi taške *M*. Pažymėkime trikampių *AMC*, *CMB*, *AMB* plotus atitinkamai S_1, S_2, S_3, o atstumus nuo taškų *A* ir *B* iki tiesės *CM* – atitinkamai h_1 ir h_2 (1 pav.).

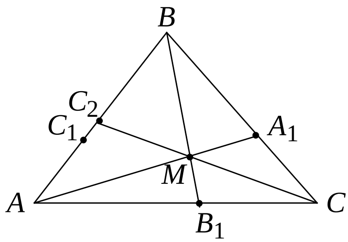
Trikampių *AMC* ir *CMB* kraštinė *CM* bendra, todėl jų plotų santykis lygus aukštinių h_1 ir h_2, nubrėžtų į tą kraštinę ilgių santykiui. Todėl $\frac{S_1}{S_2}=\frac{h_1}{h_2}$. Iš panašiųjų trikampių išplaukia, kad $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{h_1}{h_2}$. Taigi $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{S_1}{S_2}$. Analogiškai gauname, jog $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_2}{S_3}$, $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{S_2}{S_1}$. Taigi $\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$.

Nesunkiai gauname (įsitikinkite tuo savarankiškai), kad gautoji lygybė yra teisinga ir kai kurie nors du iš taškų C_1, B_1 ir A_1 yra trikampio *ABC* kraštinių tęsiniuose.

Įrodysime atvirkščią teiginį. Tarkime, kad lygybė

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$$

yra teisinga, ir įrodykime, kad tiesės AA_1, BB_1, CC_1 susikerta viename taške. Sakykime, kad yra priešingai, t. y., tiesės AA_1 ir BB_1 kertasi taške M, o tiesė CM kerta trikampio kraštinę AB taške C_2, kuris nesutampa su tašku C_1 (2 pav.). Kadangi tiesės AA_1, BB_1 ir CC_2 kertasi viename taške, tai teisinga lygybė $\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_2}{C_2B}=1$. Iš lygybių



2 pav.

$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$ ir $\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_2}{C_2B}=1$ išplaukia, kad $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC_2}{C_2B}$. Iš šios lygybės seka, kad taškai C_1 ir C_2 sutampa. Taigi tiesė CC_1 eina per tašką M. Teorema įrodyta.

Norint teisingai surašyti taškus lygybėje $\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$, reikia judėti trikampio kontūru nuo pasirinktos viršūnės (mūsų atveju viršūnės B) prie kraštinėje esančio taško (A_1), po to prie kitos viršūnės (C) ir toliau analogiškai.

1 pavyzdys. Trikampio pusiaukraštinės kertasi viename taške.

Tikrai, jei atkarpos AA_1, BB_1, CC_1 yra trikampio ABC pusiaukraštinės, tai $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{C_1B}=1$, taigi iš Čevos teoremos išplaukia, kad tiesės AA_1, BB_1, CC_1 kertasi viename taške. Trikampio pusiaukraštinių sankirtos taškas vadinamas *trikampio sunkio centru arba trikampio centroidu*.

2 pavyzdys. Trikampio pusiaukampinės susikerta viename taške (į trikampį įbrėžto apskritimo centre).

Įrodymas. Jei atkarpos AA_1, BB_1, CC_1 yra trikampio ABC pusiaukampinės, tai pagal pusiaukampinių savybę $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{AB}{AC}$, $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{BC}{BA}$, $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{CA}{CB}$, iš čia seka, kad $\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$.

3 pavyzdys. Trikampio aukštinės susikerta viename taške.

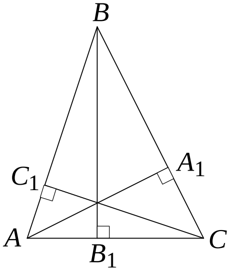
Įrodymas. Sakykime, kad atkarta AA_1 yra trikampio ABC aukštinė

(3 pav.). Iš stačiųjų trikampių ABA_1 ir ACA_1 gauname, kad

$$BA_1=AA_1\text{ctg}\angle B,\quad A_1C=AA_1\text{ctg}\angle C.$$

Tuomet $\dfrac{BA_1}{A_1C}=\dfrac{\text{ctg}\angle B}{\text{ctg}\angle C}$. Analogiškai

$$\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{\text{ctg}\angle C}{\text{ctg}\angle A},\quad \frac{AC_1}{C_1B}=\frac{\text{ctg}\angle A}{\text{ctg}\angle B}.$$

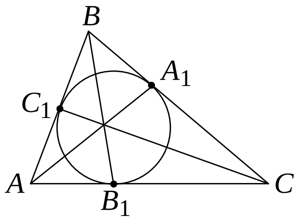


3 pav.

Taigi $\dfrac{BA_1}{A_1C}\cdot\dfrac{CB_1}{B_1A}\cdot\dfrac{AC_1}{C_1B}=1$, todėl pagal Čevos teoremą trikampio aukštinės susikerta viename taške H, kuris vadinamas *trikampio ortocentru*.

4 pavyzdys. Sakykime, kad į trikampį ABC įbrėžtas apskritimas trikampio kraštines BC, AC ir AB liečia taškuose A_1, B_1, C_1.Tuomet tiesės AA_1, BB_1, CC_1 susikerta viename taške, kuris vadinamas *Žergono tašku* (Joseph Diaz Gergonne, 1771–1859, prancūzų matematikas).

Įrodymas. Pažymėkime trikampio ABC kraštini BC, AC ir AB ilgius a, b, c. Tuomet $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$ yra jo pusperimetris. Pagal apskritimo liestinių, nubrėžtų iš vieno taško, savybę $AB_1=AC_1=x,\quad BC_1=BA_1=y,$ $CB_1=CA_1=z$ (4 pav.).



4 pav.

Tuomet $2(x+y+z)=2p,\quad x+y=c,$ $y+z=a,\quad x+z=b.$ Iš čia $x=p-a,\quad y=p-b,\quad z=p-c$ ir

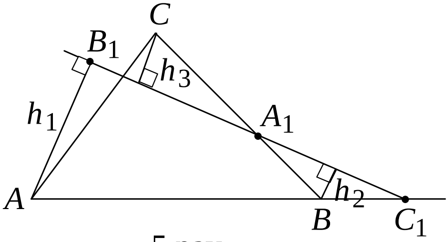
$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{p-b}{p-c},\ \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{p-c}{p-a},\ \frac{AC_1}{C_1B}=\frac{p-a}{p-b}.$$ Kadangi $\dfrac{BA_1}{A_1C}\cdot\dfrac{CB_1}{B_1A}\cdot\dfrac{AC_1}{C_1B}=1$, tai pagal Čevos teoremą tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta viename taške.

Teorema (Menelajaus teorema, Menelajus Aleksandrietis – I-ojo amžiaus graikų mokslininkas). Sakykime, kad trikampio ABC kraštinėse BC ir AC pažymėti taškai A_1 ir B_1, o kraštinės AB tęsinyje – taškas C_1. Taškai A_1, B_1 ir C_1 yra vienoje tiesėje tada ir tik tada, kai

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1\ \text{(5 pav.)}.$$

Įrodymas. Sakykime, kad taškai A_1, B_1 C_1 yra vienoje tiesėje.

Nubrėžkime iš trikampio ABC viršūnių statmenis h_1, h_2 ir h_3 į šią tiesę. Iš trikampių panašumo išplau–kia, kad $\dfrac{BA_1}{A_1C}=\dfrac{h_2}{h_3}$, $\dfrac{CB_1}{B_1A}=\dfrac{h_3}{h_1}$, $\dfrac{AC_1}{C_1B}=\dfrac{h_1}{h_2}$.



5 pav.

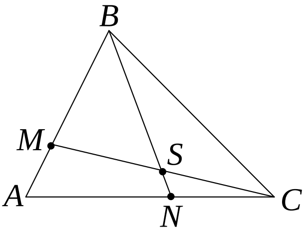
Tuomet $\dfrac{BA_1}{A_1C}\cdot\dfrac{CB_1}{B_1A}\cdot\dfrac{AC_1}{C_1B}=1$.

Atvirkščio teiginio įrodymas yra toks pat, kaip Čevos teoremos atveju (įsitikinkite tuo savarankiškai).

Norėdami teisingai surašyti santykius Menelajaus teoremos sąlygoje nurodytoje lygybėje $\dfrac{BA_1}{A_1C}\cdot\dfrac{CB_1}{B_1A}\cdot\dfrac{AC_1}{C_1B}=1$, naudojamės ta pačia taisykle, kaip ir Čevos teoremos atveju.

Menelajaus teoremos įrodymas nesikeičia, kai visi trys taškai A_1, B_1 C_1 yra trikampio kraštinių tęsiniuose. Įsitikinkite tuo savarankiškai.

5 pavyzdys. Trikampio ABC krašti–nėse AB ir AC duoti atitinkamai taškai M ir N tokie, kad $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{CN}{NA}=\dfrac{1}{2}$. Rasime kokiu santykiu atkarpų BN ir CM sankirtos taškas S dalija šias atkarpas (6 pav.).



6 pav.

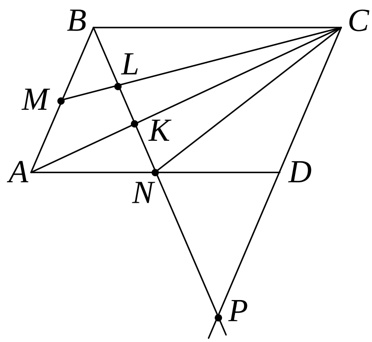
*Sprendimas***.** Nagrinėkime trikampį ABN, ir tris taškus M, S, C, esančius tiesėje MS. Pagal Menelajaus teoremą: $\dfrac{BS}{SN}\cdot\dfrac{NC}{CA}\cdot\dfrac{AM}{MB}=1$, iš čia seka, kad $\dfrac{BS}{SN}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=1$, t. y., $\dfrac{BS}{SN}=\dfrac{6}{1}$. Analogiškai trikampiui ACM ir

trims tiesės SN taškams B, S ir N gauname lygybę $\frac{MS}{SC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AB}{BM}=1$.
Iš čia
seka, kad $\frac{MS}{SC}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=1$, t. y., $\frac{MS}{SC}=\frac{4}{3}$.

Ats.: $\frac{BS}{SN}=\frac{6}{1}$, $\frac{MS}{SC}=\frac{4}{3}$.

6 pavyzdys. Lygiagretainio $ABCD$ plotas lygus 1, taškai M ir N yra kraštinių AB ir AD vidurio taškai, tiesė BN įstrižainę AC kerta taške K, o tiesę CM – taške L. Rasime keturkampio $AKLM$ plotą.

Sprendimas. Keturkampio $AKLM$ plotą rasime iš trikampio ABK ploto atėmę trikampio MBL plotą. Akivaizdu, kad trikampių ABC ir ABK plotų santykis lygus atkarpų AC ir AK ilgių santykiui. Saky– kime, kad tiesės BN ir CD kertasi taške P (7 pav.). Trikampiai ABN ir DPN yra lygūs, nes lygios jų kraštinės $AN=DN$, kampai $\angle ANB=\angle DNP$ yra kryžminiai, o kampai $\angle NAB=\angle NDP$, nes tiesės AB ir DP yra lygiagrečios. Iš trikampių lygybės seka, kad $AB=DP=CD$. Trikampiui ACD ir tiesės taškams K, N, P taikome Menelajaus teoremą: $\frac{AK}{KC}\cdot\frac{CP}{PD}\cdot\frac{DN}{NA}=1$. Kadangi $\frac{CP}{PD}=2$, o $\frac{DN}{NA}=1$, tai iš čia gauname, kad $\frac{AK}{KC}=\frac{1}{2}$. Taigi $AK=\frac{1}{3}AC$, todėl trikampio ABK plotas lygus trečdaliui trikampio ABC ploto, t. y., trikampio ABK plotas lygus $\frac{1}{6}$. Trikampiui AMC ir trims tiesės taškams B, L, K pritaikę Menelajaus teoremą gauname, kad

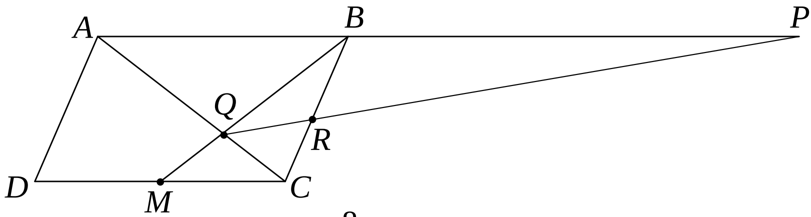


7 pav.

$\frac{AB}{BM} \cdot \frac{ML}{LC} \cdot \frac{CK}{KA} = 1$. Kadangi $\frac{AB}{BM} = 2, \frac{CK}{KA} = 2$, tai $\frac{ML}{LC} = \frac{1}{4}$, t. y., trikampio BML plotas lygus penktadaliui trikampio BMC ploto. Kadangi trikampio BMC plotas lygus $\frac{1}{4}$, tai trikampio BML plotas lygus $\frac{1}{20}$. Todėl ieškomasis plotas lygus $\frac{1}{6} - \frac{1}{20} = \frac{7}{60}$.

Ats.: $\frac{7}{60}$.

7 pavyzdys. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinės AB tęsinyje yra taškas P toks, kad $BP = 2AB$. Taškas M yra kraštinės DC vidurio taškas. Tiesė BM kerta įstrižainę AC taške Q, o atkarpa PQ kerta kraštinę BC taške R. Rasime santykį $\frac{CR}{RB}$. (8 pav.)



8 pav.

Sprendimas. Trikampiui ABC ir jo kraštinėse esantiems vienos tiesės taškams P, Q, R taikome Menelajaus teoremą: $\frac{CR}{RB} \cdot \frac{BP}{PA} \cdot \frac{AQ}{QC} = 1$. Kadangi $\angle BAC = \angle MCA$, o $\angle MQC = \angle AQB$, tai trikampiai MQC ir BQA yra panašieji. Iš jų panašumo seka, kad $\frac{AQ}{QC} = \frac{AB}{MC}$. Kadangi $\frac{AB}{MC} = 2$, tai $\frac{AQ}{QC} = 2$. Kadangi $BP = 2AB$, tai $\frac{BP}{AP} = \frac{2}{3}$. Iš gautųjų lygybių seka, kad $\frac{CR}{RB} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} = 1$, taigi $\frac{CR}{RB} = \frac{3}{4}$.

Ats.: $\frac{3}{4}$.

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėje BC yra taškas E tiks, kad $BE:EC=3:2$. Tiesė DE kerta įstrižainę AC taške F. Kokiu santykiu tiesė BF dalija kraštinę CD ?

2. Trikampio ABC kraštinėse AB ir BC yra taškai K ir L tokie, kad $AK:KB=2:3,$ $BL:LC=1:4.$ Atkarpos AL ir CK kertasi taške P, o tiesė BP kerta krašinę AC taške $Q.$ Raskite santykį $BP:PQ.$

3. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $BC=a,$ $AC=b,$ $AB=c.$ Pusiaukraštinė AM kerta pusiaukampinę BD taške P. Raskite į kokio ilgio atkarpas tiesė CP dalija kraštinę AB .

4. Trikampio ABC kraštinėse AB ir BC yra taškai P ir Q tokie, kad $AP:PB=3:4,$ $BQ:QC=5:2.$ Kokiu santykiu atkarpa AQ dalija atkarpą PC ?

5. Taškai E ir F yra lygiagretainio $ABCD$ kraštinių AB ir AD vidurio taškai, tiesės CE ir BF susikerta taške K. Raskite keturkampio $AFKE$ plotą, jei lygiagretainio $ABCD$ plotas lygus 24.

6. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $BC=a,$ $AC=b,$ $AB=c.$ Raskite, kokiu santykiu pusiaukampinių susikirtimo taškas P dalija pusiaukampinę AM .

7. Atkarpa AD yra trikampio ABC pusiaukraštinė, taškas E dalija atkarpą AC santykiu $AE:EC=2:1,$ atkarpos AD ir BE susikerta taške F. Kokiu santykiu tiesė CF dalija atkarpą DE ?

8. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinės BC tęsinyje už taško C yra taškas E toks, kad $CE=\frac{2}{3}BC.$ Taškas F yra kraštinėje AD ir

$AF : FD = 1 : 2$. Tiesė CF įstrižainę BD kerta taške K, o tiesė EK kraštinę CD kerta taške L. Kokiais santykiais taškas L dalija atkarpas CD ir EK?

9. Stačiojo trikampio ABC įžambinė $AB = 10$, statinis $AC = 8$. Statiniuose BC ir AC yra taškai P ir Q tokie, kad $CP = CQ = 2$. Atkarpos AP ir BQ susikerta taške R, tiesės CR ir PQ kerta tiesę AB taškuose S ir T. Apskaičiuokite atkarpos TS ilgį.

10. Atkarpa CF yra trikampio ABC pusiaukraštinė, taškas E yra kraštinėje AC ir $AE : EC = 4 : 1$. Per tašką A nubrėžta tiesė kraštinę BC kerta taške D, o tiesę EF kerta taške G taip, kad $AG : GD = 3 : 2$. Raskite santykį $BD : DC$.

III. FARĖJAUS SEKOS

Eugenijus Stankus

1. Farėjaus trupmenos. Pasirinktam natūraliajam skaičiui *n* sudarykime visas nesuprastinamas trupmenas, kurios priklauso intervalui $(0;1)$, su vardikliais, neviršijančiais skaičiaus *n*. Papildę šią trupmenų aibę trupmenomis $\frac{0}{1}$ ir $\frac{1}{1}$, išdėstykime visas trupmenas didėjimo tvarka. Ši aibė vadinama *Farėjaus n-tosios eilės seka* (žymėsime ją F_n).

Pavyzdžiui, kai $n=3$, visos tokios trupmenos yra $\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$. Taigi $F_3=\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{1}\right\}$. Analogiškai randame $F_2=\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{1}\right\}$, $F_1=\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{1}\right\}$, o taip pat aukštesnių eilių Farėjaus sekas:

$$F_4=\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{1}{1}\right\},$$

$$F_5=\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{5,},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{1}{1}\right\},$$

$$F_6=\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{6,},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{1}{1}\right\}.$$

Jau iš šių pavyzdžių matome, kad didinant Farėjaus sekos numerį didėja ir jos narių skaičius. Be to, kiekviena tolesnė seka pasipildo naujomis trupmenomis – naudojant aibių teorijos žymenis turime: $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset F_4 \subset F_5 \subset F_6$. Iš apibrėžimo išplaukia, kad ši savybė galioja su bet kuriuo $n>1$, t. y. visuomet $F_{n-1} \subset F_n$. Šioje temoje išmoksime apskaičiuoti kiek narių turi seka F_n, konstruosime Farėjaus trupmenas, panagrinėsime kitas įdomias Farėjaus sekų savybes.

Farėjus (John Farey, Sr., 1766–1826) buvo anglų geologas ir rašytojas. Tačiau jis labiau žinomas kaip matematikas, kuris tyrė aukščiau apibrėžtas sekas. Jo darbai buvo paskelbti žurnale Philosophical Magazine 1816 m. Įdomu, kad tokias sekas žymiai anksčiau nagrinėjo prancūzų matematikai Šiukė (N. Chuquet, 1455?–1500?) ir Harosas (Charles Haros, 1700–1800). Harosas savo darbuose, atspausdintuose 1802 m., įrodė kai kurias tokių trupmenų savybes, be to, naudodamasis Šiukė algoritmu sukonstravo 3003 nesuprastinamas trupmenas, kurių vardikliai neviršija 99, t. y. jis faktiškai surado visą Farėjaus seką

$$F_{99} = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{99}, \frac{1}{98}, \frac{2}{97}, \ldots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{96}{97}, \frac{97}{98}, \frac{98}{99}, \frac{1}{1} \right\}.$$

Vadinasi, įvyko istorinė klaida – tokios trupmenų sekos pelnytai turėjo vadintis Šiukė arba Haroso sekomis, o ne Farėjaus. Tačiau šioms sekoms prigijo Farėjaus pavardė. Į tai atkreipė dėmesį žymus prancūzų mate–matikas Koši (Augustin-Louis Cauchy, 1789–1857).

Farėjaus sekų tema priskiriama skaičių teorijai. Todėl nagrinėjant tokių sekų savybes būtinos kai kurios skaičių teorijos žinios apie natū–raliuosius ir sveikuosius skaičius. Nuo to ir pradėsime.

2. Sveikųjų skaičių dalumas. Tarkime, a ir b – sveikieji skaičiai, $b \neq 0$ ir yra toks sveikasis skaičius q, su kuriuo teisinga lygybė $a = bq$. Tuomet sakoma, kad *a dalijasi iš b* arba *b dalija a* ir žymima $b \setminus a$. Skaičiai b ir q vadinami skaičiaus a *dalikliais*, o skaičius a yra skaičiaus *b kartotinis*.

Pirminiai skaičiai – tokie natūralieji skaičiai, kurie dalijasi tik iš savęs ir iš vieneto (jie paprastai žymimi raide p). Skaičius 1 nelaikomas pirminiu. Visi ne pirminiai skaičiai vadinami *sudėtiniais* natūraliaisiais skaičiais.

3. Pagrindinė aritmetikos teorema. *Bet kuris natūralusis skaičius n, $n > 1$, vieninteliu būdu išreiškiamas pirminių skaičių sandauga (jei nekreipiama dėmesio į dauginamųjų tvarką).*

Jei skaičiaus n *pirminius daliklius* (pirminius skaičius, kurie dalija n) pažymėsime p_1, p_2, …, p_m, tai skaičių n galime užrašyti formule

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}; \tag{1}$$

čia $k_1, k_2, \ldots, k_m$ yra patys didžiausi laipsnio rodikliai, su kuriais skai–čius n dalijasi iš šių laipsnių. Ši formulė vadinama skaičiaus *n kanoniniu skaidiniu*. Pavyzdžiui, $24 = 2^3 \cdot 3$, $6615 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$.

4. Didžiausias bendrasis daliklis. Dviejų natūraliųjų skaičių a ir b *didžiausiu bendruoju dalikliu* (žymima $DBD(a,b)$ arba tiesiog (a,b)) vadinamas pats didžiausias natūralusis skaičius, kuris dalija abu skaičius

– ir *a*, ir *b*. Pavyzdžiui, kai $a = 5292 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^2$, $b = 26754 = 2 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 13$, tai $(a,b) = 2 \cdot 3 \cdot 7^2 = 294$.

Kai $(a,b) = 1$, tai *a* ir *b* vadinami *tarpusavyje pirminiais* skaičiais. Pavyzdžiui, skaičiai 50 ir 21 yra tarpusavyje pirminiai, nes (50, 21)=1.

5. Dalybos su liekana teorema. *Tarkime, a ir b – sveikieji skaičiai,* $b \neq 0$. *Tuomet yra tokie vieninteliai skaičiai q ir r,* $0 \le r < |b|$, *su kuriais galioja lygybė* $a = bq + r$. Skaičius *q* vadinamas *dalmeniu*, o *r* – *liekana*. Kai $r = 0$, tuomet $a = bq$, t. y. skaičius *a* dalijasi iš *b*.

6. Oilerio funkcija (Leonhard Euler, šveicarų matematikas ir fizikas, ilgą laiką dirbęs Sankt Peterburge, 1707–1783). Skaičius natūraliųjų *m*, ne didesnių už *n* ir tarpusavyje pirminių su *n*, žymimas $\varphi(n)$ ir vadinamas Oilerio funkcija.

Pavyzdžiui, nesunku tiesiogiai suskaičiuoti, kad $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$, $\varphi(8) = 4$. Tačiau tokiu būdu apskaičiuoti Oilerio funkcijos $\varphi(n)$ reikšmes su didelėmis kintamojo *n* reikšmėmis būtų labai sudėtinga. Vis dėlto tai įmanoma žinant Oilerio funkcijos savybes.

Ši funkcija – aritmetinė (aritmetinėmis funkcijomis vadinamos funkcijos, kurių apibrėžimo sritis yra natūraliųjų skaičių aibė). Skaičių teorijoje naudojamos įvairios aritmetinės funkcijos, tačiau Oilerio funkcija – viena iš svarbiausių, be kurios neapsiesime ir šioje temoje.

Išvardinsime kelias Oilerio funkcijos savybes.

1. Jei $(m,n) = 1$, tai $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

2. Kai *p* – pirminis skaičius, tai $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k(1 - \frac{1}{p})$,

atskiru atveju $\varphi(p) = p - 1$.

Iš šių savybių išplaukia: jei $p_1, p_2, \ldots, p_m$ yra pirminiai skaičiai, dalijantys *n*, ir $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$, tai

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}) = \varphi(p_1^{k_1}) \cdot \varphi(p_2^{k_2}) \ldots \cdot \varphi(p_m^{k_m}) =$$

$$= p^{k_1}(1 - \frac{1}{p_1}) \cdot p^{k_2}(1 - \frac{1}{p_2}) \cdot \ldots \cdot p^{k_m}(1 - \frac{1}{p_m}) = n \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot (1 - \frac{1}{p_2}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{p_m}).$$

Pavyzdžiui, $\varphi(36)=\varphi(2^2\cdot 3^2)=36\cdot(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{3})=36\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=12$. Taigi skaičių, neviršijančių 36 ir tarpusavyje pirminių su 36, yra 12. Štai šie skaičiai: 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31 ir 35.

7. Farėjaus sekos ilgis. Farėjaus *sekos* F_n *ilgiu* vadinamas jos trup– menų skaičius. Pažymėkime jį $|F_n|$.

Apskaičiuosime Farėjaus sekos F_n ilgį.

Kaip pastebėjome pirmame skyrelyje, kiekvienai Farėjaus sekai priklauso visų sekų su mažesniais numeriais trupmenos, o kiekvienos sekos su numeriu $n>1$ vidurinysis narys yra $\frac{1}{2}$. Atkreipkime dėmesį, kad seka F_n gaunama iš sekos F_{n-1} papildžius ją nesuprastinomis trupmenomis su vardikliais *n* ir skaitikliais *m*, tarpusavyje pirminiais su *n*. Tokių trupmenų yra $\varphi(n)$ (žr. Oilerio funkcijos apibrėžimą). Pavyzdžiui, $|F_4|=|F_3|+\varphi(4)$, $|F_5|=|F_4|+\varphi(5)$, $|F_6|=|F_5|+\varphi(6)$. Taigi $|F_n|=|F_{n-1}|+\varphi(n)$. Taikydami šią formulę, gausime, kad $|F_{n-1}|=|F_{n-2}|+\varphi(n-1)$. Tuomet

$$|F_n|=|F_{n-1}|+\varphi(n)=|F_{n-2}|+\varphi(n-1)+\varphi(n).$$

Tęsdami šitaip toliau, gausime formulę sekos F_n ilgiui apskaičiuoti :

$$\begin{aligned}|F_n|&=|F_1|+\varphi(2)+\varphi(3)+\ldots+\varphi(n-1)+\varphi(n)=\\&=2+\varphi(2)+\varphi(3)+\ldots+\varphi(n-1)+\varphi(n)\end{aligned}. \qquad (2)$$

Taigi Farėjaus sekos ilgio skaičiavimas suvedamas į Oilerio funkcijos reikšmių sumos radimą. Šią sumą apskaičiuoti su didelėmis *n* reikšmėmis nėra lengva. Yra įrodyta, kad $|F_n|\approx\frac{3n^2}{\pi^2}$. Ši formulė tuo tikslesnė, kuo didesnis Farėjaus sekos numeris *n* (tokios formulės vadinamos *asimptotinėmis* formulėmis).

8. **Gretimos trupmenos**. Jei sekos F_n trupmenos $\frac{a}{b}$ ir $\frac{c}{d}$ tenkina nelygybę $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ ir jos šioje sekoje yra greta, tai trupmenas $\frac{a}{b}$ ir $\frac{c}{d}$

vadinsime *gretimomis*.

Pavyzdžiui, sekos F_4 trupmenos $\frac{1}{3}$ ir $\frac{1}{2}$ yra gretimos, o sekos F_5 gretimų trupmenų pavyzdys yra $\frac{1}{3}$ ir $\frac{2}{5}$.

Suformuluosime teoremą, kuria naudojantis galima apskaičiuoti sekos F_n gretimą trupmeną, kai žinoma mažesnioji iš jų.

1 teorema. *Tegu* $\frac{a}{b} \in F_n$, *o* d *yra toks natūralusis skaičius, kuris tenkina nelygybę* $n - b < d \le n$ *ir* $ad + 1$ *dalijasi iš b. Tuomet* $\frac{a}{b}$ *ir* $\frac{c}{d}$, $c = \frac{a \cdot d + 1}{b}$, *yra sekos* F_n *gretimos trupmenos.*

Pavyzdžiui, apskaičiuokime sekos F_9 trupmenos $\frac{2}{3}$ „kaimynę iš dešinės“, t. y. suraskime trupmeną $\frac{c}{d}$ tokią, kad $\frac{2}{3}$ ir $\frac{c}{d}$ sekoje F_9 būtų gretimos. Kadangi $6 < d \le 9$ ir $2 \cdot 7 + 1 = 15$ dalijasi iš 3, tai $d = 7$ ir $c = \frac{2 \cdot 7 + 1}{3} = 5$. Taigi ieškomoji trupmena yra $\frac{5}{7}$.

2 teorema. *Tarkime, kad* $\frac{a}{b}$ *ir* $\frac{c}{d}$ *yra sekos* F_n *gretimos trupmenos. Tuomet:*

1) $b + d > n$;
2) $bc - ad = 1$; 3) $(b, d) = 1$.

Įrodymas. Kadangi didesnioji gretima trupmena $\frac{c}{d}$ apskaičiuojama pagal 1 teoremą, tai

$$n - b < d \le n \Rightarrow b + d > n;$$

$$c = \frac{a \cdot d + 1}{b} \Rightarrow bc - ad = 1 \Rightarrow (b, d) = 1.$$

Teisingas ir atvirkštinis teiginys.

3 teorema. *Jei natūralieji skaičiai a, b, c ir d tenkina nelygybes* $a<b$ *ir* $c<d$ *bei lygybę* $bc-ad=1$, tai $\frac{a}{b}$ *ir* $\frac{c}{d}$ *yra sekos* $F_{\max(b,d)}$ *gretimos trupmenos*. Čia žymuo $\max(b,d)$ reiškia didesnįjį iš skaičių *b* ir *d*.

9. **Mediantė.** Dviejų trupmenų su teigiamais vardikliais $\frac{k}{l}$ ir $\frac{m}{r}$ *mediante* vadinama trupmena $\frac{k+m}{l+r}$.

Mediantė visada yra tarp pasirinktųjų trupmenų. Savarankiškai įsitikinkite, kad galioja nelygybė $\frac{k}{l}<\frac{k+m}{l+r}<\frac{m}{r}$.

Toliau panagrinėsime tris iš eilės einančias (didėjimo tvarka, t. y. $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}<\frac{e}{f}$) Farėjaus sekos F_n trupmenas $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ ir $\frac{e}{f}$. Atkreipkime dė–mesį, kad 1 skyrelyje visose užrašytose Farėjaus sekose F_2, F_3, F_4, F_5 ir F_6 kokias tris iš eilės einančias trupmenas bepaimtume, vidurinioji iš jų yra lygi kraštinių trupmenų mediantei. Pasirodo, kad ši savybė galioja visoms Farėjaus sekoms.

4 teorema. *Jeigu sekoje* F_n *trupmenos* $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ *ir* $\frac{e}{f}$ *yra trys iš eilės didėjimo tvarka parašytos trupmenos, tai* $\frac{c}{d}$ *yra trupmenų* $\frac{a}{b}$ *ir* $\frac{e}{f}$ *mediantė, t. y.* $\frac{c}{d}=\frac{a+e}{b+f}$.

Iš 4 teoremos išplaukia, kad pirmoji trupmena, atsirandanti tarp $\frac{a}{b}$ ir $\frac{e}{f}$ yra jų mediantė, ir ji pasirodo Farėjaus sekoje F_{b+f}. Pavyzdžiui, tarp trupmenų $\frac{3}{5}$ ir $\frac{2}{3}$ iš F_5, užrašant aukštesnių eilių Farėjaus sekas, jų mediantė $\frac{5}{8}$ pasirodys sekoje F_8.

Iš šios teoremos taip pat gauname puikų algoritmą, leidžiantį greitai nustatyti tarp kurių sekos F_n trupmenų $\frac{a}{b}$ ir $\frac{e}{f}$ atsiras jų mediantė užrašant seką F_{n+1} – ji bus tarp tų trupmenų, kurioms $b+f=n+1$. Pavyzdžiui, konstruodami seką F_6, kai F_5 žinome, turime ją papildyti tik dviem trupmenomis – trupmenų, kurių vardiklių suma lygi 6, mediantėmis: $\frac{1}{6}=\frac{0+1}{1+5}$ ir $\frac{5}{6}=\frac{4+1}{5+1}$.

10. Farėjaus trupmenų taikymas. Farėjaus sekų trupmenas galima naudoti apytiksliai įvertinant iracionaliuosius skaičius (sakoma – *aproksimuojant* iracionaliuosius skaičius) paprastosiomis trupmenomis, t. y. racionaliaisiais skaičiais.

Pavyzdžiui, iracionalusis skaičius

$$\alpha=\pi-3=0{,}14159265358979323846264338327950\ldots \tag{3}$$

yra tarp dviejų sekos F_{15} gretimų trupmenų

$$\frac{2}{15}=0{,}133333333\ldots \text{ ir } \frac{1}{7}=0{,}1428571428\ldots$$

Konstruodami aukštesnių eilių Farėjaus sekų gretimas trupmenas, tarp kurių yra skaičius $\alpha=\pi-3$, gausime vis trumpesnius intervalus. Šių intervalų galus galima laikyti skaičiaus α racionaliaisiais artiniais:

$$\text{Sekoje } F_{22}\ \ \alpha\in\left(\frac{3}{22};\frac{1}{7}\right),\ \frac{3}{22}=0{,}1363636363\ldots;$$

$$\text{sekoje } F_{29}\ \ \alpha\in\left(\frac{4}{29};\frac{1}{7}\right),\ \frac{4}{29}=0{,}1379310344\ldots;$$

$$\text{sekoje } F_{36}\ \ \alpha\in\left(\frac{5}{36};\frac{1}{7}\right),\ \frac{5}{36}=0{,}1388888888\ldots;$$

$$\text{sekoje } F_{43}\ \ \alpha\in\left(\frac{6}{43};\frac{1}{7}\right),\ \frac{6}{43}=0{,}1395348837\ldots;$$

$$\text{sekoje } F_{50}\ \ \alpha\in\left(\frac{7}{50};\frac{1}{7}\right),\ \frac{7}{50}=0{,}14;$$

sekoje F_{57} $\alpha \in (\frac{8}{57}; \frac{1}{7})$, $\frac{8}{57} = 0{,}1403508771\ldots$;

sekoje F_{64} $\alpha \in (\frac{9}{64}; \frac{1}{7})$, $\frac{9}{64} = 0{,}140625$;

sekoje F_{71} $\alpha \in (\frac{10}{71}; \frac{1}{7})$, $\frac{10}{71} = 0{,}1408450704\ldots$;

Kaip matome, trupmena $\frac{10}{71} = 0{,}1408450704\ldots$ aproksimuoja skaičių α dviejų ženklų po kablelio tikslumu (sugretinus su (3) skaičiaus α išraiška). Jei panašiai tęstume toliau, gautume dar tikslesnes trupmenas, aproksimuojančias skaičių $\alpha = \pi - 3$. Pavyzdžiui,

$$\frac{15}{106} = 0{,}1415094339\ldots,$$

$$\frac{16}{113} = 0{,}1415929203\ldots,$$

$$\frac{4687}{33102} = 0{,}1415926530119\ldots.$$

Pastarosios trupmenos dešimtainėje išraiškoje net devyni skaitmenys po kablelio tikslūs, t. y. devyni skaitmenys po kablelio sutampa su skaičiaus $\alpha = \pi - 3$ (3) išraiškos atitinkamais skaitmeninis.

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Sudarykite 9-os eilės Farėjaus seką F_9.

2. Raskite skaičių 7640325 ir 5236875 didžiausią bendrąjį daliklį.

3. Raskite išraiškos $a = bq + r$, $0 \le r < |b|$, skaičius q ir r, kai $a = -75840$, $b = -3215$.

4. Apskaičiuokite $\varphi(2016)$.

5. Apskaičiuokite Farėjaus sekos F_{10} ilgį.

6. Apskaičiuokite Farėjaus sekos F_{11} trupmenos $\frac{3}{8}$ didesniąją gretimą trupmeną.

7. Raskite keturis natūraliuosius skaičius *a, b, c* ir *d,* su kuriais trupmenos $\frac{a}{b}$ ir $\frac{c}{d}$ būtų ne mažesnės kaip 12-os eilės Farėjaus sekos $F_{\max(b,d)}$ gretimos trupmenos.

8. Įrodykite 4 teoremą: jeigu sekoje F_n trupmenos $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ ir $\frac{e}{f}$ yra trys iš eilės didėjimo tvarka parašytos trupmenos, tai $\frac{c}{d}$ yra trupmenų $\frac{a}{b}$ ir $\frac{e}{f}$ mediantė, t. y. $\frac{c}{d} = \frac{a+e}{b+f}$.

9. Išvardinkite sekos F_9 trupmenų poras, tarp kurių atsiras nau–jos trupmenos (mediantės) užrašant seką F_{10}.

10. Iracionalųjį skaičių $\alpha = \sqrt{2} - 1$ aproksimuokite Farėjaus sekos F_n trupmena, kurios dešimtainės išraiškos keturi ženklai po kablelio tikslūs. Kurios eilės ši Farėjaus seka?

IV. ALGEBRINĖS LYGTYS

Antanas Apynis ir Juozas Šinkūnas

Pirmojo laipsnio lygtys $ax+b=0$ ir antrojo laipsnio lygtys $ax^2+bx+c=0,\quad a,b,c\in R,$ sprendžiamos pagrindinėje mokykloje. Šioje užduotyje reikės spręsti aukštesnio laipsnio algebrines lygtis su racionaliaisiais koeficientais.

Lygtis

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0=0 \tag{1}$$

vadinama *n-tojo laipsnio algebrine lygtimi su racionaliaisiais koeficientais,* jeigu jos koeficientai $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0$ yra racio– nalieji skaičiai $(a_n\neq 0)$.

Aišku, kad kiekvieną *n*-tojo laipsnio lygtį su racionaliaisiais koefi– cientais galima pakeisti jai ekvivalenčia lygtimi su sveikaisiais koe– ficientais – tereikia lygtį padauginti iš visų koeficientų vardiklių mažiausio bendro kartotinio.

Sakysime, kad skaičius *a* yra daugianario

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

šaknis, jeigu

$$P_n(a)=a_na^n+a_{n-1}a^{n-1}+...+a_2a^2+a_1a+a_0=0$$

Kiekviena daugianario $P_n(x)$ šaknis vadinama lygties $P_n(x)=0$ *sprendiniu*.

Dalijant daugianarį $P_n(x)$ iš dvinario $x-a$ gaunamas dalmuo – kuris nors (*n*–1)-jo laipsnio daugianaris

$$Q_{n-1}(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+...+b_2x^2+b_1x+b_0$$

ir *liekana R* (skaičius). Paprastai rašoma taip:

$$P_n(x)=(x-a)Q_{n-1}(x)+R. \tag{2}$$

Daugianaris $Q_{n-1}(x)$ ir liekana *R* lengvai randami daugianarį $P_n(x)$ dalijant iš $x-a$ kampu.

1 pavyzdys. Daugianarį $P_3(x)=4x^3-3x^2+7$ padalykime iš dvi– nario $x+2$:

$$
\begin{array}{l|l}
\_\,4x^3-3x^2+7 & \underline{\,x+2\,} \\
\underline{4x^3+8x^2} & 4x^2-11x+22 \\
\quad \_\,-11x^2 & \\
\quad \underline{-11x^2-22x} & \\
\qquad\quad \_\,22x+7 & \\
\qquad\quad \underline{22x+44} & \\
\qquad\qquad -37 &
\end{array}
$$

Taigi $P_3(x)=4x^3-3x^2+7=(x+2)(4x^2-11x+22)-37.$

1 teorema (Bezu teorema; Bezout Etienne (1730–1783) – prancūzų matematikas). Daugianario $P_n(x)$ dalybos iš dvinario $x-a$ liekana lygi $P_n(a)$.

Šis teiginys lengvai įrodomas remiantis (2) lygybe.

Išvada. Daugianaris $P_n(x)$ dalijasi iš dvinario $x-a$ tik kai *a* yra $P_n(x)$ šaknis (lygties $P_n(x)=0$ sprendinys).

Jeigu daugianaris $P_n(x)$ dalijasi iš $(x-a)^m$, bet nesidalija iš $(x-a)^{m+1}$, tai sakoma, kad *a* yra *m*-tojo kartotinumo šaknis.

2 teorema. Jei nesuprastinama trupmena $\dfrac{p}{q}$ yra daugianario $P_n(x)$ *su sveikaisiais* koeficientais šaknis, tai a_0 dalijasi iš p, o a_n – iš *q*.

Pastebėsime, kad atvirkštinis teiginys ne visada teisingas. Taigi daugianario $P_n(x)$ su sveikaisiais koeficientais racionaliųjų šaknų ((1) lygties sprendinių) reikia ieškoti tarp trupmenų, sudarytų iš skaičių a_0 ir a_n daliklių.

Kai $a_n=1$, (1) lygties racionalieji sprendiniai yra sveikieji skaičiai. Ieškant daugianario $P_n(x)$ racionaliųjų šaknų (lygties $P_n(x)=0$ sprendinių) reikia rasti daugianario $P_n(x)$ ir dvinario $x-a$ dalmenį. Dalybos kampu procedūrą galima supaprastinti. Dešinėje (2) lygybės pusėje esantį daugianarį $Q_{n-1}(x)$ padauginus iš $x-a$ ir sulyginus abiejose lygybės pusėse daugianarių koeficientus prie atitinkamų x

laipsnių, koeficientai $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_2, b_1, b_0$ ir R išreiškiami koeficientais $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ ir a pagal vadinamąją Hornerio (William George Horner (1786–1857) – anglų matematikas) schemą (lentelę):

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
a	$b_{n-1} =$ $= a_n$	$b_{n-2} =$ $= ab_{n-1} + a_{n-1}$	$b_{n-1} =$ $= ab_{n-2} + a_{n-2}$	...	$b_0 =$ $= ab_1 + a_1$	$R = ab_0 + a_0$ $= P_n(a)$

Pirmoje lentelės eilutėje surašyti dalinio koeficientai, o antroje – dalmens koeficientai ir liekana $R = P_n(a)$.

2 pavyzdys. Raskime daugianario $x^5 - 5x^2 + 3x + 4$ dalybos iš $x + 2$ dalmenį ir liekaną.

Sprendimas. Užpildykime Hornerio lentelę

	1	0	0	–5	3	4
–2	1	–2	4	–13	29	–54

Pagal ją dalmuo yra $Q_4(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 13x + 29,$ o liekana yra $R = -54$.
Taigi
$$x^5 - 5x^2 + 3x + 4 = (x+2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 13x + 29) - 54.$$
Aišku, kad $x = -2$ nėra lygties $x^5 - 5x^2 + 3x + 4 = 0$ sprendinys.

3 pavyzdys. Įrodykime, kad $x = 2$ yra daugianario
$$P_4(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 16x - 12$$
šaknis ir nustatykime jos kartotinumą. Taip pat išspręskime lygtį $P_4(x) = 0$.

Sprendimas. Kadangi $P_4(2) = 2^4 - 3 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2 - 12 = 0,$ tai $x = 2$ yra daugianario $P_4(x)$ šaknis (lygties $P_4(x) = 0$ sprendinys). Vadinasi, $P_4(x)$ dalijasi iš $x - 2$ (pagal Bezu teoremos išvadą). Dalmens $Q_3(x)$ koeficientus apskaičiuojame pagal Hornerio schemą:

	1	–3	–3	16	–12
2	1	–1	–5	6	0

Taigi $Q_3(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$ ir $P_4(x) = (x-2)Q_3(x)$.

Nustatykime, ar $P_4(x)$ dalijasi iš $(x-2)^2$. Tai priklauso nuo to, ar $Q_3(x)$ dalijasi iš $x-2$. Kadangi $Q_3(2) = 0$, tai $Q_3(x)$ dalijasi iš $x-2$. Dalmenį $Q_2(x)$ randame pagal Hornerio schemą:

	1	–1	–5	6
2	1	1	–3	0

Taigi $Q_3(x)$ dalijasi iš $x-2$, o $P_4(x)$ dalijasi iš $(x-2)^2$. Gauname:

$$P_4(x) = (x-2)^2 Q_2(x), \quad Q_2(x) = x^2 + x - 3.$$

Kadangi $Q_2(2) \neq 0$, tai $Q_2(x)$ nesidalija iš $x-2$, o $P_4(x)$ nesidalija iš $(x-2)^3$. Vadinasi, $x = 2$ yra daugianario $P_4(x)$ antro kartotinumo šaknis.

Dabar išspręsime lygtį $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 16x - 12 = 0$. Kadangi

$$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 16x - 12 = (x-2)^2(x^2 + x - 3) = 0,$$

tai $x - 2 = 0$ arba $x^2 + x - 3 = 0$. Pirmos lygties sprendinys yra 2, o ant–ros lygties sprendiniai yra $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ ir $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

Ats.: 2, $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

4 pavyzdys. Išspręskime lygtį $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12 = 0$.

Sprendimas. Pirmiausia ieškosime šios lygties racionaliųjų sprendinių. Kadangi laisvojo nario dalikliai yra ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12, o vyriausiojo nario koeficiento dalikliai yra ±1, ±2, ±3, ±6, tai (pagal 2 teoremą) racionaliųjų sprendinių reikia ieškoti tik tarp šių skaičių: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$, $\pm\frac{4}{3}$, $\pm\frac{1}{6}$. Aišku, pakanka apskaičiuoti daugianario $P_4(x) = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$ reikšmes tuose taškuose. Gauname dvi racionaliąsias šaknis: –3 ir $\frac{1}{2}$. Pagal Bezu teoremą, $P_4(x)$ dalijasi iš dvinarių $x+3$ ir $x-\frac{1}{2}$. Daugianarį $P_4(x)$ padalykime iš $x+3$, o jo dalmenį $Q_3(x)=6x^3+x^2-10x+4$ padalykime iš $x-\frac{1}{2}$. Gausime, kad

$$Q_3(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(6x^2+4x-8)$$

ir

$$P_4(x)=(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)(6x^2+4x-8).$$

Ieškant lygties $P_4(x)=0$ sprendinių belieka išspręsti kvadratinę lygtį $6x^2+4x-8=0.$ Jos sprendiniai yra $\frac{-1-\sqrt{13}}{3}$ ir $\frac{-1+\sqrt{13}}{3}$.

Ats.: –3, $\frac{1}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{13}}{3}$, $\frac{-1+\sqrt{13}}{3}$.

5 pavyzdys. Skaičius $1-\sqrt{3}$ yra lygties

$$x^5+ax^3-4x^2+bx+20=0$$

sprendinys. Raskime koeficientų *a* ir *b* racionaliąsias reikšmes ir kitus lygties sprendinius.

Sprendimas. Tegu $x_1=1-\sqrt{3}$ yra lygties sprendinys. Tada

$$x_1^2=\left(1-\sqrt{3}\right)^2=4-2\sqrt{3},$$
$$x_1^3=\left(1-\sqrt{3}\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)=10-6\sqrt{3}.$$
$$x_1^4=\left(4-2\sqrt{3}\right)^2=28-16\sqrt{3},$$
$$x_1^5=\left(1-\sqrt{3}\right)\left(28-16\sqrt{3}\right)=76-44\sqrt{3}.$$

Šias reikšmes įrašę į lygtį, gauname:

$$76-44\sqrt{3}+a\left(10-6\sqrt{3}\right)-4\left(4-2\sqrt{3}\right)+b\left(1-\sqrt{3}\right)+20=0,$$
$$10a+b+80-\sqrt{3}\,(6a+b+36)=0.$$

Kadangi *a* ir *b* yra racionalieji skaičiai, tai ši lygybė teisinga tik kai

$$\begin{cases} 10a+b+80=0, \\ 6a+b+36=0. \end{cases}$$

Iš čia gauname, kad $a=-11,\ b=30.$ Taigi reikia išspręsti lygtį

$$x^5-11x^3-4x^2+30x+20=0.$$

Kadangi vyriausiojo nario koeficientas lygus 1, tai visi šios lygties racionalieji sprendiniai gali būti tik sveikieji skaičiai – laisvojo nario dalikliai: ±1, ±2, ±4, ±5, ±10, ±20.

Tik –2 iš jų yra šios lygties sprendinys. Daugianarį

$$P_5(x)=x^5-11x^3-4x^2+30x+20$$

padalijęs iš $x+2,$ gauname dalmenį – daugianarį

$$Q_4(x)=x^4-2x^3-7x^2+10x+10.$$

Šis daugianaris neturi sveikųjų šaknų.

Atkreipkime dėmesį, kad ne tik $x_1=1-\sqrt{3}$ yra lygties $Q_4(x)=0$ sprendinys, bet ir $x_2=1+\sqrt{3}$ (įsitikinkite tuo savarankiškai!).

Vadinasi, daugianaris $Q_4(x)$ dalijasi ir iš $\left(x-\left(1-\sqrt{3}\right)\right),$ ir iš $\left(x-\left(1+\sqrt{3}\right)\right),$ taigi ir iš jų sandaugos

$$\left(x-\left(1-\sqrt{3}\right)\right)\left(x-\left(1+\sqrt{3}\right)\right)=x^2-2x-2.$$

Dalydami kampu gauname:

$$\begin{array}{l|l} -\,x^4-2x^3-7x^2+10x+10 & x^2-2x-2 \\ \hline \underline{x^4-2x^3-2x^2} & x^2-5 \\ -\,-5x^2+10x+10 & \\ \underline{-5x^2+10x+10} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

Taigi

$$x^4-2x^3-7x^2+10x+10=(x^2-2x-2)(x^2-5).$$

Išsprendę lygtį $x^2-5=0,$ randame likusius lygties sprendinius: $-\sqrt{5}$ ir $\sqrt{5}.$

Ats.: $a=-11,\ b=30,\ -2,\ 1+\sqrt{3},\ -\sqrt{5},\ \sqrt{5}.$

KAI KURIŲ TIPŲ LYGČIŲ SPRENDIMO PAVYZDŽIAI

1. Lygties laipsnio sumažinimas. Kartais tam tikru būdu pakeitus lygties nežinomąjį pavyksta gauti lygtį, kurios laipsnis mažesnis ir jos sprendimas yra paprastesnis.

6 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=1. \tag{3}$$

Sprendimas. Abi lygties puses padauginę iš 12, gauname ekvivalenčią lygtį

$$(6x+7)^2(6x+8)(6x+6)=12,$$

o pažymėję $6x+6=y,$ – lygtį

$$(y^2+2y+1)(y^2+2y)=12. \tag{4}$$

Dar kartą pakeitę nežinomąjį pagal formulę $y^2+2y=z,$ gauname lygtį

$$z(z+1)=12,$$

kurios sprendiniai yra –4 ir 3.

Taigi vietoj (4) lygties reikia išspręsti dvi kvadratines lygtis: $y^2+2y=3$ ir $y^2+2y=-4$. Pirmos lygties sprendiniai yra –3 ir 1, o antra lygtis sprendinių neturi.

Išsprendę lygtis $6x+6=-3$ ir $6x+6=1$, gauname du (3) lygties sprendinius $-\frac{3}{2}$ ir $-\frac{5}{6}$.

Ats.: $-\frac{3}{2},\ -\frac{5}{6}.$

7 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$(x^2-2x+2)(x^2+2x-3)(x^2-6x+5)=-84. \tag{5}$$

Sprendimas. Lygtį pertvarkome taip:

$$(x^2-2x+2)(x+3)(x-1)(x-1)(x-5)=-84,$$

$$(x^2-2x+2)(x^2-2x+1)(x^2-2x-15)=-84.$$

Pasirinkę keitinį $x^2-2x=y,$ gauname:

$$(y+2)(y+1)(y-15)=-14,$$
$$y^3-12y^2-43y+54=0.$$

Kadangi $y=1$ yra šios lygties sprendinys, lygties kairiąją pusę išskaidome taip:

$$(y-1)(y^2-11y-15)=0.$$

Lygties $y^2-11y-15=0$ sprendiniai yra $\frac{11-\sqrt{175}}{2}$ ir $\frac{11+\sqrt{175}}{2}$.

Taigi visus (5) lygties sprendinius gausime išsprendę šias lygtis: $x^2-2x-1=0,\quad x^2-2x-\frac{11-\sqrt{175}}{2}=0$ ir $x^2-2x-\frac{11+\sqrt{175}}{2}=0$. Pirmos lygties sprendiniai yra $1-\sqrt{2}$ ir $1+\sqrt{2}$; antra lygtis sprendinių neturi, o trečios lygties sprendiniai yra $1-\sqrt{\frac{13+\sqrt{175}}{2}}$ ir $1+\sqrt{\frac{13+\sqrt{175}}{2}}$.

Ats.: $1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2},\ 1-\sqrt{\frac{13+\sqrt{175}}{2}},\ 1+\sqrt{\frac{13+\sqrt{175}}{2}}$.

2. Trinarių lygčių sprendimas. Lygtis

$$ax^{2n}+bx^n+c=0,\ \ a\neq 0,\ \ n\geq 2,\ \ n\in N, \qquad (6)$$

vadinama *trinare lygtimi*. Kai $n=2$, ji vadinama *bikvadratine lygtimi*.

Pažymėję $x^n=y$, gauname kvadratinę lygtį

$$ay^2+by+c=0.$$

Jeigu $y_1,\ y_2$ yra jos sprendiniai, tai (6) lygties sprendiniai randami iš lygčių $x^n=y_1$ ir $x^n=y_2$.

8 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$x^8-5x^4+4=0.$$

Sprendimas. Tegul $x^4=y$. Tada gauname lygtį

$$y^2-5y+4=0,$$

kurios sprendiniai yra 1 ir 4.

Taigi $x^4=1$ arba $x^4=4$. Lygties $x^4=1$ sprendiniai yra –1 ir 1, o lygties $x^4=4$ sprendiniai yra $-\sqrt{2}$ ir $\sqrt{2}$.

Ats.: –1, 1, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$.

3. Lygčių $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ sprendimas.

Lygtis $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ (čia a, b ir c – realieji skaičiai) keitiniu $y=\dfrac{x+a+x+b}{2}=x+\dfrac{a+b}{2}$ suvedama į bikvadratinę lygtį.

9 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$(x+3)^4+(x+1)^4=20. \tag{7}$$

Sprendimas. Pažymėję $y=x+2$, gauname lygtį

$$(y+1)^4+(y-1)^4=20.$$

Taikydami formulę $(a+b)^4=a^4+4a^3b+4a^2b^2+4ab^3+b^4$, gauname lygtį

$$y^4+6y^2-9=0,$$

kurios sprendinių kvadratai yra $y^2=-3-\sqrt{18}$ ir $y^2=-3+\sqrt{18}$. Pirma lygtis sprendinių neturi, o antros lygties sprendiniai yra $-\sqrt{\sqrt{18}-3}$ ir $\sqrt{\sqrt{18}-3}$.

Taigi (7) lygties sprendiniai yra $-2-\sqrt{3\sqrt{2}-3}$ ir $-2+\sqrt{3\sqrt{2}-3}$.

Ats.: $-2-\sqrt{3\sqrt{2}-3}$, $-2+\sqrt{3\sqrt{2}-3}$.

4. Lygčių $(x+a)((x+b)(x+c)(x+d)=A$ sprendimas.

Lygtis $(x+a)((x+b)(x+c)(x+d)=A$ (čia a, b, c, d, A – realieji skaičiai) keitiniu $y=\dfrac{x+a+x+b+x+c+x+d}{4}$ suvedama į bikvadra–tinę lygtį.

10 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=10. \tag{8}$$

Sprendimas. Pažymėję $y=x+3$, gauname:

$$(y-2)(y-1)(y+1)(y+2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y^2-4)(y^2-1)=10 \Rightarrow y^4-5y^2-6=0.$$

Lygties $y^4-5y^2-6=0$ sprendinių kvadratai yra $y^2=-1$ ir $y^2=6$. Pirma lygtis sprendinių neturi, o antros sprendiniai yra $-\sqrt{6}$ ir $\sqrt{6}$. Taigi (8) lygties sprendiniai yra $-\sqrt{6}-3$ ir $\sqrt{6}-3$.

Ats.: $-\sqrt{6}-3,\ \sqrt{6}-3.$

5. Lygčių $(ax^2+b_1x+c)(ax^2+b_2x+c)=Ax^2$ sprendimas.

Lygtį $(ax^2+b_1x+c)(ax^2+b_2x+c)=Ax^2$**,** kai $c\neq 0$, $A\neq 0$, pada–lijus iš $x^2\neq 0$ ($x=0$ nėra lygties sprendinys!), gaunama lygtis

$$\left(ax+\frac{c}{x}+b_1\right)\left(ax+\frac{c}{x}+b_2\right)-A=0,$$

kuri pažymėjus $ax+\dfrac{c}{x}=y$ tampa kvadratine lygtimi.

11 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$(2x^2-3x+1)(2x^2+5x+1)=9x^2. \tag{9}$$

Sprendimas. Šią lygtį padaliję iš $x^2\neq 0$, gauname lygtį

$$\left(2x+\frac{1}{x}-3\right)\left(2x+\frac{1}{x}+5\right)-9=0,$$

o iš jos (keitiniu $y=2x+\dfrac{1}{x}$) – lygtį $y^2+2y-24=0$, kurios sprendiniai yra –6 ir 4.

Išsprendę lygtis $2x+\dfrac{1}{x}=-6$ ir $2x+\dfrac{1}{x}=4$, gauname:

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2},\quad x_{3,4}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}.$$

Ats.: $\dfrac{-3-\sqrt{7}}{2}$, $\dfrac{-3+\sqrt{7}}{2}$, $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$.

6. Lygčių $(ax^2+bx+c)^4+Ax^2(ax^2+bx+c)^2=Bx^4$ sprendimas.

Lygtį $(ax^2+bx+c)^4+Ax^2(ax^2+bx+c)^2=Bx^4$, kai $c\neq 0$ ir $B\neq 0,$ padalijus iš $x^4\neq 0$ ($x=0$ nėra sprendinys), gaunama lygtis $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{x}\right)^4+A\cdot\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{x}\right)^2=B,$ kuri pažymėjus $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{x}\right)^2=y$ tampa kvadratine lygtimi.

12 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$(x^2-x+1)^4-6x^2(x^2-x+1)^2+5x^4=0. \qquad (10)$$

Sprendimas. Lygtį padaliję iš $x^4,$ gauname ekvivalenčią lygtį

$$\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^4-6\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^2+5=0.$$

Pažymėję $\left(\dfrac{x^2-x+1}{x}\right)^2=y,$ gauname lygtį

$$y^2-6y+5=0,$$

kurios sprendiniai yra 1 ir 5.

Toliau sprendžiame lygtis $\left(\dfrac{x^2-x+1}{x}\right)^2=1$ ir $\left(\dfrac{x^2-x+1}{x}\right)^2=5.$

Iš pirmos lygtis gauname, kad $x^2-x+1=x$ arba $x^2-x+1=-x,$ o iš antros – $x^2-x+1=\sqrt{5}x$ arba $x^2-x+1=-\sqrt{5}x.$ Iš šių keturių kvadratinių lygčių ir gauname visus (10) lygties sprendinius.

Ats.: 1, 1, $\dfrac{1+\sqrt{5}-\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$, $\dfrac{1+\sqrt{5}+\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$.

7. Simetrinės lygtys.

Lygtis $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + cx^2 + bx + a = 0,$ kurioje narių, lygiai nutolusių nuo pradžios ir galo, koeficientai yra lygūs, vadinama *n-tojo laipsnio simetrine lygtimi.*

Pavyzdžiui, lygtis
$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$
yra ketvirtojo laipsnio simetrinė lygtis, o lygtis
$$ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$
yra septintojo laipsnio simetrinė lygtis.

Atkreipkime dėmesį į tai, kad nelyginio laipsnio simetrinė lygtis turi sprendinį $x = -1.$ Tokios lygties kairiąją pusę galima išskaidyti į dvinario $x+1$ ir lyginio laipsnio simetrinio daugianario sandaugą. Todėl nagrinėsime tik lyginio laipsnio simetrinės lygties sprendimą.

Nagrinėkime aštuntojo laipsnio simetrinę lygtį
$$ax^8 + bx^7 + cx^6 + dx^5 + ex^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a = 0. \quad (11)$$

Aišku, kad $x = 0$ nėra šios lygties sprendinys. Ją padalię iš x^4 ir sugrupavę narius, gauname lygtį
$$a\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + b\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + c\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + d\left(x + \frac{1}{x}\right) + e = 0. \quad (12)$$

Pasirinkę keitinį $x + \frac{1}{x} = y,$ gauname, kad:
$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = y^2 - 2,$$
$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) = y^3 - 3y,$$
$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = y^4 - 4y^2 + 2.$$
Įrašę į (12), gauname ketvirtojo laipsnio lygtį
$$ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = 0.$$

Ją išsprendę (radę daugiausiai 4 sprendinius y_1, y_2, y_3, y_4), gauname kvadratines lygtis $x+\frac{1}{x}=y_k$, $k=1, 2, 3, 4$, o iš jų – visus (11) lygties sprendinius.

13 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$x^7-2x^6-x^5-x^4-x^3-x^2-2x+1=0. \tag{13}$$

Sprendimas. Vienas šios lygties sprendinys yra $x=-1$. Pritaikę Hornerio schemą

	1	–2	–1	–1	–1	–1	–2	1
–1	1	–3	2	–3	2	–3	1	0

gauname:

$$x^7-2x^6-x^5-x^4-x^3-x^2-2x+1=$$
$$=(x+1)(x^6-3x^5+2x^4-3x^3+2x^2-3x+1)=0.$$

Taigi spręskime lygtį

$$x^6-3x^5+2x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0. \tag{14}$$

Ją padaliję iš x^3 ir sugrupavę narius, gauname lygtį

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0.$$

Pažymėję $x+\frac{1}{x}=y$, gauname trečiojo laipsnio lygtį

$$y^3-3y^2-y+3=0,$$

turinčią sprendinį $y=1$.

Dar kartą pritaikę Hornerio schemą

	1	–3	–1	3
1	1	–2	–3	0

gauname:

$$y^3-3y^2-y+3=(y-1)(y^2-2y-3)=0.$$

Lygties $y^2-2y-3=0$ sprendiniai yra –1 ir 3.

Išsprendę lygtis $x+\frac{1}{x}=1,\ \ x+\frac{1}{x}=-1,\ \ x+\frac{1}{x}=3,$ gauname visus (14) lygties sprendinius. Jų yra du: $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ir $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Taigi (13) lygtis turi tris sprendinius.

Ats.: –1, $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

PASITRENIRUOKITE
(Šių uždavinių sprendimų nesiųskite tikrinimui)

Išspręskite lygtis:

1. $2x^3+12x^2+13x+15=0$; [–5]

2. $x^4-4x^3+7x^2-16x+12=0$; [1; 3]

3. $x^4-4x^3-13x^2+28x+12=0$; $\left[-3;\ 2;\ \frac{5\pm\sqrt{33}}{2}\right]$

4. $x^5+3x^4-2x^3-9x^2-11x-6=0$; [–1; –3; 2]

5. $x^4-7x^3+14x^2-7x+1=0$; $\left[2\pm\sqrt{3};\ \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right]$

6. $5x^6-11x^5-73x^4+73x^2+11x-5=0$; $\left[\frac{1}{5};\ 5;\ \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\right]$

7. $10x^6+19x^5-19x^4-20x^3-19x^2+19x+10=0$; $\left[1;\ -\frac{5}{2};\ -\frac{2}{5}\right]$

8. $(x^2-6x-9)^2=x(x^2-4x-9)$; $\left[-1;\ 9;\ \frac{5\pm\sqrt{61}}{2}\right]$

9. $(x-4)(x-3)(x+1)(x+2)=24$; [0; 2; $1\pm\sqrt{12}$]

10. $(x+3)^4+(x+5)^4=16$; [–3; –5]

11. $(4x+1)(12x-1)(3x+2)(x+1)=4$; $\left[\frac{-11\pm\sqrt{217}}{24}\right]$

12. $(2x^2-3x+1)(2x^2+5x+1)=9x^2$; $\left[\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2};\ \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}\right]$

13. $(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2=0$; [–4; –2]

14. $(x^2+x+4)^2+3x(x^2+x+4)+2x^2=0$; [$\varnothing$]

15. $x^5+2x^4-10x^3-20x^2+9x+18=0$; [–1; 1; –2; 3; –3]

16. $x^6-x^5-8x^4+14x^3+x^2-13x+6=0$; [1; –2; 2; –3]

17. $(2x^2+3x-2)(5-6x-4x^2)=-5\,(2x^2+3x+2)$.

$\left[-\frac{3}{2};\ 0;\ \frac{-3\pm\sqrt{65}}{4}\right]$

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

Išspręskite lygtis:

1. $2x^3+3x^2-18x-14=0$;

2. $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5$;

3. $(x^2-3x+1)(x^2+3x+2)(x^2-9x+20)=-30$;

4. $(x+1)^4+(x+3)^4=16$;

5. $(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0$;

6. $x^7 - 2x^6 + 3x^5 - x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$;

7. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15 = 0$;

8. $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$.

9. Skaičiai –1 ir 2 yra lygties $x^5 + ax^4 - 2x^3 - 9x^2 + bx - 6 = 0$ sprendiniai. Raskite parametrų *a* ir *b* racionaliąsias reikšmes ir kitus lygties sprendinius.

10. Skaičius $1+\sqrt{2}$ yra lygties $x^5 + ax^3 + bx^2 + 5x + 2 = 0$ sprendinys; čia *a* ir *b* – racionalieji skaičiai. Raskite *a* ir *b* reikšmes ir kitus lygties sprendinius.

V. ERDVINIAI KŪNAI

Edmundas Mazėtis

Erdvinių kūnų geometrija yra stereometrijos dalis. Stereometrija – tai erdvės geometrija. Bet daugelis stereometrijos uždavinių paprastai suvedama į planimetrijos uždavinius, tą padaryti padeda gilesnės erdvės geometrijos sąvokų, faktų ir teoremų žinios. Taigi visų pirma priminsime keletą stereometrijos sąvokų ir teoremų, žinomų iš matematikos pamokų.

1. Tiesių ir plokštumų egzistavimo teoremos:

1.1 teorema. Bet kurie trys taškai visuomet yra vienoje plokš–tumoje; be to, jei tie taškai nėra vienoje tiesėje, tai per juos eina vienintelė plokštuma.

1.2 teorema. Per tiesę ir jai nepriklausantį tašką eina vienintelė plokštuma.

1.3 teorema. Per dvi susikertančias tieses eina vienintelė plokštuma.

1.4 teorema. Per dvi lygiagrečias tieses eina vienintelė plokštuma.

2. Tiesių ir plokštumų lygiagretumo teoremos:

2.1 teorema. Jei tiesės a du taškai yra plokštumoje α, tai bet kuris tiesės a taškas yra toje plokštumoje. Tuomet sakoma, kad tiesė a yra plokštumoje α, arba plokštuma αeina per tiesę a.

2.2 teorema. Jei tiesė a yra lygiagreti su tiese b, esančia plokštumoje α, tai tiesė a lygiagreti ir su plokštuma α.

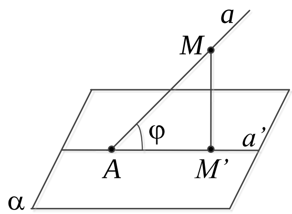
2.3 teorema. Jei plokštuma α eina per tiesę a, lygiagrečią su plokštuma β, o plokštumos α ir β kertasi, tai plokštumų α ir β sankirtos tiesė yra lygiagreti su tiese a.

2.4 teorema. Jei plokštuma α kerta dvi lygiagrečias plokštumas β ir γ, tai sankirtos tiesės $\alpha \cap \beta$ ir $\alpha \cap \gamma$ yra lygiagrečios.

2.5 teorema. Jei dvi susikertančios tiesės a ir b, esančios plokštumoje α, yra lygiagrečios dviem susikertančioms tiesėms c ir d, esančioms plokštumoje β, tai plokštumos α ir β yra lygiagrečios.

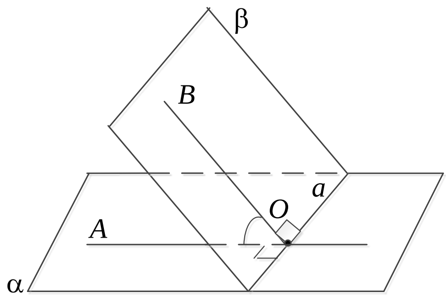
2.6 teorema. Kokia bebūtų tiesė *a* ir jai nepriklausantis taškas *A*,egzistuoja vienintelė tiesė *b*, einanti per tašką *A* ir lygiagreti su tiese *a*.

Sakykime, kad tiesė *a* kerta plokštumą α taške *A* (1 pav.). Iš bet ku– rio tiesės taško *M* nuleiskime statmenį į plokštumą α; šis statmuo kerta plokštumą α taške M', kuris vadinamas taško *M* ortogonaliąja projekcija plokštumoje α. Visų tiesės *a* taškų ortogo–naliosios projek–cijos plokštumoje α yra tiesėje a', kuri vadinama *tiesės a ortogo–naliąja projekcija plokštumoje* α. Kampas φ tarp tiesės *a* ir jos ortogonaliosios projekcijos plokštumoje α yra vadinamas *kampu tarp tiesės a ir plokštumos* α. Atstumas nuo taško *M* iki jo ortogonaliosios projekcijos plokš–tumoje α yra atstumas nuo taško *M* iki plokštumos α.



1 pav.

Sakykime, kad plokštumos α ir β nėra lygiagrečios (2 pav.), tuomet jų bendrų taškų aibė yra tiesė $a = \alpha \cap \beta$. Sakykime, kad *O* – bet kuris tiesės *a* taškas. Nubrėž–kime plokštumose α ir β spindulius *OA* ir *OB*. Kampas *AOB* yra vadinamas *dvisienio kampo tarp plokštumų* α *ir* β *tiesiniu kampu*, tiesė *a* yra vadi– nama *dvisienio kampo briauna*. Akivaizdu, kad tiesinio kampo didumas nepriklauso nuo tiesės *a* taško *O* parinkimo. Jis vadinamas dvisienio kampo tarp plokštumų α ir β didumu. Jei vienas dvisienis kampas, gautas susikirtus dviem plokštumoms α ir β yra statusis, tai statieji ir kiti dvisieniai kampai. Tuomet sakoma, kad plokštumos α ir β yra statmenos.



2 pav.

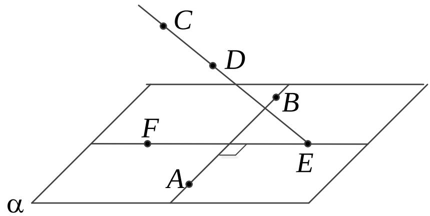
3. Tiesių ir plokštumų statmenumo teoremos:

3.1 teorema. Tiesė *a* yra statmena plokštumai α tada ir tik tada, kad ji statmena dviem nelygiagrečioms plokštumos α tiesėms; tuomet tiesė α yra statmena bet kuriai plokštumos α tiesei $b \subset \alpha$.

3.2 teorema (trijų statmenų teorema). Tiesė AB, esanti plokštumoje α, yra statmena tiesei CD, nesančiai toje plokštumoje tada ir tik tada, kai ji statmena tiesės CD ortogonaliajai projekcijai EF plokštumoje α (3 pav.).

3.3 teorema. Jei dvi tiesės a ir b yra statmenos plokštumai α, tiesės a ir b yra lygiagrečios.

3.4 teorema. Jei dvi plokš–tumos yra statmenos tai pačiai tiesei, tai jos yra lygiagrečios.



3 pav.

3.5 teorema. Jei tiesė a yra statmena plokštumai α, tai ji statmena ir bet kuriai plokštumai β, lygiagrečiai su plokštuma α.

3.6 teorema. Jei plokštuma α yra statmena plokštumai β, tai bet kuri plokštuma γ, lygiagreti su plokštuma α yra statmena plokštumai β.

3.7 teorema. Jei tiesė a yra statmena plokštumai α, o plokštuma β eina per tiesę a, tai plokštumos α ir β yra statmenos.

3.8 teorema. Koks bebūtų erdvės taškas A ir plokštuma α, per tašką A eina vienintelė tiesė, statmena plokštumai α.

4. Prasilenkiančių tiesių teoremos:

4.1 teorema. Jei tiesė a yra plokštumoje α, o tiesė b plokštumą α kerta taške C, nepriklausančiame tiesei a, tai tiesės a ir b yra prasi–lenkiančios (t. y., neturi bendrų taškų ir nėra vienoje plokštumoje).

4.2 teorema. Jei a ir b – dvi prasilenkiančios tiesės, tai egzistuoja vienintelė plokštuma α, einanti per tiesę a lygiagrečiai su tiese b, ir vienintelė plokštuma β, einanti per tiesę b lygiagrečiai su tiese a. Plokštumos α ir β yra lygiagrečios, atstumas tarp jų yra lygus atstumui tarp prasilenkiančių tiesių a ir b.

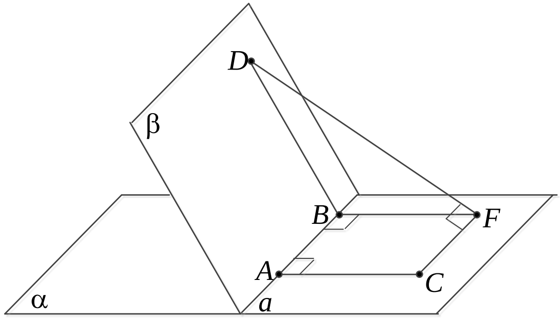
1 pavyzdys. Apie keturkampį $ABCD$ apibrėžto apskritimo centras yra taškas O. Per taškus A, C ir O nubrėžta plokštuma α. Ar taškas D irgi yra plokštumoje α?

Sprendimas. Ne visada. Pvz., kai keturkampio kampai B ir D yra statieji, apibrėžto apskritimo centras O yra atkarpos AC vidurio taškas.

Per vienoje tiesėje esančius taškus *A, O* ir *C* galima nubrėžti be galo daug plokštumų, kurioms nepriklauso taškas *D*.

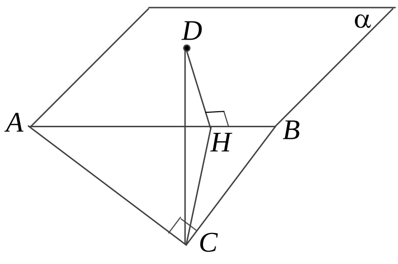
2 pavyzdys. Dvisienio kampo didumas 120°. Jo briaunoje atidėta atkarpa, kurios ilgis lygus *c*. Iš atkarpos galų skirtingose dvisienio kampo plokštumose nubrėžtos statmenos tai briaunai atkarpos, kurių ilgiai lygūs *a* ir *b*. Rasime atstumą tarp tų atkarpų galų.

Sprendimas. Sakykime, kad plokštumų α ir β sankirtos tiesėje *a* yra atkarpa $AB = c$, iš taško *A* plokštumoje *a* iškeltas statmuo tiesei *a*, jame atidėta atkarpa $AC = a$. Analogiškai iš taško *B* plokštumoje β iškeltas statmuo tiesei *a* ir jame atidėta atkarpa $BD = b$ (4 pav.). Iš taško *B* plokštumoje α iškeliame statmenį tiesei *a* ir jame atidedame atkarpą $BF = a$. Kadangi keturkampis *ABFC* – stačiakampis, tai $CF = c$. Tiesės *FD* ortogonalioji projekcija plokštumoje β – tiesė *BD* yra statmena tiesei *a*, tai pagal trijų statmenų teoremą tiesė *FD* yra statmena tiesei *a*, taigi ji statmena ir tiesei *CF*, lygiagrečiai su tiese *a*.



4 pav.

Iš stačiojo trikampio *CFD* turime $CD^2 = CF^2 + FD^2$. Atkarpos *FD* ilgį rasime iš trikampio *FBD.* Kadangi plokštumose α ir β esančios atkarpos *BF* ir *BD* yra statmenos tiesei *a*, tai kampas *FBD* yra dvisienio kampo tarp šių plokštumų tiesinis kampas, t. y., $\angle FBD = 120^\circ$. Trikampiui *FBD* taikome kosinusų teoremą ir gauname, kad



5 pav.

$$FD^2 = BD^2 + BF^2 - 2BD \cdot BF \cos 120^\circ = a^2 + b^2 + ab.$$

Iš čia seka, kad $CD^2 = c^2 + a^2 + b^2 + ab.$

Ats.: $\sqrt{c^2+a^2+b^2+ab}.$

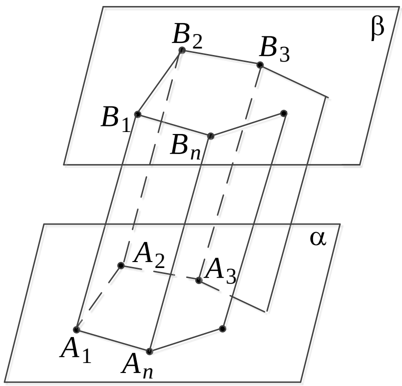
3 pavyzdys. Per tiesę, kurioje yra stačiojo trikampio *ABC* įžambinė *AB*, nubrėžta plokštuma α. Viršūnė *C* nutolusi nuo plokštumos atstumu lygiu 3. Rasime dvisienio kampo tarp plokštumos α ir trikampio *ABC* plokštumos didumą, jei trikampio statiniai lygūs $AC=10,\ BC=7{,}5.$

Sprendimas. Sakykime, kad taškas *D* yra taško *C* ortogonalioji projekcija plokštumoje α (5 pav.), t. y., taškas *D* yra plokštumoje α, ir $CD\perp\alpha.$ Kadangi taško atstumas nuo plokštumos yra taško atstumas iki jo ortogonaliosios projekcijos plokštumoje, tai $CD=3.$ Plokštumoje α iš taško *D* nuleiskime statmenį *DH* į tiesę *AB*. Kadangi tiesė *DH* yra tiesės *CD* ortogonalioji projekcija plokštumoje α ir $DH\perp AB,$ tai pagal trijų statmenų teoremą $CH\perp AB,$ t. y., atkarpa *CH* yra stačiojo trikampio *ABC* aukštinė. Trikampio *ABC* plotui *S* yra teisingos lygybės $S=\dfrac{AC\cdot BC}{2}=\dfrac{AB\cdot CH}{2},$ iš kurių randame $CH=\dfrac{AC\cdot BC}{AB}.$ Kadangi $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=12{,}5,$ tai $CH=\dfrac{10\cdot 7{,}5}{12{,}5}=6.$ Kadangi $DH\perp AB$ ir $CH\perp AB,$ tai kampas *CHD* yra ieškomojo dvisienio kampo tarp plokš–tumos α ir duotojo trikampio plokštumos tiesinis kampas. Iš stačiojo trikampio *CDH* randame

$$\sin\angle CHD=\frac{CD}{CH}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},$$

taigi dvisienis kampas lygus 30°.

Ats.: 30°.



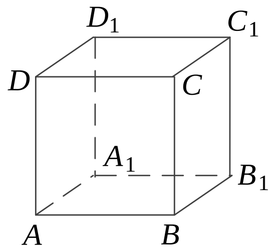
6 pav.

Sakykime, kad lygiagrečiose plokštumose α ir β yra du lygūs *n*-kampiai $A_1A_2...A_n$ plokštumoje α, ir $B_1B_2...B_n$ plokštumoje β, (6 pav.), be to, tiesės $A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n$ yra lygiagrečios. Tuomet keturkam–piai $A_1A_2B_2B_1,\ A_2A_3B_3B_2,\ ...,\ A_nA_1B_1B_n$ yra lygiagretainiai, todėl $A_1A_2\parallel B_1B_2,\ A_2A_3\parallel B_2B_3,\ ...,$

$A_nA_1 \parallel B_nB_1$. Briaunainis, kurį sudaro du lygūs n-kampiai $A_1A_2...A_n$ ir $B_1B_2...B_n$ ir n lygiagretainių $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$, yra vadinamas *n-kampe prizme*. Lygūs n-kampiai $A_1A_2...A_n$ ir $B_1B_2...B_n$ yra vadinami *prizmės pagrindais*, o minėtieji lygiagretainiai – *prizmės šoninėmis sienomis*. Lygiagrečios ir lygios atkarpos $A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n$ yra vadinamos prizmės *šoninėmis briaunomis*. Statmuo, nuleistas iš bet kurio vieno pagrindo taško į kito pagrindo plokštumą, vadinamas *prizmės aukštine*. Prizmė, kurios pagrindai yra lygiagretainiai, vadinama *gretasieniu*. Prizmė, kurios šoninės briaunos statmenos pagrindų plokš–tumoms, vadinama *stačiąja*; priešingu atveju prizmė yra *pasviroji*. Sta–čiosios prizmės aukštinė lygi šoninei briaunai. Stačioji prizmė vadinama *taisyklingąja*, jei jos pagrindai yra taisyklingieji daugiakampiai.

Prizmės šoninio paviršiaus plotas yra jos šoninių sienų plotų suma. Jis lygus prizmės pagrindo perimetro ir prizmės šoninės sienos aukštinės sandaugai. Prizmės tūris lygus jos pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai.

4 pavyzdys. Gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sienos $ABCD$ ir AA_1D_1D yra kvadratai, kurių kraštinės lygios d, $\angle A_1AB = \varphi$. Rasime gretasienio tūrį.

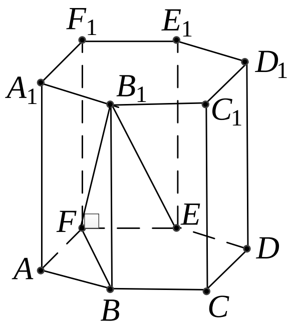


7 pav.

Sprendimas. Nubraižykime brėžinį (7 pav.) taip, kad tos gretasienio sienos, kurios yra kvadratai, būtų jo šoninės sienos. Tuomet gretasienis tampa stačiuoju, jo pagrindai yra rombai, kurių kraštinių ilgiai lygūs d, o kam–pas tarp kraštinių lygus φ. Taigi pagrindo plotas lygus $S = d^2 \sin\varphi$. Kadangi šoninės kraštinės yra statmenos pagrindo plokštumai ABB_1A_1, tai gretasienio aukštinė lygi $H = d$. Taigi gretasienio tūris $V = d^3 \sin\varphi$.

Ats.: $d^3 \sin\varphi$.

5 pavyzdys. Taisyklingosios šešiakampės prizmės $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ įstrižainės



8 pav.

$B_1F = 24$, $B_1E = 25$ (8 pav.). Rasime prizmės tūrį.

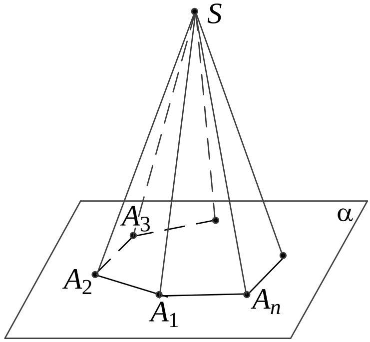
Sprendimas. Kadangi prizmės pagrin–dai – taisyklingieji šešiakampiai, tai šešia–kampio $ABCDEF$ kampas AFE lygus 120°, $\angle AFB = \angle ABF = 30°$, tai $\angle BFE = 90°$. Tiesė EF yra statmena tiesės B_1F ortogo–naliajai projekcijai prizmės pagrindo plokš–tumoje – tiesei BF, todėl pagal trijų statme–nų teoremą ji yra statmena tiesei B_1F, t. y., trikampis B_1FE yra statusis. Randame šešiakampio kraštinę

$$EF = \sqrt{B_1E^2 - B_1F^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7.$$

Kadangi apibrėžto apie taisyklingąjį šešiakampį apskritimo spindulys R lygus kraštinės ilgiui, tai $R = 7$, ir prizmės pagrindo plotas $S = 6 \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin 60° = \frac{147\sqrt{3}}{2}$. Prizmės aukštinę BB_1 randame iš stačiojo trikampio BB_1E. Kadangi $BE = 2R = 14$, tai $BB_1 = \sqrt{B_1E^2 - BE^2} = \sqrt{25^2 - 14^2} = \sqrt{429}$. Taigi prizmės tūris

$$V = SH = \frac{147\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{429} = \frac{441}{2}\sqrt{143}.$$

Ats.: $\frac{441}{2}\sqrt{143}$.



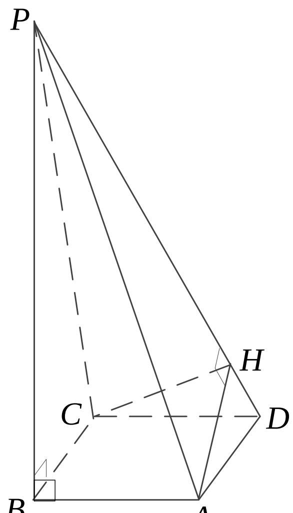
9 pav.

Nagrinėjame n-kampį $A_1A_2...A_n$, kurio visos viršūnės yra vienoje plokštumoje, ir tašką S, nepriklau–santį tai plokštumai. Tašką S sujun–kime atkarpomis su taškais $A_1A_2...A_n$, gauname n trikampių A_1A_2S, A_2A_3S, ..., A_nA_1S, ..., (9 pav.). Paviršius, sudarytas iš n-kampio $A_1A_2...A_n$ ir minėtų n trikampių, vadinamas *n-kampe piramide*. Daugiakampis $A_1A_2...A_n$ vadinamas piramidės pa–grindu, taškas S – *piramidės viršūne*, trikampiai A_1A_2S, A_2A_3S, ..., A_nA_1S, – *piramidės šoninėmis sienomis*, atkar–pos $A_1S, A_2S, ..., A_nS$ –

piramidės šoninėmis briaunomis. Statmuo iš pi–ramidės viršūnės S į pagrindo plokš–tumą, vadinamas *pira–midės aukštine*.

Piramidė yra vadinama taisyklin–gąja, jei jos pagrindas – taisyklingasis daugiakampis, o atkarpa, jungianti to daugiakampio centrą su piramidės viršūne, yra piramidės aukštinė. Taisyklingosios piramidės visos šoninės sienos yra lygūs lygiašoniai trikampiai, jų aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės S, yra lygios, jos vadinamos *piramidės apotemomis*. Taisyklingoji trikampė piramidė, kurios visos keturios sienos yra lygūs lygiakraščiai trikampiai, dar vadinama *taisyklinguoju tetraedru*. Piramidės šoninio paviršiaus plotas lygus visų jos šoninių sienų plotų sumai. Taisyklingosios piramidės šoninio paviršiaus plotas lygus jos pagrindo perimetro ir apotemos sandaugos pusei. Piramidės tūris lygus piramidės pagrindo ploto ir aukštinės sandaugos trečdaliui.

6 pavyzdys. Keturkampės piramidės $PABCD$ pagrindas yra kvadratas $ABCD$, kurio kraštinė lygi 1. Briauna PB yra statmena pagrindo plokštumai, o dvisienis kampas, kurio briauna yra PD, lygus 120°. Rasime piramidės tūrį.



10 pav.

Sprendimas. Visų pirma pastebėkime, kad trikampiai PAB ir PCB yra lygūs (nes jie yra statieji o jų atitinkami statiniai lygūs). Iš čia išplaukia, kad $PA = PC$. Trikampių PAD ir PCD atitinkamos kraštinės lygios, taigi šie trikampiai lygūs. Taigi jei atkarpa AH yra trikampio PAD aukštinė, nubrėžta į kraštinę PD (10 pav.), tai atkarpa CH yra trikampio PCD aukštinė, nubrėžta į tą pačią kraštinę PD. Iš čia seka, kad kampas AHC yra dvisienio kampo, kurio briauna yra tiesė PD, tiesinis kampas, t. y., $\angle AHC = 120°$. Žymėkime $AH = CH = h$ ir trikampiui AHC taikykime kosinusų teoremą:

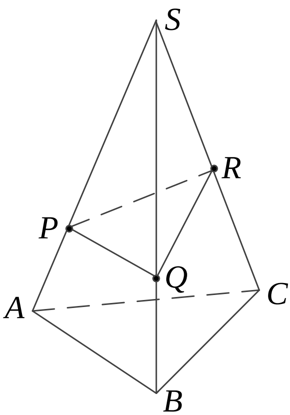
$$(\sqrt{2})^2 = h^2 + h^2 - 2h^2 \cos 120°, \quad \text{t. y.,} \quad 2h^2 + h^2 = 2, \quad \text{todėl} \quad h = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Tiesės PA ortogonalioji projekcija piramidės pagrindo plokštumoje yra tiesė BA. Kadangi tiesė AD yra statmena tiesei BA, tai pagal trijų statmenų teoremą tiesė *AD* yra statmena tiesei *PA*, taigi trikampis *PAD* yra statusis. Kadangi $PA = \sqrt{PB^2+1}$, $PD = \sqrt{PB^2+2}$, o $PA \cdot AD = PD \cdot AH$, (kiekviena šių sandaugų lygi dvigubam stačiojo trikampio *PAD* plotui), tai gauname lygybę $\sqrt{PB^2+1} \cdot 1 = \sqrt{PB^2+2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$, iš kurios seka, kad

piramidės aukštinė $PB = 1$. Taigi piramidės tūris $V = \frac{1}{3} AB^2 \cdot PB = \frac{1}{3}$.

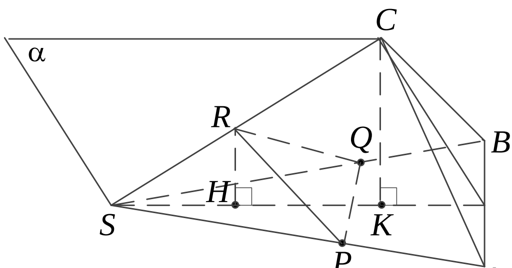
Ats.: $\frac{1}{3}$.

7 pavyzdys. Trikampės piramidės *SABC* briaunose *SA*, *SB* ir *SC* pažymėti taškai *P*, *Q* ir *R* (11 pav.). Įrodysime, kad piramidžių *SABC* ir *SPQR* tūrių santykis lygus $\frac{SA \cdot SB \cdot SC}{SP \cdot SQ \cdot SR}$.



11 pav.

Sprendimas. Nubrėškime brėžinį taip, kad piramidžių pagrindai būtų trikampiai *SAB* ir *SPQ* (12 pav.). Sakykime, kad atkarpos *CK* ir *RH* yra duotųjų piramidžių aukštinės. Jei V_1 ir V_2 – piramidžių *SABC* ir *SPQR* tūriai, o S_1 ir S_2 – trikampių *SAB* ir *SPQ* plotai, tai $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1 \cdot CK}{S_2 \cdot RH}$.

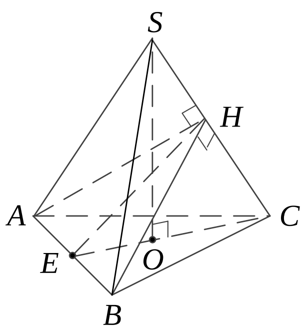


12 pav.

Kadangi $S_1 = \frac{1}{2} SA \cdot SB \sin \angle ASB$, o $S_2 = \frac{1}{2} SP \cdot SQ \sin \angle PSQ$, tai $\frac{S_1}{S_2} = \frac{SA \cdot SB}{SP \cdot SQ}$. Paste–bėkime, kad taškai *S*, *C*, *R*, *K* ir *H* yra plokštumoje α, kuri eina per tiesę *SC* ir yra statmena plokštumai, einančiai per taškus *S*, *A* ir *B*. Taškai *S*, *K* ir *H* yra ir plokštumoje α, ir plokštumoje, einančioje per taškus *S*, *A* ir *B*, taigi jie priklauso tų plokštumų sankirtos tiesei. Iš čia seka, kad trikampiai *SKC* ir *SHR* yra panašieji, todėl $\frac{CK}{RH}=\frac{SC}{SR}$. Iš gautųjų lygybių seka, kad $\frac{V_1}{V_2}=\frac{S_1\cdot CK}{S_2\cdot RH}=\frac{SA\cdot SB\cdot SC}{SP\cdot SQ\cdot SR}$, ką ir reikėjo įrodyti.

8 pavyzdys. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraš– tinės ilgis lygus *a*, dvisienis kampas tarp gretimų šoninių sienų lygus α. Rasime piramidės tūrį.

Sprendimas. Sakykime (13 pav.), kad taisyklingosios trikampės piramidės *SABC* pagrindas *ABC* yra lygiakraštis trikampis, kurio kraštinė lygi *a*. Jei atkarpa *AH* yra trikampio *ACS* aukštinė, tai kaip ir 6 pavyzdyje iš trikampių *ASC* ir *ASB* lygumo seka, kad atkarpa *BH* yra trikampio *ABS* aukštinė, taigi kampas *AHB* yra dvisienio kampo tarp piramidės šoninių sienų tiesinis kampas. Sakykime, kad taškas *E* – kraštinės *AB* vidurio taškas, atkarpa *SO* – piramidės aukštinė, tai taškas *O* yra atkarpoje *EC*. Statieji trikampiai *SOC* ir *EHC* turi tą patį smailųjį kampą *SCE*, todėl jie yra panašieji,



13 pav.

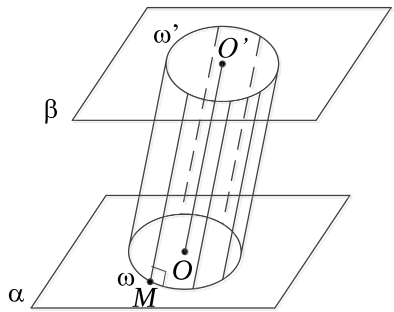
taigi $\frac{SO}{OC}=\frac{EH}{HB}$, t. y., $SO=\frac{EH\cdot OC}{HB}$. Kadangi $EC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $EH=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{a}{2}$, tai iš trikampio *EHC* turime $HC=\sqrt{EC^2-EH^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{a}{2}}=\frac{a}{2}\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\frac{a}{2}}$. Kadangi

$$OC=\frac{2}{3}EC=\frac{a}{\sqrt{3}},\ \text{tai}\ SO=\frac{\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}}{\frac{a}{2}\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\frac{a}{2}}}=\frac{a\operatorname{ctg}\frac{a}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\frac{a}{2}}}.$$ Taigi

piramidės tūris lygus $V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \operatorname{ctg}\frac{a}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\frac{a}{2}}} = \frac{a^3 \operatorname{ctg}\frac{a}{2}}{12\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\frac{a}{2}}}$.

Ats.: $\frac{a^3 \operatorname{ctg}\frac{a}{2}}{12\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\frac{a}{2}}}$.

Sakykime, kad α ir β – dvi skirtingos lygiagrečios plokštumos, plokštumoje α nubrėžtas apskritimas ω, kurio centras – taškas *O*, o spindulio ilgis lygus *R* (14 pav.). Per kiekvieną to apskritimo tašką *M* nu–brėžkime tiesę, statmeną plokštu–mai α. Visų šių tiesių atkarpos, esan–čios tarp plokštumų α ir β, sudaro cilindrinį paviršių, jos vadinamos *cilindrinio paviršiaus sudaromosio–mis*. Sudaromųjų galai, esantys plokštumoje α, yra apskritimas ω, o jų galai, esantys plokštumoje β, irgi yra apskritimas ω‘, lygus apskritimui ω, apskritimo ω‘ centras – taškas *O‘* atkarpa *OO‘* yra lygi ir lygiagreti su cilindrinio paviršiaus sudaromosiomis, ji vadinama *cilindrinio paviršiaus ašimi*. Kūnas, apribotas cilindriniu paviršiumi ir dviem skrituliais, kurių kontūrai yra apskritimai ω ir ω‘, yra vadinamas *ritiniu*. Cilindrinis paviršius yra vadinamas *ritinio šoniniu paviršiumi*, skrituliai – *ritinio pagrindais*, o cilindrinio paviršiaus sudaromosios – *ritinio sudaromo–siomis*. Ritinio visos sudaromosios yra lygios, jų ilgis lygus atstumui tarp plokštumų α ir β ir vadinamas *ritinio aukštinės ilgiu*. Plokštuma, einanti per ritinio aukštinę, kerta ritinį stačiakampiu, kuris vadinamas ritinio ašiniu pjūviu. Cilindrinio paviršiaus plotas yra vadinamas *ritinio šoninio paviršiaus plotu*. Jei ritinio pagrindo spindulio ilgis *R*, o aukštinės ilgis *H*, tai ritinio šoninio paviršiaus plotas apskaičiuojamas pagal formulę $S = 2\pi RH$. *Ritinio pilnuoju paviršiumi*

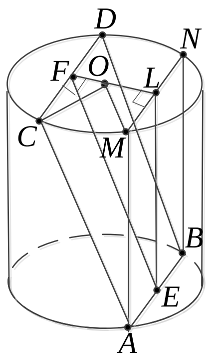


14 pav.

vadinamas jo šoninio paviršiaus ploto ir pagrindų plotų suma, ritinio pilnasis paviršius randamas pagal formulę $S_{p.p} = 2\pi R(R+H)$. Ritinio, kurio pagrindo spin–dulys *R* o aukštinė *H*, tūris *V* apskaičiuojamas pagal formulę $V = \pi R^2 H$.

9 pavyzdys. Ritinio pagrindo spindulys lygus 5. Plokštuma, kuri kerta ritinio ašį, jo pagrinduose iškerta stygas, kurių ilgiai lygūs 6 ir 8, o atstumas tarp jų lygus 9. Rasime ritinio paviršiaus plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad ritinį kertanti plokštuma jo pagrindus kerta stygomis $AB = 6$, $CD = 8$ (15 pav.). Kadangi ritinio pagrindai yra lygiagrečiose plokštumose, tai pagal 2.4 teoremą tiesės *AB* ir *CD* lygiagrečios, taigi keturkampis *ABDC* yra lygiašonė trapecija. Taigi atstumas tarp tiesių *AB* ir *CD* lygus šios trapecijos aukštinės ilgiui. Sakykime, kad atkarpa *MN* yra stygos *AB* ortogonalioji projekcija kito ritinio pagrindo plokštumoje, taškai *E*, *F* ir *L* yra atitinkamai atkarpų *AB*, *CD* ir *MN* vidurio taškai, o taškas *O* – ritinio pagrindo centras. Iš stačiųjų trikampių *OLM* ir *OFC* randame



15 pav.

$$OL = \sqrt{OM^2 - LM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$OF = \sqrt{OC^2 - CF^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

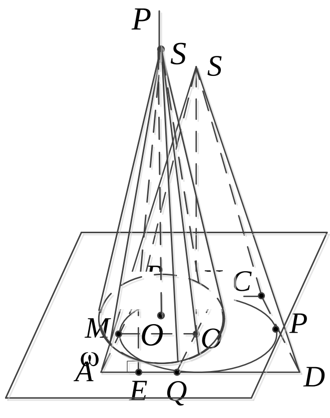
taigi $LF = 7$. Tuomet iš trikampio *EFL* randame ritinio aukštinę

$EL = \sqrt{EF^2 - LF^2} = \sqrt{9^2 - 7^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Tuomet ritinio viso paviršiaus plotas

$$S = 2\pi \cdot 5 \cdot (5 + 4\sqrt{2}) = 10\pi(5 + 4\sqrt{2}).$$

Ats.: $10\pi(5 + 4\sqrt{2})$.

Sakykime, kad plokštumoje α yra apskritimas ω, kurio centras – taškas *O*, o spindulio ilgis lygus *R*. Nubrėžkime tiesę *OP*, statmeną plokštumai α, ir joje paimame tašką *S*, kurį sujungiame tiesės atkarpomis su kiekvienu apskritimo ω tašku (16 pav.). Paviršius, kurį sudaro



16 pav. 17 pav.

minėtos atkarpos, vadinamas *kūginiu paviršiumi*, tos atkarpos *kūginio paviršiaus sudaromosiomis*, o taškas S – *kūginio paviršiaus viršūne*. *Kūgiu* vadina–mas kūnas, kurį riboja kūginis paviršius ir skritulys, kurio kontūras – apskritimas ω. Šis skritulys yra vadinamas *kūgio pagrindu*. Atkarpa OS yra vadinama *kūgio aukštine*, o tiesė OP – *kūgio ašimi*. Kūginis paviršius yra vadinamas kūgio šoniniu paviršiumi. Jei kūgio pagrindo spindulio ilgis R, o sudaromosios ilgis l, tai kūgio šoninio paviršiaus plotas S lygus $S = \pi Rl$. Kūgio, kurio pagrindo spindulys lygus R, o aukštinės ilgis H, tūris V lygus pagrindo ploto ir aukštinės sandaugos
trečdaliui, t. y. $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

10 pavyzdys. Kūgis, kurio tūris lygus $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$, įbrėžtas į piramidę, kurios pagrindas yra lygiašonė trapecija su pagrindais 2 ir 8. Rasime kampą tarp piramidės šoninių sienų ir pagrindo plokštumos.

Sprendimas. Jei kūgis įbrėžtas į piramidę, tai kūgio ir piramidės viršūnės sutampa, keturios kūgio sudaromosios yra piramidės sienose, o kūgio pagrindas yra apskritimas, įbrėžtas į piramidės pagrindą (17 pav.). Sakykime, kad piramidės pagrindas yra trapecija $ABCD$, kurioje $AD = 8,\ \ BC = 2$. Kadangi kūgio pagrindas yra įbrėžtas į šią trapeciją, o į keturkampį apskritimas įbrėžiamas tik tada, kai jo priešingų kraštinių ilgių sumos yra lygios, tai iš lygybių
$$AB + CD = AD + BC = 10,\ \ AB = BC$$
gauname, kad trapecijos šoninių kraštinių ilgiai lygūs 5. Tuomet lengvai surandame trapecijos aukštinę: brėžiame $BE \perp AD$, tuomet
$$AE = \frac{1}{2}(AD - BC) = 3,$$
ir iš stačiojo trikampio AEB turime $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = 4$. Jei taškas S yra piramidės ir kūgio viršūnė, o taškas O – kūgio pagrindo centras, tai tiesė SO yra statmena trapecijos $ABCD$ plokštumai. Sakykime, kad kūgio pagrindas liečia trapecijos kraštines AB, BC, CD ir AD atitinkamai taškuose M, N, P ir Q. Kadangi tiesė OM yra tiesės SM ortogonalioji projekcija piramidės pagrindo plokštumoje ir OM yra statmena trapecijos briaunai AB, tai pagal trijų statmenų teoremą tiesė AB yra

statmena tiesei SM, taigi kampas SMO yra dvisienio kampo tarp plokštumų ABS ir $ABCD$ tiesinis kampas. Analogiškai kampai SNO, SPO ir SQO yra dvisienių kampų tarp kitų piramidės šoninių sienų ir pagrindo plokštumos tiesiniai kampai. Iš stačiųjų trikampių SOM, SON, SOP ir SOQ lygumo išplaukia, kad $\angle SMO = \angle SNO = \angle PSO = \angle SQO$, tai visos piramidės šoninės sienos su jos pagrindu sudaro vienodus kampus. Iš stačiojo trikampio SOM turime, kad $\text{tg}\angle SMO = \dfrac{OS}{OM}$. Atkarpa OM yra įbrėžto į trapeciją apskritimo spindulys, kuris lygus aukštinės pusei, t. y., $OM = 2$. Kūgio aukštinės OS ilgį rasime iš kūgio tūrio formulės: $OS = \dfrac{3V}{\pi OM^2} = \dfrac{3\dfrac{8\pi\sqrt{3}}{3}}{\pi \cdot 2^2} = 2\sqrt{3}$. Taigi $\text{tg}\angle SMO = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, taigi ieškomojo kampo didumas lygus 60°.

Ats.: 60°.

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras yra taškas O. Per taškus A, B ir O nubrėžta plokštuma α. Ar taškas C irgi yra plokštumoje α? Atsakymą pagrįskite.

2. Dvisienis kampas tarp plokštumų α ir β lygus 60° plokštumose α ir β atitinkamai yra taškai A ir B, nutolę nuo dvisienio kampo briaunos vienodu atstumu lygiu 6. Atstumas tarp tų taškų ortogonaliųjų projekcijų dvisienio kampo briaunoje lygus 4. Raskite atkarpos AB ilgį.

3. Stačiojo trikampio ABC statinių ilgiai $AC = 5$, $BC = 12$. Per tiesę, kurioje yra trikampio įžambinė, nubrėžta plokštuma, sudaranti su trikampio ABC plokštuma dvisienį kampą lygų 60°. Raskite atstumą nuo taško C iki tos plokštumos.

4. Gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sienos $ABCD$ ir CC_1D_1D yra stačiakampiai, kurių kraštinės $CD = 4,$ $AD = 6,$ $DD_1 = 3,$ $\angle A_1AD = 30°$. Raskite gretasienio tūrį.

5. Taisyklingojoje šešiakampėje prizmėje $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ $C_1E = 3,$ $\angle FC_1E = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}.$ Raskite prizmės tūrį.

6. Piramidės *SABCD* pagrindas – kvadratas *ABCD*, kurio kraštinė lygi *a*. Briauna *PA* yra statmena pagrindo plokštumai, dvisienio kampo tarp plokštumų *PBC* ir *PCD* didumas lygus 135°. Raskite piramidės tūrį.

7. Piramidės *SABCD* pagrindas – lygiagretainis *ABCD*, taškas *K* yra briaunos *SC* vidurio taškas. Piramidės tūris lygus 20. Raskite piramidės dalių, į kurias ją dalija per taškus *B*, *D* ir *K* einanti plokštuma, tūrius.

8. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinės ilgis lygus *a*, dvisienis kampas tarp gretimų šoninių sienų lygus α. Rasime piramidės tūrį.

9. Ritinio pagrindo spindulys lygus 7, plokštuma, kertanti ritinio ašį, jo pagrinduose iškerta stygas *AB* ir *CD* taip, kad keturkampis *ABDC* yra kvadratas, kurio kraštinė lygi 10. Raskite ritinio pilnojo paviršiaus plotą.

10. Piramidės pagrindas yra trapecija, kurios vienas kampas lygus 60°, trys kraštinės yra lygios, o jų ilgiai lygūs 3. Apie piramidę apibrėžtas kūgis, kurio tūris lygus 9π. Raskite kampus tarp piramidės šoninių briaunų ir pagrindo plokštumos.

VI. JUDĖJIMO UŽDAVINIAI

Antanas Apynis

Studijuodami šią temą, sugrįšime prie gerai pažįstamų, nors ir ne visų labai mėgstamų, tekstinių uždavinių. Sprendžiant juos gana sunku būna pasirinkti uždavinio formalizavimo strategiją. Kitaip sakant, nelengva apsispręsti, kokiais simboliais ir ką pažymėti bei kokią prasmę tiems simboliams suteikti. Ne ką lengviau ir sąryšius (išplaukiančius iš uždavinio sąlygos) tarp žinomų ir nežinomų dydžių užrašyti lygtimis, nelygybėmis ar dar kaip nors kitaip.

Kalbant apie vadinamuosius judėjimo uždavinius natūralu priminti (ir, aišku, prisiminti), kad jų sąlygos tik labai iš tolo primena tikrą realybę. Konstruodami tokių uždavinių matematinius modelius, visai nekreipiame dėmesio į daugybę tikrame pasaulyje svarbių dalykų. Upė (dažniausiai) tėva kreivė, ja plaukiantis laivas – tik taškas. Tašku laikome ir miestą, kaimą ar kitą gyvenamąją vietovę. Judančių kūnų (aišku, taškų!) greitis kinta tolygiai, o gana dažnai jis pastovus. Keisdamas judėjimo kryptį, objektas visai nesugaišta laiko.

Vis dėlto, kad ir kiek netobulos būtų, tekstinių uždavinių sąlygos, sužadina vaizduotę, o jų analizė padeda rasti raktą į realybės problemų sprendimą ir priartina kiekvieną prie minčių apie matematikos taikymo galimybes ir tam tikras tų galimybių ribas.

Tema ne nauja, galėtume sakyti – mokyklinė, todėl iš karto pereikime prie konkrečių uždavinių.

1 pavyzdys. Du keltai iš prieplaukų A ir B, esančių priešinguose upės krantuose, išplaukia vienu metu ir susitinka 300 m atstumu nuo A. Ir vienas, ir kitas keltas, nuplaukęs į savo prieplauką, tuojau pat grįta atgal. Dabar jie susitinka 400 m atstumu nuo B.

Apskaičiuokime atstumą tarp prieplaukų A ir B.

Sprendimas. Tegu s yra ieškomas atstumas (metrais) tarp prieplaukų A ir B. Kelto, išplaukusio iš prieplaukos A, greitį (m/h) pažymėkime v_A, o kito kelto (išplaukusio iš B) – v_B. Tada (pagal uždavinio sąlygą) galėtume parašyti dvi lygybes:

$$\frac{300}{v_A} = \frac{s-300}{v_B} \quad \text{ir} \quad \frac{(s-300)+400}{v_A} = \frac{300+(s-400)}{v_B}.$$

Iš pirmos lygybės gauname, kad

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{300}{s - 300},$$

o iš antros gauname, kad

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{s + 100}{s - 100}.$$

Vadinasi, būtinai turi galioti lygybė

$$\frac{300}{s - 300} = \frac{s + 100}{s - 100}.$$

Atlikę veiksmus, gausime kvadratinę lygtį $s^2 - 500s = 0$, turinčią du sprendinius – skaičius 0 ir 500. Pagal uždavinio prasmę tinka tik 500.

Taigi atstumas tarp *A* ir *B* yra 500 metrų.

Ats.: 500 m.

Lengva suprasti, kad uždavinio sąlygoje pateiktos informacijos nepakanka nei keltų greičiui rasti, nei kiek laiko reikia keltams nuplaukti iš vienos prieplaukos iki kitos. Galėtume tik pasakyti, kad kelto, išplaukusio iš prieplaukos *A*, greitis yra 1,5 karto didesnis už antrojo kelto greitį.

Taip pat aišku, kad nagrinėtą uždavinį galima išspręsti ir šiek tiek kitaip. Jeigu įvestume dar du dydžius: t_1 – laiką iki pirmo keltų susitikimo ir t_2 – laiką nuo pirmo susitikimo iki antro, galėtume parašyti šias lygtis:

$$v_A \cdot t_1 = 300, \quad v_B \cdot t_1 = s - 300, \quad v_A \cdot t_2 = (s - 300) + 400 \quad \text{ir}$$

$$v_B \cdot t_2 = s - 300 + (s - 400).$$

Išsprendę jų sistemą, gautume tą patį rezultatą: $s = 500$ m.

2 pavyzdys. Keliaudamas turistas plaukė valtimi ir ėjo pėsčiomis. Valtimi jis nuplaukė 90 km, o pėsčiomis nuėjo 10 km. Be to, eidamas jis sugaišo 4 h mažiau negu plaukdamas.

Jeigu turistas būtų ėjęs tiek laiko, kiek jis plaukė valtimi, o valtimi būtų plaukęs tiek laiko, kiek ėjo pėsčiomis, tai būtų nuėjęs tokį pat atstumą kaip ir nuplaukęs valtimi.

Kiek laiko turistas ėjo pėsčiomis ir kiek laiko plaukė valtimi?

Sprendimas. Ieškomą kelionės laiką einant pėsčiomis pažymėkime t_p, o plaukiant valtimi t_v.

Turisto keliavimo greitį einant pėsčiomis pažymėkime v_p, o plaukiant valtimi v_v.

Pagal sąlygą,

$$v_v \cdot t_v = 90, \quad v_p \cdot t_p = 10, \quad t_v - t_p = 4, \quad v_p \cdot t_v = v_v \cdot t_p.$$

Iš pirmųjų dviejų lygčių gauname, kad

$$v_v = \frac{90}{t_v}, \quad v_p = \frac{10}{t_p},$$

o tada iš ketvirtos lygties randame sąryšį tarp t_v ir t_p:

$$\frac{10}{t_p} \cdot t_v = \frac{90}{t_v} \cdot t_p \Rightarrow t_v = 3t_p.$$

Įrašę į trečią lygtį, gauname:

$$3t_p - t_p = 4 \Rightarrow t_p = 2.$$

Taigi $t_p = 2$ h, $t_v = 6$ h.

Ats.: Pėsčiomis keliavo 2 h, o valtimi plaukė 6 h.

3 pavyzdys. Iš vietovių *A* ir *B* vienu metu priešpriešiais išėjo du pėstieji. Kai pirmasis keleivis nuėjo pusę kelio, antrajam iki kelionės tikslo (vietovės *A*) buvo likę 24 km. Kai antrasis nuėjo pusę kelio, pirmajam iki kelionės tikslo (vietovės *B*) reikėjo nueiti dar 15 km.

Kiek kilometrų bus likę antrajam keleiviui, kai pirmasis keleivis pasieks vietovę *B*?

Sprendimas. Tegu *s* yra atstumas tarp vietovių *A* ir *B*. Nors tiesiogiai ir nepasakyta, turėsime mintyje, kad ir vienas keleivis, ir kitas keleivis visą kelią ėjo tuo pačiu pastoviu greičiu. Todėl remsimės gana lengvai paaiškinamu (ir suprantamu) teiginiu, kad pirmojo ir antrojo keleivio ėjimo greičių santykis yra lygus per tą patį laiką nueitų kilometrų santykiui. Įsigilinę į uždavinio sąlygą, gauname du tokius santykius:

$$\frac{0{,}5s}{s-24} \text{ ir } \frac{s-15}{0{,}5s}.$$

Aišku, kad jie lygūs. Spręsdami lygtį

$$\frac{0{,}5s}{s-24}=\frac{s-15}{0{,}5s},$$

gauname:

$$0{,}25s^2=(s-15)(s-24),$$

$$0{,}75s^2-39s+360=0,$$

$$s^2-52s+480=0.$$

Ši lygtis turi du sprendinius – skaičius 12 ir 40. Tačiau $s=12$ nesiderina su uždavinio sąlyga. Vadinasi, $s=40$.

Belieka rasti atstumą, kuris dar buvo likęs antrajam keleiviui, kai pirmasis baigė kelionę. Pažymėję ieškomą atstumą *x*, galėtume sudaryti santykį $\frac{s}{s-x}$, kuris yra toks pat kaip ir santykiai $\frac{0{,}5s}{s-24}$ ir $\frac{s-15}{0{,}5s}$. Įrašę $s=40$, gautume, kad

$$\frac{40}{40-x}=\frac{20}{16}=\frac{25}{20}.$$

Iš čia $s=8$.

Taigi ieškomas atstumas yra 8 km.

Ats.: 8 km.

Aišku, kad ir šį uždavinį galima išspręsti kitaip.

Nekeisdami atstumo tarp *A* ir *B* žymens *s*, pirmojo keleivio (einančio iš *A* į *B*) ėjimo greitį pažymėkime v_1, antrojo keleivio – v_2, o ieškomą atstumą pažymėkime *x*. Tada (pagal sąlygą) iš lygybių

$$\frac{0{,}5s}{v_1}=\frac{s-24}{v_2},\quad \frac{0{,}5s}{v_2}=\frac{s-15}{v_1},\quad \frac{s}{v_1}=\frac{s-x}{v_2}$$

gauname, kad

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{0{,}5s}{s-24}=\frac{s-15}{0{,}5s}=\frac{s}{s-x}.$$

Iš karto atkreipkime dėmesį į tai, kad turi būti $s>24$. Tada išsprendę lygčių sistemą $\begin{cases}\frac{0{,}5s}{s-24}=\frac{s-15}{0{,}5s},\\ \frac{0{,}5s}{s-24}=\frac{s}{s-x},\end{cases}$

gauname vienintelį sprendinį: $s = 40,\quad x = 8.$

Visiškai analogiškai galima išspręsti šį uždavinį įvedus tokius žymėjimus:

s – atstumas tarp A ir B;

t_1 – laikas, per kurį pirmasis keleivis nueina pusę kelio nuo A iki B;

t_2 – laikas, per kurį antrasis keleivis nueina pusę kelio nuo B iki A.

x – ieškomas atstumas, kurį dar turės nueiti atrasis keleivis, kai pirmasis pasieks kelionės tikslą.

Šiuo atveju galėtume sudaryti šias pradines lygybes:

$$\frac{0{,}5s}{t_1} = \frac{s-24}{t_2},\quad \frac{0{,}5s}{t_2} = \frac{s-15}{t_1} \quad \text{ir} \quad \frac{s}{t_1} = \frac{s-x}{t_2}.$$

O tada, remdamiesi lygybių sistema

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{0{,}5s}{s-24} = \frac{s-15}{0{,}5s} = \frac{s}{s-x},$$

gautume jau išnagrinėtą lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{0{,}5s}{s-24} = \dfrac{s-15}{0{,}5s}, \\[2mm] \dfrac{0{,}5s}{s-24} = \dfrac{s}{s-x}. \end{cases}$$

4 pavyzdys. Du robotai juda (pastoviu greičiu) ratu ta pačia kryptimi. Pirmasis robotas ratą apeina trimis sekundėmis greičiau už antrąjį ir kas 90 sekundžių jį pasiveja.

Per kiek laiko antrasis robotas apeina vieną ratą?

Sprendimas. Tegu s yra rato ilgis (metrais), o v_1 ir v_2 – atitinkamai pirmojo ir antrojo roboto judėjimo greitis (m/s). Pagal uždavinio sąlygą,

$$\frac{s}{v_2} - \frac{s}{v_1} = 3 \quad \text{ir} \quad 90(v_1 - v_2) = s.$$

Ieškomas laikas yra $\dfrac{s}{v_2}$, o $\dfrac{s}{v_1}$ yra laikas, per kurį pirmasis robotas apeina visą ratą. Šiuos dydžius pažymėkime atitinkamai t_2 ir t_1.

Kadangi $\displaystyle \frac{s}{v_2} - \frac{s}{v_1} = \frac{s(v_1 - v_2)}{v_1 v_2} = \frac{s}{v_1 v_2} \cdot \frac{s}{90} = \frac{1}{90} \cdot \frac{s}{v_1} \cdot \frac{s}{v_2},$

gauname lygtį

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{90} t_1 t_2.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$t_1 = \frac{90t_2}{90 + t_2}.$$

Įrašę šią išraišką į lygtį $t_2 - t_1 = 3,$ gauname:

$$t_2 - \frac{90t_2}{90 + t_2} = 3 \Rightarrow t_2^2 - 3t_2 - 270 = 0 \Rightarrow t_2 \in \{-15; 18\}.$$

Aišku, kad ieškomas laikas yra 18 sekundžių.

Ats.: 18 s.

5 pavyzdys. Dviratininkas važiuoja plentu, kuriuo kas 12 min viena ir kita kryptimi važiuoja to paties maršruto autobusai. Kas 4,5 km dviratininką pralenkia ta pačia kryptimi važiuojantys autobusai, o kas 9 min – grįžtantys atgal autobusai.

Kokiu greičiu važiuoja dviratininkas?

Sprendimas. Pirmiausia turėtume prisiminti, kad tokio pobūdžio uždaviniai sprendžiami turint mintyje, kad ir dviratininkas, ir kiekvienas autobusas važiuoja pastoviu greičiu.

Ieškomą dviratininko greitį pažymėkime v (km/h), o autobuso greitį v_a (km/h).

Tegu M yra taškas, kuriame dviratininką pasivijo ta pačia kryptimi važiuojantis autobusas (žr. 1 pav.). Kitas autobusas (esantis taške A) dviratininką pasivys taške N, kuris yra už 4,5 km nuo M. Ir tai įvyks po $\frac{4,5}{v}$ h. Per tą

1 pav.

laiką autobusas nuvažiuos $v_a \cdot \frac{4,5}{v}$ km ir atsidurs taške N. Aišku, kad atstumas tarp A ir M yra $0,2v_a$ km. Gauname lygtį

$$0,2v_a + 4,5 = v_a \cdot \frac{4,5}{v}. \qquad (1)$$

Dabar tarkime, kad K yra taškas, kuriame dviratininkas susitiko su grįž–

2 pav.

tančiu autobusu (žr. 2 pav.)

Kitas autobusas, su kuriuo po 9 min susitiks dviratininkas taške *L*, tuo momentu yra taške *B*, kuris yra už $0{,}2v_a$ km nuo *K*.

Per 9 min dviratininkas nuvažiuoja $0{,}15v$ km, o autobusas – $0{,}15v_a$ km. Taigi turi galioti lygybė

$$0{,}2v_a = 0{,}15v + 0{,}15v_a.$$

Iš jos gauname, kad $v_a = 3v.$ Tada iš (1) lygties gauname, kad

$$0{,}2 \cdot 3v + 4{,}5 = 3v \cdot \frac{4{,}5}{v},$$

o iš čia – $v = 15$.

Ats.: 15 km/h.

6 pavyzdys. Vienas traukinys važiuoja iš *A* į *B*, o kitas – iš *B* į *A*. Jeigu traukinys iš *A* išvyktų 2 valandomis anksčiau negu traukinys iš *B*, jie susitiktų pusiaukelėje tarp *A* ir *B*. O jeigu abu traukiniai išvyktų vienu metu, po 2 valandų atstumas tarp jų būtų lygus ketvirtadaliui atstumo tarp *A* ir *B*.

Kiek laiko traukiniai užtrunka kelyje?

Sprendimas. Tegu *s* yra atstumas tarp *A* ir *B*, t_A – laikas, per kurį traukinys iš *A* nuvažiuoja į *B*, o t_B – laikas, per kurį traukinys iš *B* nuvažiuoja į *A*. Traukinio, važiuojančio iš *A* į *B*, greitį pažymėkime v_A, o kito traukinio greitį pažymėkime v_B. Tada (išnagrinėję uždavinio sąlygą) gausime tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \dfrac{0{,}5s}{v_A} - \dfrac{0{,}5s}{v_B} = 2, \\ s - (2v_A + 2v_B) = 0{,}25s. \end{cases}$$

Atlikę veiksmus gausime sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{s}{v_A} - \dfrac{s}{v_B} = 4, \\ v_A + v_B = 0{,}375s. \end{cases}$$

Aišku, kad $t_A = \dfrac{s}{v_A}$ ir $t_B = \dfrac{s}{v_B}$. Taigi $t_A = t_B + 4$.

Antrą sistemos lygtį padalįję iš s, gausime:

$$\frac{v_A}{s}+\frac{v_B}{s}=0{,}375,\quad \frac{1}{t_A}+\frac{1}{t_B}=0{,}375,\quad \frac{1}{t_B+4}+\frac{1}{t_B}=0{,}375,$$

$$3t_B^2-4t_B-32=0.$$

Ši lygtis turi tik vieną teigiamą sprendinį – skaičių 4.

Vadinasi, $t_B=4$h, $t_A=8$h.

Ats.: 8 h ir 4 h.

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Turistas, plaukdamas valtimi upe prieš srovę, ties tiltu pametė gelbėjimosi ratą, bet šį praradimą pastebėjo tik po 20 minučių. Jis tuojau pat apsisuko ir, plaukdamas pasroviui, gelbėjimosi ratą pasivijo 2 km atstumu nuo tilto. Raskite valties ir upės tėkmės greitį, jei žinoma, kad valties greitis yra 2 kartus didesnis už upės tėkmės greitį.

2. Studentas išėjo iš namų į geležinkelio stotį, esančią už 10,5 km. Po pusvalandžio iš tų pačių namų tuo pačiu maršrutu 4 km/h greičiu išėjo jo brolis ir pasivijęs perdavė jam užmirštą daiktą. Brolis tuojau pat apsisuko ir nuėjo namo. Studentas pasiekė stotį tuo pačiu metu, kai brolis sugrįžo namo. Kokiu greičiu ėjo studentas?

3. Iš vietovių A ir B vienu metu priešpriešiais išėjo du pėstieji. Kai pirmas nuėjo ketvirtį kelio nuo A iki B, antram iki pusiaukelės dar buvo likę 1,5 km, o kai antras buvo pusiaukelėje, pirmas buvo 2 km atstumu nuo antro. Raskite atstumą tarp A ir B, jei žinoma, kad antras pėsčiasis ėjo greičiau už pirmą.

4. Pėsčiasis eina plento kelkraščiu 5 km/h greičiu. Kas 27 min jį pralenkia reisiniai autobusai, o kas 1,8 km pro jį pravažiuoja grįžtantys į maršruto pradžią reisiniai autobusai. Raskite reisinių autobusų eismo laiko intervalą, jeigu žinoma, kad jis vienodas abiem kryptimis.

5. Du sportininkai kartu pradėjo bėgti uždaru ratu ir bėgo pastoviu greičiu. Pirmas sportininkas ratą apibėga 5 sekundėmis greičiau už antrąjį. Jis po 30 sekundžių (nuo starto) atsidūrė vėl greta antrojo sportininko. Po kelių sekundžių sportininkai susitiktų, jeigu vienu metu pradėtų bėgti priešingomis kryptimis?

6. Iš vietovės *A* išėjo pėsčiasis, o po 3,5 valandos jam pavymui išvažiavo dviratininkas, kuris pėstįjį pasivijo vietovėje *B*. Kitą dieną pėsčiasis ir dviratininkas išvyko iš *A* ir *B* priešpriešiais ir susitiko po 100 minučių. Kiek laiko reikia dviratininkui nuvažiuoti iš *A* į *B*?

7. Trys dviratininkai tuo pačiu maršrutu vienos valandos intervalais išvyksta į kelionę. Pirmojo dviratininko greitis 12 km/h, o antrojo – 10 km/h. Trečiasis dviratininkas aplenkė pirmąjį po 2 valandų, kai aplenkė antrąjį dviratininką. Raskite trečiojo dviratininko greitį.

8. Iš vietovės *A* į vietovę *B* per vienodus laiko tarpus išvažiavo 3 automobiliai ir vienu metu pasiekė *B*. Tuojau pat visi trys automobiliai išvažiavo į vietovę *C*, esančią už 120 km nuo *B*. Pirmasis automobilis į vietovę *C* atvyko viena valanda vėliau už antrąjį. Trečiasis automobilis, atvykęs į *C*, tuojau pat apsisuko ir nuvažiavo atgal į *B*. Pirmąjį automobilį jis susitiko 40 km atstumu nuo *C*. Raskite pirmojo automobilio greitį.

9. Iš miestų *A* ir *B* priešpriešiais išvyko du traukiniai. Be to, antrasis traukinys išvyko vėliau negu pirmasis. Abu prasilenkė pusiaukelėje. Jeigu abu traukiniai būtų išvykę vienu metu, tai praėjus laikui, kurį vėlavo antrasis, atstumas tarp jų būtų sudaręs 25 % atstumo tarp *A* ir *B*. Kiek kartų antrojo traukinio greitis yra didesnis už pirmojo traukinio greitį?

10. Du traukiniai vienu metu išvyko iš miestų *A* ir *B* ta pačia kryptimi. Į miestą *C* jie atvyko vienu metu. Atstumas tarp *A* ir *B* yra 120 km, miestas *B* yra tarp *A* ir *C*. Jeigu vienas traukinys važiuotų 12 km/h mažesniu greičiu, o kitas – 9 km /h mažesniu greičiu, į miestą *C* atvyktų vėl kartu, tik 2 valandomis vėliau. Raskite kiekvieno traukinio greitį.

VII. TRIGONOMETRINĖS LYGTYS

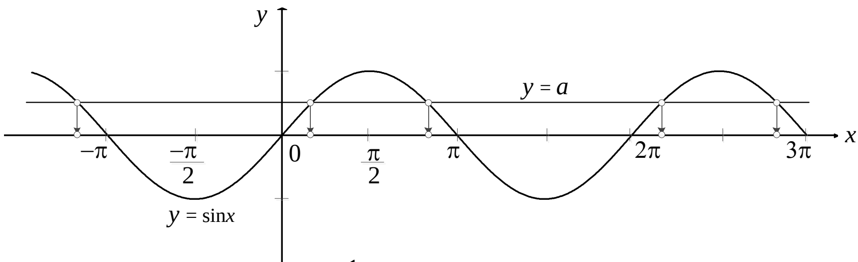
Antanas Apynis

Trigonometrinės lygtys gana lengvai atpažįstamos. Kur kas sunkiau susigaudyti, nuo ko pradėti jas spręsti ir kaip užrašyti gautą sprendinių aibę.

Mažiausiai rūpesčių yra su vadinamosiomis *paprasčiausiomis trigonometrinėmis lygtimis* $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$; $a \in \mathbf{R}$. Todėl nuo jų ir pradėkime.

1. Lygties $\sin x = a$, $a \in \mathbf{R}$, **sprendinių aibė.** Žinome, kad funkcija $y = \sin x$ yra apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje (intervale $(-\infty; +\infty)$), o jos reikšmių aibė yra uždaras intervalas [–1; 1]. Vadinasi, lygtis $\sin x = a$ neturi sprendinių, kai $|a| > 1$.

Toliau nagrinėkime lygtį $\sin x = a$, $a \in [-1; 1]$. Aišku, kad kiekvieną šios lygties sprendinį (realųjį skaičių) galima interpretuoti kaip sinusoidės $y = \sin x$, $x \in (-\infty; +\infty)$, ir tiesės $y = a$, $x \in (-\infty; +\infty)$, susikirtimo taško abscisę (*žr.* 1 pav.).

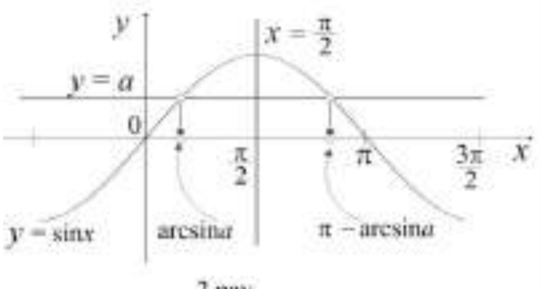


1 pav.

Taip pat aišku, kad intervale $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ši lygtis turi tik vieną sprendinį. Jis yra $x = \arcsin a$.

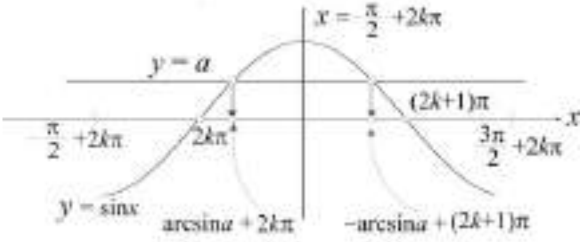
Tiesė $x = \frac{\pi}{2}$ yra sinusoidės simetrijos ašis, todėl intervalui $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ priklausantis lygties $\sin x = a$ sprendinys yra

$$x = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin a\right) = \pi - \arcsin a \text{ (žr. 2 pav.).}$$



2 pav.

Remiantis sinuso periodiškumu, gautus rezultatus nesunku perkelti į bet kurį intervalą $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$ (*žr.* 3 pav.). Lygties $\sin x = a,\quad a \in [-1; 1]$, sprendinys intervale $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ yra $x = \arcsin a + 2k\pi$, o intervale $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ – $x = (\pi - \arcsin a) + 2k\pi = \ = -\arcsin a + (2k+1)\pi$.



3 pav.

Abu šiuos sprendinius galima užrašyti viena formule:

$$x = (-1)^n \arcsin a + n\pi, \quad n \in \{2k;\ 2k+1\}.$$

Vadinasi, lygties $\sin x = a,\quad a \in [-1; 1]$, sprendinių aibė nusakoma formule

$$x = (-1)^n \arcsin a + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{1}$$

Atkreipkime dėmesį į tris atskiruosius atvejus: $a = -1$, $a = 0$ ir $a = 1$.

Kadangi

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad \arcsin 0 = 0, \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2},$$

tai (remdamiesi (1) formule) gauname, kad:

- lygties $\sin x = -1$ sprendinius galima užrašyti formule

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}; \tag{2}$$

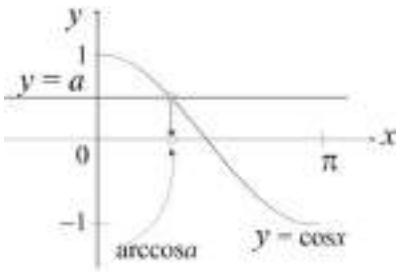
- lygties $\sin x = 0$ sprendinius galima užrašyti formule

$$x = k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}; \tag{3}$$

- lygties $\sin x = 1$ sprendinius galima užrašyti formule

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{4}$$

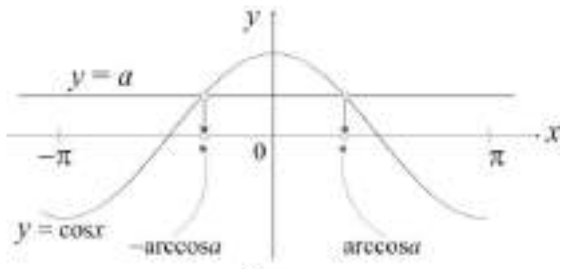
2. Lygties $\cos x = a$, $a \in \mathbf{R}$, sprendinių aibė. Funkcija $y = \cos x$ yra apibrėžta visoje realiųjų skaičių tiesėje, t. y. intervale $(-\infty; +\infty)$, o jos reikšmių aibė yra uždaras intervalas $[-1; 1]$. Vadinasi, lygtis $\cos x = a$ tikrai neturi sprendinių, kai $|a| > 1$.



4 pav.

Taip pat žinome, kad funkcija $y = \cos x$ yra lyginė. Iš to išplaukia, kad lygties $\cos x = a$, $a \in [-1; 1]$, sprendinių aibė yra simetriška nulio atžvilgiu (jei realusis skaičius $\bar{x}$ yra lygties sprendinys, tai $-\bar{x}$ taip pat yra sprendinys).

Taikydami tą patį geometrinį metodą (kurį taikėme spręsdami lygtį $\sin x = a$), iš pradžių atkreipkime dėmesį į tai, kad intervale $[0; \pi]$ lygtis $\cos x = a$, $a \in [-1; 1]$, turi vienintelį



5 pav.

sprendinį $x = \arccos a$ (*žr.* 4 pav.). Todėl $x = -\arccos a$ yra vienintelis šios lygties sprendinys intervale [–π; 0] (*žr.* 5 pav.).

Taigi intervale [–π; π] lygties sprendiniai užrašomi formule $x = \pm\arccos a$.

Kadangi funkcijos $y = \cos x$ periodas yra 2π, tai kiekviename intervale [–π+2*k*π; π+2*k*π], $k \in \mathbf{Z}$, lygties $\cos x = a$, $a \in [-1;\, 1]$, sprendiniai yra $\arccos a + 2k\pi$ ir $-\arccos a + 2k\pi$. Paprastai jie užrašomi viena formule

$$x = \pm\arccos a + 2k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z}. \tag{5}$$

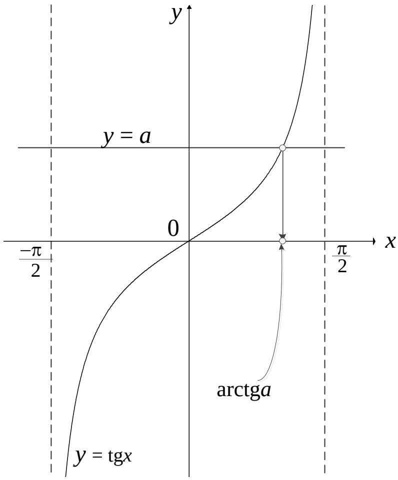
Aišku, kad šia formule nusakoma visa lygties $\cos x = a$, $a \in [-1;\, 1]$, sprendinių aibė.

Dar pasižiūrėkime į tris atskiruosius atvejus: $a = -1$, $a = 0$ ir $a = 1$. Kadangi $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$, $\arccos 1 = 0$, iš (5) formulės gausime, kad:

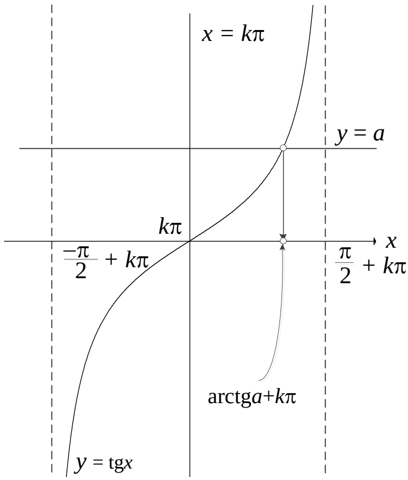
- lygties $\cos x = -1$ sprendinius galima užrašyti formule
$$x = \pi + 2k\pi = (1 + 2k)\pi,\ \ k \in \mathbf{Z}\,; \tag{6}$$
- lygties $\cos x = 0$ sprendinius galima užrašyti formule
$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z}\,; \tag{7}$$
- lygties $\cos x = 1$ sprendinius galima užrašyti formule
$$x = 2k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z}\,. \tag{8}$$

3. Lygties $\mathrm{tg}x = a$, $a \in \mathbf{R}$, **sprendinių aibė.** Pradėkime nuo funkci–jos $y = \mathrm{tg}x$ nagrinėjimo intervale $\left(-\dfrac{\pi}{2};\, \dfrac{\pi}{2}\right)$.Šiame intervale ji yra mo–notoninė (tiksliau, didėjančioji). Todėl visoje reikšmių aibėje – intervale $(-\infty;\, +\infty)$ yra apibrėžta atvirkštinė funkcija $x = \mathrm{arctg}y$, kurios reikšmės priklauso intervalui $\left(-\dfrac{\pi}{2};\, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Šios funkcijos reikšmė $\mathrm{arctg}a$ yra vienintelis lygties $\mathrm{tg}x = a$ sprendinys, priklausantis intervalui $\left(-\dfrac{\pi}{2};\, \dfrac{\pi}{2}\right)$ (*žr.* 6 pav.).

Remdamiesi tangento periodiškumu gauname, kad kiekviename intervale $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\ \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k \in \mathrm{Z}$, lygtis $\mathrm{tg}x = a,\ \ a \in \mathbf{R}$, turi vienintelį sprendinį $x = \mathrm{arctg}\, a + k\pi$ (*žr.* 7 pav.).



6 pav.



7 pav.

Atliktos analizės baigiamoji išvada tokia: lygties $\mathrm{tg}x = a,\ \ a \in \mathbf{R}$, sprendinių aibė nusakoma formule

$$x = \mathrm{arctg}\, a + k\pi\,,\quad k \in \mathrm{Z}. \tag{9}$$

O spręsdami trigonometrines lygtis turėtume neužmiršti, kad funkcija $y = \mathrm{tg}x$ yra apibrėžta tik atviruose intervaluose $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\ \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k \in \mathrm{Z}$.

4. Lygties $\mathrm{ctg}x = a,\ \ a \in \mathbf{R}$, **sprendinių aibė.** Kaip žinome, funkcija $y = \mathrm{ctg}x$ yra apibrėžta tik intervaluose $(k\pi; (k+1)\pi)$, $k \in \mathrm{Z}$; o jos reikšmių aibė yra visa realiųjų skaičių tiesė, t. y. intervalas $(-\infty; +\infty)$.

Intervale $(0; \pi)$ funkcija $y = \mathrm{ctg}x$ yra monotoninė (tiksliau, mažėjančioji), todėl jos reikšmių intervale $(-\infty; +\infty)$ yra apibrėžta atvirkštinė funkcija $x = \mathrm{arcctg}y$. Šios funkcijos reikšmė $\mathrm{arcctg}a$ yra vienintelis lygties $\mathrm{ctg}x = a$ sprendinys, priklausantis intervalui $(0; \pi)$.

Bet kuriame kitame funkcijos $y = \text{ctg}x$ apibrėžimo intervale $(k\pi; (k+1)\pi\,)$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, lygtis $\text{ctg}x = a$, aišku, taip pat turi vienintelį sprendinį. Ir jis yra $x = \text{arcctg}\,a + k\pi.$ Taigi lygties

$\text{ctg}x = a$, $a \in$ Z, sprendinių aibė yra nusakoma formule

$$x = \text{arcctg}\,a + k\pi\text{,}\quad k \in \text{Z}. \tag{10}$$

5. Trigonometrinių lygčių sprendimo pavyzdžiai.

1 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\sin 2x \cdot (\text{tg}^2 x + 1) = 0. \tag{11}$$

Sprendimas. Iš pradžių atkreipkime dėmesį į tai, kad tarp šios lygties sprendinių tikrai nebus skaičių

$x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\;\; k \in \text{Z}$, nes taškai $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\;\; k \in \text{Z}$, nepriklauso lygties (o tiksliau – tangento tg$x$) apibrėžimo sričiai.

Aišku, nėra būtina sprendimą pradėti nuo dairymosi po lygties apibrėžimo sritį. Bet tikrai nedovanotina į lygties sprendinių aibę įtraukti (rašant galutinį atsakymą) lygties apibrėžimo sričiai nepriklausančių taškų.

Kadangi $\text{tg}^2 x + 1 \neq 0$ esant bet kuriai x reikšmei (žinoma, priklau–sančiai lygties apibrėžimo sričiai), tai (11) lygybė įmanoma tik kai $\sin 2x = 0.$ O lygties $\sin 2x = 0$ sprendinius nesunku rasti pagal (3) formulę. Gausime:

$$2x = m\pi,\;\; m \in \mathbf{Z} \;\Rightarrow\; x = \frac{m}{2}\pi,\quad m \in \mathbf{Z}\,.$$

Belieka apsispręsti dėl galutinio atsakymo, t. y. (11) lygties sprendinių aibės. Šią aibę sudaro tik tie lygties $\sin 2x = 0$ sprendiniai, kurie priklauso (11) lygties apibrėžimo sričiai. O tai reiškia, kad iš formulės $x = \dfrac{m}{2}\pi, m \in \mathbf{Z}$, apibrėžtos aibės reikia pašalinti taškus $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. Gausime aibę, kurią sudaro taškai $x = n\pi, n \in \mathbf{Z}$.

Ats.: $n\pi, n \in \mathbf{Z}$.

2 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\sin 3x \cdot \sin 4x = 0. \qquad (12)$$

Sprendimas. Aišku, kad (12) lygybė galioja tik kai $\sin 3x = 0$ arba $\sin 4x = 0$.

Lygties $\sin 3x = 0$ sprendinių aibę sudaro skaičiai $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$, o lygties $\sin 4x = 0$ sprendinių aibę sudaro skaičiai $x = \frac{m\pi}{4}, m \in \mathbf{Z}$.

Nesunku suprasti, kad abi sprendinių aibės turi bendrų elementų. O pateikdami galutinį atsakymą ((12) lygties sprendinių aibę) turėtume išvengti sprendinių pasikartojimo.

Aišku, kad sutampančius sprendinius gausime tik tais atvejais, kai $\frac{k}{3} = \frac{m}{4}$, t. y. kai $k = \frac{3}{4}m$, arba $m = \frac{4}{3}k$ (čia k ir m – sveikieji skaičiai). Taigi (12) lygties sprendinių aibę galima nusakyti dvejopai:

a) $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{m\pi}{4}, m \in \mathbf{Z}$, $m \neq 4l, l \in \mathbf{Z}$;

arba

b) $x = \frac{m\pi}{4}, m \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 3l, l \in \mathbf{Z}$.

3 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\frac{1 - 2\sin x}{\sin 2x} = 0. \qquad (13)$$

Sprendinys. Turime surinkti į vieną aibę visus realiuosius skaičius x, kuriems esant galioja abi sąlygos: $1 - 2\sin x = 0$ ir $\sin 2x \neq 0$. Gausime:

$$\begin{cases} 1 - 2\sin x = 0, \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + n\pi, \ n \in \mathbf{Z}, \\ 2x \neq m\pi, \ m \in \mathbf{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + n\pi, \ n \in \mathbf{Z}, \\ x \neq m \cdot \frac{\pi}{2}, \ m \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Matome, kad iš aibės, nusakomos formule

$$x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+n\pi,\ \ n\in\mathbf{Z},$$

reikia pašalinti skaičius, išreiškiamus formule

$$x=m\cdot\frac{\pi}{2},\ \ m\in\mathbf{Z},$$

Nagrinėkime du atvejus: 1) $n=2k,\ \ k\in\mathbf{Z},$ ir 2) $n=2k+1,\ \ k\in\mathbf{Z}$ **.**

Pirmu atveju gausime:

$$(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+n\pi=m\cdot\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\frac{\pi}{6}+2k\pi=m\cdot\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \frac{1}{6}+2k=\frac{m}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ m=4k+\frac{1}{3}.$$

Antru atveju gausime:

$$(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+n\pi=m\cdot\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow-\frac{\pi}{6}+(2k+1)\pi=m\cdot\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ m=-\frac{1}{3}+4k+2=(4k+1)+\frac{2}{3}\ .$$

Aišku, kad nėra nė vienos sveikųjų skaičių m ir k poros, jog būtų $m=4k+\frac{1}{3}$ ar $m=(4k+1)+\frac{2}{3}$. Tai reiškia, kad nėra nė vieno lygties $\sin 2x=0$ sprendinio, kuris galėtų priklausyti lygties $1-2\sin x=0$ sprendinių aibei. Kitaip sakant, (13) lygties sprendinių aibė sutampa su lygties $1-2\sin x=0$ sprendinių aibe.

Ats.: $x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+n\pi,\ \ n\in\mathbf{Z}$.

4 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\sin 2x+\cos 2x=1. \tag{14}$$

Sprendimas. Kadangi visada

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x\ \text{ ir }\ 1=\sin^2 x+\cos^2 x,$$

tai (14) lygtis yra ekvivalenti lygčiai

$$2\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x=\sin^2 x+\cos^2 x.$$

Iš jos (atlikę veiksmus) gausime lygtį

$$\sin x \cdot (\cos x - \sin x) = 0. \tag{15}$$

Šios lygties sprendinių aibė yra lygčių $\sin x = 0$ ir $\cos x - \sin x = 0$ sprendinių aibių sąjunga, nes (15) lygybė galioja tik kai $\sin x = 0$ arba $\cos x - \sin x = 0$.

Lygties $\sin x = 0$ sprendinių aibę sudaro realieji skaičiai, išreiškiami formule $x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Lygtis $\cos x - \sin x = 0$ yra ekvivalenti lygčiai

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x} = 0$$

(nes iš lygybės $\cos x - \sin x = 0$ išplaukia, kad $\cos x \neq 0$), iš kurios gauname:

$$1 - \mathrm{tg} x = 0 \ \Rightarrow\ \mathrm{tg} x = 1 \ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{4} + m\pi, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

Kadangi abiejų lygčių sprendinių aibės bendrų elementų neturi, darome išvadą, kad (14) lygties sprendinių aibę sudaro skaičiai $x = k\pi,$ $k \in \mathbf{Z}$, ir $x = \frac{\pi}{4} + m\pi,\ m \in \mathbf{Z}.$

Kitas sprendimo būdas. Padauginę (14) lygtį iš skaičiaus $\frac{\sqrt{2}}{2}$ gausime ekvivalenčią lygtį

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

o iš jos – ekvivalenčią lygtį

$$\sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin 2x + \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{16}$$

arba

$$\cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin 2x + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{17}$$

Nagrinėdami (16) lygtį gausime:

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z},$$

$$2x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$x = \frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{8} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Taigi $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbf{Z}$, arba $x = k\pi, \ k \in \mathbf{Z}$.

O pasirinkę (17) lygtį gautume:

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z},$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z},$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{8} + \frac{n}{2}\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Jei $n = 2k, k \in \mathbf{Z}$, tai $x = k\pi$; jei $n = 2k+1, k \in \mathbf{Z}$, tai $x = -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8} + \frac{2k+1}{2}\pi = \frac{\pi}{4} + k\pi.$

Žinoma, pakanka išspręsti tik (16) arba (17) lygtį. Abiem atvejais gauname tą patį atsakymą;

$x = k\pi, \ k \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbf{Z}$.

Ats.: $k\pi, \ k \in \mathbf{Z}$; $\frac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbf{Z}$.

5 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\sin^2 x + \sin 2x - 3\cos^2 x = -2. \tag{18}$$

Sprendimas. Iš pradžių lygtį pertvarkykime taip:

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = -2(\sin^2 x + \cos^2 x),$$

$$3\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0.$$

Aišku, kad negali būti $\cos x = 0$. Todėl padaliję iš $\cos^2 x$ gauname ekvivalenčią lygtį

$$3\mathrm{tg}^2 x + 2\,\mathrm{tg}x - 1 = 0.$$

Spręsdami ją gauname:

$$\mathrm{tg}x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6};$$

$$\mathrm{tg}x = -1 \text{ arba } \mathrm{tg}x = \frac{1}{3}.$$

Lygties $\mathrm{tg}x = -1$ sprendiniai yra $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z},$ o lygties $\mathrm{tg}x = \frac{1}{3}$ sprendiniai yra $x = \mathrm{arctg}\frac{1}{3} + m\pi,\ \ m \in \mathbf{Z}.$ Akivaizdu, kad bendrų sprendinių šios lygtys neturi. Todėl (18) lygties sprendinių aibę sudaro skaičiai

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z},$$

ir skaičiai

$$x = \mathrm{arctg}\frac{1}{3} + m\pi,\ \ m \in \mathbf{Z}.$$

Ats.: $-\frac{\pi}{4} + k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z};\ \ \mathrm{arctg}\frac{1}{3} + m\pi,\ \ m \in \mathbf{Z}.$

6 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 3. \tag{19}$$

Sprendimas. Kadangi

$$-1 \le \sin x \le 1,\quad -1 \le \sin 2x \le 1 \ \text{ ir } \ -1 \le \sin 3x \le 1,$$

tėra vienintelė galimybė – turi būti $\sin x = 1,\ \sin 2x = 1$ ir $\sin 3x = 1.$

Spręsdami šių trijų lygčių sistemą gauname:

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 2x = 1, \\ \sin 3x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}, \\ 2x = \frac{\pi}{2} + 2m\pi,\ m \in \mathbf{Z}, \\ 3x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{\pi}{4} + m\pi,\ m \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2n}{3}\pi,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Matome, kad nėra nė vieno skaičiaus x, kuriam esant galiotų visos trys lygybės: $\sin x = 1$, $\sin 2x = 1$ ir $\sin 3x = 1$. Todėl (19) lygtis sprendinių neturi.

Ats.: $\varnothing$.

7 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$2\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x.$$

Sprendimas. Lygtį pertvarkykime taip:

$$2\cos^2 x + 4\cos x = 3(1-\cos^2 x),$$

$$5\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0.$$

Pastaroji kvadratinė lygtis (dydžio $\cos x$ atžvilgiu) turi du sprendinius:

$$\cos x = \frac{-2-\sqrt{19}}{5} \quad \text{ir} \quad \cos x = \frac{-2+\sqrt{19}}{5}.$$

Kadangi $\frac{-2-\sqrt{19}}{5} < -1$, $0 < \frac{-2+\sqrt{19}}{5} < 1$, tai sprendinių turi tik lygtis $\cos x = \frac{-2+\sqrt{19}}{5}$. Jie užrašomi formule $x = \pm\arccos\frac{-2+\sqrt{19}}{5} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ats.: $x = \pm\arccos\frac{-2+\sqrt{19}}{5} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

Išspręskite šias trigonometrines lygtis:

1. $3\cos x - \sin 2x = 0$;

2. $\cos^2 x + \sin x\cos x = 1$;

3. $\sin 4x \cdot \cos^2 x \cdot \operatorname{tg} 2x = 0$;

4. $2\sin^2 2x + 5\cos 2x = 2$;

5. $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$;

6. $\cos 4x - 2\sin^2 x - 1 = 0$;

7. $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0$;

8. $\sin\frac{x}{2} + \cos x = 1$;

9. $\sin 3x + \sin 7x = 5\sin 5x$;

10. $\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 0$.

VIII. TIKIMYBIŲ SKAIČIAVIMAS

Eugenijus Stankus

Daugeliu atvejų vertindami įvykio įvykimo galimybę, sakome, kad šio įvykio tikimybė maža, didelė ar vidutinė. Kad ją būtų galima apskaičiuoti, reikia sukurti matematinį modelį. Tai ir daro matematikos šaka, vadinama *tikimybių teorija*. Konstruojant matematinį modelį pir–miausia pačius įvykius reikia užrašyti matematine kalba, o po to – api–brėžti matą, kuris įvertintų įvykio įvykimo galimybę – tikimybę.

Priminsime pagrindines tikimybių teorijos sąvokas ir kai kurias tikimybių skaičiavimo formules.

1. Bandymai ir įvykiai. *Bandymu* arba *eksperimentu* vadiname sąlygų, sudarančių galimybę įvykti stebimajam įvykiui, visumą. Tačiau stebimasis įvykis gali įvykti arba neįvykti – apie tokius įvykius sakoma, kad jie yra *atsitiktiniai*. Būtent tokie įvykiai ir reiškiniai mus supa ir realiame gyvenime: neįmanoma tiksliai numatyti, ar po savaitės Vilniuje bus lietinga diena, skrisdami lėktuvu nesame garantuoti, kad skrydis bus sėkmingas, niekas negali pasakyti, kokia bus degalų ar kitokių prekių kaina po metų. Vis dėlto ne visus įvykius galime laikyti atsitiktiniais. Pavyzdžiui, įvykis, kad iš dėžės, kurioje vien balti rutuliai, imdami rutulį, ištrauksime baltą, yra *būtinasis*, o kad juodą – *negalimasis* (tokių rutulių dėžėje nėra). Taigi kiekvienas įvykis yra arba atsitiktinis, arba būtinasis, arba negalimasis.

Su kiekvienu bandymu galime susieti šio *bandymo baigčių aibę,* t. y. išvardinti visas galimybes, kuriomis gali pasibaigti bandymas. Klasikinis pavyzdys – lošimo kauliuko vieno metimo bandymo baigtys yra šešios – gali atsiversti bet kuri iš šešių lošimo kauliuko sienelių. Taigi su šiuo bandymu susiejame baigčių aibę

$$E=\{e_1;e_2;e_3;e_4;e_5;e_6\};$$

čia $e_i, i=1,2,\ldots,6$, žymi bandymo baigtį – galimybę lošimo kauliukui atsiversti *i* akutėmis. Dar svarbu, kad šias baigtis galime laikyti *vienodai galimomis*, nes nė viena iš jų neturi daugiau šansų pasirodyti, negu bet kuri kita. Atkreipkime dėmesį, kad vienodas baigčių galimumas nėra griežtai apibrėžtas. Mes jį suvokiame kaip ir kai kurias kitas pirmines matematines sąvokas (pavyzdžiui, skaičius, taškas, tiesė ir pan.).

Įvykiais vadiname baigčių aibės poaibius. Pavyzdžiui, įvykis *A*, kad lošimo kauliukas atsivers lyginiu akučių skaičiumi, gali būti užrašytas taip: $A = \{e_2; e_4; e_6\}$, įvykis atsiversti nelyginiu akučių skaičiumi yra $B = \{e_1; e_3; e_5\}$, įvykis, kad atsivers šešiukė, bus sudarytas tik iš vienos baigties $E_6 = \{e_6\}$. Įvykius

$$E_1 = \{e_1\},\ E_2 = \{e_2\},\ E_3 = \{e_3\},\ E_4 = \{e_4\},\ E_5 = \{e_5\},\ E_6 = \{e_6\},$$

sudarytus iš vienos baigties, vadinsime *elementariaisiais įvykiais*. Įvykis *E* yra būtinasis, o tuščios aibės simboliu $\varnothing$ žymimas negalimasis įvykis. Baigtys, kurios sudaro įvykį, vadinamos *palankiomis* šiam įvykiui.

Sudarę visus galimus su bandymu susijusius įvykius, įskaitant būtinąjį ir negalimąjį, gausime šio bandymo *įvykių erdvę*.

2. Įvykių sąjunga ir sankirta, nesutaikomi įvykiai. Kadangi įvy–kius sutapatinome su baigčių aibėmis, tai su įvykiais galimi tokie pat veiksmai, kaip ir su bet kokiomis aibėmis. Prisiminsime tik įvykių sąjun–gos ir sankirtos sąvokas.

Dviejų įvykių *A* ir *B sąjunga* (žymima $A \cup B$) yra įvykis, kurį sudaro baigtys, palankios bent vienam iš įvykių *A* ir *B*. Galima sakyti ir kitaip: įvykių *A* ir *B sąjunga* yra įvykis, reiškiantis, kad įvyks bent vienas iš įvykių *A* ir *B*.

Dviejų įvykių *A* ir *B sankirta* (žymima $A \cap B$) yra įvykis, kurį sudaro baigtys, palankios abiem įvykiams – ir *A*, ir *B*. Kitaip: įvykių *A* ir *B sankirta* yra įvykis, reiškiantis, kad įvyks abu įvykiai – ir *A*, ir *B*.

Du įvykiai *A* ir *B* vadinami *nesutaikomaisiais*, jei $A \cap B = \varnothing$. Kitaip tariant, įvykiai *A* ir *B* yra nesutaikomieji, jeigu jie abu negali įvykti kartu.

Įvykis $\overline{A}$, kuriam palankios visos tos baigtys, kurios nėra palankios įvykiui *A*, vadinamas *priešinguoju* įvykiui *A*. Kitaip: įvykis $\overline{A}$, reiš–kiantis, jog įvykis *A* neįvyksta, vadinamas *priešinguoju* įvykiui *A*.

Svarbi bandymo įvykių erdvės savybė: atlikdami veiksmus su įvy–kiais (sudarydami bet kurių įvykių sąjungą, sankirtą ar imdami bet kurio įvykio priešingąjį įvykį) visuomet gausime įvykių erdvės įvykį.

Pateiksime kelis įvykių veiksmų pavyzdžius. Aukščiau minėto loši–mo kauliuko vieno metimo bandymo įvykiai *A* (atsiversti lyginiu akučių skaičiumi) ir *B* (atsiversti nelyginiu akučių skaičiumi) yra nesutaikomi.

Įvykio $C=\{e_4;e_5;e_6\}$ (atsiversti ne mažiau kaip keturiomis akutėmis) ir įvykio $D=\{e_1;e_2;e_3;e_4;e_5\}$ (atsiversti ne daugiau kaip penkiomis akutėmis) sąjunga yra būtinasis įvykis $E=\{e_1;e_2;e_3;e_4;e_5;e_6\}$ (atsiversti kuria nors sienele), o jų sankirta yra įvykis $F=\{e_4;e_5\}$ (atsiversti keturiomis arba šešiomis akutėmis).

3. Įvykio tikimybė. Įvykio tikimybę galima įvertinti remiantis statistiniais duomenimis. Tarkime, kad vienodomis sąlygomis atlikta N bandymų, kuriuose stebimasis įvykis A įvyko M kartų. Santykis $\dfrac{M}{N}$ vadinamas įvykio *A santykiniu dažniu, k*uris, kai N yra pakankamai didelis, mažai kinta ir svyruoja apie tam tikrą skaičių. Šis skaičius, priklausantis intervalui $[0;1]$, gali būti laikomas *įvykio A tikimybe*. Tai patvirtinama ir eksperimentiškai, pavyzdžiui, monetos metimo bandymais. Literatūroje aprašyti pavyzdžiai, kai moneta buvo mesta 12000 kartų ir daugiau, o herbo atsivertimo santykinio dažnio reikšmė svyruoja apie skaičių $\dfrac{1}{2}$, kuris yra įvykio, kad vieną kartą metus monetą ji atsivers herbu, tikimybė. Ši statistinė įvykio tikimybės samprata (vadinama tiesiog *statistine tikimybe*) dažnai naudojama tiriant įvairius sociologinius, ekonominius ar demografinius reiškinius.

Tačiau ar negalima įvykio tikimybę nustatyti teoriškai – neatliekant gausybės bandymų, kuriuos realizuoti gana sunku, o ir brangu? Atsakydami į šį klausimą pasamprotaukime, kokiu būdu būtų galima nustatyti įvykio galimybę įvykti, t. y. jo tikimybę.

Pradėkime nuo paprasto pavyzdžio. Tarkime, dėžėje yra 10 vienodų rutulių, iš kurių 8 balti ir 2 juodi. Atsitiktinai ištraukiamas vienas rutulys – kokios spalvos jis bus, negalime pasakyti, tačiau suvokiame, kad labiau tikėtina ištraukti baltą negu juodą rutulį. Vadinasi, balto rutulio ištrau–kimo tikimybė yra didesnė, negu juodo.

Tegu dabar yra dvi dėžės, kuriose po $n=10$ vienodų rutulių: pirmoje $m=8$ balti ir 2 juodi, antroje – $m'=4$ balti ir 6 juodi. Vėlgi traukiant po vieną rutulį iš kiekvienos dėžės, labiau tikėtina iš pirmos dėžės ištraukti baltą rutulį negu ištraukti baltą iš antros dėžės. O į klausimą, kiek kartų labiau tikėtina baltą rutulį ištraukti iš pirmos dėžės (tegu ši tikimybė yra p) negu iš antros (tegu ši tikimybė yra p') atsakytume – dviem kartais. Paaiškinti galima taip: pirmoje dėžėje baltų rutulių yra 2 kartus daugiau negu antroje.

Taigi šiais abiem atvejais įvykio galimybės įvykti vertinimas gana natūralus. Be to, aišku, kad $\frac{p}{p'} = \frac{m}{m'}$ ne tik šiuo konkrečiu atveju, bet ir su kitomis m ir m' reikšmėmis. Jeigu antroje dėžėje būtų vien tik balti rutuliai, t. y. $m' = n$, tai balto rutulio paėmimas iš šios dėžės būtų būtinasis įvykis, kurio tikimybę laikysime lygia 1 ($p' = 1$). Taigi iš aukščiau užrašyto santykio gauname, kad $p = \frac{m}{n}$, o tai jau „beveik“ klasikinis tikimybės apibrėžimas.

Klasikinis tikimybės apibrėžimas. Tarkime, bandymo baigčių aibė $E = \{e_1; e_2; \ldots; e_n\}$ yra sudaryta iš n **vienodai galimų** baigčių. Įvykio $A = \{e_1'; e_2'; \ldots e_m'\}, m \le n,$ (sudaryto iš m šiam įvykiui palankių baigčių) *tikimybe* vadiname skaičių $P(A) = \frac{m}{n}$.

Paminėsime kelias, iš šio apibrėžimo išplaukiančias, tikimybės savybes:

1) $P(\varnothing) = 0$ (negalimojo įvykio tikimybė lygi nuliui); $P(E) = 1$ (būtinojo įvykio tikimybė lygi 1);

2) su bet kuriuo įvykiu A teisinga nelygybė $0 \le P(A) \le 1$;

3) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

4) jei įvykiai A ir B yra nesutaikomi, tai
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B);$$

5) su bet kuriais įvykiais A ir B teisinga lygybė
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą raskime įvykio A, kad vieną kartą metus monetą ji atsivers herbu, tikimybę. Šio bandymo baigčių aibė, sudaryta iš dviejų vienodai galimų baigčių e_H (atsiversti herbui) ir e_M (atsiversti monetai), yra $E = \{e_H; e_M\}$. Palankių įvykiui A baigčių yra viena. Todėl $P(A) = \frac{1}{2}$.

Kaip matome, šio įvykio „teorinė“ tikimybė, apskaičiuota pagal klasikinį apibrėžimą, sutampa su aukščiau paminėta statistine tikimybe. Galima būtų išvardinti ir daugiau tokio sutapimo pavyzdžių. Tai rodo dideles tikimybių teorijos taikymo praktikoje galimybes.

Taikydami klasikinį apibrėžimą įvykių, susijusių su aukščiau nagrinėtu lošimo kauliuko vienu metimu, gausime:

$$P(C)=P(\{e_4;e_5;e_6\})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},$$

$$P(D)=P(\{e_1;e_2;e_3;e_4;e_5\})=\frac{5}{6},$$

$$P(F)=P(\{e_4;e_5\})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Klasikinis tikimybės apibrėžimas – paprasčiausias ir lengviausiai suvokiamas – nuo jo prasidėjo ir tikimybių teorijos istorija. Pirmą tikimybių teorijos knygą „Knyga apie žaidimą kauliuku“ parašė italų mokslininkas Kardanas (Gerolamo Cardano, 1501–1576), kuri buvo publikuota 1663 m. Vystantis tikimybių teorijai atsirado bendresnė tiki– mybės sąvoka, buvo sukurta tam tikra aksiomų sistema, pagrindžianti tikimybių teoriją, kaip atskirą matematikos šaką.

Skaičiuojat įvykio tikimybę pagal klasikinį apibrėžimą užtenka surasti kiek iš viso yra bandymo baigčių ir kiek iš jų – palankių nagrinėjamam įvykiui. Tačiau ne visuomet lengva tai padaryti, kaip aukščiau pateiktuose pavyzdžiuose. Dažniausiai čia reikia kombina– torikos žinių. (*Kombinatorika* – matematikos šaka, nagrinėjanti, baigti– nės aibės elementų junginių (kombinacijų), tenkinančių tam tikrus kriterijus, sudarymo principus ir tų junginių skaičiaus radimo metodus.) Primindami kombinatorikos pradmenis, reikalingus tikimybėms skai– čiuoti, pasinaudosime LJMM 2012–2014 m. m. 4 temos „Kombina– torikos uždaviniai“ medžiaga.

Tegu $A=\{a_1;a_2;...;a_n\}$ yra kurių nors matematinių objektų (nebūtinai skaičių) aibė. Bet kurį jos elementų junginį, sudarytą iš m skirtingų aibės A elementų pažymėkime $J_n(m)$, $m\in\{1;2;...;n\}$. Kartais sakoma, kad toks junginys yra *junginys be pasikartojimų*.

Apibrėžimai:

1) Nesutvarkytas junginys $J_n(m)$ vadinamas *deriniu* iš *n* elementų po *m* elementų;

2) Sutvarkytas junginys $J_n(m)$ vadinamas *gretiniu* iš *n* elementų po *m* elementų;

3) Sutvarkytas junginys $J_n(n)$ vadinamas *kėliniu* iš *n* elementų.

(Sutvarkytas junginys – kai svarbi jo elementų tvarka, t. y. sukeitus bent du elementus vietomis gaunamas kitas junginys.)

Derinį galima tapatinti su bet kuriuo aibės *A* poaibiu, turinčiu *m* elementų. Kiekvieną gretinį iš *n* elementų po *m* elementų galima apibūdinti kaip sutvarkytą aibės *A* poaibį, sudarytą iš *m* elementų, o kėlinį iš *n* elementų galima nusakyti kaip sutvarkytą aibę *A*. Kita vertus, kėlinys yra gretinys iš *n* elementų po *n* elementų.

Aibės $A=\{a_1; a_2; ...; a_n\}$ poaibių po *m* elementų (derinių) skaičius žymimas C_n^m. Gretinių iš *n* elementų po *m* elementų skaičius žymimas A_n^m, o kėlinių iš *n* elementų skaičius žymimas P_n.

Skaičiai C_n^m, A_n^m ir P_m susiję tokia formule:

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m\ ,\ m \in \{1; 2; ...; n\}.$$

O, kaip žinome iš mokyklinio matematikos kurso:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot 1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (C_n^0 = 1,\ C_n^n = 1)$$

ir

$$P_m = m!$$

Čia $k! = k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$. Ši sandauga vadinama skaičiaus *k faktorialu*.

Dar priminsime vieną svarbią *Niutono binomo* formulę:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n,\ a,b \in \mathrm{R},\ n \in \mathrm{N}.$$

Taip pat labai svarbu žinoti kombinatorinę *sudėties* ir kombinatorinę *daugybos* taisyklę.

Tegu *A* ir *B* yra baigtinės aibės, neturinčios bendrų elementų ($A \cap B = \varnothing$), $A \cup B$ yra aibių *A* ir *B* sąjunga, o $A \times B$, apibrėžiama formule

$$A \times B = \{(a; b) : a \in A, b \in B\},$$

yra aibių A ir B Dekarto sandauga. Šių aibių elementų skaičių pažymėkime atitinkamai $m(A)$, $m(B)$,

$$m(A \bigcup B) \text{ ir } m(A \times B).$$

Pagal kombinatorinę sudėties taisyklę gaunama formulė

$$m(A \bigcup B) = m(A) + m(B),$$

o pagal kombinatorinę daugybos taisyklę – formulė

$$m(A \times B) = m(A) \cdot m(B).$$

Jei aibės A ir B turi bendrų elementų, t. y. $A \bigcap B \neq \varnothing$, tai

$$m(A \bigcup B) = m(A) + m(B) - m(A \bigcap B).$$

Pateiksime kelis tikimybių skaičiavimo pavyzdžius.

1 pavyzdys. Dėžėje sudėti 6 vienodi rutuliai, sunumeruoti skaičiais 1, 2, 3, 4, 5, 6. Iš jos atsitiktinai išimami du rutuliai. Apskaičiuokime tikimybę, kad ištrauktų rutulių numerių suma yra nelyginė (įvykis A).

Sprendimas. Iš viso vienodai galimų baigčių yra $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$, o palankių nagrinėjamam įvykiui A – devynios : (1;2), (1;4), (1;6), (2;3), (2;5), (3;4), (3;6), (4;5), (5;4). Pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą $P(A) = \frac{9}{15} = 0{,}6$.

2 pavyzdys. Iš skaitmenų 0, 1, 2, 3, 4 atsitiktinai juos dėliojant vieną po kito sudaromas penkiaženklis skaičius. Apskaičiuokime tikimy–bę, kad šis skaičius bus lyginis (įvykis A).

Sprendimas. Bandymo baigčių aibę sudaro $5! - 4! = 96$ baigtys, nes iš 5 skaitmenų galima sudaryti 5! kėlinių, tačiau 4! iš jų prasideda skaitme–niu 0. Ieškodami palankių nagrinėjamam įvykiui baigčių skaičiaus turime rasti kiek yra penkiaženklių skaičių, kurių paskutinis skaitmuo yra 0, 2 arba 4. Tokių skaičių iš duotųjų skaitmenų galima sudaryti $4! + 3! + 3! = 36$. Taigi tikimybė, kad sudarytasis skaičius bus lyginis, yra $P(A) = \frac{36}{94} = \frac{18}{47} \approx 0{,}383$.

Praktikoje ne visų bandymų baigtis galima laikyti vienodai galimomis. Todėl dažnai naudingas bendresnis įvykio tikimybės apibrėžimas.

Bendrasis tikimybės apibrėžimas. Tarkime, bandymo baigčių aibė yra $E = \{e_1; e_2; \ldots; e_n\}$ ir elementariųjų įvykių tikimybės žinomos:

$$p_1 = P(\{e_1\}),\ p_2 = P(\{e_2\}),\ \ldots,\ p_n = P(\{e_n\}),$$
$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Tuomet įvykio $A = \{e_1'; e_2'; \ldots; e_m'\}, m \le n,$ *tikimybe* vadiname skaičių

$$P(A) = P(\{e_1'\}) + P(\{e_2'\}) + \ldots + P(\{e_m'\}).$$

Jei elementariųjų įvykių tikimybės lygios

$$\left(p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}\right),$$

tai iš bendrojo apibrėžimo išplaukia klasikinis tikimybės apibrėžimas.

4. Įvykių nepriklausomumas ir pilnosios tikimybės formulė. Jei vieno įvykio įvykimas nedaro įtakos kito įvykimui, o tiksliau – vieno iš jų tikimybė nepriklauso nuo to, ar įvyko, ar ne, kitas įvykis, tai juos vadiname *nepriklausomais*. Jeigu taip nėra, tai jie *priklausomi*. Tačiau kaip nustatyti, ar du konkretūs įvykiai yra priklausomi, ar nepriklau–somi? Čia svarbi sąlyginės tikimybės sąvoka.

Įvykio *A* *sąlyginė tikimybė* su sąlyga, kad įvykis *B* įvykęs (ją žymėsime $P(A|B)$), yra skaičius

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ \text{kai}\ \ P(B) \ne 0. \tag{1}$$

Jeigu $P(A|B) = P(A)$, tai įvykiai *A* ir *B* yra nepriklausomi. Taip bus tik tuomet, kaip išplaukia iš (1) formulės, kai

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{2}$$

Galima įrodyti: jei bent viena iš šių porų yra nepriklausomi įvykiai, tai ir visos kitos poros yra nepriklausomų įvykių poros: *A* ir *B*, *A* ir $\overline{B}$, $\overline{A}$ ir *B* bei $\overline{A}$ ir $\overline{B}$.

Jeigu įvykis *A* gali įvykti tik su vienu iš įvykių $H_1, H_2, \ldots, H_k$, kurių bet kurie du įvykiai yra nesutaikomieji, o jų sąjunga – būtinasis įvykis, tai

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots$$
$$\ldots + P(H_k)P(A|H_k). \tag{3}$$

Ši formulė vadinama *pilnosios tikimybės formule*, o įvykiai $H_1, H_2, \ldots, H_k$ – *hipotezėmis*.

3 pavyzdys. Du sportininkai šauliai į taikinį šovė po vieną kartą. Pirmojo šaulio tikimybė pataikyti yra 0,8 (įvykis A), antrojo – 0,9 (įvykis B). Apskaičiuokime tikimybę, kad į taikinį pataikys bent vienas šaulys.

Sprendimas. Įvykis, kad pataikys bent vienas šaulys yra $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Kadangi įvykiai A ir B nepriklau–somi, tai $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72$. Taigi

$$P(A \cup B) = 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}72 = 0{,}98.$$

4 pavyzdys. Yra dvi dėžės: pirmoje – 10 baltų ir 2 juodi rutuliai, besiskiriantys tik spalva, antroje – 12 baltų ir 3 juodi rutuliai. Iš pirmos dėžės atsitiktinai ištrauktas rutulys perkeliamas į antrą dėžę, o tuomet iš antros dėžės vėl paimamas rutulys. Raskime įvykio A, jog jis bus baltas, tikimybę.

Sprendimas. Pasinaudosime pilnosios tikimybės formule

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2).$$

Tegu H_1 yra įvykis, kad iš pirmos dėžės išimtas ir perdėtas į antrąją dėžę rutulys yra baltas, o H_2 – kad juodas. Pagal sąlygą

$$P(H_1) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}, \quad P(H_2) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6},$$

o sąlyginės tikimybės yra: $P(A|H_1) = \frac{13}{16}$, $P(A|H_2) = \frac{12}{16}$. Įrašę į formulę, gauname: $P(A) = \frac{5}{6} \cdot \frac{13}{16} + \frac{1}{6} \cdot \frac{12}{16} = \frac{77}{96} \approx 0{,}802$.

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Raskite lošimo kauliuko vieno metimo bandymo įvykių erdvės elementų skaičių.

2. Dėžėje sudėti 5 vienodi rutuliai, sunumeruoti skaičiais 1, 2, 3, 4, 5. Iš jos atsitiktinai išimami 3 rutuliai. Apskaičiuokite tikimybę, kad ištrauktų rutulių numerių suma yra nelyginė.

3. Dėžutėje 10 kortelių, ant kurių užrašyti skaičiai 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 17, 19. Atsitiktinai paimamos dvi kortelės ir iš ant jų užrašytų skaičių sudaroma mažesnė už vienetą trupmena. Raskite tikimybę, kad ši trupmena yra nesuprastinama.

4. Parduotuvės vitrinoje yra 12 teniso kamuoliukų – 3 raudoni, 4 žali ir 5 geltoni. Pardavėjas atsitiktinai paėmė tris kamuoliukus. Raskite tikimybę, kad bent vienas kamuoliukas bus raudonas.

5. Krepšinio turnyre dalyvauja 20 komandų, kurios burtų keliu suskirstytos į dvi grupes, kiekvienoje po 10 komandų. Apskaičiuokite tikimybę, kad dvi stipriausios komandos pateks į vieną grupę.

6. Krepšininko Andriaus vieno baudos metimo pataikymo tikimybė yra 0,9, o jo draugo Sigito – 0,8. Kiekvienas iš jų atlieka po 2 baudos metimus. Apskaičiuokite tikimybę, kad bent vieno iš krepšininkų abu baudos metimai bus taiklūs.

7. Du sportininkai šauliai į taikinį šovė po vieną kartą. Pirmojo šaulio tikimybė pataikyti yra 0,7 (įvykis A), antrojo – 0,8 (įvykis B). Apskaičiuokite tikimybę, kad į taikinį pataikys vienas šaulys.

8. Du šachmatininkai žaidžia finalinį turnyrą. Pirmasis – truputį pranašesnis už antrąjį: pirmojo tikimybė laimėti vieną partiją yra 0,6. Pagal turnyro taisykles nugalėtoju tampa tas, kuris pirmas laimi tris partijas. Apskaičiuokite tikimybę, kad turnyro nugalėtoju taps pirmasis šachmatininkas sužaidęs 4 partijas.

9. Pirmoje dėžėje 20 gaminių, iš kurių 16 yra aukščiausios kokybės, antroje – 30, iš kurių 25 – aukščiausios kokybės, trečioje dėžėje – 10 gaminių, tarp kurių 8 – aukščiausios kokybės. Raskite tikimybę, kad iš atsitiktinai pasirinktos dėžės atsitiktinai paimtas gaminys bus aukščiausios kokybės.

10. Dvejos automatinės staklės gamina vienodas detales. Pirmomis staklėmis pagaminama 60% detalių, antrosiomis – 40%. Žinoma, kad pirmosios staklės išleidžia 2 % nestandartinių detalių, o antrosios – 4%. Atsitiktinai paimama viena detalė. Apskaičiuokite tikimybę, kad paimtoji detalė bus nestandartinė.

BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus, Edmundas Mazėtis

1. Skaičius A sudaro 64 % skaičiaus B, o skaičius B yra 150 % didesnis už skaičių C. Keliais procentais skaičius C yra mažesnis už skaičių A?

2. Išspręskite lygtį

$$x^3 + 2x^2 + 4x + 3 = 0.$$

3. Išspręskite lygtį

$$3\sin x + \cos^2 x + 3 = 0.$$

4. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a, o dvisienio kampo tarp piramidės šoninės sienos ir pagrindo plokš–tumos didumas lygus α. Raskite piramidės tūrį.

Užduočių sprendimai

STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tegu N yra ieškomasis keturženklis skaičius. Pagal uždavinio sąlygą, yra tokie natūralieji skaičiai k ir l, kad

$$N = 131 \cdot k + 51 = 132l + 36.$$

Iš čia gauname, kad

$$131(k - l) = l - 15$$

ir

$$l = \frac{N - 36}{132} \le \frac{9999 - 36}{132} < 75.$$

Skaičius 131 yra pirminis, o skaičius $l - 15$ yra mažesnis už 131. Taigi $l - 15$ dalijasi iš 131 tik kai $l - 15 = 0,$ t. y. $l = 15.$

Vadinasi, $N = 132 \cdot 15 + 36 = 2016$.

Ats.: 2016.

2. Tegu x yra ieškomas dviženklis skaičius, o y – dalmuo. Tada turi galioti lygybė

$$180 = xy + 0{,}25y.$$

Iš čia matyti, kad y turi dalytis iš 4. Pažymėkime $t = \frac{1}{4}y.$ Įrašę į lygtį, gausime:

$$180 = 4tx + t,$$

$$x = \frac{180 - t}{4t}.$$

Skaičius $180 - t$ turi dalytis iš 4, o tai reiškia, kad t turi dalytis iš 4. Be to, turi galioti nelygybė $180 - t \ge 4t \cdot 10,$ iš kurios išplaukia, kad $t < 5.$ Vadinasi, $t = 4$ ir $x = 11$.

Ats.: 11.

3. Tegu x yra sugalvotas natūralusis skaičius, o y – prie jo prirašytas skaitmuo. Pagal uždavinio sąlygą gauname lygtį

$$(10x + y) - x^2 = 8x.$$

Iš čia

$$y = x(x-2).$$

Kadangi $y \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, tai galimos x reikšmės yra 2, 3 ir 4. Tada y reikšmės yra atitinkamai 0, 3 ir 8.

Ats.: 2 ir 0; 3 ir 3; 4 ir 8.

4. Tegu x yra pirmo lydinio masė, o y – antro lydinio masė. Pirmo ir antro metalų masės pirmame lydinyje yra $\frac{1}{3}x$ ir $\frac{2}{3}x$, o antrame lydinyje $\frac{2}{5}y$ ir $\frac{3}{5}y$. Pagal uždavinio sąlygą, turi galioti lygybė

$$\frac{\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y}{\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y} = \frac{17}{27}.$$

Iš čia

$$\frac{5x + 6y}{10x + 9y} = \frac{17}{27},$$

$$35x = 9y,$$

$$\frac{x}{y} = \frac{9}{35}.$$

Taigi ieškomas lydinių santykis yra 9:35.

Ats.: 9:35.

5. Iš lygties matyti, kad vienas iš skaičių x ir y turėtų būti lyginis, o kitas – nelyginis. Tegu $x = 2k$ ir $y = 2l + 1$ (k ir l – sveikieji skaičiai). Tada

$$4k^2 + (2l+1)^2 = 2015 \Rightarrow 4k^2 + 4l^2 + 4l = 2014 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(k^2 + l^2 + l) = 2014 \Rightarrow 2(k^2 + l^2 + l) = 1007.$$

Kadangi 1007 nesidalija iš dviejų, tai nėra tokių k ir l, kad galiotų lygybė $x^2 + y^2 = 2015$, kai $x = 2k$, $y = 2l + 1$.

Analogiška išvada gaunama ir tuo atveju, kai x yra nelyginis, o y – lyginis skaičius.

6. Ieškomą Antanuko bėgimo greitį pažymėkime v (km/h), o atstumą tarp stotelių A ir B – s (km). Bėgdamas į stotelę A jis sugaištų $\frac{s}{3v}$ h, o autobusas per tą laiką nuvažiuotų $\frac{10s}{v}$ km ir pasiektų stotelę A. Kad ir Antanukas, ir autobusas kartu atsidurtų stotelėje B, turi galioti lygybė

$$\frac{\frac{2}{3}s}{v} = \frac{s + \frac{10s}{v}}{30}.$$

Iš čia gauname:

$$\frac{2s}{3v} = \frac{(v+10)s}{30v},$$
$$20 = v + 10,$$
$$v = 10.$$

Taigi ieškomas Antanuko bėgimo greitis yra 10 km/h.

Ats.: 10 km/h.

7. Tegu v_1 yra valandinės, o v_2 – minutinės rodyklės sukimosi greitis (laipsniais per valandą). Aišku, kad $v_1 = 30$ ir $v_2 = 360$. Praėjus valandai valandinė rodyklė bus pasislinkusi 30° kampu, o minutinė – pradinėje padėtyje. Iki sutapimo valandinė rodyklė turi pasisukti kampu α, o minutinė – kampu $30° + \alpha$.

Iš lygties

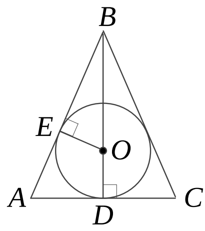
$$\frac{\alpha}{30} = \frac{30+\alpha}{360}$$

gauname $\alpha = \frac{30}{11}$ (laipsnių), todėl ieškomas laikas yra

$$t = 1 + \frac{\frac{30}{11}}{30} = 1 + \frac{1}{11} = 1\frac{1}{11} \text{ (h).}$$

Ats.: $1\frac{1}{11}$ h.

8. Pagal uždavinio sąlygą, (žr. 1 pav.)



1 pav.

$$AB + AD = 28,$$

$$OD = \frac{2}{7}BD.$$

Tada $OB = BD - OD = \frac{5}{7}BD.$

Tegu $AB = BC = a.$ Tada iš trikampių *ABD* ir *OBE* panašumo gauname:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{OE}{OB} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{OD}{OB} \Rightarrow \frac{28-a}{a} = \frac{2}{5} \Rightarrow a = 20.$$

Taigi $AB = BC = 20,\ \ AC = 56 - 2 \cdot 20 = 16.$

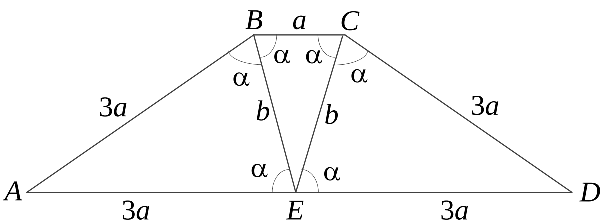
Ats.: 20, 20, 16.

9. Tegu $BC = a.$ Tada

$$AB = CD = 3a.$$

Aišku, kad trikampiai *BCE, CED* ir *BEA* yra lygiašoniai (žr. 2 pav.). Tegu

$$BE = b.$$



2 pav.

Apskaičiuokime trikampių *BCE* ir *CED* plotus. Gausime:

$$S_{\Delta BCE} = \frac{1}{2}BC \cdot BE \sin\alpha = \frac{1}{2}ab\sin\alpha,$$

$$S_{\Delta CED} = \frac{1}{2}CE \cdot CD \sin\alpha = \frac{3}{2}ab\sin\alpha.$$

Tada

$$S_{ABCD} = 2S_{\Delta CED} + S_{\Delta BCE} = 3ab\sin\alpha + \frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{7}{2}ab\sin\alpha.$$

Taigi $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{\Delta BCE}} = 7.$

Ats.: 7.

10. Tegu x, y ir z yra briaunų ilgiai, o d yra ieškomas įstrižainės ilgis. Tada (pagal uždavinio sąlygą)

$$2xy + 2xz + 2yz = 22 \quad \text{ir} \quad 4x + 4y + 4z = 24.$$

Iš čia

$$xy + xz + yz = 11 \quad \text{ir} \quad x + y + z = 6.$$

Vadinasi,

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = 36 - 22.$$

O tada

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{14} \ \text{(dm)}.$$

Ats.: $\sqrt{14}$ dm.

PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Pagal uždavinio sąlygą,

$$A = B + 1{,}5B = 2{,}5B = 2{,}5 \cdot 0{,}8C = 2C,$$

todėl

$$\frac{A - C}{A} \cdot 100 = \frac{2C - C}{2C} \cdot 100 = 50.$$

Taigi skaičius C yra 50 % mažesnis už skaičių A.

Ats.: 50 %.

2. Tegu a_1 yra būsto kaina mieste A nacionaline valiuta, o a_2 – eurais. Analogiškai, b_1 yra būsto kaina mieste B nacionaline valiuta, o b_2 – eurais. Nacionalinės valiutos kursą euro atžvilgiu pradiniu mo–mentu pažymėkime λ, o būsto kainų kritimo momentu – λ_1.

Remdamiesi uždavinio sąlyga, gauname, kad

$$\lambda = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \quad \lambda_1 = \frac{0{,}8a_1}{0{,}6a_2}.$$

Vadinasi, $\lambda_1 = \frac{4}{3}\lambda.$

Sumažėjusią būsto kainą eurais mieste B pažymėkime x. Iš sąlygos

$$\frac{0{,}9b_1}{x} = \lambda_1$$

gauname:

$$\frac{0{,}9b_1}{x} = \frac{4}{3}\lambda \Rightarrow \frac{0{,}9b_1}{x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \frac{0{,}9}{x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{b_2} \Rightarrow \frac{x}{0{,}9} = \frac{3b_2}{4} \Rightarrow x = 0{,}675\,b_2.$$

Todėl

$$\frac{b_2 - x}{b_2} \cdot 100 = \frac{b_2 - 0{,}675\,b_2}{b_2} \cdot 100 = 32{,}5.$$

Taigi būsto kaina eurais mieste B sumažėjo 32,5 %.

Ats.: 32,5 %.

3. Tegu a yra gyventojų skaičius, o b – bedarbių skaičius prieš metus.

Pagal uždavinio sąlygą, dabar mieste yra $0{,}96a$ gyventojų ir $1{,}05b$ bedarbių. Kadangi $b = 0{,}08a,$ tai bedarbių skaičius dabar yra $1{,}05 \cdot 0{,}08a = 0{,}084a.$ Tai sudaro

$$\frac{0{,}084a}{0{,}96a} \cdot 100 = 8{,}75$$

procentų miesto gyventojų.

Ats.: 8,75 %.

4. Tegu x yra ieškomas kelionės dalyvių skaičius. Tada (pagal uždavinio sąlygą) $0{,}14x$ yra žmonių, mokančių abi kalbas, skaičius,

$26-0{,}14x$ – mokančių tik anglų kalbą, o $31-0{,}14x$ – mokančių tik vokiečių kalbą skaičius.

Iš lygybės

$$x = 0{,}14x + (26-0{,}14x) + (31-0{,}14x)$$

gauname, kad $x = 50$.

Ats.: 50.

5. Pradinę obuolių masę pažymėkime *m*. Tada 0,8*m* yra pradinė vandens masė. Džiovintų obuolių masę pažymėkime *x*, gausime, kad 0,2*x* yra vandens masė džiovintuose obuoliuose.

Aišku, kad

$$0{,}2x = x - 0{,}2m\,.$$

Iš čia

$$x = \frac{0{,}2m}{0{,}8} = 0{,}25m.$$

Vadinasi, obuolių masė sumažėjo

$$\frac{m-x}{m}\cdot 100 = \frac{m-0{,}25m}{m}\cdot 100 = 75$$

procentais, o išgaravusio vandens procentų skaičius yra

$$\frac{0{,}8m-0{,}2m}{0{,}8m}\cdot 100 = \frac{0{,}8m-0{,}2\cdot 0{,}25m}{0{,}8m}\cdot 100 = 93{,}75.$$

Ats.: 93,75 %, 75 %.

6. Tegu P_1, P_2 ir P_3 yra atitinkamai pirmos, antros ir trečios parduotuvės gautos pajamos (tam tikrais piniginiais vienetais), o *P* – bendros visų parduotuvių pajamos. Aišku, kad

$$P = P_1 + P_2 + P_3.$$

Kadangi prekių kaina visose parduotuvėse ta pati, tai gautos pajamos proporcingos parduotų prekių kiekiui. Vadinasi,

$$P_1 = 0{,}6P,$$
$$P_2 = 0{,}4(P-0{,}6P) = 0{,}16P,$$
$$P_3 = P - (0{,}6P + 0{,}16P) = 0{,}24P.$$

Pagal uždavinio sąlygą, pirmos parduotuvės pelnas buvo $0{,}3\cdot 0{,}6P = 0{,}18P,$ antros parduotuvės – $0{,}25\cdot 0{,}16P = 0{,}04P,$ o bendras pelnas buvo 0,268P. Iš čia išplaukia, kad trečios parduo–tuvės gautas pelnas buvo

$$0{,}268P - (0{,}18P + 0{,}04P) = 0{,}048P.$$

Taigi ieškomas trečios parduotuvės gauto pelno procentų skaičius yra

$$\frac{0{,}048P}{0{,}24P}\cdot 100 = 20.$$

Ats.: 20 %.

7. Kadangi $1000:5 = 200,$ skaičiaus $\dfrac{1000}{13}$ sveikoji dalis yra 76, o skaičiaus $\dfrac{1000}{65}$ sveikoji dalis yra 15, tai iš uždavinio sąlygos išplaukia, kad 76 akcijos buvo parduotos gaunant už kiekvieną akciją po $0{,}75\cdot 1000 = 750$ eurų, o $200 - 15 = 185$ akcijos buvo parduotos gaunant už kiekvieną akciją po $0{,}9\cdot 1000 = 900$ eurų. Likusios $1000 - (76 + 185) = 739$ akcijos buvo parduotos už 1000 eurų kainą.

Taigi bendrovė iš viso gavo

$$76\cdot 750 + 185\cdot 900 + 739\cdot 1000 = 962\ 500 \text{ eurų}.$$

Ats.: 962 500 eurų.

8. Tegu x yra cinko procentinis kiekis pirmame lydinyje. Tada $60 - x$ yra vario procentinis kiekis pirmame lydinyje, o $74 - x$ yra alavo procentinis kiekis antrame lydinyje. Vadinasi, pirmą lydinį galima užrašyti simboliu $L_1(x, 60 - x, 40, 150),$ o antrą – simboliu $L_2(x, 26, 74 - x, 250).$ Gautą lydinį užrašykime simboliu $L(30, y, 70 - y, 400);$ čia y yra vario procentinis kiekis gautajame lydinyje.

Iš schemos

$$+\begin{array}{l} L_1(x, 60 - x, 40, 150) \\ L_2(x, 26, 74 - x, 250) \end{array} \Rightarrow L(30, y, 70 - y, 400)$$

gauname, kad $x = 30$ %, o tada iš lygybės

$$(60 - x) \cdot 150 + 26 \cdot 250 = y \cdot 400$$

išplaukia, kad $y = 27{,}5$ %.

Vadinasi, ieškoma alavo masė gautame lydinyje yra

$$\frac{(70 - 27{,}5) \cdot 400}{100} = 42{,}5 \cdot 4 = 170.$$

Ats.: 170 kg.

9. Tegu x yra aukso procentinis kiekis antrame lydinyje, o m_1 ir m_2 yra atitinkamai pirmo ir antro lydinio masė. Tada

$$L_1(2{,}5x,\ 100 - 2{,}5x,\ m_1)$$

yra pirmas lydinys, o

$$L_2(x,\ 100 - x,\ m_2)$$

– antras lydinys. Sulydę juos turime gauti lydinį

$$L\,(40,\ 60,\ m_1 + m_2)\,.$$

Remdamiesi schema

$$+\begin{array}{l} L_1(2{,}5x,\ 100 - 2{,}5x,\ m_1) \\ L_2(x,\ 100 - x,\ m_2) \end{array} \Rightarrow L\,(40,\ 60,\ m_1 + m_2),$$

sudarykime lygtį

$$2{,}5x \cdot m_1 + x \cdot m_2 = 40(m_1 + m_2). \qquad (1)$$

Jei $m_1 = m_2 = m,$ turi galioti lygybė

$$2{,}5x \cdot m + x \cdot m = 35 \cdot 2m,$$

iš kurios išplaukia, kad $x = 20$.

Tada iš (1) gauname:

$$50m_1 + 20m_2 = 40(m_1 + m_2),$$

$$10m_1 = 20m_2 \Rightarrow m_1 = 2m_2.$$

Taigi pirmo lydinio masė turėtų būti dvigubai didesnė už antro lydinio masę.

Ats.: 2 kartus.

10. Tegu m_1 yra pirmo lydinio, m_2 – antro lydinio, o m_3 – trečio lydinio masė. Remdamiesi uždavinio sąlyga sudarykime tokią schemą:

$$\begin{array}{l} \quad L_1(30,\ 70,\ 0,\ m_1) \\ +\,L_2(0,\ 10,\ 90,\ m_2) \quad \Rightarrow L\,(60-x,\ x,\ 40,\ m_1+m_2+m_3)\,; \\ \quad L_3(15,\ 25,\ 60,\ m_3) \end{array}$$

čia x yra vario procentinis kiekis gautame lydinyje.

Pagal ją sudarykime lygčių sistemą

$$\begin{cases} 30m_1+15m_3=(60-x)\cdot(m_1+m_2+m_3), \\ 70m_1+10m_2+25m_3=x\cdot(m_1+m_2+m_3), \\ 90m_2+60m_3=40(m_1+m_2+m_3). \end{cases}$$

Iš pirmos lygties gauname

$$x=\frac{30m_1+60m_2+45m_3}{m_1+m_2+m_3}=30+\frac{30m_2+15m_3}{m_1+m_2+m_3},$$

iš antros gauname

$$x=\frac{70m_1+10m_2+25m_3}{m_1+m_2+m_3}=10+\frac{60m_1+15m_3}{m_1+m_2+m_3},$$

o iš trečios – tokį sąryšį tarp m_1, m_2 ir m_3:

$$\frac{9m_2+6m_3}{m_1+m_2+m_3}=4.$$

Iš čia $m_1+m_2+m_3=\dfrac{9m_2+6m_3}{4}$. Įrašę į pirmą x išraišką, gauname:

$$x=30+\frac{60\,(2m_2+m_3)}{9m_2+6m_3}=30+\frac{10\,(12m_2+6m_3)}{9m_2+6m_3}=$$

$$=40+\frac{30m_2}{9m_2+6m_3}=40+\frac{10m_2}{3m_2+2m_3}.$$

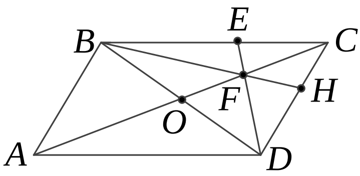
Trupmena $\dfrac{10m_2}{3m_2+2m_3}$ mažiausią reikšmę, lygią 0 įgyja, kai $m_2=0$ ($m_3>0$), o didžiausią reikšmę, lygią $\dfrac{10}{3}=3\dfrac{1}{3}$, įgyja, kai $m_3=0$ ($m_2>0$).

Taigi *x* reikšmės gali svyruoti tarp 40 % ir $43\frac{1}{3}$ %.

Ats.: 40 % ir $43\frac{1}{3}$ %.

ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Sakykime, kad tiesė BF kerta lygiagretainio kraštinę *CD* taške *H*, o taškas *O* yra lygiagretainio įstri– žainių susikirtimo taškas (1 pav.). Trikampio *BCD* kraštinėse *BC*, *CD* ir *DB* yra taškai *E*, *H* ir *O* tokie, kad tiesės *BH*, *CO* ir *DE* susikerta taške *F*. Pagal Čevos teoremą teisinga lygybė



1 pav.

$$\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CH}{HD}\cdot\frac{DO}{OB}=1.$$

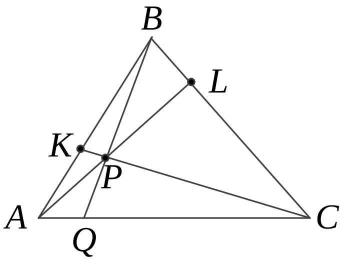
Kadangi pagal sąlygą $\frac{BE}{EC}=\frac{3}{2}$, o $DO=OB$, tai $\frac{3}{2}\cdot\frac{CH}{HD}\cdot 1=1$. Iš čia gauname, kad $\frac{CH}{HD}=\frac{2}{3}$.

Ats.: $2:3$.

2. Trikampiui *ABC* ir viename taške *P* susikertančioms tiesėms *AL*, *BQ* ir *CK* taikome Čevos teoremą

$\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BK}{KA}=1$ (2 pav.).

Kadangi $\frac{CL}{LB}=\frac{4}{1}$, o $\frac{BK}{KA}=\frac{3}{2}$, tai $\frac{AQ}{QC}=\frac{1}{6}$. Iš čia seka, kad



2 pav.

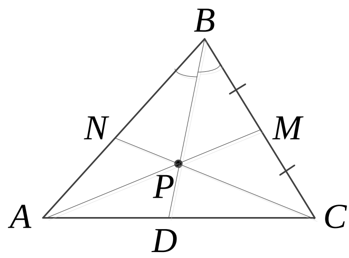
$$\frac{AC}{QC}=\frac{AQ+QC}{QC}=\frac{AQ}{QC}+1=\frac{1}{6}+1=\frac{7}{6}.$$

Trikampio *ABQ* kraštinėse *AB* ir *BQ* bei kraštinės *AQ* tęsinyje esantiems vienos tiesės taškams K, L ir C taikome Menelajaus teoremą: $\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BP}{PQ}\cdot\frac{QC}{CA}=1$. Kadangi $\frac{AK}{KB}=\frac{2}{3}$, $\frac{QC}{CA}=\frac{6}{7}$, tai $\frac{BP}{PQ}=\frac{7}{4}$.

Ats.: $7:4$.

3. Sakykime, kad tiesė CP trikampio kraštinę AB kerta taške N (3 pav.). Kadangi atkarpos AM, BD ir CN susikerta viename taške P, tai pagal Čevos teoremą teisinga lygybė

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CD}{DA}=1.$$



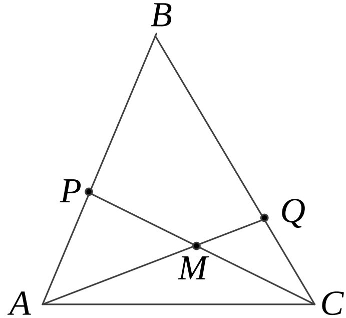
3 pav.

Iš trikampio kampo pusiaukampinės savybės išplaukia, kad

$$\frac{CD}{DA}=\frac{CB}{BA}=\frac{a}{c}.$$

Kadangi taškas M yra kraštinės BC vidurio taškas, tai $\frac{BM}{MC}=1$. Taigi $\frac{AN}{NB}\cdot 1\cdot\frac{a}{c}=1$. Iš čia gauname, kad $\frac{AN}{NB}=\frac{c}{a}$. Jei $NB=x$, tai $AN=\frac{c}{a}x$, taigi $x+\frac{c}{a}x=c$. iš čia gauname, kad $x=\frac{ac}{a+c}$, todėl $NB=\frac{ac}{a+c}$, o $AN=\frac{c^2}{a+c}$.

Ats.: $NB=\frac{ac}{a+c}$, $AN=\frac{c^2}{a+c}$.



4 pav.

4. Sakykime, kad atkarpos AQ ir PC susikerta taške M (4 pav.). Trikampio BPC kraštinėse PC ir CB bei kraštinės BP tęsinyje yra vienos tiesės taškai *M*, *Q* ir *A*. Pagal Menelajaus teoremą yra teisinga lygybė

$$\frac{PM}{MC}\cdot\frac{CQ}{QB}\cdot\frac{BA}{AP}=1.$$

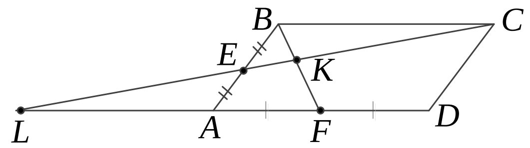
Pagal sąlygą

$$\frac{CQ}{QB}=\frac{2}{5},\ \text{o}\ \frac{BA}{AP}=\frac{BP+PA}{AP}=\frac{BP}{AP}+1=\frac{4}{3}+1=\frac{7}{3},$$

todėl $\frac{PM}{MC}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{3}=1$, t. y., $\frac{PM}{MC}=\frac{15}{14}$.

Ats.: $\frac{PM}{MC}=\frac{15}{14}$.

5. Keturkampio *AFKE* plotas lygus trikampių *ABF* ir *BEK* plotų skirtumui (5 pav.). Pagal trikampio ploto formulę trikampių *ABF* ir



5 pav.

EBK plotų santykis lygus

$$\frac{BA\cdot BF\sin\angle ABF}{BE\cdot BK\sin\angle EBK}=\frac{BA}{BE}\cdot\frac{BF}{BK}=2\frac{BF}{BK}.$$

Taigi trikampio *EBK* plotą rasime, kai žinosime santykį $\frac{BF}{BK}$.

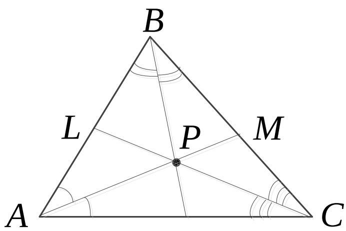
Sakykime, kad tiesės *CE* ir *AD* susikerta taške *L*. Kadangi $BE=EA$, $\angle CBE=\angle LAB$, o $\angle BCE=\angle ALE$, tai trikampiai *EBC* ir *EAL* yra lygūs, todėl $BC=AD=AL.$. Trikampio *ABF* kraštinėse *BF* ir *BA* bei kraštinės *AF* tęsinyje yra vienos tiesės taškai *K*, *E* ir *L*, todėl pagal Menelajaus teoremą $\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BK}{KF}\cdot\frac{FL}{LA}=1$. Kadangi $\frac{AE}{EB}=1$, $\frac{FL}{LA}=\frac{LA+AF}{LA}=1+\frac{AF}{LA}=1+\frac{AF}{AD}=\frac{3}{2}$, tai $\frac{BK}{KF}=\frac{2}{3}$. Iš čia $\frac{BF}{BK}=\frac{BK+KF}{BK}=1+\frac{KF}{BK}=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$, todėl trikampių *ABF* ir *EBK* plotų santykis lygus $2\cdot\frac{5}{2}=5.$ Kadangi trikampio *ABF* plotas lygus ketvirtadaliui lygiagretainio ploto, t. y., $6,$ tai trikampio *ABK* plotas lygus $\frac{6}{5}.$ Tuomet keturkampio *AFKE* plotas lygus $6-\frac{6}{5}=\frac{24}{5}.$

Ats.: 4,8.

6. Sakykime, kad atkarpos *AM* ir *CL* yra trikampio *ABC* pusiaukampinės, susikertančios taške *P* (6 pav.). Trikampiui *AMB* ir tiesės taškams *P*, *C* ir *L*, taikome Menelajaus teoremą: $\frac{AP}{PM}\cdot\frac{MC}{CB}\cdot\frac{BL}{LA}=1.$ Rasime santykį $\frac{MC}{CB}.$ Pagal trikampio pusiaukampinės savybę

$$\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}.$$

Kadangi $MB=BC-MC$, tai $\frac{MB}{MC}=\frac{BC-MC}{MC}=\frac{CB}{MC}-1=\frac{c}{b}.$ Iš čia gauname, kad $\frac{CB}{MC}=\frac{c+b}{b},$



6 pav.

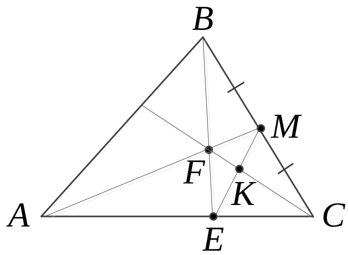
taigi $\frac{MC}{CB}=\frac{b}{c+b}.$ Kadangi $\frac{BL}{LA}=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b},$ tai iš Menelajaus teoremos gauname, kad $\frac{AP}{PM}\cdot\frac{b}{c+b}\cdot\frac{a}{b}=1.$ Taigi $\frac{AP}{PM}=\frac{b+c}{a}.$

Ats.: $\frac{AP}{PM}=\frac{b+c}{a}.$

7. Sakykime, kad tiesės *CF* ir *DE* susikerta taške *K* (7 pav.). Trikampiui *BCE* ir tiesės taškams *A*, *D* ir *F* taikome Menelajaus teoremą: $\frac{BF}{FE}\cdot\frac{EA}{AC}\cdot\frac{CD}{DB}=1.$ Aki–vaizdu, kad $\frac{EA}{AC}=\frac{2}{3}$, o $\frac{CD}{DB}=1$, todėl iš čia gauname, kad $\frac{BF}{FE}=\frac{3}{2}$. Trikampiui *BED* ir tiesės taškams *F*, *K* ir *C* taikome Menelajaus teoremą: $\frac{BF}{FE}\cdot\frac{EK}{KD}\cdot\frac{DC}{CB}=1.$

Įrašę santykių reikšmes $\frac{BF}{FE}=\frac{3}{2}$, $\frac{DC}{CB}=\frac{1}{2}$, iš čia randame, kad $\frac{3}{2}\cdot\frac{EK}{KD}\cdot\frac{1}{2}=1$, t. y., $\frac{EK}{KD}=\frac{4}{3}$.

Ats.: $\frac{EK}{KD}=\frac{4}{3}$.

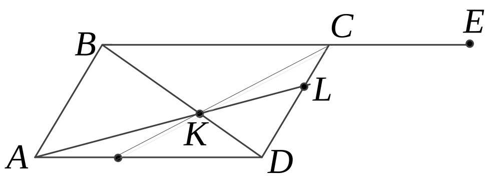


7 pav.

8. Kadangi $\angle KBC=\angle KDF$, o $\angle BKC=\angle DKF$, tai trikampiai *BKC* ir *DKF* yra panašieji (8 pav.), todėl $\frac{BK}{KD}=\frac{BC}{FD}=\frac{3}{2}$. Trikampiui *BDC*. ir tiesės taškams *K*, *L* ir *E* taikome Menelajaus teoremą: $\frac{BK}{KD}\cdot\frac{DL}{LC}\cdot\frac{CE}{EB}=1.$

Kadangi $\frac{BK}{KD}=\frac{3}{2}$, o

$$\frac{CE}{EB}=\frac{\frac{2}{3}BC}{BC+\frac{2}{3}BC}=\frac{2}{5},$$



8 pav.

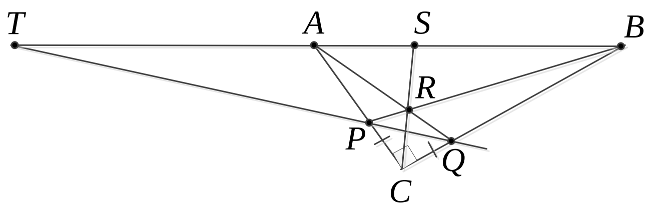
tai $\frac{3}{2}\cdot\frac{DL}{LC}\cdot\frac{2}{5}=1$, todėl $\frac{DL}{LC}=\frac{5}{3}$. Trikampiui *BKE* ir tiesės taškams *D*, *L* ir *C* pritaikę Menelajaus teoremą, gauname, kad $\frac{BD}{DK}\cdot\frac{KL}{LE}\cdot\frac{EC}{CB}=1.$ Kadangi

$$\frac{BD}{KD}=\frac{BK+KD}{KD}.=\frac{BK}{KD}+1=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2},\ \text{o}\ \frac{EC}{CB}=\frac{2}{3}.$$

tai iš čia išplaukia, kad $\frac{KL}{LE}=\frac{3}{5}.$

Ats.: $\frac{DL}{LC}=\frac{5}{3}.\ \frac{KL}{LE}=\frac{3}{5}.$

9. Pagal uždavinio sąlygą atkarpos AP, BQ ir CS susikerta taške R (9 pav.), todėl pagal Čevos teoremą turime, kad $\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CP}{PB}\cdot\frac{BS}{SA}=1.$

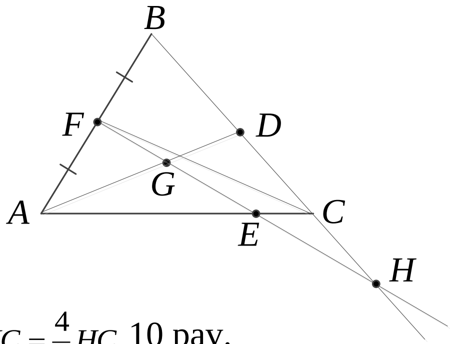


9 pav.

Kadangi $BC=6,\ AQ=8-2=6,\ PB=6-2=4.\ SA=10-BS,$ tai $\frac{6}{2}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{BS}{10-BS}=1.$ Iš čia gauname, kad $BS=4.$ Trikampiui ABC ir tiesės taškams Q, P ir T taikome Menelajaus teoremą: $\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CP}{PB}\cdot\frac{BT}{TA}=1.$ Įrašę žinomas atkarpų ilgių reikšmes ir pastebėję, kad $TA=10+BT$, turime $\frac{6}{2}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{BT}{10+BT}=1,$ t. y., $BT=20.$ Iš čia $TS=BT+BS=24.$

Ats.: $TS=24.$

10. Sakykime, kad tiesės BC ir EF susikerta taške H (10 pav.). Trikampiui ABC ir tiesės taškams F, E ir H taikome Menelajaus teoremą: $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BH}{HC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$ Kadangi $AF=FB,$ o $\frac{CE}{EA}=\frac{1}{4},$ tai iš čia išplaukia, kad $\frac{BH}{HC} = 4.$ Trikampiui ADC ir trim tiesės taškams G, E ir H pritaikę Menelajaus teoremą, turime: $\frac{AG}{GD} \cdot \frac{DH}{HC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1,$ t. y., $\frac{3}{2} \cdot \frac{DH}{HC} \cdot \frac{1}{4} = 1.$ Iš čia $\frac{DH}{HC} = \frac{8}{3}.$ Iš gautųjų lygybių išplaukia, kad



$BD = BH - DH = 4HC - \frac{8}{3}HC = \frac{4}{3}HC,$ 10 pav.

o $DC = DH - CH = \frac{8}{3}CH - CH = \ = \frac{5}{3}CH.$ Taigi $\frac{BD}{DC} = \frac{4}{5}.$

Ats.: $\frac{BD}{DC} = \frac{4}{5}.$

TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. $F_9 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{4}{7}, \right.$

$\left. \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{1}{1} \right\}.$

Ats.: (29 trupmenos).

2. $7640325 = 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11,$

$5236875 = 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 19 \Rightarrow$

$\Rightarrow (7640325, 5236875) = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 11025.$

3. $-75840 = -3215 \cdot 24 + 1320 \Rightarrow q = 24, r = 1320.$

4. $\varphi(2016)=\varphi(2^5\cdot 3^2\cdot 7)=2^5\cdot 3^2\cdot 7\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{7}\right)=576$

5. $|F_{10}|=2+\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(4)+\varphi(5)+\varphi(6)+\varphi(7)+\varphi(8)+$
$+\varphi(9)+\varphi(10)=2+1+2+2+4+2+6+4+6+4=33.$

6. Pagal 1 teoremą ieškomoji trupmena yra $\frac{c}{d}$ su $3<d\le 11$ ir $3d+1$ turi dalytis iš 8. Iš čia $d=5$. Tuomet $c=\frac{3\cdot 5+1}{8}=2$. Taigi ieškomoji trupmena yra $\frac{2}{5}$

7. Šie skaičiai gali būti, pavyzdžiui, tokie: $a=1$, $b=7$, $c=2$, $d=13$. Kadangi $a<b$, $c<d$ ir $bc-ad=7\cdot 2-1\cdot 13=1$, tai $\frac{a}{b}=\frac{1}{7}$ ir $\frac{c}{d}=\frac{2}{13}$ yra sekos $F_{\max(b,\,d)}=F_{13}$ gretimos trupmenos (pagal 3 teoremą).

8. Kadangi turime dvi gretimų trupmenų poras $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ir $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, tai $bc-ad=1$ ir $de-cf=1$. Iš čia

$$bc-ad=de-cf\Rightarrow c(b+f)=d(a+e)\Rightarrow\frac{c}{d}=\frac{a+e}{d+f}.$$

9. Šios gretimų trupmenų poros yra tokios: $\frac{0}{1},\frac{1}{9};\frac{2}{7},\frac{1}{3};\frac{2}{3},\frac{5}{7}$ ir $\frac{8}{9},\frac{1}{1}$.

10. $a=\sqrt{2}-1=0{,}41421356...$

Sekoje F_9 $a\in\left(\frac{2}{5},\frac{3}{7}\right)$, $\frac{2}{5}=0{,}4$, $\frac{3}{7}=0{,}428571\ ...$;

sekoje F_{12} $a \in \left(\frac{2}{5}, \frac{5}{12}\right)$, $\frac{2}{5} = 0{,}4$, $\frac{5}{12} = 0{,}416666\ ...$;

sekoje F_{17} $a \in \left(\frac{7}{17}, \frac{5}{12}\right)$, $\frac{7}{17} = 0{,}411764\ ...$, $\frac{5}{12} = 0{,}416666\ ...$;

sekoje F_{29} $a \in \left(\frac{12}{29}, \frac{5}{12}\right)$, $\frac{12}{29} = 0{,}413793\ ...$, $\frac{5}{12} = 0{,}416666\ ...$;

sekoje F_{41} $a \in \left(\frac{12}{29}, \frac{17}{41}\right)$, $\frac{12}{29} = 0{,}413793\ ...$, $\frac{17}{41} = 0{,}4146346\ ...$;

sekoje F_{41} $a \in \left(\frac{12}{29}, \frac{17}{41}\right)$, $\frac{12}{29} = 0{,}413793\ ...$, $\frac{17}{41} = 0{,}4146346\ ...$;

sekoje F_{70} $a \in \left(\frac{12}{29}, \frac{29}{70}\right)$, $\frac{12}{29} = 0{,}413793\ ...$, $\frac{29}{70} = 0{,}414285\ ...$;

Ats.: Farėjaus trupmena, aproksimuojanti iracionalųjį skaičių $a = \sqrt{2} - 1$ keturių ženklų po kablelio tikslumu yra $\frac{29}{70} = 0{,}\mathbf{4142}85...$ Ji yra sekos F_{70} trupmena.

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Iš pradžių patikrinkime, ar lygtis turi nors vieną racionalųjį sprendinį. Jų gali būti tik tarp skaičių $\frac{p}{q}$, jei p yra laisvojo nario – 14 daliklis, o q – vyriausiojo nario koeficiento 2 daliklis. Galimi pretendentai yra ±1, ±2, ±7, ±14, $\pm\frac{1}{2}$ ir $\pm\frac{7}{2}$. Tik $-\frac{7}{2}$ yra lygties sprendinys.

Padalijęs daugianarį $P_3(x) = 2x^3 + 3x^2 - 18x - 14$ iš dvinario $x - \left(-\frac{7}{2}\right) = x + \frac{7}{2}$ (kampu arba pagal Hornerio schemą), gauname dalmenį $2x^2 - 4x - 4$. Vadinasi,

$$2x^3+3x^2-18x-14=\left(x+\frac{7}{2}\right)(2x^2-4x-4).$$

Išsprendę kvadratinę lygtį $2x^2-4x-4=0$, gauname dar du sprendinius: $1-\sqrt{3}$ ir $1+\sqrt{3}$.

Ats.: $-\frac{7}{2}$, $1-\sqrt{3}$ ir $1+\sqrt{3}$.

2. Padauginę lygtį iš 24, gausime ekvivalenčią lygtį

$$(12x-1)(12x-2)(12x-3)(12x-4)=120.$$

Pažymėję $y=12x-3$, gausime:

$$(y+2)(y+1)y(y-1)=120,$$
$$((y+1)y)\cdot((y+2)(y-1)=120,$$
$$(y^2+y)(y^2+y-2)=120.$$

Dabar pažymėkime $z=y^2+y$ ir gausime kvadratinę lygtį

$$z^2-2z-120=0.$$

Jos sprendiniai yra –10 ir 12.

Kvadratinė lygtis $y^2+y=-10$ sprendinių neturi, o kvadratinės lygties $y^2+y=12$ sprendiniai yra –4 ir 3. Vadinasi, $x=-\frac{1}{12}$ arba $x=\frac{1}{2}$.

Ats.: $-\frac{1}{12}$; $\frac{1}{2}$.

3. Kadangi

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2),\quad x^2-9x-20=(x-4)(x-5)\quad \text{ir}$$
$$(x+1)(x+2)(x-4)(x-5)=((x+1)(x-4))((x+2)(x-5))=$$
$$=(x^2-3x+1)(x^2-3x-10),$$

pradinę lygtį galima užrašyti taip:

$$(x^2-3x+1)(x^2-3x-4)(x^2-3x-10)=-30.$$

Pažymėję $y = x^2 - 3x$, gauname lygtį

$$(y+1)(y-4)(y-10) = -30,$$

o iš jos – trečio laipsnio lygtį

$$y^3 - 13y^2 + 26y + 70 = 0.$$

Šios lygties racionaliųjų sprendinių gali būti tik tarp laisvojo 70 daliklių: ±1; ±2; ±5; ±7; ±10; ±14; ±35 ir 70. Kadangi 5 yra sprendinys, padaliję $P_3(y) = y^3 - 13y^2 + 26y + 70$ iš $y - 5$ (kampu arba pagal Hornerio schemą), gauname, kad

$$P_3(y) = (y-5)(y^2 - 8y - 14).$$

Lygtis $y^2 - 8y - 14 = 0$ turi du sprendinius: $4 - \sqrt{30}$ ir $4 - \sqrt{30}.$

Baigiant reikia išspręsti tris kvadratines lygtis:

$$x^2 - 3x = 5, \;\; x^2 - 3x = 4 - \sqrt{30} \;\text{ ir }\; x^2 - 3x = 4 + \sqrt{30}.$$

Pirma lygtis turi du sprendinius: $\dfrac{3-\sqrt{29}}{2}$ ir $\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}$.

Antros lygties sprendiniai yra $\dfrac{3-\sqrt{25-4\sqrt{30}}}{2}$ ir $\dfrac{3+\sqrt{25-4\sqrt{30}}}{2}$,

o trečios lygties – $\dfrac{3-\sqrt{25+4\sqrt{30}}}{2}$ ir $\dfrac{3+\sqrt{25+4\sqrt{30}}}{2}$.

Ats.: $\dfrac{3\pm\sqrt{29}}{2}, \;\; \dfrac{3\pm\sqrt{25-4\sqrt{30}}}{2}, \;\; \dfrac{3\pm\sqrt{25+4\sqrt{30}}}{2}.$

4. Aišku, kad $x = -1$ ir $x = -3$ yra lygties sprendiniai. Vadinasi, daugianaris

$$P_4(x) = (x+1)^4 + (x+3)^4 - 16 = (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) +$$
$$+ (x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81) - 16 =$$
$$= 2x^4 + 16x^3 + 60x^2 + 112x + 66 = 2(x^4 + 8x^3 + 30x^2 + 56x + 33)$$

dalijasi iš dvinarių $x + 1$ ir $x + 3$ sandaugos

$$(x+1)(x+3) = x^2 + 4x + 3.$$

Padaliję kampu daugianarį

$$Q_4(x) = x^4 + 8x^3 + 30x^2 + 56x + 33$$

iš $x^2 + 4x + 3$ gauname dalmenį $x^2 + 4x + 11.$ Taigi

$$P(x) = 2(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 4x + 11).$$

Kvadratinė lygtis $x^2 + 4x + 11 = 0$ sprendinių neturi. Vadinasi, lygtis $(x+1)^4 + (x+3)^4 = 16$ turi du sprendinius: –1 ir –3.

Ats.: –1; –3.

Pastaba. Šią lygtį galima spręsti ir kitaip.

Pažymėję $y = \dfrac{(x+1)+(x+3)}{2} = x + 2,$ gautume lygtį $(y-1)^4 + (y+1)^4 - 16 = 0,$ o iš jos – lygtį $y^4 + 6y^2 - 7 = 0.$ Tada $y^2 = -1$ arba $y^2 = 1.$ Pirmu atveju $x = -3,$ o antru – $x = -1.$

5. Aišku, kad $x = 0$ nėra lygties sprendinys. Padaliję lygtį iš x^4 $(x \neq 0),$ gausime lygtį

$$\left(\frac{x^2 - x + 1}{x}\right)^4 - 10\left(\frac{x^2 - x + 1}{x}\right)^2 + 9 = 0,$$

kuri, pažymėjus $y = \left(\dfrac{x^2 - x + 1}{x}\right)^2,$ tampa kvadratine lygtimi $y^2 - 10y + 9 = 0,$ turinčia du sprendinius: $y = 1$ ir $y = 9.$

Iš lygčių $\left(\dfrac{x^2 - x + 1}{x}\right)^2 = 1$ ir $\left(\dfrac{x^2 - x + 1}{x}\right)^2 = 9$

gauname keturias kvadratines lygtis:

$$x^2 - x + 1 = -x, \quad x^2 - x + 1 = x, \quad x^2 - x + 1 = -3x \quad \text{ir}$$
$$x^2 - x + 1 = 3x.$$

Pirma lygtis sprendinių neturi, o spręsdami kitas gauname:

1) $x^2 - x + 1 = x \;\Rightarrow\; (x-1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1;$

2) $x^2 - x + 1 = -3x \;\Rightarrow\; (x+1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = -1;$

3) $x^2 - x + 1 = 3x \Rightarrow (x-2)^2 = 3 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{3}$

arba $x = 2 + \sqrt{3}.$

Ats.: –1; 1; $2 - \sqrt{3}$; $2 + \sqrt{3}$.

6. Ši lygtis yra nelyginio laipsnio simetrinė lygtis. Skaičius –1 yra jos sprendinys. Padaliję daugianarį

$$P_7(x) = x^7 - 2x^6 + 3x^5 - x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

iš dvinario $x+1$ (kampu arba pagal Hornerio schemą), gauname, kad

$$P_7(x) = (x+1)(x^6 - 3x^5 + 6x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 3x + 1).$$

Lygtis $x^6 - 3x^5 + 6x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 3x + 1 = 0$ yra lyginio laipsnio simetrinė lygtis. Ją spręskime, taikydami keitinį

$$y = x + \frac{1}{x}.$$

Kad būtų lengviau iš pradžių lygtį padalykime iš x^3 $(x \neq 0)$. Gausime:

$$x^3 - 3x^2 + 6x - 7 + 6 \cdot \frac{1}{x} - 3 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3},$$

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - 7 = 0.$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right) + 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - 7 = 0,$$

$$y(y^2 - 3) - 3(y^2 - 2) + 6y - 7 = 0,$$

$$y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = 0,$$

$$(y-1)^3 = 0,$$

$$y = 1.$$

Lygtis $x + \frac{1}{x} = 1$ sprendinių neturi.

Ats.: –1.

7. Taikydami keitinį

$$y = \frac{(x+1)+(x+3)+(x+5)+(x+7)}{4} = x+4,$$

gauname:

$$(y-3)(y-1)(y+1)(y+3)+15=0,$$

$$(y^2-9)(y^2-1)+15=0,$$

$$y^4-10y^2+24=0,$$

$$(y^2-5)^2-1=0,$$

$$y^2-5=-1 \text{ arba } y^2-5=1,$$

$$y^2=4 \text{ arba } y^2=6.$$

Vadinasi, $(x+4)^2=4$ arba $(x+4)^2=6.$ Iš čia gauname:

1) $(x+4)^2=4 \Rightarrow x+4=-2$ arba $x+4=2 \Rightarrow x=-6$ arba $x=-2;$

2) $(x+4)^2=6 \Rightarrow x+4=-\sqrt{6}$ arba $x+4=\sqrt{6} \Rightarrow x=-4-\sqrt{6}$ arba $x=-4+\sqrt{6}.$

Ats.: –6; –2; $-4-\sqrt{6}$; $-4+\sqrt{6}$.

8. Pažymėję $y=x^4$, gauname:

$$y^2-15y-16=0 \Rightarrow y=-1 \text{ arba } y=16.$$

Lygtis $x^4=-1$ sprendinių neturi, o spręsdami lygtį $x^4=16$ gauname:

$x^4=16 \Rightarrow x^2=-4$ arba $x^2=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=-2$ arba $x=2.$

Ats.: –2; 2.

9. Įrašę $x=-1$, gausime lygtį $a-b=14$, o įrašę $x=2$ – lygtį $16a+2b=26$.

Sistema

$$\begin{cases} a-b=14, \\ 16a+2b=26 \end{cases}$$

turi vienintelį sprendinį (*a*; *b*): $a=3,\ b=-11$.

Toliau sprendžiame lygtį

$$x^5+3x^4-2x^3-9x^2-11x-6=0.$$

Daugianarį $P_5(x)=x^5+3x^4-2x^3-9x^2-11x-6$ padaliję iš dvinarių $x+1$ ir $x-2$ sandaugos $(x+1)(x-2)=x^2-x-2$, gauname dalmenį x^3+4x^2+4x+3.

Lygtis $x^3+4x^2+4x+3=0$ turi sveikąjį sprendinį $x=-3$ (laisvojo nario 3 daliklį).

Padalijį daugianarį $P_3(x)=x^3+4x^2+4x+3$ iš dvinario $x+3$ gauname, kad

$$P_3(x)=(x+3)(x^2+x+1).$$

Kadangi $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,$ lygtis $x^2+x+1=0$ sprendinių neturi.

Taigi lygtis $P_3(x)=0$ turi tik vieną sprendinį – skaičių –3.

Ats.: $a=3,\ b=-11;\ x=-3.$

10. Iš pradžių apskaičiuokime reikiamus skaičiaus $x=1+\sqrt{2}$ laipsnius:

$$(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2};$$
$$(1+\sqrt{2})^3=7+5\sqrt{2};$$
$$(1+\sqrt{2})^5=41+29\sqrt{2}.$$

Įrašę į lygtį, gausime:

$$41+29\sqrt{2}+a(7+5\sqrt{2})+b(3+2\sqrt{2})+5(1+\sqrt{2})+2=0,$$
$$48+7a+3b+(34+5a+2b)\sqrt{2}=0.$$

Kad *a* ir *b* būtų racionalieji skaičiai, ir reiškinio $48+7a+3b$ reikšmė, ir reiškinio $34+5a+2b$ reikšmė turi būti lygi nuliui. Išsprendę lygčių sistemą

$$\begin{cases} 78+7a+3b=0, \\ 34+5a+2b=0, \end{cases}$$

gauname, kad $a=-6,\ b=-2.$

Taigi reikia išspręsti lygtį

$$x^5-6x^3-2x^2+5x+2=0.$$

Ji turi sprendinį $x=1+\sqrt{2}.\ \ b=-2.$

Nesunku įsitikinti (tiesiogiai tikrinant), kad $x=1-\sqrt{2}$ taip pat yra šios lygties sprendinys.

Vadinasi, daugianaris

$$P_5(x)=x^5-6x^3-2x^2+5x+2$$

dalijasi iš dvinarių $x-(1+\sqrt{2})$ ir $x-(1-\sqrt{2})$ sandaugos

$$(x-(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{2})=((x-1)-\sqrt{2})((x-1)+\sqrt{2})=$$
$$=(x-1)^2-2=x^2-2x-1.$$

Padaliję gauname, kad

$$P_5(x)=(x^2-2x-1)(x^3+2x^2-x-2).$$

Lygties $x^3+2x^2-x-2=0$ laisvojo nario dalikliai 1, –1 ir –2 yra šios lygties sprendiniai.

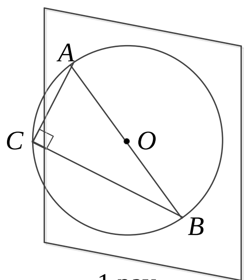
Taigi lygtis $x^5-6x^3-2x^2+5x+2=0$ turi penkis sprendi– nius: $1+\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2},$ –2, –1 ir 1.

Ats.: $a=-6,\ b=-2;\ 1-\sqrt{2},$ –2, –1, 1.

PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

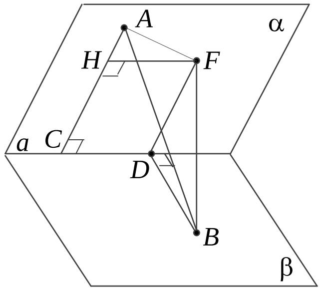
1. Ne visada. Jei trikampis *ABC* kampas *C* yra statusis, $\angle C==90°$, tai taškas *O* yra įžambinės *AB* vidurio taškas. Tuomet per vienoje tiesėje esančius taškus *A*, *B* ir *O* eina be galo daug plokštumų, neinančių per tašką *C*
(1 pav.).

Ats.: nebūtinai.



1 pav.

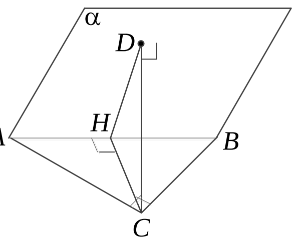
2. Sakykime, kad tiesė a yra dvisienio kampo tarp plokštumų α ir β briauna, taškai C ir D yra taškų A ir B ortogonaliosios projekcijos tiesėje a, taigi $AC = BD = 6$, $CD = 4$ (2 pav.). Sakykime, kad taškas F yra taško B ortogonalioji projekcija plokštumoje α, taigi tiesė DF yra tiesės DB ortogonalioji projekcija plokštumoje α. Kadangi tiesė BD yra statmena tiesei a, tai pagal trijų statmenų teoremą tiesė FD irgi statmena tiesei a, todėl kampas BDF yra dvisienio kampo tarp plokštumų α ir β tiesinis kampas, taigi $\angle BDF = 60^\circ$. Iš stačiojo trikampio BDF turime $DF = BD\cos 60^\circ = 3$, $BF = BD\cos 60^\circ = 3\sqrt{3}$. Plokštumoje α nubrėžkime tiesę $FH \perp AC$, keturkampis $CDFH$ yra stačiakampis, todėl $CH = DF = 3$, $FH = CD = 4$, $AH = AC - CH = 3$. Iš stačiojo trikampio AFH randame $AF = \sqrt{AH^2 + FH^2} = 5$. Kadangi tiesė BF yra statmena plokštumai α, tai ji statmena ir tos plokštumos tiesei AF, taigi trikampis AFB yra statusis. Iš jo randame $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{52}$.



2 pav.

Ats.: $\sqrt{52}$.

3. Sakykime, kad plokštuma α eina per tiesę AB ir su trikampio ABC plokštuma sudaro dvisienį kampą lygų 60°, o taškas D yra taško C ortogonalioji projekcija plokštumoje α (3 pav.). Jei atkarpa CH yra trikampio ABC aukštinė, nubrėžta į įžambinę, tai tiesė DH yra tiesės CH ortogonalioji projekcija plokštumoje α, todėl pagal trijų statmenų teoremą tiesės AB ir DH yra statmenos, taigi kampas DHC yra dvisienio kampo tarp plokštumos α ir trikampio ABC plokštumos tiesinis kampas, t. y.,



3 pav.

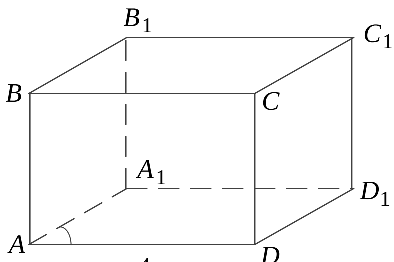
$\angle DHC = 60^\circ$. Kadangi trikampio ABC įžambinė $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 13$, o jo plotui teisingos lygybės $2S = AC \cdot BC = AB \cdot CH$, tai iš čia gauname, kad $CH = \dfrac{AC \cdot BC}{AB} = \dfrac{60}{13}$. Iš stačiojo trikampio DCH randame ieškomąjį atstumą DC nuo taško C iki plokštumos α:

$$DC = \frac{CH}{\sin 60^\circ} = \frac{120}{13\sqrt{3}}.$$

Ats.: $\dfrac{120}{13\sqrt{3}}$.

4. Nubraižykime brėžinį (4 pav.) taip, kad tos gretasienio sienos, kurios yra stačiakampiai, būtų jo šoninės sienos. Tuomet gretasienis tampa stačiuoju, jo pagrindai yra lygiagretainiai, kurių kraštinių ilgiai lygūs $AD = BC = 6$, $DD_1 = AA_1 = 3$, o kampas tarp kraštinių yra $\angle A_1AD = 30^\circ$. Taigi pagrindo plotas lygus

$$S = AD \cdot DD_1 \sin 30^\circ = 9.$$



4 pav.

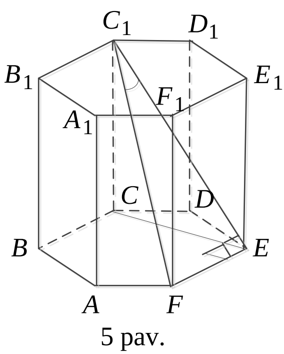
Kadangi gretasienio šoninės kraštinės yra statmenos pagrindo plokštumai, tai gretasienio aukštinė lygi $CD = 4$. Todėl gretasienio tūris lygus $S \cdot CD = 36$.

Ats.: 36.

5. Kadangi prizmės pagrindai – taisyklingieji šešiakampiai (5 pav.), tai šešiakampio $ABCDEF$

$\angle CDE = \angle FED = 120^\circ$,

$\angle CED = \angle DCE = 30^\circ$,



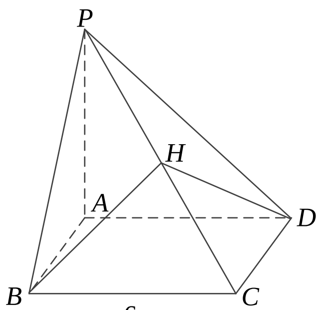
5 pav.

taigi $\angle FEC = 90^{\circ}$. Tiesė FE yra statmena tiesės C_1E ortogonaliajai projekcijai prizmės pagrindo plokštumoje – tiesei CE, to–dėl pagal trijų statmenų teoremą ji yra statmena tiesei C_1E, t. y., trikampis C_1EF yra statusis, $\angle C_1EF = 90^{\circ}$. Iš šio trikampio randame šešiakampio kraštinę $EF = C_1E \,\mathrm{tg}\angle FC_1E = 1$. Iš trikampio CED gauname, kad $CE^2 = CD^2 + DE^2 - 2CD \cdot ED \cos 120^{\circ} = 3$, o iš stačiojo trikampio C_1CE randame prizmės aukštinę $C_1C = \sqrt{C_1E^2 - CE^2} = \sqrt{6}$. Kadangi apibrėžto apie taisyklingąjį šešiakampį apskritimo spindulys R lygus kraštinės ilgiui, tai $R = 1$, ir prizmės pagrindo plotas $S = 6 \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin 60^{\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Tuomet prizmės tūris

$$V = S \cdot CC_1 = \frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

Ats.: $\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

6. Visų pirma pastebėkime, kad trikampiai PAB ir PAD yra lygūs (nes jie yra statieji o jų atitinkami statiniai lygūs). Iš čia išplaukia, kad $PB = PD$. Trikampių PBC ir PDC atitinkamos kraštinės lygios, taigi šie trikampiai lygūs. Taigi jei atkarpa BH yra trikampio PBC aukštinė, nubrėžta į kraštinę PC (6 pav.), tai atkarpa DH yra trikampio PCD aukštinė, nubrėžta į tą pačią kraštinę PC. Iš čia seka, kad kampas BHD yra dvisienio kampo tarp piramidės sienų PBC ir PCD, kurio briauna yra tiesė PC, tiesinis kampas, t. y., $\angle BHD = 135^{\circ}$.



6 pav.

Žymėkime $BH = DH = h$ ir trikampiui BHD taikykime kosinusų teoremą: $(\sqrt{2a})^2 = h^2 + h^2 - 2h^2\cos 135^\circ$. Iš čia $2a^2(2+\sqrt{2})h$, t. y.,

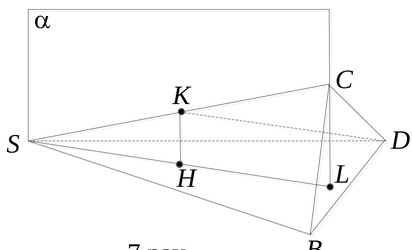
$$h = \sqrt{\frac{2}{2+\sqrt{2}}}\,a = a\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Tiesės *PB* ortogonalioji projekcija piramidės pagrindo plokštumoje yra tiesė *AB*. Kadangi tiesė *BC* yra statmena tiesei *BA*, tai pagal trijų statmenų teoremą tiesė *BC* yra statmena tiesei *PB*, taigi trikampis *PBC* yra statusis. Kadangi $PB = \sqrt{PA^2 + a^2}$, $PC = \sqrt{PA^2 + 2a^2}$, o $PB \cdot BC = PC \cdot BH$ (kiekviena šių sandaugų lygi dvigubam stačiojo trikampio *PBC* plotui), tai gauname lygybę $\sqrt{PA^2 + a^2} \cdot a = \sqrt{PA^2 + 2a^2} \cdot a\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Iš čia seka, kad piramidės aukštinė $PA = \sqrt{\sqrt{2}-1}\,a$, taigi piramidės tūris

$$V = \frac{1}{3}AB^2 \cdot PA = \frac{1}{3}a^3\sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

Ats.: $\frac{1}{3}a^3\sqrt{\sqrt{2}-1}.$

7. Išnagrinėkime dvi trikampes piramides *SBDC* ir *SBDA*, į kurias duotąją piramidę dalija plokštuma, einanti per taškus *B*, *D* ir *S*. Šių piramidžių pagrindai *BCD* ir *ABD* yra lygūs trikampiai, o jų aukštinės lygios duotosios piramidės aukštinei. Taigi šių piramidžių tūriai lygūs 10. Kadangi per taškus *B*, *D* ir *K* einanti plokštuma kerta tik piramidę *SBDC*, todėl uždavinio sprendimui reikia išnagrinėti tik šios piramidės dalių tūrius. Kaip ir 7 pavyzdyje nubrėžkime brėžinį taip, kad piramidžių *SBCD* ir *SBDK* pagrindai būtų trikampis *SBD* (7 pav.). Sakykime, kad atkarpos *CL* ir *KH* yra duotųjų piramidžių aukštinės. Jei V_1 ir V_2 − piramidžių

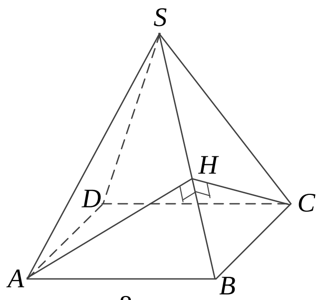


7 pav.

SBCD ir *SBDK* tūriai, o $S-$trikampio *SBD* plotas, tai $\frac{V_2}{V_1}=\frac{S\cdot KH}{S\cdot CL}=\frac{KH}{CL}.$ Taškai *S*, *C*, *K*, *L* ir *H* yra plokštumoje α, kuri eina per tiesę *SC* ir yra statmena plokštumai, einančiai per taškus *S*, *B* ir *D*. Taigi taškai *S*, *L* ir yra ir plokštumoje α, ir plokštumoje, einančioje per taškus *S*, *B* ir *D*, taigi jie priklauso tų plokštumų sankirtos tiesei. Iš čia seka, kad trikampiai *SKH* ir *SCL* yra panašieji, todėl $\frac{KH}{CL}=\frac{SK}{SC}=\frac{1}{2}.$ Taigi $\frac{V_2}{V_1}=\frac{1}{2},$ t. y., $V_2=\frac{1}{2}V_1=5.$ Taigi vienos dalies (briaunainio, kurio viršūnės yra taškai *C*, *K*, *B*, *D*) tūris lygus $10-5=5,$ todėl likusios piramidės dalies tūris lygus 15.

Ats.: 5 ir 15.

8. Taisyklingosios keturkampės piramidės *SABCD* pagrindas *ABCD* yra kvadratas, kurio kraštinė lygi *a*, o šoninės sienos – lygūs lygiašoniai trikampiai *SAB*, *SBC*, *SCD* ir *SAD* (8 pav.). Iš viršūnės *A* į kraštinę *SB* nubrėžkime trikampio *SAB* aukštinę *AH*. Kadangi lygiašoniai trikampiai *SAB* ir *SBC* yra lygūs, tai atkarpa *CH* yra trikampio *SBC* aukštinė, nubrėžta į kraštinę *SB*. Iš čia seka, kad kampas *AHC* yra dvisienio kampo tarp piramidės sienų *SAB* ir *SBC* tiesinis kampas, t. y., $\angle AHC=\alpha.$ Žymime $AH=CH=h$ ir trikampiui *AHC* taikydami kosinusų teoremą gauname lygybę $(\sqrt{2}a)^2=h^2+h^2-2h\cdot h\cos\alpha,$ iš kurios surandame $h=\frac{a}{\sqrt{1-\cos\alpha}},$ Jei $SA=x,$ tai lygiašonio trikampio *ASB* aukštinės *SF*, nubrėžtos į pagrindą *AB* ilgis lygus $\sqrt{x^2-\frac{a^2}{4}},$



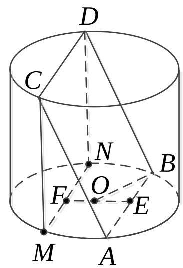
8 pav.

todėl teisinga lygybė $a\sqrt{x^2-\frac{a^2}{4}}=xh,$ (nes šios lygybės abi pusės lygios dvigubam trikampio *ASB* plotui). Iš jos surandame piramidės šoninės briaunos ilgį $x^2=\frac{a^4}{4(a^2-h^2)}=\frac{a^2(1-\cos\alpha)}{4\cos\alpha}$ (nors vardiklyje yra minuso ženklas, bet x^2 reikšmė yra teigiama, kadangi dvisienis kampas tarp taisyklingosios keturkampės piramidės šoninių sienų yra bukasis). Jei taškas *O* yra kvadrato *ABCD* įstrižainių susikirtimo taškas, tai iš stačiojo trikampio *OAS* randame piramidės aukštinę $SO=\sqrt{x^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a}{2}\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{\sqrt{1-\cos\alpha}}.$

Tuomet piramidės tūris $V=\frac{1}{3}a^2\cdot\frac{a}{2}\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{\sqrt{1-\cos\alpha}}=\frac{a^3\sqrt{1+\cos\alpha}}{6\sqrt{-\cos\alpha}}.$

Ats.: $\frac{a^3\sqrt{1+\cos\alpha}}{6\sqrt{-\cos\alpha}}.$

9. Sakykime, kad ritinį kertanti plokštuma jo pa–grindus kerta stygomis $AB=CD=10$ (9 pav.), o keturkampis *ABDC* yra kvadratas. Sakykime, kad atkarpa *MN* yra stygos *CD* ortogonalioji projekcija kito ritinio pagrindo plokštumoje, tai keturkampis *ABMN* yra stačiakampis. Sakykime, kad taškai *E* ir *F* yra atitinkamai atkarpų *AB* ir *MN* vidurio taškai, o taškas *O* – ritinio pagrindo centras. Iš stačiojo trikampio *OEB* randame $OE=\sqrt{OB^2-EB^2}=\sqrt{24},$ o iš stačiojo trikampio *AMC* randame ritinio aukštinę



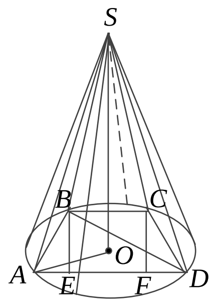
9 pav.

$$CM=\sqrt{AC^2-AM^2}=\sqrt{10^2-(2\sqrt{24})^2}=2.$$

Tuomet ritinio viso paviršiaus plotas $S=2\pi\cdot7\cdot(7+2)=126\pi$

Ats.: 126π.

10. Jei kūgis apibrėžtas apie piramidę, tai kūgio ir piramidės viršūnės sutampa, keturios kūgio sudaromosios yra piramidės briaunos, o kūgio pagrindas yra apskritimas, apibrėžtas apie piramidės pagrindą (10 pav.). Sakykime, kad piramidės pagrindas yra trapecija *ABCD*, kurios trumpesnysis pagrindas *BC* ir šononės kraštinės *AB* ir *CD* yra lygios, o $AB = BC = CD = 3.$ Sakykime, kad taškas *S* yra kūgio ir piramidės viršūnė, o atkarpa *SO* yra apie piramidę apibrėžto kūgio aukštinė. Statieji trikampiai *AOS*, *BOS*, *COS* ir *DOS* yra lygūs, nes jų statinis *OS* yra bendras, o įžambinės *AS*, *BS*, *CS* ir *DS* yra lygios, nes jos lygios kūgio sudaromajai. Taigi atkarpos *OA*, *OB*, ***OC*** ir *OD* yra lygios, taigi taškas *O* yra apie trapeciją *ABCD* apibrėžto apskritimo centras. Nubrėžiame $BE \perp AD$ ir $CF \perp AD$. Kadangi trapecija *ABCD* yra lygiašonė, tai



10 pav.

$AE = FD, \quad EF = BC = 3,$ o $ED = \frac{9}{2}.$ Iš stačiojo trikampio *ABE* randame, kad $AE = AB\cos\angle BAC = 3\cos 60^\circ = \frac{3}{2},$ o $BE = AB\sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$ Iš čia seka, kad $AD = 2AE + EF = 6.$ o

$$BD = \sqrt{ED^2 + BE^2} = \; = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{108}}{2}.$$

Kadangi apie trapeciją *ABCD* apibrėžtas apskritimas yra ir apie trikampį *ABD* apibrėžtas apskritimas, tai jo spindulį randame iš formulės $R = \frac{AD \cdot AB \cdot BD}{4S},$ čia $S = \frac{1}{2}AD \cdot BE = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ – trikampio *ABD* plotas. Įrašę gautas reikšmes, randame, kad $R = OA = 3.$

Kadangi tiesė *OA* yra tiesės *SA* ortogonalioji projekcija piramidės pagrindo plokštumoje, tai kampas *OAS* yra ieškomasis kampas tarp piramidės šoninės briaunos ir pagrindo plokštumos. Kūgio ir piramidės aukštinės ilgį *H* rasime iš kūgio tūrio formulės $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H,$ t. y.,

$H = OS = \dfrac{3V}{\pi R^2} = \dfrac{3 \cdot 9\pi}{\pi \cdot 3^2} = 3.$ Taigi statusis trikampis *AOS* yra lygiašonis, todėl jo smailusis kampas *OAS* lygus 45°.

Ats.: 45°.

ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tegu x yra valties greitis, o y – upės tėkmės greitis (km/h). Pagal sąlygą, gelbėjimosi ratas pasroviui plaukė $\dfrac{2}{y}$ valandų, o valties sugaištas laikas (kol pasivijo gelbėjimosi ratą) yra $\dfrac{1}{3} + \dfrac{\frac{1}{3}(x-y)+2}{x+y}$ valandų. Ieškomiems dydžiams x ir y rasti reikia išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{2}{y} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{\frac{1}{3}(x-y)+2}{x+y}, \\ x = 2y. \end{cases}$$

Į pirmą lygtį įrašę $x = 2y,$ gauname:

$$\frac{2}{y} = \frac{1}{3} + \frac{y+6}{3 \cdot 3y} \Rightarrow 18 = 3y + (y+6) \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = 6.$$

Taigi valties greitis yra 6 km/h, o upės srovės – 3 km/h.

Ats.: 6 km/h, 3 km/h.

2. Tegu studento greitis yra v km/h, o atstumas, kurį studentas nuėjo kol jį pasicvijo brolis, yra x km.

Pagal sąlygą,

$$\frac{x}{v} = 0{,}5 + \frac{x}{4} \quad \text{ir} \quad \frac{x}{4} = \frac{10{,}5 - x}{v}.$$

Iš pirmos lygties gauname, kad $x = \dfrac{2v}{4-v}$. O tada iš antros lygties randame ieškomą v reikšmę:

$$\frac{v}{2(4-v)} = \frac{1}{v}\left(10{,}5 - \frac{2v}{4-v}\right) \Rightarrow \frac{v}{2(4-v)} = \frac{42-12{,}5v}{v(4-v)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = 84 - 25v \Rightarrow v \in \{-28; 3\} \Rightarrow v = 3.$$

Taigi ieškomas studento greitis yra 3 km/h.

Ats.: 3 km/h.

3. Tegu atstumas tarp *A* ir *B* yra *x* km, o v_1 ir v_2 yra atitinkamai pirmo ir antro pėsčiojo greitis(km/h). Pagal sąlygą,

$$\frac{0{,}25x}{v_1} = \frac{0{,}5x - 1{,}5}{v_2} \text{ ir } \frac{0{,}5x}{v_2} = \frac{0{,}5x - 2}{v_1}.$$

Spręsdami šių lygčių sistemą, gauname:

$$\begin{cases} \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{0{,}25x}{0{,}5x - 1{,}5}, \\ \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{0{,}5x - 2}{0{,}5x} \end{cases} \Rightarrow \frac{0{,}25x}{0{,}5x - 1{,}5} = \frac{0{,}5x - 2}{0{,}5x} \Rightarrow \frac{x}{2x - 6} = \frac{x - 4}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 14x + 24 = 0 \Rightarrow x \in \{2; 12\}.$$

Vadinasi, ieškomas atstumas tarp *A* ir *B* yra 12 km.

Ats.: 12 km.

4. Tegu *t* (h) yra ieškomas autobusų eismo laiko intervalas, o *v* – autobuso greitis (km/h).

Pagal pirmą sąlygos dalį gauname:

$$\frac{27}{60}v = vt + \frac{27}{60}\cdot 5 \Rightarrow (0{,}45 - t)v = 2{,}25,$$

o pagal antrą sąlygos dalį gauname:

$$\frac{1{,}8}{5} = t - \frac{1{,}8}{v} \Rightarrow t - \frac{1{,}8}{v} = 0{,}36.$$

Spręsdami lygčių sistemą

$$\begin{cases} (0{,}45 - t)v = 2{,}25, \\ t - \dfrac{1{,}8}{v} = 0{,}36, \end{cases}$$

gauname:

$$\begin{cases} v = \dfrac{2{,}25}{0{,}45 - t}, \\ t - \dfrac{1{,}8(0{,}45 - t)}{2{,}25} = 0{,}36 \end{cases} \Rightarrow 2{,}25t + 1{,}8t - 0{,}81 = 0{,}81 \Rightarrow 4{,}05t = 1{,}62 \Rightarrow t = 0{,}4.$$

Taigi reisinių autobusų eismo laiko intervalas yra 24 minutės.
Ats.: 24 min.

5. Tegu s yra rato ilgis (metrais), o v_1 ir v_2 – atitinkamai pirmojo ir antrojo sportininko greitis (m/sek), o t – ieškomas laikas. Pagal sąlygą,

$$\frac{s}{v_2} - \frac{s}{v_1} = 5 \quad \text{ir} \quad 30v_1 = s + 30v_2.$$

O ieškomą laiką t galima apskaičiuoti pagal formulę $t = \dfrac{s}{v_1 + v_2}$.

Iš antros lygties gauname, kad $s = 30(v_1 - v_2)$. Įrašę į pirmą lygtį randame sąryšį tarp greičių v_1 ir v_2:

$$\frac{30(v_1 - v_2)}{v_2} - \frac{30(v_1 - v_2)}{v_1} = 5 \Rightarrow \left(6 \cdot \frac{v_1}{v_2} - 6\right) - \left(6 - 6 \cdot \frac{v_2}{v_1}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \cdot \frac{v_1}{v_2} - 13 + 6 \cdot \frac{v_2}{v_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \cdot \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 - 13 \cdot \frac{v_1}{v_2} + 6 = 0 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} \in \left\{\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right\}.$$

Kadangi $v_1 > v_2$, tai $v_1 = 1{,}5v_2$. Tada $s = 30 \cdot 0{,}5v_2 = 15v_2$, todėl $t = \dfrac{15v_2}{1{,}5v_2 + v_2} = 6$. Taigi sportininkai, susitiktų po 6 sekun–džių.

Ats.: 6 sek.

6. Tegu *s* yra atstumas tarp *A* ir *B* (kilometrais), v_1 ir v_2 – atitinkamai pėsčiojo ir dviratininko greitis (km/h), o *t* – ieškomas laikas. Pagal pirmą sąlygos dalį gauname lygtį $\dfrac{s}{v_1} = 3{,}5 + \dfrac{s}{v_2}$, o pagal antrą – lygtį $\dfrac{5}{3}(v_1 + v_2) = s$.

Iš pirmos lygties gauname, kad $v_1 = \dfrac{s v_2}{3{,}5v_2 + s}$. Šią išraišką įrašę į antrą lygtį, apskaičiuojame v_2:

$$\frac{5}{3}\left(\frac{s v_2}{3{,}5v_2 + s} + v_2\right) = s \Rightarrow 35v_2^2 - s v_2 - 6s^2 = 0 \Rightarrow v_2 = \frac{3}{7}s.$$

Belieka apskaičiuoti ieškomą laiką: $t = \dfrac{s}{v_2} = \dfrac{7}{3} = 2\dfrac{1}{3}$.

Taigi dviratininkui nuvažiuoti iš *A* į *B* reikia $2\dfrac{1}{3}$ h.

Ats.: $2\dfrac{1}{3}$ h.

7. Tegu trečiojo dviratininko greitis yra *v* km/h, o *t* – laikas (h), per kurį trečiasis dviratininkas pasivijo antrąjį dviratininką.

Pagal sąlygą, trečiojo dviratininko starto momentu antrasis dviratininkas buvo už 10 km, o pirmasis – už 24 km. Per laiką *t* (kol trečiasis pasivijo antrąjį) antrasis dviratininkas nuvažiacvo $10t$ km, o pirmasis – $12t$ km. Trečiasis dviratininkas pasivijo pirmąjį, kai šis buvo nuvažiavęs $24 + 12t + 24 = 48 + 12t$ kilometrų. Gauname dvi lygtis:

$$vt = 10 + 10t \quad \text{ir} \quad v(t + 2) = 48 + 12t.$$

Spręsdami šių lygčių sistemą, gauname:

$$\begin{cases} t = \dfrac{10}{v-10}, \\ v\left(\dfrac{10}{v-10}+2\right) = 48 + 12 \cdot \dfrac{10}{v-10} \end{cases} \Rightarrow v(2v-10) = 48v - 480 + 120 \Rightarrow$$

$\Rightarrow v^2 - 29v + 180 = 0 \Rightarrow v \in \{9;\ 20\}$. Taigi trečiojo dviratininko greitis 20 km/h.

Ats.: 20 km/h.

8. Tegu s yra atstumas (km) tarp A ir B, t – laiko tarpas (h) tarp automobilių išvykimo iš vietovės A, o v_1, v_2 ir v_3 – atitinkamai pirmojo, antrojo ir trečiojo automobilio greitis (km/h).

Pagal sąlygos pradžią, $\dfrac{s}{v_3} = \dfrac{s}{v_2} - t = \dfrac{s}{v_1} - 2t$. Tęsdami sąlygos analizę, gauname dar dvi lygtis:

$$\frac{120}{v_1} = \frac{120}{v_2} + 1 \quad \text{ir} \quad \frac{160}{v_3} = \frac{80}{v_1}.$$

Iš pastarųjų lygčių gauname, kad $v_3 = 2v_1$ ir $v_2 = \dfrac{120v_1}{120 - v_1}$.

Šias išraiškas įrašę į pirmą lygybių sistemą, gauname:

$$\begin{cases} \dfrac{s}{2v_1} = \dfrac{s}{v_1} - 2t, \\ \dfrac{s(120-v_1)}{120v_1} - t = \dfrac{s}{v_1} - 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{s}{2v_1} = 2t, \\ \dfrac{s}{120} = t \end{cases} \Rightarrow \frac{s}{2v_1} = \frac{s}{60} \Rightarrow v_1 = 30.$$

Ats.: 30 km/h.

9. Tegu s yra atstumas tarp A ir B (km), v_1 – pirmo traukinio, o v_2 – antro traukinio greitis (km/h). Antro traukinio vėlavimo laiką (h) pažymėkime t. Pagal sąlygą,

$$\frac{0{,}5s}{v_1} - t = \frac{0{,}5s}{v_2} \quad \text{ir} \quad s - (v_1 t + v_2 t) = 0{,}25s.$$

Spręsdami šių lygčių sistemą, gauname:

$$\begin{cases} \dfrac{0{,}5s(v_2 - v_1)}{v_1 v_2} = t, \\ 0{,}75s = t(v_1 + v_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{s}{t} = \dfrac{2v_1 v_2}{v_2 - v_1}, \\ \dfrac{s}{t} = \dfrac{4}{3}(v_1 + v_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2v_1 v_2}{v_2 - v_1} = \frac{4}{3}(v_1 + v_2) \Rightarrow 2(v_2^2 - v_1^2) = 3v_1 v_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 - 3\cdot\frac{v_2}{v_1} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = 2 \Rightarrow v_2 = 2v_1.$$

Taigi antrojo traukinio greitis 2 kartus didesnis už pirmojo traukinio greitį.

Ats.: 2.

10. Tegu v_1 yra pirmo traukinio, o v_2 – antro traukinio greitis (km/h). Atstumą tarp *B* ir *C* pažymėkime s (km).

Pagal sąlygą,

$$\frac{120 + s}{v_1} = \frac{s}{v_2}, \quad \frac{120 + s}{v_1 - 12} = \frac{s}{v_2 - 9}, \quad \frac{s}{v_2 - 9} - \frac{s}{v_2} = 2$$

arba

$$\frac{120 + s}{v_1} = \frac{s}{v_2}, \quad \frac{120 + s}{v_1 - 9} = \frac{s}{v_2 - 12}, \quad \frac{s}{v_2 - 12} - \frac{s}{v_2} = 2.$$

Spręsdami pirmą lygčių sistemą, gauname:

$$\frac{120 + s}{s} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1 - 12}{v_2 - 9} \Rightarrow v_1(v_2 - 9) = v_2(v_1 - 12) \Rightarrow v_1 = \frac{4}{3}v_2.$$

Tada $\dfrac{120 + s}{s} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow s = 360.$

Įrašę į trečią lygtį, gauname:

$$\frac{360}{v_2 - 9} - \frac{360}{v_2} = 2 \Rightarrow v_2^2 - 9v_2 - 1620 = 0 \Rightarrow v_2 = 45.$$

Pirmo traukinio greitis yra $v_1 = \dfrac{4}{3}\cdot 45 = 60$ (km/h).

Analogiškai spręsdami antrą lygčių sistemą, gautume, kad $v_2 > v_1$. Todėl šis atvejis negalimas.

Ats.: 60 km/h ir 45 km/h.

SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Taikydami formulę $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, gauname, kad

$$3\cos x - \sin 2x = 3\cos x - 2\sin x\cos x = \cos x \cdot (3 - 2\sin x).$$

Kadangi $|\sin x| \le 1$, tai $3 - 2\sin x \ne 0$ esant bet kuriai kintamojo x reikšmei. Vadinasi, lygybė $3\cos x - \sin 2x = 0$ galima tik kai $\cos x = 0$. O ši lygybė galioja tik kai $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z}$.

Taigi lygties sprendinių aibę sudaro realieji skaičiai $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z}$.

Ats.: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z}$.

2. Aišku, kad negali būti $\cos x = 0$. Todėl lygtį galima pertvarkyti taip:

$$\cos^2 x + \sin x\cos x - 1 = 0,$$

$$\sin x\cos x - \sin^2 x = 0,$$

$$\cos^2 x(\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}^2 x) = 0,$$

$$\mathrm{tg}x(1 - \mathrm{tg}x) = 0.$$

Pastaroji lygybė galioja tik kai $\mathrm{tg}x = 0$ arba $\mathrm{tg}x = 1$.

Jei $\mathrm{tg}x = 0$, tai $x = k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z}$.

Jei $\mathrm{tg}x = 1$, tai $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z}$.

Taigi lygties $\cos^2 x + \sin x \cos x = 1$ sprendinių aibę sudaro realieji skaičiai $x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$, ir $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Ats.: $x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$, arba $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

3. Kadangi $\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$, tai suprantama, kad lygties apibrėžimo sričiai nepriklauso taškai, kuriuose $\cos 2x = 0$, t. y. realieji skaičiai $x = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \frac{(2k+1)\pi}{4},\ k \in \mathbf{Z}$.

Iš pradžių lygties kairiąją pusę pertvarkykime taip:

$$\sin 4x \cdot \cos^2 x \cdot \operatorname{tg} 2x = 2\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos^2 x \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x} =$$

$$= 4 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \cos^2 x \cdot 2\sin x \cos x = 8\sin^2 x \cdot \cos^3 x.$$

O tada vietoj pradinės lygties spręskime lygtį

$$\sin^2 x \cdot \cos^3 x = 0.$$

Gausime:

jei $\sin x = 0$, tai $x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$;

jei $\cos x = 0$, tai $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Vadinasi, lygties sprendinių aibę sudaro realieji skaičiai $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, ir $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Ats.: $x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$, arba $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Pastaba. Nesunku suprasti, kad lygtis

$$\sin^2 x \cdot \cos^3 x = 0.$$

yra ekvivalenti lygčiai $\sin 2x = 0$. Spręsdami šią lygtį gauname:

$$2x = m\pi,\ m \in \mathbf{Z} \ \Rightarrow\ x = \frac{m\pi}{2},\ m \in \mathbf{Z}.$$

Vadinasi, lygties $\sin 4x \cdot \cos^2 x \cdot \operatorname{tg} 2x = 0$ sprendinių aibę galima nusakyti viena formule:

$$x = \frac{m\pi}{2}, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

4. Kadangi $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x,$ tai lygtį galima pertvarkyti taip:

$$2(1 - \cos^2 2x) + 5\cos 2x = 2,$$
$$-2\cos^2 2x + 5\cos 2x = 0,$$
$$\cos 2x \cdot (5 - 2\cos 2x) = 0.$$

Pastaroji lygtis yra ekvivalenti lygčiai $\cos 2x = 0$ (nes $5 - 2\cos 2x \neq 0,$ kai $x \in \mathbf{R}$), kurios sprendiniai nusakomi formule

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Vadinasi, pradinės lygties $2\sin^2 2x + 5\cos 2x = 2$ sprendinių aibę sudaro realieji skaičiai

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} = \frac{(2k+1)\pi}{4}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ats.: $x = \dfrac{(2k+1)\pi}{4}, \quad k \in \mathbf{Z}.$

5. Ši lygtis yra ekvivalenti lygčiai

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0,$$

kuri dydžio sin$x$ atžvilgiu yra kvadratinė lygtis.

Pažymėję $t = \sin x,$ gausime:

$$2t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow t \in \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}.$$

Jei $t = -\dfrac{1}{2},$ tai

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = (-1)^k \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + k\pi = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Jei $t = 1,$ tai

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ats.: $x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$, arba $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$

6. Šią lygtį galima pakeisti ekvivalenčia kvadratine lygtimi dydžio cos2*x* atžvilgiu, nes

$$2\sin^2 x = \sin^2 x + (1 - \cos^2 x) = 1 - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 - \cos 2x$$

ir

$$\cos 4x = \cos(2 \cdot 2x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x = 2\cos^2 2x - 1.$$

Taigi lygtis $\cos 4x - 2\sin^2 x - 1 = 0$ yra ekvivalenti lygčiai

$$2\cos^2 2x + \cos 2x - 3 = 0.$$

Pažymėję $t = \cos 2x,$ gausime:

$$2t^2 + t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm 5}{4} \Rightarrow t \in \left\{ -\frac{3}{2}; 1 \right\}.$$

Lygtis $\cos 2x = -\frac{3}{2}$ sprendinių neturi, o lygties $\cos 2x = 1$ sprendiniai yra $x = k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$

Ats.: $x = k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$

7. Kadangi

$$\sin 2x + 1 = 2\sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = (\sin x + \cos x)^2,$$

pradinę lygtį galima pakeisti ekvivalenčia lygtimi

$$2(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x)^2 = 0.$$

Pažymėję $t = \sin x + \cos x,$ gausime kvadratinę lygtį $t^2 + 2t = 0,$ turinčią du sprendinius: $t = 0$ ir $t = -2.$

Jei $t = 0$, tai $\sin x + \cos x = 0.$ Pastaroji lygtis yra ekvivalenti lygčiai $\mathrm{tg} x + 1 = 0,$ nes negali būti $\cos x = 0,$ (tarę, kad $\cos x = 0,$ gautume, kad ir $\sin x = 0,$ o tai prieštarautų tapatybei $\sin^2 x + \cos^2 x = 1).$ Lygties $\mathrm{tg} x + 1 = 0$ sprendinių aibę sudaro realieji skaičiai

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Jei $t = -2$, tai $\sin x + \cos x = -2$. Pastarąją lygtį padauginę iš $\frac{\sqrt{2}}{2}$, gausime lygtį

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = -\sqrt{2},$$

o ją galima užrašyti taip:

$$\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x = -\sqrt{2},$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}.$$

Aišku, kad ši lygtis sprendinių neturi.

Ats.: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

Pastaba. Aišku, kad lygtį $\sin x + \cos x = 0$ galima spręsti ir kitaip, nes

$$\sin x + \cos x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{2}} =$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

arba

$$\sin x + \cos x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)\cdot\sqrt{2} =$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{4}\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x\right)\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

O kad galiotų lygybė $\sin x + \cos x = -2$, turėtų būti ir $\sin x = -1$, ir $\cos x = -1$. Bet tada gautume, kad $\sin^2 x + \cos^2 x \neq 1$. Vadinasi, lygtis $\sin x + \cos x = -2$ sprendinių neturi.

8. Kadangi

$$\cos x = \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2},$$

pradinę lygtį galima pakeisti ekvivalenčia lygtimi

$$\sin\frac{x}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} = 1,$$

o ją – ekvivalenčia lygtimi

$$\sin\frac{x}{2}\cdot\left(1 - 2\sin\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Jei $\sin\frac{x}{2} = 0$, tai

$$\frac{x}{2} = k\pi,\ \ k\in\mathbf{Z} \Rightarrow x = 2k\pi,\ \ k\in\mathbf{Z}.$$

Jei $1 - 2\sin\frac{x}{2} = 0$, tai $\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$. Tada

$$\frac{x}{2} = (-1)^k\cdot\frac{\pi}{6} + k\pi,\ \ k\in\mathbf{Z} \Rightarrow x = (-1)^k\cdot\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \ k\in\mathbf{Z}.$$

Taigi lygties $\sin\frac{x}{2} + \cos x = 1$ sprendinių aibę sudaro realieji skaičiai

$$x = 2k\pi,\ \ k\in\mathbf{Z}, \text{ ir } x = (-1)^k\cdot\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \ k\in\mathbf{Z}.$$

Ats.: $x = 2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, arba $x = (-1)^k\cdot\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

9. Kadangi $3x = 5x - 2x$ ir $7x = 5x + 2x$, pabandykime lygties kairiąją pusę pertvarkyti taip:

$$\sin 3x + \sin 7x = \sin(5x - 2x) + \sin(5x + 2x) =$$
$$= (\sin 5x\cos 2x - \cos 5x\sin 2x) + (\sin 5x\cos 2x + \cos 5x\sin 2x) =$$
$$= 2\sin 5x\cdot\cos 2x.$$

Matome, kad vietoj pradinės lygties gauname gana lengvai išsprendžiamą ekvivalenčią lygtį

$$2\sin 5x\cdot\cos 2x = 5\sin 5x.$$

Užrašius šią lygtį pavidalu

$$\sin 5x \cdot (2\cos 2x - 5) = 0,$$

pasidaro dar aiškiau, kad būtinai $\sin 5x = 0$, nes $2\cos 2x \neq 5$, kai $x \in \mathbf{R}$.

O spręsdami lygtį $\sin 5x = 0$ gauname:

$$5x = k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{5},\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

Taigi lygties $\sin 3x + \sin 7x = 5\sin 5x$ sprendinių aibę sudaro realieji skaičiai

$$x = \frac{k\pi}{5},\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

Ats.: $x = \frac{k\pi}{5},\ \ k \in \mathbf{Z}.$

10. Aišku, kad negali būti $\cos x = 0$ (tai prieštarautų tapatybei $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Todėl padaliję lygtį iš $\cos^2 x$ gauname ekvivalenčią lygtį

$$\mathrm{tg}^2 x - 5\mathrm{tg}x + 4 = 0,$$

kuri dydžio tg*x* atžvilgiu turi du sprendinius:

$$\mathrm{tg}x = 1 \text{ ir } \mathrm{tg}x = 4.$$

Jei $\mathrm{tg}x = 1$, tai $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z}.$

Jei $\mathrm{tg}x = 4$, tai $x = \mathrm{arctg}4 + k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z}.$

Ats.: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z}$, arba $x = \mathrm{arctg}4 + k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z}.$

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Visų galimų įvykių skaičių gausime nustatę, kiek yra įvykių, sudarytų iš vienos baigties (C_6^1), iš dviejų baigčių (C_6^2), iš trijų baigčių (C_6^3) ir t. t. – iš šešių baigčių ($C_6^6 = 1$). Šių skaičių suma, dar pridėjus vienetą (negalimasis įvykis), ir yra įvykių erdvės elementų skaičius:

$$1+C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5+1=(1+1)^6=2^6=64.$$

Ats.: 64.

2. Pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą nagrinėjamo įvykio A tikimybė lygi $P(A)=\frac{m}{n}$.

Šio bandymo vienodai galimų baigčių aibė sudaryta iš $n=C_5^3=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}=10$ elementų. Ištrauktųjų rutulių numerių suma bus nelyginė tik šiais keturiais atvejais:

$$1+2+4=7,\ 1+3+5=9,\ 2+3+4=9,\ 2+4+5=11.$$

Taigi $m=4$ ir $P(A)=\frac{4}{10}=0{,}4$.

Ats.: 0,4.

3. Pažymėkime A įvykį, kad užrašyta trupmena bus nesuprastinama. Bet paprasčiau apskaičiuoti priešingo įvykio $\overline{A}$ (kad trupmena bus suprastinama) tikimybę: $P(\overline{A})=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{15}$. Todėl

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}\approx 0{,}933.$$

Ats.: $\frac{14}{15}\approx 0{,}933$.

4. Bandymo vienodai galimų baigčių yra $n=C_{12}^3=\frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}=220$, o palankių nagrinėjamam įvykiui –

$$m=C_3^1\cdot C_9^2+C_3^2\cdot C_9^1+C_3^3=108+27+1=136.$$

Pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą ieškomoji tikimybė p lygi: $p=\frac{136}{220}=\frac{34}{55}\approx 0{,}618$.

Ats.: $\frac{34}{55} \approx 0{,}618$.

5. Šio suskirstymo vienodai galimų baigčių aibė yra sudaryta iš $n = C_{20}^{10}$ elementų, o iš jų palankių nagrinėjamam įvykiui yra $m = 2 \cdot C_{18}^{8}$. Apskaičiavę pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą gauname: $p = \frac{2 \cdot C_{18}^{8}}{C_{20}^{10}} = \frac{9}{19} \approx 0{,}474$.

Ats.: $\frac{9}{19} \approx 0{,}474$.

6. Tikimybė, kad Andrius pataikys abu baudos metimus (įvykis *A*), lygi: $P(A) = 0{,}9^2 = 0{,}81$ (pagal nepriklausomų įvykių sankirtos tikimybės formulę). Pagal tą pačią formulę Sigito abiejų baudos metimų pataikymo (įvykis *S*) tikimybė lygi: $P(S) = 0{,}8^2 = 0{,}64$. Tikimybę, kad bent vieno iš krepšininkų abu baudos metimai bus taiklūs, apskaičiuosime pagal įvykių sąjungos tikimybės formulę:

$$P(A \cup S) = P(A) + P(S) - P(A \cap S) = P(A) + P(S) - P(A) \cdot P(S) =$$
$$= 0{,}81 + 0{,}64 - 0{,}81 \cdot 0{,}64 = 0{,}9316.$$

Ats.: 0,9316.

7. Įvykį *C*, kad pataikys vienas šaulys, galime užrašyti taip: $C = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$. Tuomet pagal nesutaikomų įvykių sąjungos tikimybės formulę $P(C) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$. Kiekvienas dėmuo apskaičiuojamas pagal nepriklausomų įvykių sankirtos tikimybės formulę:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}14,$$
$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}24.$$

Vadinasi,

$$P(C) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = 0{,}14 + 0{,}24 = 0{,}38.$$

Ats.: 0,38.

8. Tegu A yra įvykis, kad turnyro nugalėtoju taps pirmasis šachmatininkas sužaidęs keturias partijas. Pažymėkime atitinkamai A_1, A_2, A_3, A_4 įvykius laimėti pirmajam šachmatininkui pirmoje, antroje, trečioje ir ketvirtoje partijoje. Pagal sąlygą aišku, kad

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = 0{,}6.$$

Tuomet įvykis A yra trijų nesutaikomų įvykių sąjunga:

$$A = (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cap A_4) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap A_4).$$

Kadangi

$$P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cap A_4) =$$

$$= P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap A_4) = 0{,}4 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}0864,$$

tai $P(A) = 3 \cdot 0{,}0864 = 0{,}2592$.

Ats.: 0,2592.

9. Tegu A yra įvykis, kad iš atsitiktinai pasirinktos dėžės atsitiktinai paimtas gaminys bus aukščiausios kokybės. Pažymėkime H_1 įvykį, kad pasirinkta pirmoji dėžė, H_2 – kad pasirinkta antroji dėžė, H_3 – kad pasirinkta trečioji dėžė. Pasinaudosime pilnosios tikimybės formule

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) + P(H_3)P(A \mid H_3),$$

kurioje $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$, o sąlyginės tikimybės yra: $P(A \mid H_1) = \frac{16}{20}$, $P(A \mid H_2) = \frac{25}{30}$, $P(A \mid H_3) = \frac{8}{10}$. Įrašę į formulę gausime, kad $P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{20} + \frac{1}{3} \cdot \frac{25}{30} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{10} = \frac{73}{90} \approx 0{,}811$.

Ats.: $\frac{73}{90} \approx 0{,}811$.

10. Tarkime, A yra įvykis, kad atsitiktinai paimta detalė bus nestandartinė, H_1 – kad ji pagaminta pirmosiomis staklėmis, H_2 – kad ji pagaminta antrosiomis staklėmis. Tuomet vėl turime pilno–

sios tikimybės schemą, t. y. galime taikyti pilnosios tikimybės formulę

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2).$$

Tik čia nustatant tikimybes tenka vadovautis statistine tikimybės samprata, t. y. laikysime, kad $P(H_1) = 0{,}6$ (pirmomis staklėmis pagaminama 60% detalių), $P(H_2) = 0{,}4$ (antrosiomis staklėmis pagaminama 40% detalių), $P(A|H_1) = 0{,}02$ (pirmosios staklės išleidžia 2 % nestandartinių detalių), $P(A|H_2) = 0{,}04$ (antrosios staklės išleidžia 4 % nestandartinių detalių). Įrašę į formulę gauname: $P(A) = 0{,}6 \cdot 0{,}02 + 0{,}4 \cdot 0{,}04 = 0{,}028$.

Ats.: 0,028.

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

1	**2**	**3**	**4**
37,5 %	–1	$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$	$\frac{1}{6}a^3 \mathrm{tg}\alpha$