LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Jaunajam matematikui

19

2016–2018 mokslo metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Vilnius, 2018

Leidinio sudarytojai:
Antanas APYNIS
Edmundas MAZĖTIS
Eugenijus STANKUS

Leidinį redagavo

Maketavo Kristina LYNDIENĖ

TURINYS

PRATARMĖ

Šioje devynioliktoje Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos knygelėje „Jaunajam matematikui“ yra pateikta 2016–2018 mokslo metais nagrinėtų temų metodinė medžiaga, užduotys LJMM klausytojams ir jų sprendimai.

Knygelės turinį sudaro šios temos: darbo uždaviniai (A. Apynis), apskritimai (E. Mazėtis), lyginiai (E. Stankus), lygčių sistemos (A. Apynis), kompleksiniai skaičiai (E. Stankus), kompleksinių skaičių geometriniai taikymai (A. Apynis), laipsniai, logaritmai, rodiklinės ir logaritminės lygtys (A. Apynis (M. Biržiškos gimnazija)), funkcijos išvestinė (A. Apynis). Skaitytojas taip pat ras 2016 metų stojamąją užduotį ir jos sprendimą bei 2018 metų baigiamosios užduoties pavyzdį.

Antanas Apynis
Edmundas Mazėtis
Eugenijus Stankus

Metodinė medžiaga ir užduotys

STOJAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Edmundas Mazėtis,
Eugenijus Stankus, Juozas Šinkūnas,

1. Du dviratininkai vienu metu priešpriešiais išvyksta iš A ir B vietovių ir važiuoja pastoviu greičiu. Nuvykę į galinius punktus, tuoj pat apsisuka ir vyksta atgal. Pirmą kartą jie susitiko 40 km atstumu nuo B, o antrą kartą, praėjus 8 h po pirmo susitikimo, 20 km atstumu nuo A. Raskite atstumą tarp A ir B bei dviratininkų greičius.

2. Uždaru maršrutu 25 min intervalais važiuoja 2 autobusai. Kiek autobusų reikia išleisti į trasą papildomai, kad intervalai sumažėtų 60 procentų?

3. Antanas ir Edmundas užrašinėja dvidešimtženkl skaičių skaitmenimis 1, 2, 3, 4 ir 5. Pirmą skaitmenį rašo Antanas, po to Edmundas ir t. t. Edmundas nori, kad užrašytas skaičius dalytųsi iš 9. Ar Antanas gali sutrukdyti išsipildyti Edmundo svajonei? Atsakymą pagrįskite.

4. Tėvas sako sūnui: „Kai man bus tiek metų, kiek yra mano tėvui dabar, tai mano amžius bus 5 kartus didesnis už dabartinį tavo amžių, o tavo amžius bus 8 metais didesnis negu mano dabar. Mano ir mano tėvo metų suma dabar yra 100 metų.“ Raskite dabartinį sūnaus amžių.

5. Iš kokio skaičiaus reikia padalyti 540, kad liekana sudarytų 75 procentus dalmens?

6. Raskite realiųjų skaičių x ir y poras $(x; y)$, tenkinančias lygtį $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$.

7. Kokius tris skaitmenis reikia parašyti vietoj daugtaškio, kad skaičius 523... dalytųsi iš 7, 8 ir 9?

8. Raskite sveikųjų skaičių x, y ir z trejetus $(x; y; z)$, tenkinančius lygčių sistemą $\begin{cases} x^2 - y^2 - z^2 = 1, \\ y + z - x = 3. \end{cases}$

9. Trikampio ABC aukštinės susikerta taške O. Žinoma, kad $OC = AB$. Apskaičiuokite kampo C didumą.

10. Trapecijos pagrindų ilgiai yra a ir b. Raskite atkarpos, lygiagrečios su pagrindais ir dalijančios trapecijos plotą pusiau, ilgį.

I. DARBO UŽDAVINIAI

Antanas Apynis

Šios temos pavadinimas, aišku, yra labai sąlygiškas. Kalbant bendriau, čia nagrinėjami tam tikro turinio matematinio modeliavimo uždaviniai. Sprendžiant juos iš pradžių uždavinys formalizuojamas – pasirenkami kintamieji dydžiai, o sąryšiai tarp jų išreiškiami lygtimis (kartais ir nelygybėmis). Ieškant uždavinio sąlygą tenkinančių nežinomų dydžių reikšmių gana dažnai (nelygu koks uždavinys) yra sprendžiamos lygčių sistemos. Atkreipkime dėmesį į tai, kad ne visada tikslinga minimizuoti nežinomų dydžių ir sudaromų lygčių skaičių. Perteklinė nežinomųjų aibė kartais sudaro geresnę galimybę paprasčiau ir aiškiau išreikšti sąryšius tarp žinomų ir ieškomų dydžių.

1 pavyzdys. Petras gali nušienauti pievą per 10 dienų, jei Jonas padės jam šienauti 7 dienas. Jonas tą pačią pievą gali nušienauti per 12 dienų, jei Petras padės jam šienauti 7 dienas.

Per kiek dienų kiekvienas jų, dirbdamas vienas, gali nušienauti tą pievą.

Sprendimas. Tegu A yra pievos plotas (ha), x yra Petro, o y – Jono darbo sparta (ha/d). Tada $\dfrac{A}{x}$ ir $\dfrac{A}{y}$ bus ieškomi dienų skaičiai.

Pagal sąlygą,

$$10x+7y=A \quad \text{ir} \quad 7x+12y=A.$$

Spręsdami šių lygčių sistemą, gauname:

$$\begin{cases}10x+7y=A,\\ 7x+12y=A\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(10x+7y)-(7x+12y)=0,\\ 7x+12y=A\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}y=0{,}6x,\\ 7x+12\cdot(0{,}6x)=A\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=0{,}6x,\\ 14{,}2x=A\end{cases} \Rightarrow x=\frac{A}{14{,}2},\ y=\frac{3A}{71}.$$

Tai

$$\frac{A}{x}=14{,}2,\quad \frac{A}{y}=\frac{71}{3}=23\frac{2}{3}.$$

Ats.: Petras per 14,2 d., Jonas per $23\frac{2}{3}$ d.

2 pavyzdys. Stalių brigada darbą gali atlikti 15 valandų greičiau negu mokinių brigada. Jeigu mokinių brigada dirbtų 18 valandų, o po to 6 valandas darbą tęstų stalių brigada, būtų atlikta 60 % viso darbo.

Per kiek laiko visą darbą gali atlikti mokinių brigada?

Sprendimas. Tegu A yra darbo apimtis (tam tikrais vienetais), o x yra laikas (valandomis), per kurį visą darbą galėtų atlikti mokiniai, dirbdami vieni. Tada $x-15$ yra laikas, per kurį visą darbą gali atlikti staliai. Be to, $\frac{A}{x}$ yra mokinių brigados darbo sparta (darbo apimties A dalis, atliekama per valandą), o $\frac{A}{x-15}$ – stalių brigados darbo sparta.

Pagal sąlygą,

$$\frac{A}{x}\cdot 18+\frac{A}{x-15}\cdot 6=0{,}6A.$$

Iš šios lygties ir randame ieškomą dydžio x reikšmę:

$$\frac{3}{x}+\frac{1}{x-15}=\frac{1}{10},$$

$$x^2-55x+450=0,$$

$$x=10 \quad \text{arba} \quad x=45.$$

Sprendinys $x=10$ netenkina uždavinio sąlygos. Tinka tik $x=45$.

Ats.: 45 h.

3 pavyzdys. Darbininkų brigada turėjo iškasti tranšėją per 6 dienas. Žinoma, kad visų darbininkų darbo našumas vienodas ir visi darbininkai kiekvieną dieną dirba vienodą valandų skaičių. Tačiau prieš darbo pradžią paaiškėjo, kad darbo diena sutrumpinama 1 valanda, o darbininkų bus 5 mažiau, todėl tranšėjos kasimas užtruks 9 dienas. Iš tikrųjų tranšėja buvo kasama 12 dienų, nes darbo diena buvo sutrumpinta ne 1, o 2 valandomis ir 2 darbininkai nedirbo dėl ligos.

Kiek darbininkų brigadoje buvo iš pradžių ir kiek valandų per dieną jie turėjo dirbti?

Sprendimas. Tegu A yra darbo apimtis (kuriais nors vienetais), x – pradinis darbininkų skaičius brigadoje, o t – pradinė darbo dienos trukmė (valandomis). Tada darbininko darbo našumą per valandą galima apskaičiuoti pagal formulę $\frac{A}{6xt}$.

Remdamiesi kita sąlygos dalimi galime sudaryti lygtį

$$\frac{A}{6xt}\cdot 9(x-5)(t-1)=A,$$

o pagal sąlygos pabaigą – lygtį

$$\frac{A}{6xt}\cdot 12(x-7)(t-2)=A.$$

Vadinasi, ieškomiems dydžiams x ir t rasti reikia išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases}3(x-5)(t-1)=2xt,\\ 2(x-7)(t-2)=xt.\end{cases}$$

Šią sistemą pertvarkykime taip:

$$\begin{cases}3(xt-x-5t+5)=2xt,\\ 2(xt-2x-7t+14)=xt;\end{cases}$$

$$\begin{cases}xt-3x-15t+15=0,\\ xt-4x-14t+28=0.\end{cases}$$

Iš pirmos lygties atėmę antrą, gausime lygtį $x-t=13$. Iš jos išplaukia, kad $x=t+13$. Tada iš pirmos lygties gausime:

$$(t+13)t-3(t+13)-15t+15=0,$$

$$t^2-5t-24=0.$$

Šios lygties sprendiniai yra skaičiai –3 ir 8. Pirmąjį sprendinį atmetame kaip nesiderinantį su uždavinio sąlyga ir padarome išvadą, kad pradinė darbo dienos trukmė 8 valandos, o pradinis darbininkų skaičius yra 21.

Ats.: 21 darb., 8 h.

4 pavyzdys. Dviems darbininkams reikėjo atlikti tam tikrą darbą. Iš pradžių pirmas darbininkas dirbo trečdalį laiko, reikalingo antram darbininkui atlikti visą darbą, o paskui antras darbininkas dirbo trečdalį laiko, reikalingo pirmam darbininkui atlikti visą darbą. Pasirodė, kad taip dirbus buvo atlikta $\frac{13}{18}$ viso darbo. Taip pat žinoma, kad dirbdami kartu abu darbininkai galėtų visą darbą atlikti per 3,6 h.

Per kiek laiko visą darbą galėtų atlikti kiekvienas darbininkas?

Sprendimas. Tegu A yra darbo apimtis (kuriais nors vienetais), o x ir y – laikas (valandomis), reikalingas atitinkamai pirmam ir antram darbininkui atlikti visą darbą. Tada $\frac{A}{x}$ yra pirmo darbininko, o $\frac{A}{y}$ – antro darbininko darbo sparta, arba darbo našumas.

Pagal sąlygą,

$$\frac{A}{x}\cdot\frac{1}{3}y+\frac{A}{y}\cdot\frac{1}{3}x=\frac{13}{18}A$$

ir

$$\frac{A}{x}\cdot 3{,}6+\frac{A}{y}\cdot 3{,}6=\frac{13}{18}A.$$

Nežinomiesiems x ir y rasti reikia išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases}\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{13}{6},\\ 3{,}6\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=1.\end{cases}$$

Įrašę $t=\frac{y}{x}$ į pirmą lygtį, gausime:

$$t+\frac{1}{t}=\frac{13}{6}\Rightarrow 6t^2-13t+6=0\Rightarrow t\in\left\{\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right\}.$$

Vadinasi, $y=\frac{2}{3}x$ arba $y=\frac{3}{2}x$.

Tada iš antros lygties gausime:

$$3{,}6\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{2x}\right)=1\Rightarrow\frac{9}{x}=1\Rightarrow x=9 \text{ ir } y=6;$$

arba

$$3{,}6\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{3x}\right)=1\Rightarrow\frac{6}{x}=1\Rightarrow x=6 \text{ ir } y=9.$$

Taigi vienas darbininkas visą darbą galėtų atlikti per 6 h, o kitas – per 9 h.

Ats.: 6 h ir 9 h.

5 pavyzdys. Trys skirtingų kategorijų mūrininkai sumūrijo sieną. Pirmas mūrininkas dirbo 6 valandas, antras – 4 valandas, o trečias dirbo 7 valandas.

Jeigu pirmas mūrininkas būtų dirbęs 4 valandas, antras – 2, o trečias – 5 valandas, tai būtų sumūryta du trečdaliai sienos.

Per kiek laiko sieną sumūrytų visi trys mūrininkai, dirbdami vienodą laiką?

Sprendimas. Tegu A yra darbo apimtis (kuriais nors vienetais), o x, y ir z – atitinkamai pirmo, antro ir trečio mūrininko darbo sparta (darbo našumas). Tada ieškomą laiką būtų galima apskaičiuoti pagal formulę $\dfrac{A}{x+y+z}$.

Pagal sąlygą,

$$6x+4y+7z=A \quad \text{ir} \quad 4x+2y+5z=\frac{2}{3}A.$$

Atėmę antrą lygtį iš pirmos, gausime lygtį $2x+2y+2z=\frac{1}{3}A.$ Todėl $x+y+z=\frac{1}{6}A.$

Taigi ieškomas bendro darbo laikas yra 6 valandos.

Ats.: 6 h.

6 pavyzdys. Baseinas, pripildomas vandens keturiais vamzdžiais. Pirmu, antru ir trečiu vamzdžiu jis pripildomas per 5 valandas, o antru, trečiu ir ketvirtu vamzdžiu – per 6 valandas.

Per kiek laiko baseiną galima pripildyti vandens pirmu ir ketvirtu vamzdžiu, jeigu visais keturiais vamzdžiais jis pripildomas per 4 valandas?

Sprendimas. Tegu A yra baseino talpa (m^3), o x_1, x_2, x_3, x_4 – atitinkamai pirmo, antro, trečio ir ketvirto vamzdžio našumas (m^3/h).

Pagal sąlygą,

$$5x_1+5x_2+5x_3=A, \quad 6x_2+6x_3+6x_4=A, \quad 4x_1+4x_2+4x_3+4x_4=A.$$

Ieškomas laikas yra $\dfrac{A}{x_1+x_4}$.

Iš pradžių raskime $x_1 + x_4$.

Iš pirmos lygties išplaukia, kad $x_2 + x_3 = \frac{1}{5}A - x_1$. Šią išraišką įrašę į antrą ir trečią lygtį, gausime:

$$\begin{cases} 6\left(\frac{1}{5}A - x_1\right) + 6x_4 = A, \\ 4x_1 + 4\left(\frac{1}{5}A - x_1\right) + 4x_4 = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x_1 + 6x_4 = -\frac{1}{5}A, \\ 4x_4 = \frac{1}{5}A \end{cases} \Rightarrow x_4 = \frac{1}{20}, x_1 = \frac{1}{12}A.$$

Taigi $x_1 + x_4 = \frac{2}{15}A$. Todėl $\frac{A}{x_1 + x_4} = \frac{15}{2} = 7{,}5$.

Ats.: 7,5 h.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Mokinių darbų vertinimo komisiją sudaro 5 mokytojai. Jei dirbtų tik pirmas, antras ir ketvirtas mokytojas, visus darbus patikrintų per 20 valandų, o jei dirbtų tik antras, trečias ir penktas – per 15 valandų. Nedalyvaujant tik antram mokytojui visas darbas būtų baigtas per 10 valandų. Kiek kartų greičiau darbų vertinimą atliktų visi mokytojai (dirbdami kartu) lyginant su laiku, per kurį visus darbus patikrintų antras mokytojas (dirbdamas vienas)?

2. Meistrui ir jo mokiniui reikėjo pagaminti tam tikrą skaičių vienodų detalių. Po to, kai meistras dirbo 7, o mokinys – 4 valandas, paaiškėjo, kad jie įvykdė $\frac{5}{9}$ užduoties. Kartu jie dirbo dar 4 valandas ir jiems dar liko $\frac{1}{18}$ neatliktos užduoties. Per kiek laiko visą užduotį įvykdytų mokinys (dirbdamas vienas)?

3. Dviems darbininkams reikėjo atlikti tam tikrą darbą. Antrasis darbininkas pradėjo dirbti 1 valanda vėliau negu pirmasis. Praėjus 3 valandoms nuo to momento, kai pradėjo dirbti pirmasis darbininkas, jiems dar liko atlikti 0,45 viso darbo. Baigus darbą, paaiškėjo, kad kiekvienas darbininkas atliko po pusę darbo. Per kiek valandų dirbdamas atskirai gali atlikti visą darbą kiekvienas darbininkas?

4. Keletas darbininkų darbą gali atlikti per 14 dienų. Jeigu darbininkų būtų keturiais daugiau ir kiekvienas kasdien dirbtų 1 valanda ilgiau, šis darbas būtų atliktas per 7 dienas. Kiek buvo darbininkų ir po kelias valandas jie dirbo per dieną?

5. Vienodos detalės štampuojamos trimis skirtingais automatais. Bendras visų trijų automatų našumas pusantro karto didesnis už bendrą pirmo ir antro automatų našumą. Pirmam automatui skirtą užduotį antras ir trečias automatai (veikdami kartu) atliktų 4 valandomis 48 minutėmis greičiau, o antras – dviem valandomis greičiau negu pirmas automatas. Apskaičiuokite laiką, per kurį pirmas automatas atlieka jam skirtą užduotį.

6. Du skirtingo galingumo mechaniniai „kurmiai“, dirbdami kartu iš priešingų tunelio galų, gali jį iškasti per 5 dienas. Tačiau iš pradžių pirmasis „kurmis“ iškasė $\frac{1}{3}$ tunelio, o tik po to darbą pradėjo ir pabaigė antrasis „kurmis“. Visas darbas buvo atliktas per 10 dienų. Per kiek dienų visą tunelį gali iškasti kiekvienas „kurmis“?

7. Iš pradžių 2 valandas krovinys iš laivo buvo iškraunamas keturiais vienodo galingumo kranais. Tada prie darbo prisijungė du vienodo, bet mažesnio, galingumo kranai. Per 3 valandas visi šeši kranai darbą baigė (iškrovė visą krovinį). Jeigu visi šeši kranai darbą būtų pradėję kartu, tai visas krovinys būtų iškrautas per 4,5 valandos. Per kiek laiko krovinį iš laivo iškrautų vienas didesnio galingumo ir vienas mažesnio galingumo kranas (dirbdami kartu).

8. Trimis traktoriais laukas suariamas per 4 dienas. Pirmu ir antru traktoriumi būtų jį galima suarti per 6 dienas, o pirmu ir trečiu traktoriumi per 8 dienas. Kiek kartų daugiau per dieną suariama antruoju traktoriumi negu trečiuoju?

9. Baseinas gali būti pripildytas 5 vamzdžiais. Pirmais trimis vamzdžiais baseinas pripildomas per 3 valandas, pirmu, ketvirtu ir penktu vamzdžiu – per 2 valandas, trečiu ir ketvirtu – per 6 valandas, o antru ir penktu – per 4 valandas. Per kiek valandų baseinas pripildomas visais penkiais vamzdžiais?

10. Vienu vamzdžiu baseinas pripildomas vandeniu, o kitu vamzdžiu vanduo išleidžiamas iš baseino. Baseinas pripildomas 2 valandomis ilgiau negu iš jo išleidžiamas vanduo. Kai baseine vandens buvo tik trečdalis jo talpos, buvo atidaryti abu vamzdžiai ir po 8 valandų baseinas jau buvo tuščias. Per kiek valandų baseinas pripildomas vandeniu?

II. APSKRITIMAI

Edmundas Mazėtis

1. Centriniai ir įbrėžtiniai kampai. Kaip žinome, *apskritimas* – tai aibė plokštumos taškų, duotuoju atstumu R nutolusių nuo duotojo plokštumos taško O. Taškas O yra vadinamas apskritimo *centru*, o atkarpa OM, jungianti apskritimo centrą su bet kuriuo to apskritimo tašku M, vadinama apskritimo *spinduliu*. Visi apskritimo spinduliai yra lygūs, jų ilgis lygus R. Atkarpa AB, jungianti du apskritimo taškus, vadinama apskritimo *styga*. Jei apskritimo styga eina per jo centrą, tai ji vadinama apskritimo *skersmeniu*. Apskritimo dalis, esanti tarp dviejų jo taškų A ir B, vadinama apskritimo *lanku*, kurio galai yra taškai A ir B. Du duotieji apskritimo taškai nustato du apskritimo lankus, kurių galai yra tie taškai.

Kampas, kurio viršūnė yra apskritimo centras, vadinamas *centriniu kampu*. Kampas, kurio viršūnė yra apskritimo taškas, o kraštinės tą apskritimą kerta, vadinamas *įbrėžtiniu kampu*.

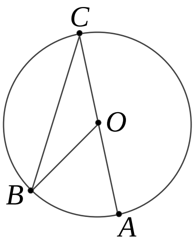
1 teorema. Jei A ir B – du apskritimo taškai, taškas O – jo centras, o taškas C yra apskritimo taškas, esantis toje pačioje tiesės AB pusėje, kaip ir taškas O, tai kampo ACB didumas lygus kampo AOB pusei. Teoremą pirmiausia įrodysime, kai atkarpa AC – apskritimo skersmuo (1 pav.). Kadangi trikampis AOB lygiašonis, tai $\angle OAB = \angle OBA$. Trikampis BOC taip pat lygiašonis, todėl $\angle ACB = \angle OBC$. Iš čia seka, kad

$$\angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle COB) = \frac{1}{2}\angle AOB.$$

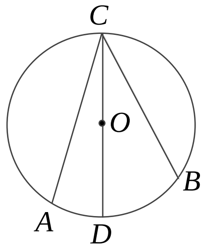
Kai atkarpa AC nėra apskritimo skersmuo, brėžiame skersmenį CD. Tuomet $\angle ACB = \angle ACD + \angle DCB$ (2a pav.), arba $\angle ACB = \angle ACD - \angle DCB$ (2b pav.). Abiem atvejais teoremos teisingumas seka iš šių lygybių ir ką tik įrodyto fakto.

1 išvada. Visiems apskritimo taškams M, esantiems vienoje stygos AB pusėje, kampai AMB yra lygūs.

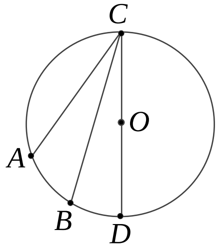
2 išvada. Jei AB ir CD – dvi lygios apskritimo stygos, o apskritimo taškai M ir N yra arba abu toje pačioje pusėje nuo tiesių AB ir CD, kaip ir apskritimo centras, arba abu yra skirtingose pusėse, nei apskritimo centras, tai kampai AMB ir CND yra lygūs.



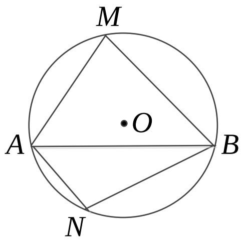
1 pav.



2a pav.



2b pav.

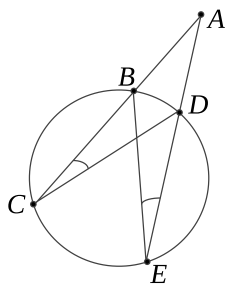


3 pav.

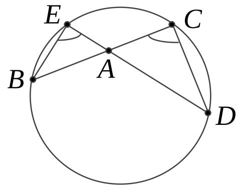
3 išvada. Jei atkarpa *AB* yra apskritimo skersmuo, tai bet kuriam apskritimo taškui *C* kampas *ACB* yra statusis.

4 išvada. Jei apskritimo taškai *M* ir *N* yra skirtingose tiesės, kurioje yra apskritimo styga *AB*, pusėse (3 pav.), tai $\angle AMB + \angle ANB = 180^\circ$.

2. Apskritimų liestinės ir kirstinės. Tiesė, turinti su apskritimu du bendrus taškus, vadinama apskritimo *kirstine*, o tiesė, turinti su apskritimu vieną bendrą tašką, vadinama apskritimo *liestine*. Apskritimo liestinė yra statmena tiesei, jungiančiai apskritimo centrą su



4a pav.



4b pav.

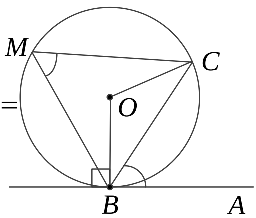
lietimosi tašku. Kampu tarp apskritimo ir jį kertančios tiesės vadinamas kampas tarp tos tiesės ir jos sankirtos su apskritimu taške nubrėžtos apskritimo liestinės. Kampu tarp dviejų apskritimų vadinamas kampas, kurį sudaro tų apskritimų susikirtimo taške nubrėžtos šių apskritimų liestinės. Akivaizdu, kad abejuose apskritimų susikirtimo taškuose kampas tarp jų yra vienodas.

2 teorema. Jei iš taško A yra nubrėžtos dvi apskritimo kirstinės, kertančios apskritimą atitinkamai taškuose B, C ir D, E, tai $AB \cdot AC = AD \cdot AE$. Teoremos įrodymas, kai taškas A yra apskritimo išorėje (4a pav.), išplaukia iš kampų BCD ir BED lygumo ir iš čia sekančio trikampių ABE ir ACD panašumo. Analogiškai teorema įrodoma ir kai taškas A yra apskritimo viduje (4b pav.).

3 teorema. Jei tiesė AB taške B liečia apskritimą, o atkarpa BC yra apskritimo styga, tai bet kuriam apskritimo taškui, esančiam kitoje tiesės BC pusėje nei taškas A, yra teisinga lygybė $\angle BMC = \angle ABC$ (5 pav.). Tikrai, kadangi liestinė AB statmena spinduliui OB, tai

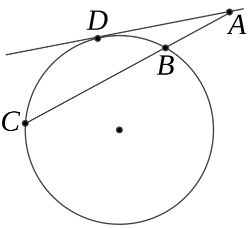
$$\angle ABC = 90^\circ - \angle OBC = 90^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BOC) =$$

$$= \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BMC.$$



5 pav.

4 teorema. Jei iš taško A nubrėžta apskritimo liestinė liečia jį taške D, o iš to paties taško nubrėžta kirstinė kerta apskritimą taškuose B ir C, tai $AD^2 = AB \cdot AC$. Teiginio teisingumas išplaukia iš trikampių ACD ir ADB panašumo (6 pav.).



6 pav.

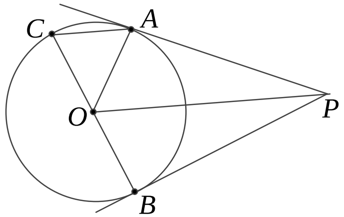
1 pavyzdys. Iš taško P nubrėžtos apskritimo liestinės liečia jį taškuose A ir B. Per tašką B nubrėžtas apskritimo skersmuo BC. Įrodysime, kad tiesės AC ir OP yra lygiagrečios, čia taškas O yra apskritimo centras.

Sprendimas. Kadangi apskritimo spinduliai OA ir OB yra statmeni liestinėms PA ir PB, tai statieji trikampiai OAP ir OBP yra lygūs, todėl

$PA = PB$, t. y., iš vieno taško nubrėžtų apskritimo liestinių atkarpos iki lietimosi taškų yra lygios (7 pav.). Iš trikampių lygumo seka, kad $\angle POA = \angle POB$. Kampas AOB yra trikampio AOC priekampis, todėl $\angle AOB = \angle OAC + \angle OCA$. Bet

$$\angle AOB = 2\angle AOP, \text{ o}$$

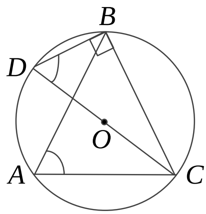
$$\angle AOC = \angle OCA..$$



7 pav.

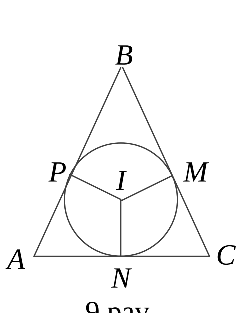
Todėl $2\angle AOP = 2\angle OAC$, o iš kampų AOP ir OAC lygumo seka, kad tiesės AC ir OP yra lygiagrečios.

3. Įbrėžtieji ir apibrėžtieji apskritimai. Jei trikampio ABC visos viršūnės yra apskritimo taškai, tai apskritimas vadinamas apie trikampį ABC *apibrėžtuoju apskritimu*, o trikampis ABC vadinamas *įbrėžtuoju* į apskritimą. Kaip žinome, apie kiekvieną trikampį yra apibrėžiamas apskritimas, kurio centras yra trikampio kraštinių vidurio statmenų susikirtimo taškas. Apibrėžto apie trikampį apskritimo spindulio ilgį R su trikampio kraštinėmis ir trikampio kampų sinusais sieja sinusų teorema $\dfrac{a}{\sin\angle A} = \dfrac{b}{\sin\angle B} = \dfrac{c}{\sin\angle C} = 2R$ (8 pav.). Kadangi trikampio ABC plotui S yra teisinga lygybė $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\angle C$, tai įrašę į šią lygybę iš sinusų teoremos gautą $\sin\angle C$ išraišką $\sin\angle C = \dfrac{c}{2R}$, gauname tokią apibrėžto apie trikampį apskritimo spindulio formulę $R = \dfrac{abc}{4S}$.



8 pav.

Apskritimas, kuris liečia trikampio ABC kraštines, yra vadinamas *įbrėžtuoju* į trikampį ABC, o trikampis ABC vadinamas *apibrėžtuoju* apie apskritimą. Į kiekvieną trikampį yra įbrėžiamas apskritimas, kurio centras yra trikampio pusiaukampinių sankirtos taškas.



9 pav.

Sakykime, kad į trikampį *ABC* įbrėžtas apskritimas kraštines *BC*, *CA* ir *AB* liečia atitinkamai taškuose *M*, *N*, *P* (9 pav.). Žymėdami $AN = AP = x,\quad CN = CM = y,\quad BM = BP = z,$ turime $x + y + z = p,$ $x + y = b,$ čia $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ – trikampio pusperimetris. Iš čia gauname, kad $z = p - b.$ Analogiškai $x = p - a,\quad y = p - c.$ Jei taškas *I* yra į trikampį įbrėžto apskritimo centras, tai trikampių *AIB*, *BIC* ir *AIC* aukštinės *IP*, *IM* ir *IN* lygios įbrėžto į trikampį *ABC* apskritimo spinduliui $r,$ todėl tų trikampių plotai atitinkamai lygūs $\frac{1}{2}cr,$ $\frac{1}{2}ar,$ $\frac{1}{2}cbr.$ Kadangi šių trikampių plotų suma lygi trikampio *ABC* plotui *S*, tai iš čia gauname lygybę $S = pr.$

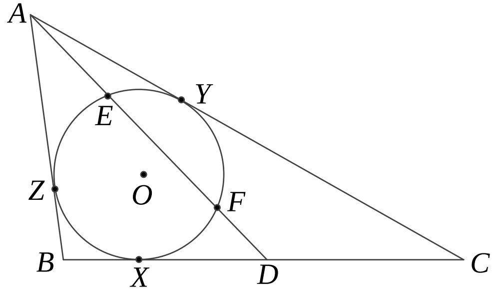
2 pavyzdys. Trikampio *ABC* kraštinė $BC = 20,$ įbrėžtas į jį apskritimas taškuose *E* ir *F* kerta pusiaukraštinę *AD* taip, kad $AE = EF = FD.$ Rasime trikampio plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad įbrėžtas į trikampį apskritimas kraštines *AB*, *AC*, *BC* liečia atitinkamai taškuose *Z*, *Y*, *X* (10 pav.). Pagal įbrėžto į trikampį apskritimo savybes turime $AZ = p - a = \frac{b + c - a}{2},$ $DX = \frac{a}{2} - BX = \frac{a}{2} - (p - b) = \frac{a}{2} - \frac{a + c - b}{2} = \frac{b - c}{2.}$ Pagal liestinių ir kirstinių savybes turime

$$AE \cdot AF = \frac{1}{3}AD \cdot \frac{2}{3}AD = AZ^2 = \frac{(b + c - a)^2}{4},$$

$$DF \cdot DE = \frac{1}{3}AD \cdot \frac{2}{3}AD =$$

$$= DX^2 = \frac{(b - c)^2}{4}.$$



10 pav.

Kadangi šių lygybių kairiosios pusės lygios $\frac{2AD^2}{9},$ tai lygios ir dešiniosios, t. y.,

$b+c-a=b-c.$ Kadangi pagal sąlygą $a=20,$ tai iš čia gauname, kad $2c=a,$ t. y., $c=10.$ Pagal trikampio pusiaukraštinės ilgio formulę

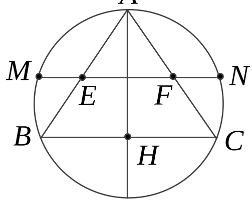
$$AD^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)=\frac{1}{4}(2b^2-200).$$

Iš gautųjų lygybių turime, kad

$$\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{4}(2b^2-200)=\frac{(b-c)^2}{4},\ \text{t. y., }\ b^2-36b+260=0.$$

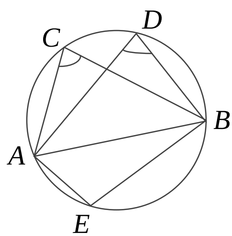
Iš čia randame, kad $b=26$ ir $b=10.$ Bet antroji b reikšmė netinka, nes nėra trikampio, kurio kraštinių ilgiai būtų 20, 10 ir 10. Žinodami trikampio kraštinių ilgius pagal Herono formulę randame, kad jo plotas lygus $S=\sqrt{28\cdot 8\cdot 2\cdot 18}=24\sqrt{14}.$

3 pavyzdys. Trikampio *ABC* kraštinės $AB=13,$ $BC=14,$ $AC=13,$ taškai *E* ir *F* yra kraštinių *AB* ir *AC* vidurio taškai. Tiesė *EF* kerta apibrėžtą apie trikampį apskritimą taškuose *M* ir *N* (11 pav.). Rasime atkarpos *EM* ilgį.



11 pav.

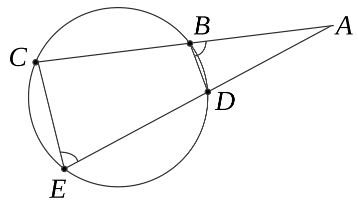
Sprendimas. Kadangi trikampis *ABC* lygiašonis, tai dėl simetrijos tiesės, kurioje yra jo aukštinė *AH*, atžvilgiu atkarpos *ME* ir *FN* yra lygios. Pažymėkime $EM=FN=x.$ Kadangi $AE=EB=\frac{13}{2},$ $EF=7,$ $EN=7+x,$, tai pagal taške *E* susikertančių apskritimo stygų teoremą (2 teorema) turime $ME\cdot EN=AE\cdot EB,$ t. y., $x(7+x)=\left(\frac{13}{2}\right)^2.$ Iš čia gauname, kad ieškomasis atkarpos *EM* ilgis *x* yra lygties $x^2+7x-\frac{169}{4}=0$ sprendinys. Ši lygtis turi tik vieną teigiamą sprendinį $x=\frac{-14+\sqrt{365}}{4},$ taigi $EM=\frac{-14+\sqrt{365}}{4}.$



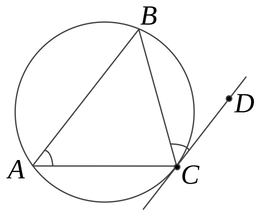
12 pav.

4. **Keturi taškai viename apskritime**. Kaip seka iš 1 teoremos 1 išvados, jei taškai C ir D yra vienoje tiesės AB pusėje ir $\angle ACB = \angle ADB,$ tai taškai A, B, C ir D yra viename apskritime. Jei taškas E yra kitoje tiesės AB pusėje nei taškai C ir $D,$ ir $\angle ACB + \angle AEB = 180^\circ,$ tai taškai A, B, C ir E yra viename apskritime (12 pav.).

5 teorema. Jei tiesė, einanti per taškus B ir C taške A susikerta su kita tiese, einančia per taškus E ir D ir teisinga lygybė $AB \cdot AC = AD \cdot AE,$ tai taškai B, C, D, E yra viename apskritime (13 pav.). Įrodymui pastebime, kad iš lygybės $AB \cdot AC = AD \cdot AE,$



13 pav.

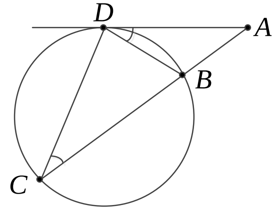


14 pav.

išplaukia lygybė $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AE}{AC},$ todėl trikampiai ABD ir AEC yra panašieji, taigi $\angle AEC = \angle ABD = 180^\circ - \angle CBD,$ o tai ir reiškia, kad taškai B, C, D, E yra viename apskritime.

6 teorema. Jei tiesė l, einanti per smailiojo trikampio ABC viršūnę C su tiese BC sudaro kampą lygų trikampio kampui $A,$ tai ji yra apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo liestinė taške C (14 pav.). Tikrai, nubrėžkime per tašką C apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo liestinę ir liestinės spindulyje, kuris su tiese BC sudaro smailųjį kampą, pažymėkime kurį nors tašką $D.$ Pagal 3 teoremą $\angle BAC = \angle BCD,$ taigi tiesė CD su tiese BC sudaro kampą, lygų trikampio kampui $A,$ todėl ji sutampa su tiese l.

7 teorema. Jei taškai A, B, C yra vienoje tiesėje, o taškas D tai tiesei nepriklauso ir yra teisinga lygybė $AD^2 = AB \cdot AC,$ tai tiesė AD yra apie trikampį BCD apibrėžto apskritimo

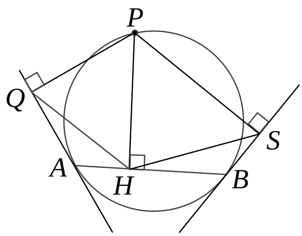


15 pav.

liestinė (15 pav.). Įrodymui pastebime, kad iš lygybės $AD^2 = AB \cdot AC$ išplaukia lygybė $\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AD}$, taigi trikampiai ABD ir ADC yra panašieji, t. y., $\angle ADB = \angle ACD$. Iš 6 teoremos seka, kad tiesė AD yra apskritimo, einančio per taškus B, C, D, liestinė.

4 pavyzdys. Atkarpa AB yra apskritimo styga, taškas P yra apskritimo taškas, taškas H yra taško P ortogonalioji projekcija tiesėje AB. Per taškus A ir B nubrėžtos apskritimo liestinės, taškai Q ir S yra taško P ortogonaliosios projekcijos jose (16 pav.). Įrodysime, kad

$$PH = \sqrt{PQ \cdot PS}.$$

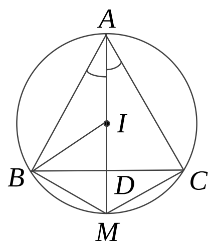


16 pav.

Sprendimas. Kadangi keturkampio $PQAH$ priešingieji kampai Q ir H yra statieji, tai apie jį apibrėžiamas apskritimas, taigi $\angle PQH = \angle PAH$. Analogiškai keturkampis $PHBS$ irgi įbrėžtas į apskritimą, taigi $\angle PHS = \angle PBS$. Pagal 3 teoremą $\angle PAH = \angle PBS$, taigi $\angle PQH = \angle PSH$. Analogiškai įrodoma (atlikite tai savarankiškai), kad $\angle PHQ = \angle PSH$. Iš čia seka, kad trikampiai PHQ ir PSH yra panašieji, taigi $\frac{PH}{PQ} = \frac{PS}{PH}$. Iš čia išplaukia įrodomoji lygybė.

5 pavyzdys. Trikampio ABC pusiaukampinė AD kerta apie trikampį apibrėžtą apskritimą taške M, taškas I yra į trikampį ABC įbrėžto apskritimo centras. Įrodysime, kad $MB = MC = MI$.

Sprendimas. Kadangi įbrėžto į trikampį apskritimo centras yra trikampio pusiaukampinių susikirtimo taškas, tai taškai A, I, D ir M yra vienoje tiesėje (17 pav.). Lankai MB ir MC yra lygūs, todėl lygios ir stygos MB ir MC. Kadangi tiesės BI ir CI yra trikampio pusiaukampinės, tai



17 pav.

$$\angle CIB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C =$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A.$$

Analogiškai $\angle AIB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle C,\ \ \angle AIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B.$

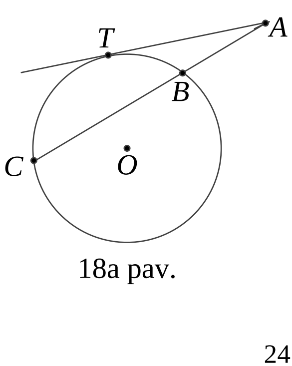
Tuomet $\angle BIM = 180^\circ - \angle AIB = 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{1}{2}\angle C\right) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C,$

o

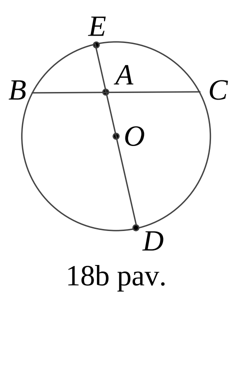
$$\angle MBI = \angle MBC + \angle CBI = \angle MAC + \angle CBI = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C.$$

Taigi $\angle MBI = \angle BIM$, todėl trikampis *MIB* lygiašonis, t. y., $MI = MB.$

5. Apskritimų radikaliosios ašys. Sakykime, kad duotas apskritimas, kurio centras taškas *O* ir spindulys lygus *R*. Sakykime, kad taškas *A* nuo apskritimo centro nutolęs atstumu *d*. Skaičius $d^2 - R^2$ yra vadinamas *taško A laipsniu* duotojo apskritimo atžvilgiu. Jei taškas *A* yra apskritimo išorėje, o tiesė *AT* yra apskritimo liestinė, liečianti jį taške *T*, tai iš stačiojo trikampio *OAT* gauname, kad taško *A* laipsnis šio apskritimo atžvilgiu lygus liestinės atkarpos *AT* kvadratui. Tuomet pagal 4 teoremą bet kuriai per tašką *A* nubrėžtai apskritimo kirstinei *BC* sandauga $AB \cdot AC$ lygi atkarpos *AT* kvadratui, t. y., taško *A* laipsniui apskritimo atžvilgiu (18a pav.). Jei taškas *A* yra apskritimo viduje (18b pav.), BC – bet kuri per tašką *A* einanti kirstinė, *ED* – per tašką *A* einantis apskritimo skersmuo, tai taško *A* laipsnis apskritimo atžvilgiu lygus $-AB \cdot AC,$ nes $AB \cdot AC = AD \cdot AE = (R-d)(R+d) = R^2 - d^2.$ Jei taškas *A* yra apskritime, tai $R = d$, todėl jo laipsnis lygus 0.

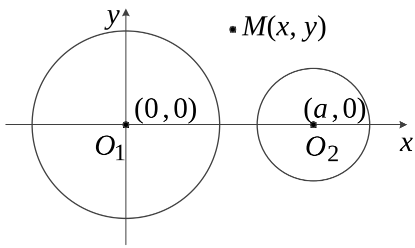


18a pav.



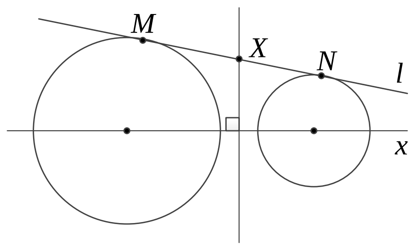
18b pav.

8 teorema. Sakykime, kad duoti du apskritimai, kurių centrai yra skirtingi. Aibė taškų, kurių laipsniai dviejų duotųjų apskritimų atžvilgiu yra vienodi, yra tiesė, statmena tų apskritimų centrus jungiančiai tiesei. Įrodymui pasitelkime koordinačių sistemą. Sakykime, kad koordinačių sistemos *Oxy* pradžios taškas yra pirmojo apskritimo centras, o *Ox* ašis eina per kito apskritimo centrą (19 pav.). Sakykime, kad atstumas tarp apskritimų centrų lygus a, tuomet apskritimų centrų koordinatės (0, 0) ir $(a, 0)$. Jei apskritimų spindulių ilgiai atitinkamai lygūs r ir ρ, o $M(x, y)$ – bet kuris ieškomosios taškų aibės taškas, tai pagal taško laipsnio apibrėžimą turime lygybę $x^2 + y^2 - r^2 = (x-a)^2 + y^2 - \rho^2.$ Pertvarkę gauname, kad ieškomosios taškų aibės lygtis yra $2ax = r^2 - \rho^2 + a^2.$ Tai yra tiesės, statmenos *Ox* ašiai, lygtis.



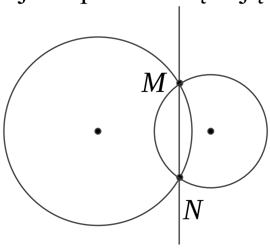
19 pav.

Tiesė, kurios kiekvieno taško laipsniai dviejų duotųjų apskritimų atžvilgiu yra vienodi, yra vadinama *apskritimų radikaliąja ašimi*. Iš taško laipsnio savybių seka, kad taškas P priklauso apskritimų radikaliajai ašiai tada ir tik tada, kai per jį nubrėžtoms kirstinėms, kertančioms vieną apskritimą taškuose A, B, o kitą – taškuose C, D, galioja lygybė $PA \cdot PB = PC \cdot PD.$ Iš taško laipsnio apibrėžimo išplaukia radikaliosios ašies taškų savybė: jei taškas priklauso radikaliajai ašiai, bet nėra duotųjų apskritimų viduje, tai iš jo išvestų liestinių tiems apskritimams atkarpos iki lietimosi taškų yra vienodo ilgio. Atskiru atveju (20 pav.), jei tiesė l yra dviejų apskritimų bendroji liestinė, liečianti juos taškuose M ir N, o taškas X yra apskritimų radikaliosios ašies ir tiesės l susikirtimo taškas, tai $XM = XN$.

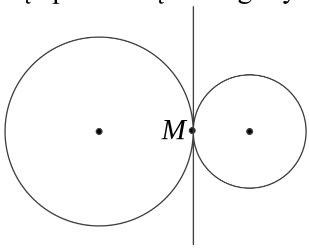


20 pav.

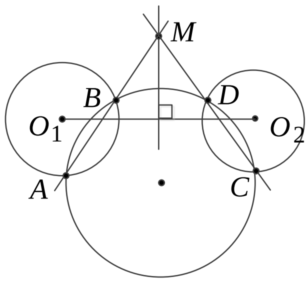
Bet kurie du apskritimai, kurių centrai yra skirtingi taškai, turi vienintelę radikaliąją ašį. Jei apskritimai kertasi taškuose M ir N, tai šių taškų laipsniai apskritimų atžvilgiu lygūs nuliui, o kadangi tiesė *MN* yra statmena apskritimų centrus jungiančiai tiesei, tai pagal 8 teoremą ji yra tų apskritimų radikalioji ašis (21a pav.). Analogiškai, jei du apskritimai liečiasi taške *M*, tai per šį tašką nubrėžta jų bendroji liestinė yra jų radikalioji ašis (21b pav.). Jei apskritimai neturi bendrų taškų (21c pav.), iš bet kurio taško, nepriklausančio jų centrus jungiančiai tiesei, kaip iš centro brėžiamas apskritimas, vieną apskritimą kertantis taškuose *A* ir *B*, o kitą – taškuose *C* ir *D*. Jei taškas *M* yra tiesių *AB* ir *CD* susikirtimo taškas, tai jo laipsniai visų trijų nubrėžtų apskritimų atžvilgiu yra



21a pav.



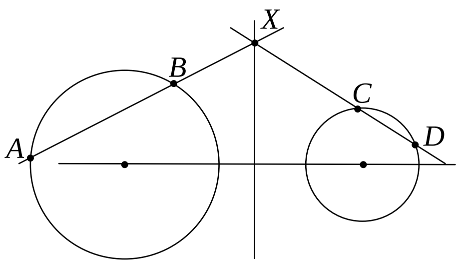
21b pav.



21c pav.

vienodi (paaiškinkite, kodėl). Taigi taškas *M* yra duotųjų apskritimų radikaliojoje ašyje, kurią gauname, iš taško *M* nuleidę statmenį tiesei, einančiai per duotųjų apskritimų centrus.

9 teorema (radikaliosios ašies lema): Sakykime, kad tiesė *l* yra dviejų apskritimų radikalioji ašis. Viename apskritime pažymėkime taškus



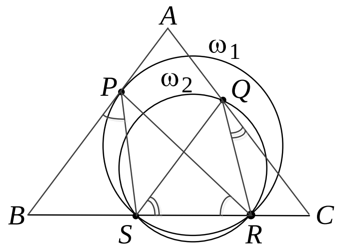
22 pav.

A ir *B*, o kitame – taškus *C* ir *D*, taip, kad tiesės *AB* ir *CD* nebūtų lygiagrečios. Tiesių *AB* ir *CD* sankirtos taškas *X* yra tiesėje *l* tada ir tik tada, kai taškai *A*, *B*, *C*, *D* yra viename apskritime. Tikrai (22 pav.), taškas *X* yra duotųjų apskritimų radikaliojoje ašyje, tada ir tik tada, kai teisinga lygybė $XA \cdot XB = XC \cdot XD$, o ši lygybė yra teisinga tada ir tik tada, kai taškai *A*, *B*, *C*, *D* yra viename apskritime.

6 pavyzdys. Trikampio *ABC* kraštinėje *BC* yra taškai *S* ir *R*, be to, taškas *S* yra tarp taškų *B* ir *R*. Kraštinėje *AB* yra taškas *P*, kraštinėje *AC* – taškas *Q* ir yra teisingos lygybės $AP = AQ$,

$$\angle BPS = \angle PRS, \quad \angle CQR = \angle QSR$$

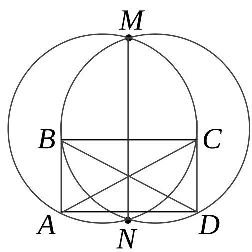
(23 pav.) Įrodysime, kad taškai *P*, *Q*, *R*, *S* yra viename apskritime.



23 pav.

*Sprendimas***.** Sakykime, kad apskritimas ω_1 eina per taškus *P*, *S*, *R*. Iš sąlygos $\angle BPS = \angle PRS$, išplaukia (6 teorema), kad tiesė *AB* yra jo liestinė. Analogiškai nubrėžiame apskritimą ω_2, einantį per taškus *Q*, *S*, *R*. Iš sąlygos $\angle CQR = \angle CSQ$ išplaukia, kad tiesė *AC* yra jo liestinė. Jei apskritimai ω_1 ir ω_2 yra skirtingi, tai tiesė *SR* yra jų radikalioji ašis. Iš sąlygos $AP = AQ$ seka, kad taškas *A* yra jų radikaliojoje ašyje. Bet taškas *A* nėra tiesėje *SR*, t. y., tiesėje *BC*. Prieštara įrodo, kad apskritimai ω_1 ir ω_2 sutampa, taigi taškai *P*, *Q*, *S*, *R* yra viename apskritime.

7 pavyzdys. Du apskritimai kertasi taškuose *M* ir *N*. Stačiakampis *ABCD* yra toks, kad viršūnės *A* ir *C* yra viename apskritime, o viršūnės *B* ir *D* – kitame (24 pav.). Įrodysime, kad stačiakampio įstrižainių susikirtimo taškas yra tiesėje *MN*.



24 pav.

Sprendimas. Tiesė *MN* yra duotųjų apskritimų radikalioji ašis. Kadangi apie bet kurį stačiakampį *ABCD* apibrėžiamas apskritimas, tai apskritimų stygos *AC* ir *BD* pagal 9 teoremą susikerta radikaliosios ašies *MN* taške.

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Du apskritimai, kurių centrai yra taškai O_1 ir O_2, taškuose M ir N kertasi stačiuoju kampu, kampų NO_1M ir NO_2M skirtumas yra lygus $30°$. Raskite į kokio didumo lankus styga MN dalija kiekvieną iš apskritimų.

2. Iš apskritimo vieno taško nubrėžtos dvi stygos, kurių ilgiai lygūs 9 ir 17. Atstumas tarp tų stygų vidurio taškų lygus 5. Raskite apskritimo spindulio ilgį.

3. Trikampio ABC kraštinė $AC = 8$, įbrėžtas į trikampį apskritimas pusiaukraštinę BD kerta taškuose M ir N taip, kad $BM : MN : ND = 1 : 2 : 1$. Raskite trikampio ABC kitų kraštinių ilgius.

4. Lygiakraščio trikampio ABC kraštinės ilgis lygus 2, taškai M ir N yra kraštinių AB ir AC vidurio taškai. Tiesė MN kerta apie trikampį ABC apibrėžtą apskritimą taškuose P ir Q. Raskite atkarpos PQ ilgį.

5. Taškas C dalija apskritimo stygą AB į dalis $AC = 4$, $BC = 12$. Per tašką C nubrėžtas apskritimo skersmuo kerta apskritimą taške D taip, kad $CD = 7$. Raskite apskritimo spindulio ilgį.

6. Apskritimo taškas M nutolęs nuo apskritimo liestinių, nubrėžtų apskritimo taškuose A ir B, atstumais 4 ir 9. Raskite taško M atstumą iki tiesės AB.

7. Trikampio ABC kampas A lygus $60°$, apibrėžto apie jį apskritimo spindulys lygus 10. Taškas D yra to apskritimo lanko BC, kuriam nepriklauso taškas A, vidurio taškas, taškas Q yra į trikampį ABC įbrėžto apskritimo centras. Raskite atkarpos DQ ilgį.

8. Apskritimo centras yra taškas O, spindulys lygus 9. Apskritimo viduje yra du taškai A ir B, simetriški centro O atžvilgiu, nutolę nuo taško O atstumu lygiu 5. Apskritime paimamas bet kuris taškas M ir randamas toks apskritimo taškas N, kad tiesės AM ir BN būtų lygiagrečios, o taškai M ir N būtų toje pačioje tiesės AB pusėje. Raskite sandaugos $AM \cdot BN$ reikšmę.

9. Duoti du apskritimai, kurių centrai yra taškai S ir T, spindulių ilgiai lygūs 5 ir 3, o atstumas $ST = 10$. Apskritimų radikalioji ašis kerta atkarpą ST taške M. Raskite atkarpų TM ir SM ilgius.

10. Iš taško A nubrėžta apskritimo liestinė, liečianti jį taške T. Nubrėžta apskritimo styga BC lygiagreti su tiese AT, be to, $AB < AC$. Tiesės AB ir AC dar kartą kerta apskritimą taškuose P ir Q. Kokiu santykiu tiesė PQ dalija atkarpą AT? (*Nurodymas*: nubrėžkite apskritimą, einantį per taškus P, Q ir T ir įrodykite, kad tiesė AT yra jo liestinė.)

III. LYGINIAI

Eugenijus Stankus

Lyginys – labai svarbi skaičių teorijos sąvoka. Lyginiai taikomi sprendžiant įvairius skaičių teorijos uždavinius, tarp jų ir įrodinėjant sveikųjų skaičių dalumo požymius. Šioje temoje pateiksime lyginio apibrėžimą, įrodysime kai kurias lyginių savybes, panagrinėsime keletą lyginių taikymo pavyzdžių.

Norėdami apibrėžti lyginį, prisiminsime natūraliųjų ir sveikųjų skaičių savybes, susipažinsime su sveikųjų skaičių dalumu bei dalyba su liekana. Žinome, kad sveikųjų skaičių aibę

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, \ 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

sudaro natūralieji skaičiai $1, 2, 3, \ldots$, sveikieji neigiami skaičiai $-1, -2, -3, \ldots$ ir skaičius 0.

1. Sveikųjų skaičių dalumas.

1 *apibrėžimas*. Sveikasis skaičius *a dalijasi* iš sveikojo skaičiaus $b \neq 0$ (žymima $a \vdots b$), jeigu yra toks sveikasis skaičius *q*, su kuriuo $a = b \cdot q$. Taip pat sakoma, kad *b* dalija *a* (žymima $b \mid a$).

Pavyzdžiui, $42 \vdots 7$ arba $7 \mid 42$, nes $42 = 6 \cdot 7$.

Nesunku įsitikinti, kad galioja tokie teiginiai.

1) Jei $b \mid a$ ir $c \mid b$, tai $c \mid a$.

Įrodymas. Kadangi $a = b \cdot q_1$ ir $b = c \cdot q_2$, tai $a = c \cdot q_2 \cdot q_1$, t. y. $c \mid a$.

2) Jeigu iš sveikojo skaičiaus *a* dalijasi kiekvienas sumos dėmuo, tai ir ši suma dalijasi iš skaičiaus *a*. Šį teiginį galime užrašyti ir taip: jei $a \setminus b_1, a \setminus b_2, ..., a \setminus b_n$, tai $a \setminus (b_1 + b_2 + ... + b_n)$.

Įrodymas. Kadangi $b_1 = aq_1, b_2 = aq_2, ..., b_n = aq_1,$ tai $b_1 + b_2 + ... + b_n = a(q_1 + q_2 + ... + q_n)$, t. y. suma $b_1 + b_2 + ... + b_n$ dalijasi iš *a*.

3) Jeigu žinoma, kad lygybės

$$a_1 + a_2 + ... + a_m = b_1 + b_2 + ... + b_n \qquad (1)$$

visi nariai, išskyrus vieną (pavyzdžiui a_1), dalijasi iš skaičiaus *c*, tai ir pastarasis narys dalijasi iš skaičiaus *c*.

Įrodymas. Kadangi $a_2, ..., a_m, b_1, b_2, ..., b_n$ dalijasi iš skaičiaus *c*, tai $a_2 = cq_2, ..., a_m = cq_m$,

$b_1 = cl_1, b_2 = cl_2, ..., b_n = cl_n$. Įrašę šias išraiškas į (1) lygybę ir išreiškę a_1, gauname:

$a_1 = c(l_1 + l_2 + ... + l_n - q_2 - ... - q_m)$. Taigi a_1 dalijasi iš *c*.

Pirminiais skaičiais vadinami tokie natūralieji skaičiai, kurie dalijasi tik iš savęs ir iš vieneto (juos dažniausiai žymėsime raide *p*). Skaičius 1 nelaikomas pirminiu. Visi natūralieji skaičiai ($\neq 1$), kurie nėra pirminiai, vadinami *sudėtiniais* natūraliaisiais skaičiais.

Pirminiai skaičiai sveikųjų skaičių aritmetikoje ypač svarbūs, nes jų sandauga išreiškiamas bet kuris nelygus 1 ir -1 sveikasis skaičius. Tai patvirtina pagrindinė aritmetikos teorema, kurią čia tik suformuluosime.

Pagrindinė aritmetikos teorema. Bet kuris natūralusis skaičius n, $n > 1$, vieninteliu būdu išreiškiamas pirminių skaičių sandauga (jei nekreipiama dėmesio į dauginamųjų tvarką).

Jei skaičiaus *n pirminius daliklius* (pirminius skaičius, kurie dalija *n*) pažymėsime p_1, p_2, …, p_m, tai skaičių *n* galime užrašyti formule

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_m^{k_m}; \qquad (2)$$

čia $k_1, k_2, ..., k_m$ yra patys didžiausi laipsnio rodikliai, su kuriais skaičius *n* dalijasi iš šių laipsnių. Ši formulė vadinama skaičiaus *n kanoniniu skaidiniu*. Pavyzdžiui, $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, $1890 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

Nedidelių natūraliųjų skaičių kanoninius skaidinius rasti gana paprasta. Kai skaičiai dideli, šis uždavinys tampa sudėtingas netgi pasitelkiant kompiuterius, nes reikia nustatyti iš kurių pirminių skaičių jie dalijasi, o iš kurių ne. Taip pat sunku nustatyti, ar skaičius pirminis, ar sudėtinis. Įdomios informacijos šiais klausimais rasite svetainėje http://www.utm.edu/research/primes/largest.html .

Didžiausias bendrasis daliklis. Dviejų natūraliųjų skaičių *m* ir *n* *didžiausiu bendruoju dalikliu* (žymimas $DBD(m,n)$ arba tiesiog (m,n)) vadinamas didžiausias natūralusis skaičius, kuris dalija abu skaičius – ir

m, ir *n*. Pavyzdžiui, kai $m = 756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$,
$n = 16170 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$, tai $(m, n) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$.

Kai $(m, n) = 1$, tai *m* ir *n* vadinami *tarpusavyje pirminiais* skaičiais. Pavyzdžiui, skaičiai 12 ir 77 yra tarpusavyje pirminiai, nes $(12, 77) = 1$.

2. Dalyba su liekana.

1 teorema (dalybos su liekana teorema). Tarkime, a ir b – sveikieji skaičiai, $b \neq 0$. Tuomet yra tokie vieninteliai sveikieji skaičiai q ir r, $0 \leq r < |b|$, su kuriais galioja lygybė

$$a = b \cdot q + r. \tag{3}$$

Skaičius *q* vadinamas *dalmeniu*, o *r* – *liekana*.

Pastaba. Kai skaičiams *a* ir *b* ieškant liekanos *r* taikoma dalybos su liekana teorema, paprastai sakoma „rasti liekaną, gaunamą skaičių *a* dalijant iš skaičiaus *b*".

Atveju $r = 0$ gauname, kad skaičius *a* dalijasi iš *b*. Taip pat atkreipkime dėmesį, kad (3) formulėje skirtingų liekanos *r* reikšmių iš viso yra $|b|$, t. y., gali būti $r = 0, 1, 2, \ldots, (|b| - 1)$.

Įrodymas. Skaičius *q* ir *r*, $0 \leq r < |b|$, su kuriais galioja (3) lygybė, galima rasti taip: skaičių *q* reikia pasirinkti tokį, kad $b \cdot q$ būtų didžiausias, neviršijantis skaičiaus *a*, ir tuomet paimti $r = a - b \cdot q$. Tai patogiausia padaryti taikant žinomą dalybos kampu algoritmą.

Įrodysime, kad tokia skaičių *q* ir *r* pora, su kuria galioja lygybė $a = b \cdot q + r$, yra vienintelė.

Tarkime, kad yra kiti skaičiai q_1 ir r_1, $0 \leq r_1 < |b|$, su kuriais galioja lygybė $a = b \cdot q_1 + r_1$. Tuomet iš šios lygybės atėmę (3), gausime $0 = b(q_1 - q) + (r_1 - r)$. Iš aukščiau įrodytos trečiosios dalumo savybės išplaukia, kad $r_1 - r$ turi dalytis iš skaičiaus *b*. Tačiau $|r_1 - r| < |b|$ (nes $r_1 - r$ yra dviejų teigiamų skaičių, mažesnių už |*b*|, skirtumas). Toks skaičius gali būti tik nulis. Taigi $r_1 - r = 0$, o tuomet ir $q_1 - q = 0$ (nes $b \neq 0$). Vadinasi, $r_1 = r$, $q_1 = q$. Teorema įrodyta.

Pateiksime kelis pavyzdžius:
kai $a = 2017, b = 12$, turėsime $q = 168, \ r = 1$
$2017 = 12 \cdot 168 + 1$);
kai $a = -2017, b = 12$, tai $q = -169, \ r = 11$
($-2017 = 12 \cdot (-169) + 11$);
kai $a = 2017, b = -12$, tuomet $q = -168, \ r = 1$
($2017 = (-12) \cdot (-168) + 1$);
kai $a = -2017, b = -12$, turėsime $q = 169, \ r = 11$
($-2017 = (-12) \cdot 169 + 11$).

3. Lyginio sąvoka ir lyginių savybės.

2 apibrėžimas. Jei sveikuosius skaičius *a* ir *b* dalijant iš natūraliojo skaičiaus $m > 1$ gaunama **ta pati liekana**, sakoma, kad *a lygsta b moduliu m*. Tai žymima $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$, o šis užrašas vadinamas *lyginiu moduliu m*.

Pavyzdžiui, $2017 \equiv 1 (\operatorname{mod} 12)$, $-2017 \equiv 11 (\operatorname{mod} 12)$, $26 \equiv 5 (\operatorname{mod} 7)$, $176 \equiv -10 (\operatorname{mod} 2)$.

Įrodysime kelias lyginių savybes.

1) Lyginys $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$ galioja tik tuomet, kai skirtumas $a - b$ dalijasi iš *m*.

Įrodymas. Jei $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$, tai

$$a = mq_1 + r \ \text{ ir } \ b = mq_2 + r .$$

Tuomet $a - b = m(q_1 - q_2)$. Taigi $a - b$ dalijasi iš *m*.

Atvirkščiai, jei $m \mid (a - b)$, o $b = mq_1 + r$, tai

$$a - b = mq \Rightarrow a = b + mq \Rightarrow a = mq_1 + r + mq \Rightarrow a = m(q_1 + q) + r .$$

Taigi dalijant *a* iš *m* taip pat gaunama liekana r. Vadinasi, ir *a*, ir *b* dalijant iš natūraliojo skaičiaus m gaunama ta pati liekana.

Išvada. $a \equiv b (\operatorname{mod} m) \Leftrightarrow a - b \equiv 0 (\operatorname{mod} m)$. Taigi lyginyje (kaip ir lygtyje), jo narį galima perkelti į kitą lyginio pusę pakeičiant šio nario ženklą priešingu.

2) *Lyginio daugyba iš skaičiaus.* Jei $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$, tuomet $ac \equiv bc (\operatorname{mod} m)$ su bet kuriuo $c \in Z$.

Įrodymas. $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m) \Leftrightarrow a - b = mq \Rightarrow$
$ac - bc = mqc \Rightarrow ac \equiv bc(\mathrm{mod}\, m)$.

3) *Dėmens pridėjimas*. Jei $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$, tuomet
$a + c \equiv b + c(\mathrm{mod}\, m)$ su bet kuriuo $c \in Z$.

Įrodymas. $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m) \Leftrightarrow a - b = mq \Rightarrow$
$(a + c) - (b + c) = mq \Rightarrow a + c \equiv b + c(\mathrm{mod}\, m)$.

4) *Lyginių sudėtis.* Jei $a_1 \equiv b_1(\mathrm{mod}\, m)$ ir $a_2 \equiv b_2(\mathrm{mod}\, m)$, tai
$a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2(\mathrm{mod}\, m)$.

Įrodymas. $a_1 \equiv b_1(\mathrm{mod}\, m)$,
$a_2 \equiv b_2(\mathrm{mod}\, m) \Leftrightarrow a_1 = b_1 + mq_1,\, a_2 = b_2 + mq_2 \Rightarrow$
$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + m(q_1 + q_2) \Rightarrow a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2(\mathrm{mod}\, m)$.

Išvada. Ši savybė galioja su bet kuriuo lyginių skaičiumi (pabandykite įrodyti).

5) *Lyginių daugyba*. Jei $a_1 \equiv b_1(\mathrm{mod}\, m)$ ir $a_2 \equiv b_2(\mathrm{mod}\, m)$, tai
$a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2(\mathrm{mod}\, m)$.

Įrodymas. $a_1 \equiv b_1(\mathrm{mod}\, m)$,
$a_2 \equiv b_2(\mathrm{mod}\, m) \Leftrightarrow a_1 = b_1 + mq_1,\, a_2 = b_2 + mq_2 \Rightarrow$
$a_1 \cdot a_2 = (b_1 + mq_1)(b_2 + mq_2) \Rightarrow$
$a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 + m(b_1q_2 + b_2q_1 + mq_1q_2) \Rightarrow a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2(\mathrm{mod}\, m)$.

Išvada. Ši savybė galioja su bet kuriuo lyginių skaičiumi (pabandykite įrodyti).

6) *Lyginių kėlimas laipsniu.* Jei $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ tai $a^k \equiv b^k(\mathrm{mod}\, m)$, $k \in N$.

Šis teiginys išplaukia iš lyginių daugybos (kai dauginama *k* vienodų lyginių) savybės.

4. Likinių klasės moduliu *m* ir veiksmai su jomis.

Pasirinkime natūralųjį skaičių $m > 1$. Tuomet pagal dalybos su liekana teoremos formulę $a = m \cdot q + r$ kiekvienam sveikajam skaičiui *a* vienareikšmiškai priskiriama liekana *r*, $0 \le r < m$. Pavyzdžiui, kaip matėme, kai $m = 12$, tai skaičiui 2017 priskiriama liekana 1, o skaičiui

-2017– liekana 11. Yra be galo daug sveikųjų skaičių, kuriems su pasirinktuoju $m=12$ priskiriama ta pati liekana. Pavyzdžiui, skaičiui 2005 taip pat priskiriama liekana 1, nes $2005=12\cdot 167+1$, kaip ir skaičiams 1993, 1981, ..., 2029, 2041, ... ir t. t., 1, nes $1=12\cdot 0+1$, -11, nes $-11=12\cdot(-1)+1$, -23, -35, ... ir t. t. Visa ši sveikųjų skaičių aibė

$$\{\ldots,-35,-23,-11,1,13,25,\ldots,1981,1993,2005,2017,\ldots\}$$

yra sudaryta iš sveikųjų skaičių, kurių dalybos iš $m=12$ liekana yra lygi 1. Ši aibė vadinama *likinių klase* $\bar{1}$ *moduliu* 12. Užrašius kitaip: $\bar{1}=\{x\in Z: x=12\cdot q+1,\ q\in Z\}$. Aišku, kad

$$\overline{11}=\{x\in Z: x=12\cdot q+11,\ q\in Z\}=$$
$$\{\ldots,-2017,-2005,\ldots,-1,11,23,\ldots\}.$$

Analogiškai galime nusakyti ir kitas likinių klases moduliu 12 – tai $\bar{2}=\{x\in Z: x=12\cdot q+2,\ q\in Z\}$, $\bar{3}=\{x\in Z: x=12\cdot q+3,\ q\in Z\}$, ..., $\overline{10}=\{x\in Z: x=12\cdot q+10,\ q\in Z\}$.

Tokiu pat būdu pagal visas galimas liekanų *r* reikšmes $r=0,1,2,\ldots,m-1$ galima apibūdinti ir likinių klases bet kuriuo natūraliuoju moduliu $m>1$: $\bar{1}=\{x\in Z: x=m\cdot q+1,\ q\in Z\}$, $\bar{2}=\{x\in Z: x=m\cdot q+2,\ q\in Z\}$, ..., $\overline{m-1}=\{x\in Z: x=m\cdot q+(m-1),\ q\in Z\}$. Taip sveikųjų skaičių aibę Z suskaidome į m sveikųjų skaičių poaibių, neturinčių bendrų elementų – *likinių klases moduliu m* (rašoma $\mathrm{mod}\,m$).

Aukščiau paminėtas likinių klases moduliu 12 galime užrašyti ir panaudodami lyginius: likinių klasę $\bar{1}$ sudaro sveikieji skaičiai *x*, su kuriais $x\equiv 1(\mathrm{mod}\,12)$, o likinių klasę $\overline{11}$ – sveikieji skaičiai *x*, su kuriais $x\equiv 11(\mathrm{mod}\,12)$. Iš viso likinių klasių moduliu 12 yra 12 ($\bar{0},\bar{1},\bar{2},\ldots,\overline{11}$) – tarp jų ir nulinė $\bar{0}$, kurią sudaro sveikieji skaičiai, besidalijantys iš 12, t. y. $x\equiv 0(\mathrm{mod}\,12)$.

Panašiai ir su likinių klasėmis bet kuriuo moduliu $m > 1$:

$\overline{0} = \{x \in Z : x \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m)\}$, $\overline{1} = \{x \in Z : x \equiv 1 (\mathrm{mod}\, m)\}$,

$\overline{2} = \{x \in Z : x \equiv 2 (\mathrm{mod}\, m)\}$, ...,

$\overline{m-1} = \{x \in Z : x \equiv m-1 \,(\mathrm{mod}\, m)\}$.

Vadinasi, iš viso skirtingų klasių yra *m*: $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{m-1}$ – tai *pilnoji likinių klasių moduliu m sistema*. Aišku, kad $Z = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} \cup \ldots \cup \overline{m-1}$. Pavyzdžiui, kai $m = 5$, tai turėsime tokią pilnąją likinių sistemą:

$$\begin{aligned}\overline{0} &= \{5q + 0,\ q \in Z\} = \{x : x \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 5)\} = \\ &= \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, \ldots\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{1} &= \{5q + 1,\ q \in Z\} = \{x : x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 5)\} = \\ &= \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, 21, \ldots\}\end{aligned};$$

$$\begin{aligned}\overline{2} &= \{5q + 2,\ q \in Z\} = \{x : x \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 5)\} = \\ &= \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, 17, 22, \ldots\}\end{aligned};$$

$$\begin{aligned}\overline{3} &= \{5q + 3,\ q \in Z\} = \{x : x \equiv 3 (\mathrm{mod} 5)\} = \\ &= \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, 18, 23, \ldots\}\end{aligned};$$

$$\begin{aligned}\overline{4} &= \{5q + 4,\ q \in Z\} = \{x : x \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 5)\} = \\ &= \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, 19, 24, \ldots\}\end{aligned}.$$

Įdomu, kad likinių klasės moduliu *m* kai kuriais atvejais sudaro algebrines struktūras, turinčias savybes, panašias į racionaliųjų skaičių savybes. Pavyzdžiui, pilnoji likinių klasių sistema turi vienetinį elementą (racionaliųjų skaičių aibėje yra vienetas), kiekviena nenulinė klasė turi atvirkštinę (racionaliųjų skaičių aibėje kiekviena trupmena $\dfrac{k}{l}$ turi atvirkštinę $\dfrac{l}{k}$, kurių sandauga lygi 1). Yra tik vienas skirtumas ! – racionaliųjų skaičių aibė yra begalinė, o likinių sistema – baigtinė.

Norėdami šią analogiją pagrįsti, likinių klasių aibėje moduliu *m* apibrėšime sudėties, daugybos, kėlimo laipsniu ir daugybos iš skaičiaus veiksmus.

3 apibrėžimas. Klasių $\overline{r_1}$ ir $\overline{r_2}$ *suma* $\overline{r_1}+\overline{r_2}$ vadinama klasė, kuriai priklauso skaičius r_1+r_2. Pavyzdžiui, klasėms moduliu 5 turėsime: $\bar{1}+\bar{4}=\bar{0}$, $\bar{4}+\bar{3}=\bar{2}$, $\bar{3}+\bar{3}=\bar{1}$, $\bar{2}+\bar{4}=\bar{1}$ ir pan. Galime sudaryti pilną likinių klasių moduliu 5 *sudėties lentelę*:

$\overline{r_2}$ \ $\overline{r_1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

6 apibrėžimas. Klasių $\overline{r_1}$ ir $\overline{r_2}$ *sandauga* $\overline{r_1}\cdot\overline{r_2}$ vadinama klasė, kuriai priklauso skaičius $r_1 \cdot r_2$.

Pavyzdžiui, sudauginę klases moduliu 5 gausime: $\bar{1}\cdot\bar{4}=\bar{4}$, $\bar{4}\cdot\bar{3}=\bar{2}$, $\bar{3}\cdot\bar{3}=\bar{4}$, $\bar{2}\cdot\bar{4}=\bar{3}$ ir pan. Pilna likinių klasių moduliu 5 *daugybos lentelė* tokia:

$\overline{r_2}$ \ $\overline{r_1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

7 apibrėžimas. Klasės $\bar{r}$ (moduliu m) k-tuoju laipsniu $\bar{r}^k$ vadinama klasė, kuriai priklauso skaičius r^k.

8 apibrėžimas. Sveikojo skaičiaus a ir likinių klasės $\overline{r}$ moduliu m *sandauga* $a \cdot \overline{r}$ vadinama klasė, kuriai priklauso skaičius $\overline{a \cdot r}$.

9 apibrėžimas. Likinių klasių $\overline{r_1}$ ir $\overline{r_2}$ moduliu m *skirtumu* $\overline{r_1} - \overline{r_2}$ vadinama klasė $\overline{r_1} + (-1) \cdot \overline{r_2}$.

Dabar naudodamiesi likinių klasių moduliu 5 veiksmų apibrėžimais bei sudėties ir daugybos lentelėmis galime apskaičiuoti įvairius tokių likinių klasių reiškinius. Pavyzdžiui, apskaičiuokime tokį reiškinį, sudarytą iš klasių moduliu 5:

$$\overline{3}^4 + 3 \cdot \overline{4}^3 - \overline{2} \cdot \overline{3}^2 + \overline{1} = \overline{1} + 3 \cdot \overline{4} - \overline{2} \cdot \overline{4} + \overline{1} = \overline{1} + \overline{2} - \overline{3} + \overline{1} = \overline{4} + \overline{2} = \overline{1}.$$

5. Lyginiai su nežinomaisiais. Taikant lyginius skaičiavimuose, dažnai reikia spręsti lyginius su nežinomaisiais, pavyzdžiui, $5x \equiv 6(\bmod 7)$. Čia reikia rasti sveikuosius x, su kuriais lyginys teisingas. Kitaip tariant, šio lyginio sprendiniai yra skaičiai, priklausantys klasei $\overline{x}$ moduliu 7, su kuria $5 \cdot \overline{x} = \overline{6}$. Patikrinę visas klases moduliu 7, nustatome, kad $\overline{x} = \overline{4}$ arba $x \equiv 4(\bmod 7)$. Šios klasės visi skaičiai užrašomi formule $x = 7k + 4, k \in Z.$ Tai pirmojo laipsnio lyginio pavyzdys. Lyginių teorijoje nagrinėjami ir aukštesnio laipsnio lyginiai bei lyginių sistemos.

6. Lyginių taikymas.

Naudojantis lyginiais galima rasti didelių natūraliųjų skaičių, užrašytų laipsniais (kaip, pavyzdžiui, 13^{2017}), paskutiniuosius dešimtainius skaitmenis. Taip pat taikant lyginių savybes nesunku apskaičiuoti liekaną, gaunamą dalijant tokius skaičius iš kurio nors natūraliojo skaičiaus.

1 pavyzdys. Raskime skaičiaus $n = (687)^{2017}$ paskutinįjį skaitmenį.

Sprendimas. Natūraliojo skaičiaus paskutinysis skaitmuo yra liekana, gauta šį skaičių dalijant iš 10. Taigi ieškosime skaičiaus n dalybos iš 10 liekanos. Pirmiausia $687 \equiv 7(\bmod 10)$. Toliau:

$$7^2 \equiv 9(\bmod 10) \Rightarrow \ 7^4 \equiv 9^2 \equiv 1(\bmod 10) \Rightarrow.$$

$$\Rightarrow 7^{4\cdot 504} = 7^{2016} \equiv 1(\mathrm{mod}10) \Rightarrow 7^{2017} \equiv 7(\mathrm{mod}10)$$

Taigi skaičiaus n paskutinis skaitmuo yra 7.

2 pavyzdys. Raskime skaičiaus $n = 13^{2017}$ paskutinius du skaitmenis.

Sprendimas. Natūraliojo skaičiaus paskutiniai du skaitmenys yra liekana, gauta šį skaičių dalijant iš 100. Taigi ieškosime skaičiaus n dalybos iš 100 liekanos: $13^2 \equiv 69(\mathrm{mod}100) \Rightarrow 13^4 \equiv 61 \Rightarrow$

$13^8 \equiv 21 \Rightarrow 13^{16} \equiv 41 \Rightarrow 13^{32} \equiv 81 \Rightarrow 13^{64} \equiv 61 \Rightarrow 13^{128} \equiv 21 \Rightarrow$

$\Rightarrow 13^{256} \equiv 41 \Rightarrow 13^{512} \equiv 81 \Rightarrow$

$13^{1024} \equiv 61 \Rightarrow 13^{1024} \cdot 13^{512} \equiv 61 \cdot 81 \Rightarrow 13^{1536} \equiv 41 \Rightarrow$

$\Rightarrow 13^{1536} \cdot 13^{256} \equiv 41 \cdot 41 \Rightarrow 13^{1792} \equiv 81 \Rightarrow$

$13^{1792} \cdot 13^{128} \equiv 81 \cdot 21 \Rightarrow 13^{1920} \equiv 01 \Rightarrow 13^{1920} \cdot 13^{64} \equiv 01 \cdot 61 \Rightarrow$

$\Rightarrow 13^{1984} \equiv 61 \Rightarrow 13^{1984} \cdot 13^{32} \equiv 61 \cdot 81 \Rightarrow$

$13^{2016} \equiv 41 \Rightarrow 13^{2016} \cdot 13 \equiv 41 \cdot 13 \Rightarrow 13^{2017} \equiv 33(\mathrm{mod}100)$.

Taigi skaičiaus n paskutinieji du skaitmenys yra 33.

3 pavyzdys. Raskime skaičiaus $n = 9^7 - 13^9 + 14^{10}$ dalybos iš 11 liekaną.

Sprendimas. Naudodamiesi lyginių savybėmis gausime:

$$9^2 \equiv 4(\mathrm{mod}11) \Rightarrow 9^4 \equiv 5 \Rightarrow 9^4 \cdot 9^2 \equiv 5 \cdot 4 \Rightarrow 9^6 \equiv 9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9^6 \cdot 9 \equiv 9 \cdot 9 \Rightarrow 9^7 \equiv 4(\mathrm{mod}11);$$

$13^2 \equiv 4(\mathrm{mod}11) \Rightarrow 13^4 \equiv 5 \Rightarrow 13^8 \equiv 3 \Rightarrow 13^9 \equiv 6(\mathrm{mod}11)$**;**

$$14 \equiv 3(\mathrm{mod}11) \Rightarrow 14^2 \equiv 9 \Rightarrow 14^4 \equiv 4 \Rightarrow 14^8 \equiv 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 14^{10} \equiv 5 \cdot 9 \equiv 1(\mathrm{mod}11).$$

Taigi $9^7 \equiv 4(\mathrm{mod}11)$, $13^9 \equiv 6(\mathrm{mod}11)$, $14^{10} \equiv 1(\mathrm{mod}11)$.

Atlikę veiksmus su gautaisiais lyginiais, turėsime:

$n \equiv 4 - 6 + 1(\mathrm{mod}11) \equiv 4 + 5 + 1(\mathrm{mod}11) \equiv 10(\mathrm{mod}11)$.

Vadinasi, skaičių n dalydami iš 11 gausime liekaną 10.

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Apskaičiuokite $DBD(363825, 5265)$.

2. Apskaičiuokite liekaną *r*, kai $a = -1273, b = -27$ ($a = bq + r,\ 0 \le r < |b|$).

3. Sudarykite likinių klasių moduliu 7 sudėties lentelę.

4. Sudarykite likinių klasių moduliu 7 daugybos lentelę.

5. Apskaičiuokite reiškinį *A*, sudarytą iš likinių klasių moduliu 7, kai $A = \bar{5}^4 + 4 \cdot \bar{6}^3 - \bar{3} \cdot \bar{4}^2 + \bar{2}$.

6. Išspręskite lyginį $11x - 6 \equiv 3 \pmod{7}$.

7. Išspręskite lyginį $3 \cdot x^2 - x \equiv 4 \pmod{7}$.

8. Raskite skaičiaus $n = 3^{131} + 7^{141} + 13^{151}$ paskutinį skaitmenį.

9. Raskite skaičiaus $n = 17^{2017}$ paskutinius du skaitmenis.

10. Raskite skaičiaus $n = 6^{71} - 12^9 + 15^{21}$ dalybos iš 13 liekaną.

IV. LYGČIŲ SISTEMOS

Antanas Apynis

Nagrinėdami šią temą apsiribosime racionaliųjų lygčių su dviem ir trimis nežinomaisiais sistemomis. Taip pat turime mintyje, kad kiekvienas LJMM mokinys be vargo gali išspręsti bet kurią tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

ir puikiai supranta, kad šios sistemos sprendiniu laikoma tik tokia nežinomųjų x ir y reikšmių pora $(x;\, y)$, kuri tenkina ir pirmą, ir antrą lygtį.

1. Racionaliųjų lygčių sistemos. Reiškinys $R(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ kintamųjų dydžių $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ atžvilgiu vadinamas *racionaliuoju reiškiniu*, jeigu kiekvieno dydžio x_i, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, atžvilgiu (kitus dydžius laikant pastoviaisiais dydžiais) yra daugianaris arba daugianarių santykis (paprastoji trupmena, kurios skaitiklyje ir vardiklyje yra daugianariai).

Lygtis $R(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$ vadinama *racionaliąja lygtimi* su nežinomaisiais $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, jeigu dydžių $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ atžvilgiu $R(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ yra racionalusis reiškinys.

Racionaliosios lygties $R(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$ *sprendiniu* vadinamas toks realiųjų skaičių, sakykim, $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ rinkinys $(r_1; r_2; r_3; \dots; r_n)$, kuriam esant reiškinio $R(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ reikšmė $R(r_1, r_2, r_3, \dots, r_n)$ lygi nuliui. Šios lygties sprendinių visuma vadinama *lygties sprendinių aibe*.

Tegu

$$R_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n),\ R_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \dots,\ R_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

kintamųjų dydžių $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ atžvilgiu yra racionalieji reiškiniai. Tada galima sudaryti (ir, aišku, spręsti) m racionaliųjų lygčių:

$$R_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0, \qquad (\mathrm{L}_1)$$

$$R_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0, \qquad (\mathrm{L}_2)$$

$$R_m(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0. \qquad (\mathrm{L}_m)$$

Jų sprendinių aibes pažymėkime atitinkamai $X_1, X_2, \ldots, X_m$.

Apie šių lygčių (t. y. (L_1), (L_2), ... , (L_m)) visumą kalbama kaip apie (*racionaliųjų lygčių*) *sistemą* tik tuo atveju, kai ieškoma visoms lygtims bendrų sprendinių. Tokių sprendinių visuma vadinama lygčių (L_1), (L_2), ... , (L_m) *sistemos sprendinių aibe*. Šią aibę pažymėję *X*, galėtume pasakyti, kad *X* yra aibių $X_1, X_2, \ldots, X_m$ *sankirta* (bendroji dalis):

$$X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_m.$$

Racionaliųjų lygčių (L_1), (L_2), ... , (L_m) sistema paprastai užrašoma tokiu pavidalu:

$$\begin{cases} R_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0, \\ R_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_m(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Reiškinys $R(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ vadinamas (dydžių $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ atžvilgiu) *tiesiniu reiškiniu*, jeigu jį galima užrašyti formule $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n$ (čia $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ – kurie nors realieji skaičiai). Lygtis $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = 0$ vadinama *tiesine lygtimi*.

Taigi tiesinių lygčių su nežinomaisiais $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2)$$

yra racionaliųjų lygčių (1) sistemos atskirasis atvejis.

Reiškinys $R(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ vadinamas *simetriniu reiškiniu*, jeigu bet kaip sukeitus dydžius $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ jo formulė išlieka tokia pati. Pavyzdžiui, reiškiniai

$$x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 \text{ ir } (x_1 + 2x_2)^2 + (2x_1 + x_2)^2 - 7x_1x_2$$

yra simetriniai reiškiniai dydžių x_1 ir x_2 atžvilgiu.

Jeigu visi reiškiniai $R_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, $R_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n), \ldots$,

$R_m(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ yra simetriniai (dydžių $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ atžvilgiu), tai (1) lygčių sistema vadinama *simetrinių lygčių sistema*.

Kad būtų paprasčiau, nagrinėdami racionaliųjų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemas vietoj simbolių x_1 ir x_2 vartosime raides x ir y, o trijų nežinomųjų atveju simbolius x_1, x_2 ir x_3 pakeisime raidėmis x, y ir z.

2. Tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemos sprendimas. Nagrinėkime trijų tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais (x, y ir z) sistemą, užrašytą pavidalu

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \tag{3}$$

Pradėkime nuo atvejo, kai bent vienas koeficientas kiekvienoje lygtyje nelygus nuliui. Tarę, kad $c_1 \neq 0$, iš pirmos lygties išreikškime nežinomąjį z. Gausime, kad

$$z = \frac{d_1 - a_1x - b_1y}{c_1}. \tag{4}$$

Šią išraišką įrašę į antrą ir trečią sistemos lygtį, gausime dviejų tiesinių lygčių su nežinomaisiais x ir y sistemą

$$\begin{cases} a_2x + b_2y + \dfrac{c_2}{c_1}(d_1 - a_1x - b_1y) = d_2, \\ a_3x + b_3y + \dfrac{c_3}{c_1}(d_1 - a_1x - b_1y) = d_3. \end{cases} \tag{5}$$

Atkreipkime dėmesį į tai, kad bent vienas iš koeficientų c_1, c_2 ir c_3 turėtų būti nelygus nuliui, nes priešingu atveju turėtume trijų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais (x ir y) sistemą.

Jei būtų $c_1 = 0$, tai dydžiui z išreikšti dydžiais x ir y galėtume pasirinkti antrą arba trečią (3) sistemos lygtį, o gautą išraišką įrašytume į kitas dvi lygtis ir vėl gautume dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą ieškomoms x ir y reikšmėms rasti.

Atlikus veiksmus, (5) sistema įgytų tokį pavidalą:

$$\begin{cases}(a_2c_1 - a_1c_2)x + (b_2c_1 - b_1c_2)y = d_2c_1 - d_1c_2, \\ (a_3c_1 - a_1c_3)x + (b_3c_1 - b_1c_3)y = d_3c_1 - d_1c_3.\end{cases} \qquad (6)$$

Įsižiūrėję į šios sistemos lygčių koeficientų ir laisvųjų narių išraiškas pradinės (3) sistemos koeficientais bei laisvaisiais nariais, galėtume įžvelgti įdomų dėsningumą, sudarantį galimybę (3) sistemos sprendinio (x; y; z) komponentes x, y ir z užrašyti gražiomis (ir glaustomis) formulėmis. Vis dėlto čia sustokime, nes (6) sistemą mokame išspręsti ir be formulių.

Dar pagvildenkime (3) sistemos atvejį, kai bent vienos lygties visi trys koeficientai lygūs nuliui. Pavyzdžiui, jei būtų $a_2 = b_2 = c_2 = 0$, turėtume išspręsti tokią sistemą:

$$\begin{cases}a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3.\end{cases}$$

Aišku, kad esant bet kuriam nežinomųjų x, y ir z reikšmių trejetui (x; y; z) skaičius $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z$ lygus nuliui. Todėl antra lygtis būtų *tapatybė*, jei $d_2 = 0$, bet ji neturėtų nė vieno sprendinio, jei $d_2 \neq 0$.

Pirmu atveju (kai $d_2 = 0$) antrą lygtį derėtų pašalinti iš sistemos (kaip neturinčią jokios įtakos (3) sistemos sprendinių aibei) ir toliau spręsti dviejų lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases}a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3.\end{cases} \qquad (7)$$

Antru atveju (kai $d_2 \neq 0$) galima padaryti vienintelę galutinę išvadą – (3) sistema sprendinių neturi.

Nesunku suprasti, kad (7) sistema arba turi be galo daug sprendinių, arba neturi nė vieno.

1 pavyzdys. Išspręskime tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases}x + 2y - z = 1, \\ 2x - y + 2z = 5.\end{cases} \qquad (8)$$

Sprendimas. Iš (1) lygties

$$x = 1 - 2y + z,$$

o tada iš antros lygties gauname:

$$2(1-2y+z)-y+2z=5,$$

$$-5y+4z=3.$$

Iš čia

$$y=0{,}8z-0{,}6.$$

Todėl $x=1-2(0{,}8z-0{,}6)+z=2{,}2-0{,}6z.$

Pasirinkę $z=t$, $t\in\mathbf{R}$, gausime realiųjų skaičių trejetą $(2{,}2-0{,}6t;\ 0{,}8t-0{,}6;\ t)$, kuris tenkina ir pirmą, ir antrą (8) sistemos lygtį (būtina tuo įsitikinti!).

Vadinasi, (8) sistema turi be galo daug sprendinių, kuriuos galima užrašyti taip:

$$(2{,}2-0{,}6t;\ 0{,}8t-0{,}6;\ t),\ \ t\in\mathbf{R}.$$

Ats.: $(2{,}2-0{,}6t;\ 0{,}8t-0{,}6;\ t),\ \ t\in\mathbf{R}.$

2 pavyzdys. Išspręskime tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases}2x-2y+z=5,\\ 3x+y-2z=1,\\ \ \ x+3y-z=2.\end{cases}\qquad(9)$$

Sprendimas. Iš pirmos lygties išreikškime z ir gautą išraišką $z=5-2x+2y$ įrašykime į antrą ir trečią sistemos lygtį. O tada išspręskime dviejų lygčių su nežinomaisiais x ir y sistemą

$$\begin{cases}3x+y-2(5-2x+2y)=1,\\ \ \ x+3y-(5-2x+2y)=2.\end{cases}$$

Gausime:

$$\begin{cases}7x-3y=11,\\ 3x+y=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7x-3y=11,\\ y=7-3x\end{cases}\Rightarrow\ \begin{cases}7x-3(7-3x)=11,\\ y=7-3x\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}16x=32,\\ y=7-3x\end{cases}\Rightarrow x=2,\ y=1.$$

Vadinasi, trejetas $x=2$, $y=1$, $z=5-2\cdot2+2\cdot1=3$ yra vienintelis (9) sistemos sprendinys.

Ats.: (2; 1; 3).

3 pavyzdys. Išspręskime tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5, \\ x - y - 2z = 4, \\ 3x + 2y + 2z = 3. \end{cases}$$

Sprendimas. Iš antros lygties gautą x išraišką $x = 4 + y + 2z$ įrašykime į pirmą ir trečią (10) sistemos lygtį. Gausime:

$$\begin{cases} 2(4 + y + 2z) + 3y + 4z = 5, \\ 3(4 + y + 2z) + 2y + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5y + 8z = -3, \\ 5y + 8z = -9. \end{cases}$$

Iš antros lygties atėmę pirmą lygtį, gausime ekvivalenčią (turinčią tą pačią sprendinių aibę) lygčių sistemą

$$\begin{cases} 5y + 8z = -3, \\ 0 \cdot y + 0 \cdot z = -6. \end{cases}$$

Aišku, kad antra lygtis neturi nė vieno sprendinio. Todėl sprendinių neturi ne tik (11), bet ir (10) lygčių sistema.

Ats.: $\varnothing$.

3. Simetrinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos sprendimas. Paprasčiausi simetriniai reiškiniai dydžių x ir y atžvilgiu yra $x + y$ ir xy. Jeigu pažymėtume $u = x + y$ ir $v = xy$, tai bet kurį kitą simetrinį reiškinį $R(x, y)$ galėtume išreikšti dydžiais u ir v. Štai keli pavyzdžiai:

1) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$;

2) $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = u^3 - 3vu$;

3) $$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = ((x + y)^2 - 2xy)^2 - 2(xy)^2 =$$
$$= (u^2 - 2v)^2 - 2v^2 = u^4 - 4u^2v + 2v^2.$$

Sprendžiant bet kurią racionaliųjų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} R_1(x, y) = 0, \\ R_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

paprastai iš pradžių nuo nežinomųjų x ir y pereinama prie nežinomųjų $u = x + y$ ir $v = xy$. O tolesnis gautos sistemos sprendimas labai priklauso nuo konkrečių lygčių. Gana dažnai prireikia ne tik žinių, bet ir išradingumo.

4 pavyzdys. Išspręskime simetrinių lygčių sistemą

$$\begin{cases}(x^2+1)(y^2+1)=10,\\(x+y)(xy-1)=3.\end{cases} \tag{12}$$

Sprendimas. Iš pradžių nežinomuosius x ir y pakeiskime nežinomaisiais $u=x+y$ ir $v=xy.$

Kadangi

$$(x^2+1)(y^2+1)=x^2y^2+x^2+y^2+1=(xy)^2+(x+y)^2-2xy+1=$$
$$=(xy-1)^2+(x+y)^2=(v-1)^2+u^2$$

ir

$$(x+y)(xy-1)=u\cdot(v-1),$$

tai vietoj (12) gausime tokią sistemą:

$$\begin{cases}u^2+(v-1)^2=10,\\u\cdot(v-1)=3.\end{cases}$$

Aišku, kad negali būti nei $u=0,$ nei $v=1.$ Todėl toliau galima spręsti taip:

$$\begin{cases}u^2+\left(\dfrac{3}{u}\right)^2=10,\\v-1=\dfrac{3}{u}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u^4-10u^2+9=0,\\v=\dfrac{u+3}{u}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}u^2=1\text{ arba }u^2=9,\\v=\dfrac{u+3}{u}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u\in\{-3;-1;1;3\},\\v=\dfrac{u+3}{u}.\end{cases}$$

Gauname tokias u ir v poras $(u;v)$: (–3; 0), (–1; –2), (1; 4), (3; 2).

Ieškomoms x ir y poroms $(x;y)$ rasti reikia išspręsti keturias lygčių sistemas:

$$\begin{cases}x+y=u,\\xy-v;\end{cases}$$

$(u;\, v) \in \{(-3;\, 0),\, (-1;\, -2),\, (1;\, 4),\, (3;\, 2)\}$.

Remdamiesi Vijeto teorema, galime padaryti išvadą, kad kiekvieno šios sistemos sprendinio (x; y) komponentės x ir y yra kvadratinės lygties $t^2 - ut + v = 0$ sprendiniai.

Taigi išspręskime šias kvadratines lygtis:

1) $t^2 + 3t = 0$,

2) $t^2 + t - 2 = 0$,

3) $t^2 - t + 4 = 0$,

2) $t^2 - 3t + 2 = 0$.

Pirmos lygties sprendiniai yra 0 ir –3, antros lygties sprendiniai yra 1 ir –2, ketvirtos lygties sprendiniai yra 1 ir 2, o trečia lygtis sprendinių neturi. Gauname šešis (12) sistemos sprendinius:

$$(0;\, -3),\, (-3;\, 0),\, (1;\, -2),\, (-2;\, 1),\, (1;\, 2),\, (2;\, 1).$$

Ats.: (0; –3), (–3; 0), (1; –2), (–2; 1), (1; 2), (2; 1).

5 pavyzdys. Išspręskime simetrinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ (xy + 8)(x + y) = 2. \end{cases} \qquad (13)$$

Sprendimas. Tegu $u = x + y$ ir $v = xy$. Tada

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = u^3 - 3uv,$$
$$(xy + 8)(x + y) = u(v + 8).$$

Įrašę į (13), gauname sistemą

$$\begin{cases} u^3 - 3uv = 19, \\ u(v + 8) = 2. \end{cases}$$

Ją spręskime taip:

$$\begin{cases} u^3 - 3uv = 19, \\ uv + 8u = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 - 3(2 - 8u) = 19, \\ uv = 2 - 8u \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u^3 + 24u - 25 = 0, \\ v = \dfrac{2 - 8u}{u} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (u^3 - u) + (25u - 25) = 0, \\ v = \dfrac{2 - 8u}{u} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(u-1)(u+1)+25(u-1)=0, \\ v=\dfrac{2-8u}{u} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (u-1)(u^2+u+25)=0, \\ v=\dfrac{2-8u}{u} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=1 \text{ (nes } u^2+u+25>0), \\ v=\dfrac{2-8u}{u} \end{cases} \Rightarrow u=1, v=-6.$$

Nežinomiesiems x ir y rasti išspręskime kvadratinę lygtį $t^2-t-6=0$. Gausime, kad $t=3$ arba $t=-2$. Todėl $x=3$, $y=-2$ arba $x=-2$, $y=3$.

Ats.: (3; –2), (–2; 3).

6 pavyzdys. Išspręskime simetrinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ x+xy+y=5. \end{cases} \tag{14}$$

Sprendimas. Tegu $u=x+y$, $v=xy$. Pakeitę nežinomuosius, gausime lygčių sistemą

$$\begin{cases} u^3-3uv+v^3=17, \\ u+v=5. \end{cases} \tag{15}$$

Matome, kad ši sistema taip pat yra simetrinė. Todėl u ir v pakeiskime nežinomaisiais $a=u+v$, $b=uv$. Gausime tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} a^3-3ab-3b=17, \\ a=5. \end{cases} \tag{16}$$

Įrašę $a=5$ į pirmą lygtį, gausime:

$$5^3-3\cdot 5\cdot b-3b=17 \Rightarrow 125-18b=17 \Rightarrow b=6.$$

Taigi pora $a=5$, $b=6$ yra vienintelis (16) sistemos sprendinys.

Nežinomųjų u ir v reikšmėms rasti sprendžiame kvadratinę lygtį

$$t^2-5t+6=0.$$

Jos sprendiniai yra $t=2$ ir $t=3$, todėl $u=2$, $v=3$ arba $u=3$ ir $v=2$. Vadinasi, (15) sistema turi du sprendinius: (2; 3) ir (3; 2).

Nežinomųjų x ir y reikšmėms rasti sudarome dvi kvadratines lygtis:

$$t^2 - 2t + 3 = 0 \quad \text{ir} \quad t^2 - 3t + 2 = 0.$$

Aišku, kad pirma lygtis sprendinių neturi (nes $t^2 - 2t + 3 = (t-1)^2 + 2 > 0$), o antros lygties sprendiniai yra skaičiai 1 ir 2. Todėl $x = 1, \ \ y = 2$ arba $x = 2, \ \ y = 1.$

Gavome, kad (14) lygčių sistema turi du sprendinius: (1; 2) ir (2;).

Ats.: (1; 2), (2; 1).

4. Nesimetrinių racionaliųjų lygčių su dviem ir trimis nežinomaisiais sistemos sprendimo pavyzdžiai.

7 pavyzdys. Išspręskime lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}(x^2 + y^2) = 6, \\ \dfrac{y}{x}(x^2 - y^2) = 1. \end{cases} \tag{17}$$

Sprendimas. Aišku, kad $x \neq 0$ ir $y \neq 0.$ Todėl tiek vieną, tiek kitą lygtį galima ir dauginti, ir dalyti iš *x* bei *y*. Be to, *x* ir *y* turi būti arba abu teigiami, arba abu neigiami skaičiai.

Iš pradžių sistemą pertvarkykime taip:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}(x^2 + y^2) = 6, \\ \dfrac{y}{x}(x^2 - y^2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y}(x^2 + y^2) = 6 \cdot \dfrac{y}{x}(x^2 - y^2), \\ \dfrac{y}{x}(x^2 - y^2) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2(x^2 + y^2) = 6y^2(x^2 - y^2), \\ y(x^2 - y^2) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 - 5x^2y^2 + 6y^4 = 0, \\ y(x^2 - y^2) = x. \end{cases} \tag{18}$$

Dabar pirmą lygtį pertvarkykime taip:

$$(x^4 - 2x^2y^2) - (3x^2y^2 - 6y^4) = 0,$$

$$x^2(x^2 - 2y^2) - 3y^2(x^2 - 2y^2) = 0,$$

$$(x^2 - 2y^2)(x^2 - 3y^2) = 0.$$

Matome, kad arba $x^2 - 2y^2 = 0,$ arba $x^2 - 3y^2 = 0.$ Todėl nagrinėkime du atvejus:

1) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 0, \\ y(x^2 - y^2) = x \end{cases}$ ir 2) $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = 0, \\ y(x^2 - y^2) = x. \end{cases}$

Pirmą sistemą spręskime taip:

$$\begin{cases} x^2 = 2y^2, \\ y(2y^2 - y^2) = \pm\sqrt{2}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2y^2, \\ y^3 = \pm\sqrt{2}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2y^2, \\ y(y^2 \pm \sqrt{2}) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2y^2, \\ y^2 \pm \sqrt{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2y^2, \\ y^2 - \sqrt{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2y^2, \\ y^2 = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2\sqrt{2}, \\ y^2 = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt[4]{8}, \\ y = \pm\sqrt[4]{2}. \end{cases}$$

Gauname du (18) sistemos (taigi ir (17) sistemos) sprendinius: $(-\sqrt[4]{8}; -\sqrt[4]{2})$ ir $(\sqrt[4]{8}; \sqrt[4]{2})$.

Antrą sistemą spręskime taip:

$$\begin{cases} x^2 = 3y^2, \\ y(3y^2 - y^2) = \pm\sqrt{3}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 3y^2, \\ y(2y^2 \pm \sqrt{3}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 3y^2, \\ 2y^2 - \sqrt{3}) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 3y^2, \\ y^2 = \sqrt{\dfrac{3}{4}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \sqrt{\dfrac{27}{4}}, \\ y^2 = \sqrt{\dfrac{3}{4}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt[4]{\dfrac{27}{4}}, \\ y = \pm\sqrt[4]{\dfrac{3}{4}}. \end{cases}$$

Gauname dar du (17) sistemos sprendinius: $\left(-\sqrt[4]{\dfrac{27}{4}}; -\sqrt[4]{\dfrac{3}{4}}\right)$ ir $\left(\sqrt[4]{\dfrac{27}{4}}; \sqrt[4]{\dfrac{3}{4}}\right)$.

Ats.: $\left(-\sqrt[4]{\dfrac{27}{4}}; -\sqrt[4]{\dfrac{3}{4}}\right)$ ir $\left(\sqrt[4]{\dfrac{27}{4}}; \sqrt[4]{\dfrac{3}{4}}\right)$.

8 pavyzdys. Išspręskime lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą
$$\begin{cases}(x-y)(x^2+y^2)=447,\\(x-y)\,xy=210.\end{cases}\qquad(19)$$

Sprendimas. Pirmas būdas. Aišku, kad negali būti $x=0$, $y=0$ ir $x=y$. Padaliję pirmą lygtį iš antros lygties (kairę pusę – iš kairės pusės, o dešinę pusę – iš dešinės pusės) gausime lygtį
$$\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{149}{70},$$
o iš jos – lygtį $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{149}{70}$.

Pažymėję $t=\frac{x}{y}$, gausime kvadratinę lygtį $70t^2-149t+70=0$, kurios sprendiniai yra $\frac{7}{10}$ ir $\frac{10}{7}$. Vadinasi, arba $x=0{,}7y$, arba $y=0{,}7x$.

Toliau spręsime dvi lygčių sistemas:
$$\begin{cases}x=0{,}7y,\\(x-y)xy=210\end{cases}\text{ ir }\begin{cases}y=0{,}7x,\\(x-y)xy=210.\end{cases}$$

Gausime:

1) $$\begin{cases}x=0{,}7y,\\(x-y)xy=210\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0{,}7y,\\(0{,}7y-y)\cdot 0{,}7y^2=210\end{cases}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x=0{,}7y,\\-0{,}21y^3=210\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0{,}7y,\\y^3=-1000\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-7,\\y=-10;\end{cases}$$

2) $$\begin{cases}y=0{,}7x,\\(x-y)xy=210\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0{,}7x,\\(x-0{,}7x)\cdot x\cdot 0{,}7x=210\end{cases}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases}y=0{,}7x,\\0{,}21x^3=210\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0{,}7x,\\x=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=7,\\x=10.\end{cases}$$

Vadinasi, (19) sistema turi du sprendinius: (–7; –10) ir (10; 7).

Antras būdas. Tegu $a=x-y$, $b=xy$. Tada

$$(x-y)(x^2+y^2)=(x-y)((x-y)^2+2xy)=a(a^2+2b) \text{ ir}$$
$$(x-y)xy=ab.$$

Įrašę į (19), gausime šią lygčių sistemą (dydžių *a* ir *b* atžvilgiu):

$$\begin{cases} a(a^2+2b)=447, \\ ab=210. \end{cases}$$

Ją spręskime taip:

$$\begin{cases} a^3+2ab=447, \\ ab=210 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3+2\cdot 210=447, \\ ab=210 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3=27, \\ ab=210 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3, \\ b=70. \end{cases}$$

Belieka išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} x-y=3, \\ xy=70. \end{cases}$$

Gausime:

$$\begin{cases} x=y+3, \\ (y+3)y=70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y+3, \\ y^2+3y-70=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y+3, \\ y=7 \text{ arba } y=-10. \end{cases}$$

Vadinasi, $x=10,\ \ y=7$ arba $x=-7,\ \ y=-10$.

Ats.: (–7; –10), (10; 7.

9 pavyzdys. Išspręskime lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} y^4+xy^2-2x^2=0, \\ x+y=6. \end{cases} \tag{20}$$

Sprendimas. Aišku, kad šią sistemą galima spręsti taip:

$$\begin{cases} y^4+xy^2-2x^2=0, \\ x+y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^4+(6-y)y^2-2(6-y)^2=0, \\ x=6-y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^4-y^3+4y^2+24y-72=0, \\ x=6-y. \end{cases}$$

Tačiau dabar turėtume išspręsti ketvirto laipsnio lygtį

$$y^4-y^3+4y^2+24y-72=0 \tag{21}$$

arba ieškoti kito (20) sistemos sprendimo būdo.

Bandydami šią lygtį išspręsti galėtume įsitikinti, kad ją tenkina skaičiai $y=2$ ir $y=-3$. O tai reiškia, kad kairiąją pusę (daugianarį $y^4-y^3+4y^2+24y-72$) galima išskaidyti žemesnio laipsnio daugianarių sandauga taip, kad tarp dauginamųjų tikrai bus dvinariai $y-2$ ir $y+3$. Skaidykime grupuodami:

$$y^4-y^3+4y^2+24y-72=(y^4-16)-(y^3-2y^2)+(2y^2+24y-56)=$$
$$=(y^4-2^4)-y^2(y-2)+2(y^2+12y-28)=$$
$$=(y-2)(y+2)(y^2+4)-y^2(y-2)+2(y-2)(y+14)=$$
$$=(y-2)((y+2)(y^2+4)-y^2+2(y+14)=$$
$$=(y-2)(y^3+y^2+6y+36)=(y-2)((y^3+27)+(y^2+6y+9))=$$
$$=(y-2)((y+3)(y^2-3y+9)+(y+3)^2)=$$
$$=(y-2)(y+3)(y^2-3y+9+y+3)=(y-2)(y+3)(y^2-2y+12).$$

Kadangi $y^2-2y+12=(y-1)^2+11>0,$ tai (21) lygtis turi tik du realiuosius sprendinius: $y=2$ ir $y=-3$.

Vadinasi, (20) sistema turi du sprendinius: $x=4,$ $y=2$ ir $x=9,$ $y=-3,$ t. y. realiųjų skaičių poras (4; 2) ir (9; –3).

O dabar pabandykime (20) sistemą spręsti kitaip. Kadangi

$$y^4+xy^2-2x^2=(y^4-x^2)+(xy^2-x^2)=(y^2-x)(y^2+x)+x(y^2-x)=$$
$$=(y^2-x)(y^2+x+x)=(y^2-x)(y^2+2x),$$

tai vietoj (20) galėsime nagrinėti tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases}(y^2-x)(y^2+2x)=0,\\ x+y=6.\end{cases}$$

Taigi arba $y^2-x=0,$ arba $y^2+2x=0.$ Todėl pakanka išspręsti dvi lygčių sistemas

$$\begin{cases}y^2-x=0,\\ x+y=6\end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases}y^2+2x=0,\\ x+y=6\end{cases}$$

ir sujungti jų sprendinių aibes į vieną aibę.

Šias sistemas spręskime taip:

1) $\begin{cases} y^2 - x = 0, \\ x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2, \\ y^2 + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2, \\ y = -3 \text{ arba } \ y = 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 9,\ y = -3$ arba $x = 4,\ y = 2;$

2) $\begin{cases} y^2 + 2x = 0, \\ x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -y^2, \\ 2x + 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -y^2, \\ -y^2 + 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x = -y^2, \\ y^2 - 2y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ sistema sprendinių neturi, nes

$y^2 - 2y + 12 = (y-1)^2 + 11 > 0.$

Vadinasi, (20) sistema turi du sprendinius: (9; –3) ir (4; 2).
Ats.: (9; –3), (4; 2).

10 pavyzdys. Išspręskime lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} xy + yz = 8, \\ yz + zx = 9, \\ zx + xy = 5. \end{cases} \tag{22}$$

Sprendimas. Sudėję visas tris lygtis, gausime lygtį $2xy + 2yz + 2zx = 22,$ ekvivalenčią lygčiai

$$xy + yz + zx = 11.$$

Poruodami šią lygtį su kiekviena (22) sistemos lygtimi, gausime:

1) $\begin{cases} xy + yz + zx = 11, \\ xy + yz = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 + zx = 11, \\ xy + yz = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} zx = 3, \\ xy + yz = 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy + yz + zx = 11, \\ yz + zx = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy + 9 = 11, \\ yz + zx = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 2, \\ yz + zx = 9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy + yz + zx = 11, \\ zx + xy = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz = 6, \\ zx + xy = 5. \end{cases}$

Vadinasi,

$$zx \cdot xy \cdot yz = 3 \cdot 2 \cdot 6 \Rightarrow (xyz)^2 = 36 \Rightarrow xyz = \pm 6.$$

Jei $xyz = -6,$ tai

$$x=\frac{xyz}{yz}=\frac{-6}{6}=-1,$$

$$y=\frac{xyz}{xz}=\frac{-6}{3}=-2,$$

$$z=\frac{xyz}{xy}=\frac{-6}{2}=-3.$$

Jei $xyz=6$, tai $x=1,\quad y=2,\quad z=0.$

Matome, kad (22) sistema turi du sprendinius: (–1; –2; –3) ir (1; 2; 3).

Ats.: (–1; –2; –3), (1; 2; 3).

11 pavyzdys. Išspręskime lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} x+y+z=4, \\ 2xy-z^2=16. \end{cases} \tag{23}$$

Sprendimas. Spręskime taip:

$$\begin{cases} x+y+z=4, \\ 2xy-z^2=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=4-(x+y), \\ 2xy-(4-(x+y))^2=16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=4-(x+y), \\ 2xy-(16-8(x+y)+(x+y)^2)=16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=4-x-y, \\ (x^2-8x)+(y^2-8y)+32=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=4-x-y, \\ (x-4)^2+(y-4)^2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=4-x-y, \\ x=4,\ y=4 \end{cases} \Rightarrow x=4,\quad y=4,\ z=-4.$$

Taigi (23) lygčių sistema turi vienintelį sprendinį (4; 4; –4).

Ats.: (4; 4; –4).

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Išspręskite tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} 2x+\ \ y+z=8, \\ \ \ x+3y-z=2, \\ 4x-2y+z=9. \end{cases}$$

2. Išspręskite tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} 2x+4y-z=4, \\ 3x-\ \ y+z=1, \\ \ \ x-5y+2z=-3. \end{cases}$$

3. Išspręskite simetrinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} x^3+y^3+xy(x+y)=13, \\ x^2y^2(x^2+y^2)=468. \end{cases}$$

4. Išspręskite simetrinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y)=23, \\ x^2+y^2+xy=19. \end{cases}$$

5. Išspręskite lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} (5x-1)(3y+2)=(2x+1)(9y-2), \\ (3x+2)(2y-9)=-(x+2)(y+9). \end{cases}$$

6. Išspręskite lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{36}, \\ xy^2-x^2y=324. \end{cases}$$

7. Išspręskite lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} xy+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=13, \\ xy-\dfrac{1}{xy}-\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=12. \end{cases}$$

8. Išspręskite lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^3 = 12, \\ (xy)^2 + xy = 6. \end{cases}$$

9. Išspręskite lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x(y+z) = 5, \\ y(x+z) = 8. \end{cases}$$

10. Išspręskite lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} x + y + z = 13, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 91, \\ y^2 = xz. \end{cases}$$

V. KOMPLEKSINIAI SKAIČIAI

Eugenijus Stankus

Kompleksiniai skaičiai – klasikinė tema, kuri Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos programose nagrinėjama ne pirmą kartą. Puikią metodinę medžiagą apie kompleksinius skaičius yra parengę doc. Algirdas Nagelė (2001-2003 mokslo metai, 8 tema) ir doc. Juozas Šinkūnas (2007-2009 mokslo metai, 5 tema). Kompleksiniai skaičiai plačiai taikomi ne tik įvairiose matematikos šakose (geometrijoje, algebroje, diferencialinėse lygtyse) bet ir kitose mokslo srityse, pavyzdžiui, fizikoje.

1. Kompleksinių skaičių atsiradimas. Kaip rašoma literatūroje, pirmas su dabar vadinamais kompleksiniais skaičiais susidūrė studentas Heronas iš Aleksandrijos (apie 10 - 75 m.). Jam, skaičiuojant piramidės tūrį, prireikė ištraukti kvadratinę šaknį iš neigiamo skaičiaus $81-144=-63$. Jis iš karto nusprendė, kad tai nesąmonė ir tą problemą paliko ramybėje.

Kompleksinių skaičių „žvaigždžių valanda“ atėjo tik 1545 metais, kai italų matematikas Dž. Kardanas (Gerolamo Cardano, 1501-1576) savo veikale „Didysis menas arba apie algebrines taisykles“ pasiūlė sukurti naujus skaičius, su kuriais algebrinė lygtis, neturinti sprendinių realiųjų skaičių aibėje, turėtų sprendinius šiais naujais skaičiais. Ši problema Dž. Kardanui iškilo nagrinėjant trečio laipsnio lygtis, kai vėl, kaip ir Heronui, teko traukti kvadratinę šaknį iš neigiamo skaičiaus ($\sqrt{a},\ a<0$).

Su kvadratine šaknimi iš neigiamo skaičiaus susidurta ir sprendžiant kvadratines lygtis. Pavyzdžiui, kvadratinės lygties $x^2-4x+13=0$ sprendinius galima užrašyti $x_1=2+3\cdot\sqrt{-1}$, $x_2=2-3\cdot\sqrt{-1}$ visai nesiaiškinant ką reiškia simbolis $\sqrt{-1}$.

Šitokius reiškinius R. Dekartas (René Descartes – prancūzų filosofas, matematikas ir fizikas, 1596-1650) pavadino *menamais dydžiais*, t. y. įsivaizduojamais (lotyniškai – radices imaginaria‘s), o $\sqrt{-1}$ jis pasiūlė vadinti *menamuoju vienetu.* Jis savo veikale „Geometrija“ yra pasakęs, kad šių dydžių niekaip negalima įsivaizduoti.

Vėliau L. Oileris (Leonhard Euler – šveicarų matematikas ir fizikas, 1707-1783) dydį $\sqrt{-1}$ pradėjo žymėti raide *i*. Taigi iki šių dienų $i=\sqrt{-1}$.

Tokiu būdu XVI amžiuje buvo pradėtos tyrinėti formalių veiksmų su menamaisiais dydžiais galimybės. Tie naujieji skaičiai $x+y\cdot\sqrt{-1}$, $x,y\in \mathrm{R}$, vėliau pavadinti kompleksiniais skaičiais, turėjo didelę įtaką algebros ir matematinės analizės vystymuisi. R. Bombelis (Rafael Bombelli – italų matematikas, 1526-1572) įvedė paprasčiausius kompleksinių skaičių veiksmus. Tyrimus tęsė ir kiti matematikai. Tačiau ir pats Kardanas manė, kad šie skaičiai nenaudingi ir stengėsi jų nevartoti.

Menamus dydžius naudojo ir Izaokas Niutonas (Isaak Newton – anglų fizikas, matematikas, astronomas, alchemikas, filosofas, 1643-1727), nors jis šių dydžių skaičiais nelaikė. J. Valisas (John Wallis – anglų matematikas, 1616-1703) menamus skaičius suvokė kaip teigiamo ir neigiamo skaičiaus geometrinį vidurkį $\sqrt{(-b)\cdot c}$, $b>0, c>0$. Savo knygoje „Algebra“ (1685 m.) jis bandė pateikti tokių dydžių geometrines interpretacijas. G. Leibnicas (Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz – vokiečių filosofas, matematikas, 1646-1716) apie menamuosius dydžius yra pasakęs: menamieji dydžiai – tai graži ir stebuklinga dieviškosios dvasios buveinė, kartu būties ir nebūties egzistavimas. F. Gausas 1831 metais (Carl Friedrich Gauss – vokiečių matematikas ir fizikas, 1777-1855) pirmasis pasiūlė dvinarius $x+iy$, $x,y\in \mathrm{R}$, vadinti *kompleksiniais skaičiais*.

Kaip matome, kompleksinio skaičiaus sąvoka susiformavo ne iš karto. Jos pagrindimas buvo nelengva matematinė problema, pelniusi pačių garsiausių pasaulio matematikų susidomėjimą. Matematiškai tikslų kompleksinių skaičių apibrėžimą 1837 metais suformulavo V. R. Hamiltonas (William Rowan Hamilton – airių matematikas, fizikas, astronomas, 1805-1865).

2. Kompleksinio skaičiaus apibrėžimas. Kaip pasiūlė Hamiltonas, kompleksiniais skaičiais vadinsime sutvarkytas realiųjų skaičių poras.

Tarkime, kad x ir y – realieji skaičiai. Šių skaičių pora $(x; y)$ vadinama *sutvarkytąja*, kai x laikomas pirmuoju, o y – antruoju poros skaičiumi.

1 apibrėžimas. Sutvarkytų porų $z=(x;y)$, kai $x, y \in \mathrm{R}$, aibė, kurioje apibrėžti sudėties ir daugybos veiksmai, vadinama *kompleksinių skaičių aibe* (ją žymėsime C).

Šios aibės elementai – poros $(x; y)$ – vadinami *kompleksiniais skaičiais*. Poros pirmasis skaičius x vadinamas kompleksinio skaičiaus z *realiąja dalimi*, o antrasis skaičius y – *menamąja dalimi* arba *menamosios dalies koeficientu*. Žymima: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Kai $y=0$, kompleksinis skaičius $(x;0)$ sutapatinamas su realiuoju skaičiumi x, t. y. $(x;0)=x$. Iš to išplaukia, kad kiekvienas realusis skaičius x yra kartu ir kompleksinis skaičius $(x;0)$, todėl realiųjų skaičių aibė R yra aibės C poaibis, t. y. $\mathrm{R} \subset \mathrm{C}$.

Kai $x=0$, kompleksinis skaičius $z=(0;y)$ vadinamas *menamuoju* skaičiumi. Skaičius $(0;0)=0$ vadinamas kompleksinių skaičių aibės *nuliu*, $(1;0)=1$ – *vienetu* ir $(0;1)=i$ – m*enamuoju vienetu*.

Du kompleksiniai skaičiai $z_1=(x_1;y_1)$ ir $z_2=(x_2;y_2)$ vadinami *lygiais*, jeigu $x_1 = x_2$ ir $y_1 = y_2$.

Kompleksinių skaičių sudėtis (žymima įprastiniu ženklu „+“) apibrėžiama lygybe

$$(x_1;y_1)+(x_2;y_2)=(x_1+x_2;y_1+y_2),$$

o daugyba (žymima tašku „$\cdot$“, kartais, kaip įprasta, jį praleidžiant) taip:

$$(x_1;y_1)\cdot(x_2;y_2)=(x_1x_2-y_1y_2;x_1y_2+x_2y_1).$$

3. Kompleksinių skaičių algebrinė forma ir veiksmai su algebrinės formos kompleksiniais skaičiais. Iš sudėties ir daugybos apibrėžimų išplaukia kompleksinių skaičių savybės – tokios pat, kaip realiųjų skaičių, tarp jų ir tokios: jeigu $z=(x;y)$ – bet kuris kompleksinis skaičius, tai $z+0=z$, $z\cdot 0=0$, $z\cdot 1=z$. Menamąjį vienetą pakėlę kvadratu gauname: $i^2=i\cdot i=(0;1)\cdot(0;1)=(-1;0)=-1$. Įsitikinkite, kad $i^3=-i$, $i^4=1, \ldots, i^{4k+m}=i^m$, $k\in N$, $m=1, 2, 3$.

Pasinaudojus veiksmų apibrėžimais, kompleksinį skaičių $z=(x;\ y)$ galima užrašyti ir kitaip:

$$z=(x;\ y)=(x;0)+(0;y)=$$
$$(x;0)+(0;1)\cdot(y;0)=x+i\cdot y=x+iy=x+yi.$$

Pastaroji išraiška vadinama kompleksinio skaičiaus *algebrine forma*, kurią toliau ir naudosime.

Tarkime, $z_1=x_1+iy_1$ ir $z_2=x_2+iy_2$. Aišku, kad $z_1=z_2$ tik tuomet, kai $x_1=x_2$ ir $y_1=y_2$.

Atkreipkime dėmesį, kad kompleksinių skaičių, užrašytų algebrine forma, sudėtis ir daugyba tampa įprastine dvinarių sudėtimi ir daugyba:

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2), \tag{1}$$
$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1), \tag{2}$$

Dabar apibrėšime kompleksinių skaičių atimties ir dalybos veiksmus.

Dviejų kompleksinių skaičių $z_1=x_1+iy_1$ ir $z_2=x_2+iy_2$ *skirtumu* vadiname tokį kompleksinį skaičių $z=x+iy$, kuris tenkina lygybę $z_2+z=z_1$. Iš čia

$$z=z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(\,y_1-y_2). \tag{3}$$

Dviejų skaičių $z_1=x_1+iy_1$ ir $z_2=x_2+iy_2$ $(z_2\neq 0)$ *dalmeniu* vadinamas toks kompleksinis skaičius $z=x+iy$, su kuriuo $z_2\cdot z=z_1$. Iš čia

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)\cdot(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)\cdot(x_2-iy_2)}=$$
$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \tag{4}$$

Kompleksinis skaičius $x-iy$ vadinamas kompleksinio skaičiaus $z=x+iy$ *jungtiniu* skaičiumi ir žymimas $\bar{z}$, t. y. $\bar{z}=x-iy$.

Nesunku įrodyti lygybes $z\cdot\bar{z}=x^2+y^2\geq 0$, $z+\bar{z}=2x$, $z-\bar{z}=2iy$. Įsitikinkite, kad $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

Atkreipkime dėmesį, kad dalydami kompleksinį skaičių iš nelygaus nuliui kompleksinio skaičiaus (žr. (4) formulę), trupmenos skaitiklį ir vardiklį padauginome iš vardiklio jungtinio kompleksinio skaičiaus.

1 pavyzdys. Raskime kompleksinių skaičių $z_1 = 4 - 3i$ ir $z_2 = -2 + 6i$ sumą $z_1 + z_2$, skirtumą $z_1 - z_2$, sandaugą $z_1 \cdot z_2$ ir dalmenį $\frac{z_1}{z_2}$.

Sprendimas. Remdamiesi (1) - (4) formulėmis, gausime:

$$z_1 + z_2 = (4-3i) + (-2+6i) = (4+(-2)) + i(-3+6) = 2+3i\,;$$

$$z_1 - z_2 = (4-3i) - (-2+6i) = (4-(-2)) + i(-3-6) = 6-9i\,;$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (4-3i)\cdot(-2+6i) = -8+24i+6i-18i^2 = \\ &= -8+30i+18 = 10+30i \end{aligned}\,;$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{4-3i}{-2+6i} = \frac{(4-3i)\cdot(-2-6i)}{(-2+6i)\cdot(-2-6i)} = -\frac{-8-24i+6i-18}{4+36} = \\ &= \frac{-26-18i}{40} = -\frac{13}{20} - \frac{9}{20}i \end{aligned}\,.$$

2 pavyzdys. Raskime, su kuriomis x ir y reikšmėmis teisinga lygybė $3 - x + (4-y)i = \frac{4-6i}{1-i}$.

Sprendimas. Dešiniosios lygybės pusės skaitiklį ir vardiklį padauginkime iš $(1+i)$. Gauname lygybę

$$3 - x + (4-y)i = 5 - i\,.$$

Remiantis kompleksinių skaičių lygumo apibrėžimu, turi galioti lygybės $3 - x = 5$ ir $4 - y = -1$.

Iš čia gauname, kad $x = -2$, $y = 5$.

Ats. $x = -2$, $y = 5$.

3 pavyzdys. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} (3-i)x + (4+2i)y = 2+6i, \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5+4i. \end{cases}$$

Sprendimas. Pirmosios lygties abi puses (sutrumpintai toliau sakysime „pirmąją lygtį“) padauginę iš $\frac{1}{3-i}$, antrąją – iš $\left(-\frac{1}{4+2i}\right)$ ir jas sudėję, gauname ekvivalenčią (turinčią tokius pat sprendinius kaip ir pasirinktoji) sistemą

$$\begin{cases} \left(\frac{4+2i}{3-i}+\frac{2+3i}{4+2i}\right)\cdot y=\frac{2+6i}{3-i}-\frac{5+4i}{4+2i}, \\ (3-i)x+(4+2i)y=2+6i. \end{cases} \qquad (5)$$

Spręskime šios sistemos pirmąją lygtį. Ją padauginę iš $(3-i)(4+2i)$ gauname lygtį

$$((4+2i)^2+(2+3i)(3-i))y=(2+6i)(4+2i)-(5+4i)(3-i).$$

Atlikę veiksmus turėsime:

$$(21+23i)y=-23+21i \Rightarrow y=\frac{-23+21i}{21+23i}=\frac{(-23+21i)(21-23i)}{(21+23i)(21-23i)}=i.$$

Įrašę į (5) sistemos antrąją lygtį $y=i$ ir apskaičiavę nežinomąjį *x*, gauname $x=1+i$.

Ats. $x=1+i,\ y=i.$

4 pavyzdys. Apskaičiuokime reiškinį $A=1+i+i^2+...+i^{102}$.

Sprendimas. Pagal geometrinės progresijos narių sumos formulę $A=\frac{i^{103}-1}{i-1}$. Tačiau $i^{103}=i^{4\cdot 25+3}=i^3=-i$. Todėl

$$A=\frac{-i-1}{i-1}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{2}=\frac{2i}{2}=i.$$

Ats. $A=i.$

4. Kompleksinių skaičių geometrinis vaizdavimas. Kompleksinio skaičiaus modulis ir argumentas.

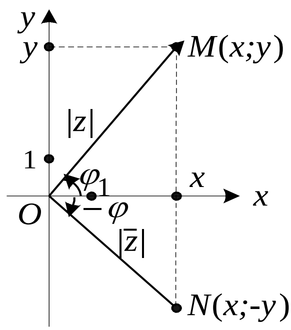
Kompleksinių skaičių geometrinė interpretacija pirmą kartą išsamiai buvo išdėstyta Veselio (Caspar Wessel – norvegų-danų matematikas ir kartografas, 1745-1818) darbe 1799 metais, o po Argano (Jean-Robert Argand – šveicarų matematikas, 1768-1822) darbų 1806 m. ir 1814 m. kompleksinių skaičių geometrinis vaizdavimas (kartais vadinamas

Argano diagramomis) galutinai įsitvirtino.

Kompleksinis skaičius pagal apibrėžimą yra dviejų realiųjų skaičių sutvarkyta pora. O tokias poras, kaip žinom, galima vaizduoti plokštumos taškais, kai pasirinkta stačiakampė Dekarto koordinačių sistema *xOy* (1 pav.*)*. Tuomet kompleksiniam skaičiui $z=(x;y)=x+iy$ galima priskirti plokštumos tašką $M(x;y)$ ir atvirkščiai. Skaičiaus $z=(x;y)=$ $=x+iy$ jungtiniam kompleksiniam skaičiui $\bar{z}=(x;-y)=x-iy$ priskiriamas taškas $N(x;-y)$. Skaičiai $z=(x;0)=x+0\cdot i$ yra vaizduojami abscisių ašies (realiosios ašies $\operatorname{Re} z$) taškais, o skaičiai $z=(0;y)=$ $=0+iy$ – ordinačių ašies (menamosios ašies $\operatorname{Im} z$) taškais. Vadinasi, tarp kompleksinių skaičių ir plokštumos (ją vadinsime *kompleksine plokštuma*) taškų yra abipus vienareikšmė atitiktis. Todėl dažnai ir patį kompleksinės plokštumos tašką, atitinkantį kompleksinį skaičių

$$z=(x;y)=x+iy$$

žymėsime ne $M(x;y)$, o tiesiog z.



1 pav.

2 apibrėžimas. Kompleksinės plokštumos taško $z=(x;y)=x+iy$ (1 paveiksle – taškas $M(x;y)$) atstumas nuo koordinačių pradžios (arba vektoriaus $\overrightarrow{OM}$ ilgis) vadinamas *kompleksinio skaičiaus moduliu* ir žymimas $|z|$, t. y.

$$|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\cdot\bar{z}}\,.$$

Dažnai naudojamas trumpesnis modulio žymuo $|z|=r$. Atkreipkime dėmesį, kad realiojo skaičiaus $z=x+i\cdot 0=x$ modulis pagal šį apibrėžimą sutampa su jo moduliu (absoliutiniu didumu) mums įprastine prasme: $|z|=|x+i0|=\sqrt{x^2}=|x|$. Jungtinių kompleksinių skaičių $z=x+iy$ ir $\bar{z}=x-iy$ moduliai yra lygūs: $|z|=|\bar{z}|$.

3 apibrėžimas. Tegu $z = x + iy$ yra nelygus nuliui kompleksinis skaičius. Orientuotas kampas φ, kurį sudaro realioji teigiama pusašė *Ox* su vektoriumi $\overrightarrow{OM}$ (1 pav.) vadinamas skaičiaus $z = x + iy$ *argumentu* ir žymimas $\operatorname{Arg} z$.

Atkreipkime dėmesį: jeigu kompleksinio skaičiaus $z = x + iy$ argumentas yra φ, tai jo jungtinio skaičiaus $\bar{z} = x - iy$ argumentas yra $-\varphi$. Taigi $\arg \bar{z} = -\arg z$ **.**

Pastaba. Kompleksinio skaičiaus argumentas $\operatorname{Arg} z$ nėra vienareikšmiškai apibrėžtas – kampas $\varphi + 2k\pi$ su bet kuriuo $k \in \mathrm{Z}$ taip pat nusako tą pačią vektoriaus $\overrightarrow{OM}$ padėtį.

Skaičiaus $z = 0$ argumentas yra neapibrėžtas, o jo modulis lygus nuliui.

4 apibrėžimas. Intervalui $(-\pi; \pi]$ priklausanti kampo φ reikšmė vadinama *pagrindine argumento reikšme* ir žymima $\varphi_0 = \arg z$. Tuomet

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k \text{ arba } \varphi = \varphi_0 + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}. \tag{6}$$

Pastaba. Kartais pagrindine argumento reikšme vadinama intervalui $[0; 2\pi)$ priklausanti kampo φ reikšmė, tačiau tai kompleksinių skaičių geometriniame vaizdavime praktiškai nieko nekeičia.

Iš kompleksinio skaičiaus modulio ir argumento apibrėžimų išplaukia, kad

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi;\ \ r = |z|. \tag{7}$$

Taigi gauname, kad $z = x + iy = r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

5. Kompleksinių skaičių trigonometrinė forma.

5 apibrėžimas. Kompleksinio skaičiaus $z = x + iy$ *trigonometrine forma* vadinama išraiška

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi); \tag{8}$$

čia

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{9}$$

Aišku, kad $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$. (10)

Kompleksinio skaičiaus trigonometrinė forma daugeliu atvejų yra patogesnė negu algebrinė. Todėl dažnai algebrinės formos kompleksinį skaičių tenka išreikšti trigonometrine forma. Kompleksinio skaičiaus modulį apskaičiuoti nesunku. Kiek sudėtingiau surasti jo argumentą. Iš (9) ir (10) formulių galima nustatyti kokia yra pagrindinė kompleksinio skaičiaus $z = x + iy$ argumento reikšmė priklausomai nuo taško $z = (x;\, y)$ padėties koordinačių sistemoje:

$$\varphi_0 = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{ kai } x > 0 \text{ (I ir IV ketv.)}, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, \text{ kai } x < 0,\ y > 0 \text{ (II ketv.)}, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, \text{ kai } x < 0,\ y < 0 \text{ (III ketv.)}. \end{cases} \tag{11}$$

Jei $z = (x;\, y)$ yra realiosios arba menamosios ašies taškas, tai

$$\varphi_0 = \arg z = \begin{cases} 0, \text{ kai } x > 0,\ y = 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ kai } x = 0,\ y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{ kai } x = 0,\ y < 0; \\ \pi, \text{ kai } x < 0,\ y = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Aišku, kad jungtinių kompleksinių skaičių pagrindinė argumento reikšmė skiriasi tik ženklu: $\arg z = -\arg \bar{z}$.

5 pavyzdys. Skaičius $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = -\sqrt{3} + i$, $z_3 = -\sqrt{3} - i$, $z_4 = \sqrt{3} - i$, $z_5 = -i$, $z_6 = -3$ užrašykime trigonometrine forma išraiškose imdami pagrindinę argumento reikšmę.

Sprendimas. Pasirinktųjų kompleksinių skaičių modulius nesunku apskaičiuoti, o pagrindines argumentų reikšmes rasime pasinaudodami (11) ir (12) formulėmis.

Turime: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = \sqrt{3+1} = 2$,

$|z_5| = \sqrt{0+1} = 1$, $|z_6| = \sqrt{9+0} = 3$.

Taškai z_1, z_2, z_3, z_4 yra I, II, III ir IV ketvirčiuose atitinkamai, taškas $z_5 = -i$ priklauso ordinačių ašiai, o taškas $z_6 = -2$ – abscisių ašiai. Remdamiesi (11) ir (12) formulėmis apskaičiuojame pagrindines argumentų reikšmes ir tuomet užrašome pasirinktųjų skaičių trigonometrines išraiškas:

$$\arg z_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6},\ z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right);$$

$$\arg z_2 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6},\ z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right);$$

$$\arg z_3 = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6},$$

$$z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right);$$

$$\arg z_4 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6},\ z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right);$$

$$\arg z_5 = -\frac{\pi}{2},\ z_5 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right);$$

$$\arg z_6 = \pi,\ z_6 = 3(\cos\pi + i\sin\pi).$$

6. Veiksmai su trigonometrinės formos kompleksiniais skaičiais. Tarkime, kad $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ ir $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ – du pasirinktieji kompleksiniai skaičiai.

1) Sudauginkime juos:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos\ {}_1 + i\sin\ {}_1)\cdot(\cos\ {}_2 + i\sin\ {}_2) =$$

$$= r_1 \cdot r_2((\cos\ {}_1 \cos\ {}_2 - \sin\ {}_1 \sin\ {}_2) +$$

$$+ i\,(\cos\ {}_1 \sin\ {}_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2)) =$$

$$r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))\,. \qquad (13)$$

Matome, kad sudauginus du kompleksinius skaičius, užrašytus trigonometrine forma, jų sandaugos modulis lygus dauginamųjų modulių sandaugai, o argumentas – argumentų sumai:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \qquad \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2\,. \qquad (14)$$

2) Ieškodami dalmens, kai $z_2 \neq 0$, skaitiklį ir vardiklį dauginame iš vardiklio jungtinio skaičiaus, ir atlikę veiksmus gauname:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \tag{15}$$

Taigi dalijant du kompleksinius skaičius, jų modulius reikia padalyti, o argumentus atimti:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2. \tag{16}$$

3) Sudauginkime n kompleksinių skaičių, išreikštų trigonometrine forma. Tegu $z_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$, $k = 1, 2, 3, ..., n,$ – pasirinktieji kompleksiniai skaičiai. Tuomet jų sandauga lygi:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_n(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n) +$$
$$+ i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n)). \tag{17}$$

Kai $z_1 = z_2 = ... = z_n = z$, turėsime sandaugą, sudarytą iš n vienodų dauginamųjų, vadinamą *n-uoju z laipsniu* ir žymimą z^n. Iš (17) formulės išplaukia formulė n-ajam z laipsniui apskaičiuoti, vadinama Muavro (Abraham de Moivre – prancūzų matematikas, 1667-1754) formule:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{18}$$

Taigi

$$|z^n| = |z|^n, \quad \operatorname{Arg} z^n = n\operatorname{Arg} z. \tag{19}$$

4) Kompleksinio skaičiaus z *n-ojo laipsnio šaknimi* $\omega = \sqrt[n]{z}$ vadinamas toks kompleksinis skaičius, kurio n-asis laipsnis lygus z, t. y. $\omega^n = z$.

Tegu $z = r(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$, čia $r = |z|$, $\varphi_0 = \arg z$. Raskime tokį skaičių

$$\omega = \rho\,(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

kurio n-asis laipsnis lygus z, t. y.

$$(\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha))^n=r(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0).$$

Pasinaudoję Muavro formule turėsime lygybę

$$\rho^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)=r(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0),$$

kuri galioja, kai

$$\begin{cases}\rho^n=r,\\ n\alpha=\varphi_0+2k\pi,\ k\in\mathrm{Z}.\end{cases}$$

Iš čia

$$\begin{cases}\rho=\sqrt[n]{r},\\ \alpha=\dfrac{\varphi_0+2k\pi}{n},\ k\in\mathrm{Z}.\end{cases}$$

Taigi gauname:

$$\omega=\sqrt[n]{r(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}\right),\quad k\in Z.$$

Nesunku nustatyti, kad yra n skirtingų $\omega=\sqrt[n]{z}$ reikšmių:

$$\omega_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,2,...,n-1. \qquad (20)$$

Šioje formulėje skaičius $\sqrt[n]{r}$ yra vadinamas aritmetine šaknies reikšme.

Šaknies reikšmės, užrašytos (20) formule, geometriškai yra taisyklingojo n-kampio, įbrėžto į apskritimą su centru (0; 0) ir spinduliu $\sqrt[n]{r}$, viršūnės.

6 pavyzdys. Apskaičiuokime $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{15}$.

Sprendimas. Užrašykime trigonometrine forma duotosios trupmenos skaitiklį ir vardiklį:

$$-1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right),\quad 1-i=\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right).$$

Tuomet

$$\frac{-1+i\sqrt{3}}{1-i}=\sqrt{2}\left(\cos(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4})\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

ir

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{15}=\left(\sqrt{2}\right)^{15}\left(\cos\frac{165\pi}{12}+i\sin\frac{165\pi}{12}\right)=$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^{15}\left(\cos(12\pi+\frac{7\pi}{4})+i\sin(12\pi+\frac{7\pi}{4})\right)=$$

$$=128\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=128\sqrt{2}(1-i)\,.$$

Ats. $128\sqrt{2}(1-i)$.

7 pavyzdys. Raskime visas kompleksinio skaičiaus $1-i$ penktojo laipsnio šaknies $\sqrt[5]{1-i}$ reikšmes ir jas pavaizduokime geometriškai.

Sprendimas. Užrašykime kompleksinį skaičių $1-i$ trigonometrine forma:

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right).$$

Tuomet pagal (20) formulę turime, kad

$$\omega_k=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{5}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{5}\right),\quad k=0,1,2,3,4.$$

Įrašę čia $k=0,1,2,3,4$, gausime visas penkias šaknies reikšmes:

$$\omega_0=\sqrt[10]{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{20})+i\sin(-\frac{\pi}{20})\right),$$

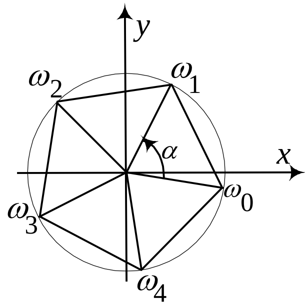
$$\omega_1=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{20}+i\sin\frac{7\pi}{20}\right),$$

$$\omega_2=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{20}+i\sin\frac{15\pi}{20}\right),$$

$$\omega_3 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{20} + i\sin\frac{23\pi}{20}\right),$$

$$\omega_4 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{31\pi}{20} + i\sin\frac{31\pi}{20}\right).$$

Matome, kad visų šaknų modulis tas pats $\sqrt[10]{2}$, o jų argumentai, kai $k = 0, 1, 2, 3, 4,$ didėja pastoviu kampu $\alpha = \frac{2\pi}{5} = \frac{8\pi}{20} = 72^0$.



2 pav.

Vadinasi, šie kompleksiniai skaičiai yra taisyklingojo penkiakampio viršūnės (2 pav.).

Dažnai kompleksiniai skaičiai naudojami ir realiųjų skaičių uždaviniams spręsti.

8 pavyzdys. Apskaičiuokime sumą

$$R = \cos x + \cos 2x + ... + \cos 10x .$$

Sprendimas. Papildykime ieškomąjį reiškinį suma

$$iI = i(\sin x + \sin 2x + ... + \sin 10x)$$

ir nagrinėkime sumą

$$R + iI = (\cos x + i\sin x) + (\cos 2x + i\sin 2x) + \ldots +$$
$$+ (\cos 10x + i\sin 10x) = (\cos x + i\sin x) +$$
$$+ (\cos x + i\sin x)^2 + \ldots + (\cos x + i\sin x)^{10} = z + z^2 + \ldots + z^{10} = \frac{z^{11} - z}{z - 1};$$

čia $z = \cos x + i\sin x$.

Apskaičiuokime gautąjį reiškinį:

$$\frac{z^{11} - z}{z - 1} = \frac{\cos 11x + i\sin 11x - \cos x - i\sin x}{\cos x + i\sin x - 1} =$$
$$= \frac{\cos 11x - \cos x + i(\sin 11x - \sin x)}{\cos x - 1 + i\sin x} =$$
$$= \frac{2\sin 6x \cdot \sin 5x - 2i\sin 5x \cdot \cos 6x}{2\sin^2\frac{x}{2} - 2i\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin 5x(\sin 6x - i\cos 6x)}{\sin\frac{x}{2}(\sin\frac{x}{2} - i\cos\frac{x}{2})} =$$

$$=\frac{\sin 5x(\cos 6x+i\sin 6x)}{\sin\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2})}=$$

$$=\frac{\sin 5x\cdot(\cos(6x-\frac{x}{2})+i\sin(6x-\frac{x}{2}))}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin 5x\cdot(\cos\frac{11x}{2}+i\sin\frac{11x}{2})}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Iš čia išplaukia, kad $R=\dfrac{\sin 5x\cdot\cos\frac{11x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$. Tuo pačiu gavome rezultatą:

$$I=\frac{\sin 5x\cdot\sin\frac{11x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Ats. $R=\dfrac{\sin 5x\cdot\cos\frac{11x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

Naudodamiesi kompleksiniais skaičiais galime spręsti vadinamąsias dvinares lygtis

$$ax^n\pm b=0,\qquad a,b\in\mathrm{R},\ n\in\mathrm{N}. \tag{21}$$

(skaičiai a, b gali būti ir kompleksiniai).

Kiekvieną tokią dvinarę lygtį keitiniu $x=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}y$ galima pakeisti to paties laipsnio lygtimi, kurios koeficientai prie nežinomojo ir laisvasis narys yra vienetai. Nesunku matyti, kad šį keitinį įrašę į (21) lygtį, turime: $a\cdot\frac{b}{a}y^n\pm b=0\Leftrightarrow y^n\pm 1=0$ ($b\neq 0$).

Vadinasi, reikia mokėti spręsti dvinares lygtis $x^n+1=0$ ir $x^n-1=0$.

9 pavyzdys. Išspręskime lygtį $x^5-1=0$.

Sprendimas.

$$x^5-1=0 \Leftrightarrow x^5=1 \Leftrightarrow x_k=\sqrt[5]{1}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{5}+i\sin\frac{0+2k\pi}{5}\right),$$

$$k=0,1,2,3,4 \Leftrightarrow x_k=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5},\ k=0,1,2,3,4.$$

Iš čia

$$x_0=\cos 0+i\sin 0=1,\ x_1=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5},$$

$$x_2=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5},\ x_3=\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5},$$

$$x_4=\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}.$$

Šios reikšmės vadinamos penktojo laipsnio *vieneto šaknimis*. Bendruoju atveju $\sqrt[n]{1}$ reikšmės – n-ojo laipsnio vieneto šaknys.

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Atlikite veiksmus: $\dfrac{\big((3-i)+(4+5i)\big)\cdot\big((2+i)-(4-3i)\big)}{\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-i}}$.

2. Apskaičiuokite reiškinį $A=1+i+i^2+...+i^{2017}$.

3. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases}(2+i)x+(2-i)y=6,\\(3+2i)x+(3-2i)y=8.\end{cases}$

4. Išspręskite lygtį $|z|+z=1+3i$.

5. Apskaičiuokite $\dfrac{(-\sqrt{3}+i)^{15}}{(1-i)^{20}}$.

6. Apskaičiuokite $\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$.

7. Raskite visas kompleksinio skaičiaus $1+i$ šeštojo laipsnio šaknies $\sqrt[6]{1+i}$ reikšmes ir jas pavaizduokite geometriškai.

8. Apskaičiuokite sumą $\sin 2x+\sin 4x+\ldots+\sin 12x$.

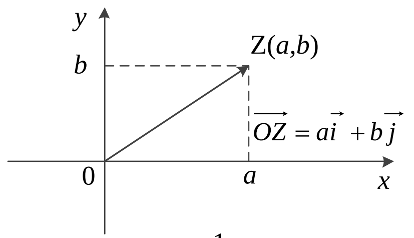
9. Išspręskite dvinarę lygtį $x^6+1=0$.

10. Išspręskite lygtį $(z+i)^3-(z-i)^3=0$.

VI. KOMPLEKSINIŲ SKAIČIŲ GEOMETRINIAI TAIKYMAI

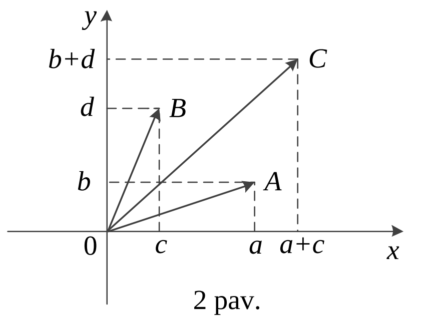
Edmundas Mazėtis

Atlikdami ankstesnę užduotį, susipažinote su kompleksiniais skaičiais, išmokote atlikti aritmetinius veiksmus su jais, nagrinėjote jų algebrinę ir trigonometrinę užrašymo formą. Kadangi kompleksinį skaičių $z = a + bi$ koordinačių plokštumoje Oxy atitinka taškas $Z(a, b)$, arba vektorius $\overrightarrow{OZ} = a\vec{i} + b\vec{j}$ (1 pav.), tai ši kompleksinių skaičių geometrinė interpretacija leidžia kompleksinių skaičių teoriją taikyti geometriniuose uždaviniuose. Su kai kuriais paprasčiausiais kompleksinių skaičių geometriniais taikymais susipažinsite, atlikdami šią užduotį.



1 pav.

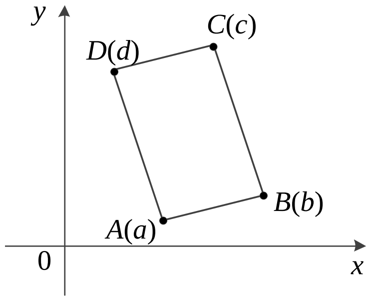
1. Jei Oxy plokštumos taško A koordinatės $A(a, b)$, o $z = a + bi$ – kompleksinis skaičius, tai kompleksinis skaičius z yra vadinamas taško A kompleksine koordinate, žymime $A(z)$, o plokštuma Oxy vadinama kompleksine plokštuma. Nagrinėkime du kompleksinius skaičius $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ ir tarkime, kad juos atitinka du kompleksinės plokštumos taškai $A(z_1)$ ir $B(z_2)$ (2 pav.), t. y., $\overrightarrow{OA} = a\vec{i} + b\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = c\vec{i} + d\vec{j}$. Akivaizdu, kad šių kompleksinių skaičių sumą $z_1 + z_2$ kompleksinėje plokštumoje atitinka vektorius $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, o skirtumą $z_1 - z_2$ – vektorius $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}.$



2 pav.

1 pavyzdys. Kompleksinėje plokštumoje yra duotos keturių taškų kompleksinės koordinatės $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$. Keturkampis *ABCD* yra lygiagretainis tada ir tik tada, kai $a+c=b+d$. Įrodysime tai (3 pav.).

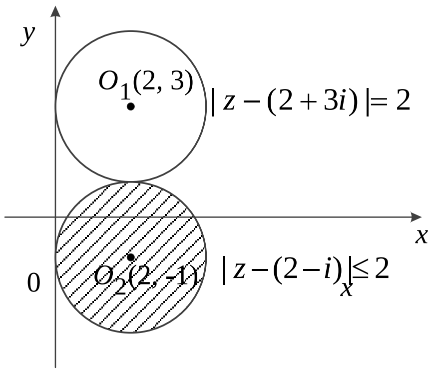
Sprendimas. Tikrai, keturkampis *ABCD* yra lygiagretainis, tada ir tik tada, kai $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, t. y., kai $b-a=c-d$, o ši lygybė ekvivalenti įrodomajai.



3 pav.

Sakykime, kad *Oxy* plokštumoje yra spindulio *R* apskritimas, kurio centras – taškas *C*, taško *C* kompleksinė koordinatė lygi z_0. Taškas *M*, kurio kompleksinė koordinatė *z*, yra šio apskritimo taškas tada ir tik tada, kai vektoriaus $\overrightarrow{CM}$ modulis lygus *R*. Kadangi $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}$, tai vektorių $\overrightarrow{CM}$ atitinka kompleksinių skaičių *z* ir z_0 skirtumas. Iš čia seka, kad taškas *M* yra apskritimo taškas tada ir tik tada, kai $|z-z_0|=R$. Ši lygybė yra apskritimo lygtis kompleksinėse koordinatėse. Kadangi kompleksinio skaičiaus $z=a+bi$ ir jam jungtinio kompleksinio skaičiaus $\bar{z}=a-bi$ sandauga $z\bar{z}=a^2+b^2=|z|^2$, tai apskritimo lygtis yra užrašoma ir tokiu pavidalu

$$(z-z_0)(\overline{z-z_0})=R^2.$$



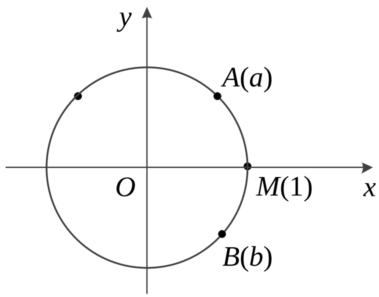
4 pav.

Iš čia akivaizdu, kad skritulį, kurio centras $C(z_0)$, o spindulys lygus *R*, sudaro tie kompleksinės plokštumos taškai *z*, kuriems teisinga nelygybė $|z-z_0|\le R$ arba nelygybė $(z-z_0)(\overline{z-z_0})\le R^2$. 4 pav. nubrėžti apskritimas $|z-(2+3i)|=2$ ir skritulys $|z-(2-i)|\le 2$.

Jei $A(a)$ ir $B(b)$ du kompleksinės plokštumos taškai, kompleksiniai skaičiai a ir b yra jų kompleksinės koordinatės, tai atkarpos AB ilgis lygus vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ moduliui, t. y., $AB = |a-b|$, o $AB^2 = (a-b)(\bar{a}-\bar{b})$.

2 pavyzdys. Taškas M yra apskritimo lanko AB vidurio taškas. Įrodysime, kad bet kuriam šio apskritimo taškui N yra teisinga lygybė $|AM^2 - MN^2| = AN \cdot BN$.

Sprendimas. Kadangi uždavinyje nurodyta lygybė turi būti teisinga bet kuriam apskritimui, tai kompleksinėje plokštumoje koordinačių sistemą Oxy parenkame taip, kad duotojo apskritimo centras būtų taškas O, jo spindulys būtų lygus 1, o taško M kompleksinė koordinatė būtų lygi 1 (5 pav.). Sakykime, kad taškų A, B, N kompleksinės koordinatės lygios atitinkamai a, b, n. Tuomet apskritimo lygtis yra $z\bar{z} = 1$, o kadangi taškai A, B, N priklauso šiam apskritimui, tai $a\bar{a} = b\bar{b} = n\bar{n} = 1$. Pastebėkime, kad taškai A ir B yra simetriški Ox ašies atžvilgiu, todėl $a = \bar{b}$, $b = \bar{a}$ (paaiškinkite, kodėl). Kadangi $|n| = 1$, tai įrodomosios lygybės dešinioji pusė lygi



5 pav.

$$AN \cdot BN = |a-n||b-n| = |(a-n)(\bar{a}-n)| = |a\bar{a} - an - \bar{a}n + n^2| =$$
$$= |1 - n(a+\bar{a}) + n^2| = |n|\left|\frac{1}{n} - (a+\bar{a}) + n\right| = |\bar{n} - (a+\bar{a}) + n|.$$

Kadangi

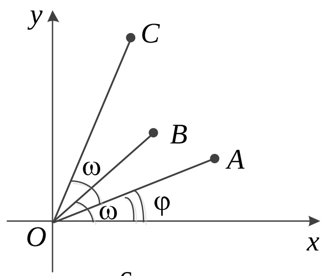
$$AM^2 = (a-1)(\bar{a}-1) = |2 - (a+\bar{a})|,$$
$$MN^2 = (n-1)(\bar{n}-1) = 2 - (n+\bar{n})|,$$

tai įrodomosios lygybės kairioji pusė lygi $|AM^2 - MN^2| =$ $= |2 - (a+\bar{a}) - 2 + (n-\bar{n})| = . = |n + \bar{n} - (a+\bar{a})|$. Taigi abi įrodomosios lygybės pusės lygios tam pačiam skaičiui, ką ir reikėjo įrodyti.

2. Sakykime, kad du kompleksiniai skaičiai užrašyti trigonometrine forma: $z_1 = |z_1|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z_2 = |z_2|(\cos\omega + i\sin\omega)$. Taikydami kompleksinių skaičių daugybos apibrėžimą ir trigonometrijos tapatybes, turime, kad

$$z_1 \cdot z_2 = (|z_1|(\cos\varphi + i\sin\varphi)) \cdot (|z_2|(\cos\omega + i\sin\omega)) =$$
$$= |z_1| \cdot |z_2|(\cos\varphi\cos\omega - \sin\varphi\sin\omega) + i(\cos\varphi\cos\omega + \sin\varphi\sin\omega)) =$$
$$= |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi + \omega) + i\sin(\varphi + \omega)).$$

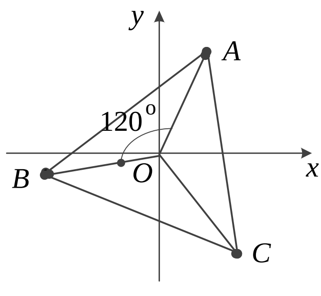
Taigi dauginant du kompleksinius skaičius, jų moduliai sudauginami, o argumentai sudedami. Geometriškai tai reiškia, kad kompleksinį skaičių $z_1 \cdot z_2$ atitinka vektorius $\overrightarrow{OC}$, kuris gautas vektorių $\overrightarrow{OA}$ pasukus kampu ω apie tašką O ir padauginus pasuktąjį vektorių iš skaičiaus $|z_2|$ (6 pav.). Jei $|z_2| = 1$, tai sandaugą $z_1 \cdot z_2$ atitinka taško A posūkis apie tašką O kampu ω. Analogiškai įrodoma, kad dalijant du kompleksinius skaičius, jų moduliai padalijami, o argumentai atimami.



6 pav.

3 pavyzdys. Taisyklingojo trikampio centras yra koordinačių pradžioje, vienos viršūnės koordinatės yra (1, 2). Rasime kitų trikampio viršūnių koordinates (7 pav.).

Sprendimas. Sakykime, kad lygiakraščio trikampio ABC viršūnė $A(1, 2)$, tašką A atitinka kompleksinis skaičius $a = 1 + 2i$. Kadangi $\angle AOB = 120°$, tai viršūnė B gaunama pasukus tašką A apie tašką O $120°$ kampu. Vienetinio modulio kompleksinis skaičius, kurio argumentas lygus $120°$, yra skaičius



7 pav.

$$z = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Kadangi viršūnę B kompleksinėje plokštumoje atitinka skaičius

$$b = az = (1+2i)\cdot\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

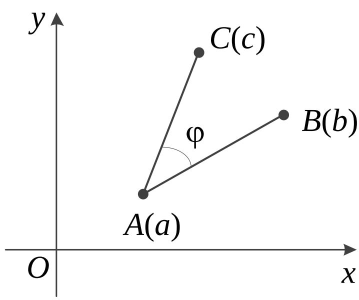
$$= \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)i,$$

tai taško B koordinatės $B\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$. Analogiškai taško C kompleksinė koordinatė

$$c = bz = \left(\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)i\right)\cdot\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i,$$

t. y. $C\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2},\ -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4 pavyzdys. Sakykime, kad taškas $C(c)$ yra gaunamas, tašką $B(b)$ pasukus apie tašką $A(a)$ kampu φ (8 pav.). Įrodysime, kad $c = a + (b-a)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.



8 pav.

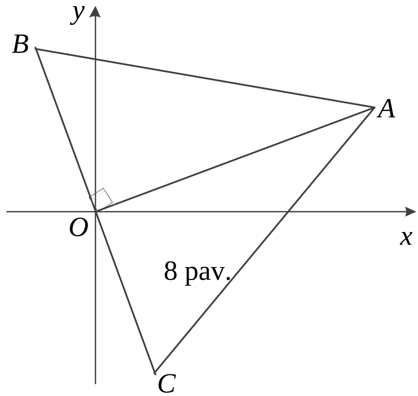
Sprendimas. Vektorius $\overrightarrow{AC}$ yra gaunamas, atlikus vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ posūkį apie tašką A kampu φ. Kadangi $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, o $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, tai vektorių $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{AB}$ kompleksinės koordinatės $\overrightarrow{AC}(c-a)$, $\overrightarrow{AB}(b-a)$. Kompleksinio skaičiaus $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ modulis lygus 1, o argumentas lygus φ, taigi pagal posūkio ir kompleksinių skaičių daugybos ryšį turime lygybę $c - a = (b-a)z$, kuri ekvivalenti įrodomajai lygybei.

5 pavyzdys. Lygiakraščio trikampio ABC viršūnės A kompleksinė koordinatė yra lygi $a,$ aukštinės AO pagrindas yra koordinačių pradžios taškas (9 pav.). Rasime kitų viršūnių kompleksines koordinates.

Sprendimas. Kadangi

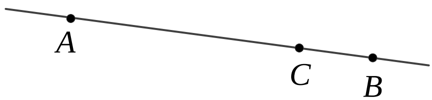
$$\frac{OA}{OB} = \text{tg}60^\circ = \sqrt{3},$$

tai taškas B gaunamas pasukant vektorių $\overrightarrow{OA}$ apie tašką O $90°$ kampu o po to gautąjį vektorių padauginant iš $\frac{1}{\sqrt{3}}.$ Pagal kompleksinių skaičių daugybos geometrinę interpretaciją tai reiškia, kad taško B kompleksinė gaunama taško A kompleksinę koordinatę padauginus iš kompleksinio skaičiaus, kurio modulis lygus $\frac{1}{\sqrt{3}},$ o argumentas lygus $\frac{\pi}{2},$ t. y. iš skaičiaus $z = \frac{1}{\sqrt{3}}i.$ Taigi taško B kompleksinė koordinatė lygi $\frac{a}{\sqrt{3}}i.$ Taškas C gaunamas sukant tašką A kampu -90° (t. y., tuo pačiu kampu tik į kitą pusę). Todėl $c = -\frac{a}{\sqrt{3}}i.$



9 pav.

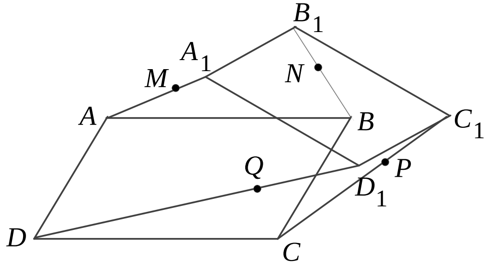
3. Sakykime, kad tiesėje AB yra taškas $C,$ tai vektoriai $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{CB}$ yra kolinearieji (10 pav.), todėl egzistuoja toks realusis skaičius $a,$ $\bar{a} = a,$ kad $\overrightarrow{AC} = a\overrightarrow{BC}.$ Jei taškas C yra atkarpoje $AB,$ tai jis dalija šią atkarpą į dalis, kurių ilgių santykis lygus $\alpha,$ t. y., $a = \frac{AC}{CB}.$ Jei $a,$ $b,$ c – atitinkamai taškų $A,$ $B,$ C kompleksinės koordinatės, tai iš lygybės $\overrightarrow{AC} = a\overrightarrow{BC}$ išplaukia, kad $c - a = a(b - c).$ Iš čia randame, kad



10 pav.

$c = \dfrac{a+ab}{1+a}$. Atskiru atveju, kai taškas *C* yra atkarpos *AB* vidurio taškas, t. y. $a = 1$, turime atkarpos vidurio taško koordinatę $c = \dfrac{a+b}{2}$.

6 pavyzdys. Duoti du lygiagretainiai *ABCD* ir $A_1B_1C_1D_1$. Atkarpas AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 vienodu santykiu dalijantys taškai yra lygiagretainio viršūnės (11 pav.). Įrodysime tai.



11 pav.

Sprendimas, Sakykime, kad duotųjų taškų kompleksinės koordinatės yra $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$, $A_1(a_1)$, $B_1(b_1)$, $C_1(c_1)$, $D_1(d_1)$, o taškai $M(m)$, $N(n)$, $P(p)$, $Q(q)$ dalija atkarpas AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 vienodu santykiu *a*. Kadangi keturkampiai *ABCD* ir $A_1B_1C_1D_1$. yra lygiagretainiai, tai pagal 1 pavyzdžio rezultatą teisingos lygybės $a + c = b + d$ ir $a_1 + c_1 = b_1 + d_1$. Taškų *M*, *N*, *P*, *Q* kompleksinėms koordinatėms turime lygybes

$$m = \frac{a+aa_1}{1+a}, \quad n = \frac{b+ab_1}{1+a}, \quad p = \frac{c+ac_1}{1+a}, \quad q = \frac{d+ad_1}{1+a}.$$

Iš čia išplaukia, kad

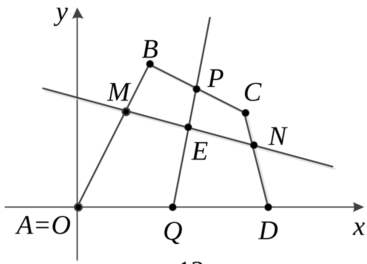
$$m + p = \frac{1}{1+a}(a + aa_1 + c + ac_1) = \frac{1}{1+a}((a+c) + a(a_1 + c_1)) =$$

$$= \frac{1}{1+a}((b+d) + a(b_1 + d_1)) = \frac{1}{1+a}((b+ab_1) + (d + ad_1)) = n + q,$$

o tai pagal 1 pavyzdžio rezultatą ir reiškia, kad keturkampis *MNPQ* yra lygiagretainis.

7 pavyzdys. Keturkampio *ABCD* kraštinėse *AB* ir *DC* yra taškai *M* ir *N*, tokie, kad $AM : MB = DN : NC = 2:1$, taškai *P* ir *Q* yra kraštinių *BC* ir *AD* vidurio taškai. Tiesės *MN* ir *PQ* kertasi taške E. Rasime santykius $PE : EQ$ ir $ME : EN$.

Sprendimas. Parinkime plokštumos koordinačių sistemą Oxy taip, kad taškas O sutaptų su viršūne $A,$ o viršūnės D kompleksinė koordinatė būtų lygi 1 (12 pav.). Sakykime, kad viršūnių B ir C kompleksinės koordinatės lygios $B(b),$ $C(c)$. Kadangi $a = AM : MB = DN : NC = 2:1,$ tai taško M kompleksinei koordinatei m turime lygybę $m = \frac{0+2b}{1+2} = \frac{2}{3}b,$ o



12 pav.

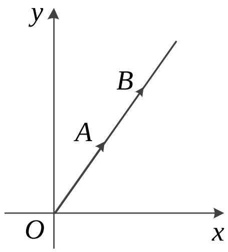
taško N koordinatei n – lygybę $n = \frac{1+2c}{1+2} = \frac{1+2c}{3}$. Kadangi taškai P ir Q yra atkarpų BC ir AD vidurio taškai, tai jų kompleksinės koordinatės lygios $p = \frac{b+c}{2},$ $q = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$. Kadangi taškai M, N, $E(e)$ yra vienoje tiesėje, tai yra toks realusis skaičius $x,$ kad $x = ME : EN,$ t. y, kad $e = \frac{m+xn}{1+x},$ analogiškai vienos tiesės taškams P, Q, E rasis toks realusis skaičius $y = PE : EQ,$ t. y., kad $e = \frac{p+yq}{1+y}$. Iš čia turime lygybę $\frac{m+xn}{1+x} = \frac{p+yq}{1+y}$. Įrašę gautas taškų koordinates, gauname, kad

$$\frac{\frac{2}{3}b + x\frac{1+2c}{3}}{1+x} = \frac{\frac{b+c}{2} + \frac{y}{2}}{1+y}.$$

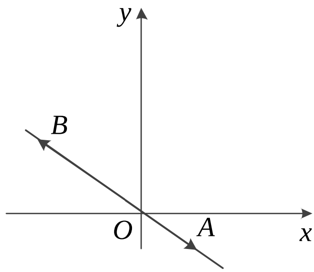
Kadangi ši lygybė turi būti teisinga bet kuriam keturkampiui, t. y., su bet kuriais b ir $c,$ tai pagal daugianarių lygybės taisyklę turime tokias lygybes:

$$\frac{2}{3(1+x)} = \frac{1}{2(1+y)}, \quad \frac{2x}{3(1+x)} = \frac{1}{2(1+y)}, \quad \frac{x}{3(1+x)} = \frac{y}{2(1+y)}.$$

Iš čia seka, kad $x = 1,$ $y = \frac{1}{2}$. Taigi $PE : EQ = \frac{1}{2},$ o $ME : EN = 1.$



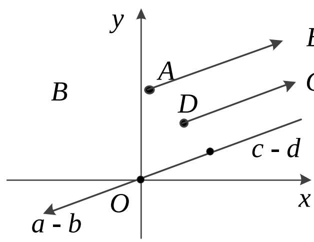
13 a) pav.



13 b) pav.

4. Sakykime, kad kompleksinėje plokštumoje turime taškus $A(a)$ ir $B(b)$, nesutampančius su tašku O. Vektoriai $\overrightarrow{OA}$ ir $\overrightarrow{OB}$ yra kolinearieji tada ir tik tada, kai kompleksinių skaičių a ir b argumentai arba vienodi (vektoriai yra vienos krypties, 13a) pav.) arba argumentų skirtumas lygus π (vektoriai yra priešingų krypčių, 13b) pav.). Kadangi dalijant kompleksinius skaičius, jų argumentai atimami, o kompleksiniai skaičiai, kurių argumentai lygūs 0 arba π, yra realieji, tai iš čia seka, kad vektoriai $\overrightarrow{OA}$ ir $\overrightarrow{OB}$ yra kolinearieji tada ir tik tada, kai skaičius $\dfrac{a}{b}$ yra realusis, t. y., kai

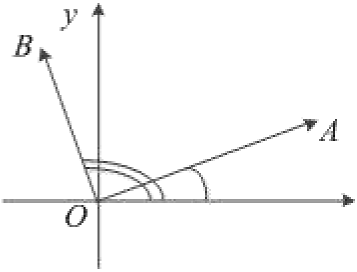
$$\frac{a}{b}=\frac{\bar{a}}{\bar{b}}.$$



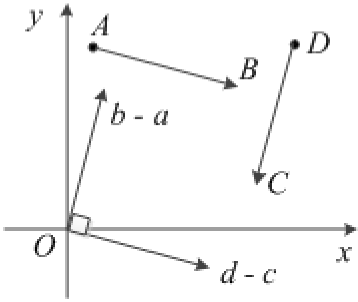
14 pav.

Sakykime, kad $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ yra keturi kompleksinės plokštumos taškai. Atidėjus vektorius $\overrightarrow{BA}(a-b)$ ir $\overrightarrow{DC}(c-d)$ nuo taško O gauname, kad vektoriai $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{DC}$ yra kolinearieji, kai taškai su koordinatėmis $a-b$ ir $c-d$ yra vienoje tiesėje su tašku O, (14 pav.). Tai reiškia, kad skaičius $\dfrac{a-b}{c-d}$ yra realusis, t. y., kai $\dfrac{a-b}{c-d}=\dfrac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{d}}$. Atskiru atveju, kai taškai A, B, C, D yra vienetinio apskritimo $z\bar{z}=1$ taškai, iš paskutinės lygybės turime, kad

$\dfrac{a-b}{c-d}=\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{d}}$, t. y. vienetinio apskritimo stygos AB ir CD yra lygiagrečios tada ir tik tada, kai $ab=cd$.



15 pav.



16 pav.

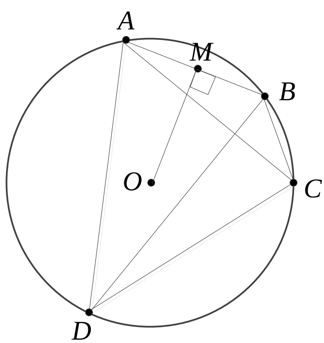
Iš gautos vektorių kolinearumo sąlygos išplaukia trijų taškų priklausymo vienai tiesei sąlyga: taškai $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ yra vienoje tiesėje tada ir tik tada, kai vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ yra kolinearieji, t. y., kai $(a-b)(\overline{a}-\overline{c})=(a-c)(\overline{a}-\overline{b})$. Iš čia seka, kad tiesės, einančios per taškus $A(a)$ ir $B(b)$, lygtis gaunama taško C koordinatę pakeitus bet kurio tiesės taško koordinate z ir ji yra tokia $(a-b)(\overline{a}-\overline{z})=(a-z)(\overline{a}-\overline{b})$. t. y., $(\overline{a}-\overline{b})z+(b-a)\overline{z}+a\overline{b}-b\overline{a}=0.$ Taigi kompleksinėje plokštumoje tiesės lygtis irgi yra pirmojo laipsnio lygtis. Atskiru atveju, kai taškai A ir B yra vienetinio apskritimo $z\overline{z}=1$ taškai, tiesės AB lygtis gaunama, įrašius į paskutiniąją lygtį $\overline{a}=\dfrac{1}{a}$, $\overline{b}=\dfrac{1}{b}$; $1+ab\overline{z}=a+b.$ Pastebėkime, kad realiosios ašies (Ox ašies) lygtis yra $z=\overline{z}$, nes tik realieji skaičiai sutampa su sau jungtiniais. Menamosios ašies lygtis yra $z=-\overline{z}$.

Vektoriai $\overrightarrow{OA}$ ir $\overrightarrow{OB}$ yra statmeni tada ir tik tada, kai jų kompleksinių skaičių a ir b argumentų skirtumas lygus $\pm\dfrac{\pi}{2}$ (15 pav.).

Kompleksinių skaičių argumentas lygus $\pm\frac{\pi}{2}$ tada ir tik tada, kai jie grynai menamieji. Iš čia seka, kad vektoriai $\overrightarrow{OA}$ ir $\overrightarrow{OB}$ yra statmeni tada ir tik tada, kai skaičius $\frac{a}{b}$ yra grynai menamasis, t. y., kai $\frac{a}{b}=-\frac{\overline{a}}{\overline{b}}$. Atidėjus vektorius $\overrightarrow{BA}(a-b)$ ir $\overrightarrow{DC}(c-d)$ nuo taško O gauname, kad vektoriai $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{DC}$ yra statmenieji (16 pav.), kai skaičius $\frac{a-b}{c-d}$ yra grynai menamasis, t. y., kai $\frac{a-b}{c-d}=-\frac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{d}}$. Atskiru atveju, kai taškai *A, B, C, D* yra vienetinio apskritimo $z\overline{z}=1$ taškai, iš paskutinės lygybės turime, kad $\frac{a-b}{c-d}=-\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{d}}$, t. y., $ab+cd=0.$

8 pavyzdys. Į apskritimą įbrėžto keturkampio įstrižainės statmenos. Įrodysime, kad atstumas nuo apskritimo centro iki bet kurios kraštinės lygus pusei priešingos kraštinės ilgio.

Sprendimas. Sakykime, kad keturkampis *ABCD* įbrėžtas į vienetinį apskritimą $z\overline{z}=1$, jo įstrižainės *AC* ir *BD* statmenos, o viršūnių kompleksinės koordinatės yra $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ (17 pav.). Įrodysime, kad atstumas nuo apskritimo centro *O* iki tiesės *AB* lygus kraštinės *CD* ilgio pusei. Kadangi taškai *A*, *B* yra vienetinio apskritimo taškai, tai tiesės *AB* lygtis yra $z+ab\overline{z}=a+b.$ Jei taškas $M(m)$ yra taško *O* ortogonalioji projekcija tiesėje *AB*, tai pagal vektorių statmenumo sąlygą turime lygybę



17 pav.

$$\frac{0-m}{a-b}=-\frac{0-\overline{m}}{\overline{a}-\overline{b}},\ \text{t. y.,}$$

$$m(\overline{a}-\overline{b})+\overline{m}(a-b)=0.$$

Taško M kompleksinę koordinatę randame iš lygčių sistemos $m+ab\overline{m}=a+b,\quad m(\overline{a}-\overline{b})+\overline{m}(a-b)=0.$ Kadangi taškai A, B yra vienetiniame apskritime, tai $\overline{a}=\frac{1}{a}$, $\overline{b}=\frac{1}{b}$, todėl sistemos lygtys yra tokios: $m+ab\overline{m}=a+b,\quad m+\overline{m}ab=0.$ Išsprendę šią sistemą, turime $m=\frac{a+b}{2}$, $\overline{m}=\frac{a+b}{2ab}$. Todėl atstumo OM kvadratas $OM^2=m\overline{m}=\frac{(a+b)^2}{4ab}$. Kadangi atkarpos AC ir BD yra statmenos, tai $ac=-bd$, t. y., $a=-\frac{bd}{c}$. Įrašę šią išraišką, gauname, kad

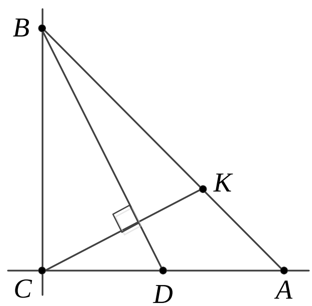
$$OM^2=\frac{\left(-\frac{bd}{c}+b\right)^2}{-4\frac{bd}{c}\cdot d}=\frac{(c-d)^2}{4cd}.$$ Kadangi $CD^2=(c-d)(\overline{c}-\overline{d})$,

o $\overline{c}=\frac{1}{c}$, $\overline{d}=\frac{1}{d}$, tai iš čia išplaukia, kad

$$CD^2=(c-d)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)=\frac{(c-d)(d-c)}{cd}=\frac{(c-d)^2}{cd}=4OM^2,$$

ką ir reikėjo įrodyti. Kitoms priešingų kraštinių poroms įrodymas analogiškas.

9 pavyzdys. Stačiojo lygiašonio trikampio ABC kampas C statusis, atkarpa BD yra jo pusiaukraštinė. Iš taško C nubrėžtas statmuo šiai pusiaukraštinei kerta trikampio įžambinę taške K. Rasime santykį $BK:KA$.



18 pav.

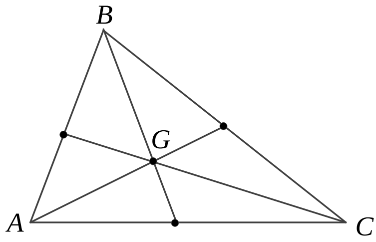
Sprendimas. Parinkime kompleksinės plokštumos koordinačių sistemą Oxy taip, kad trikampio viršūnės turėtų tokias kompleksines koordinates (18 pav.): $C(0)$, $A(1)$, $B(i)$. Taškas D yra atkarpos AC vidurio taškas, todėl jo koordinatė $D\left(\frac{1}{2}\right)$. Tiesės AB lygtis yra $(\bar{1}-\bar{i})z+(i-1)\bar{z}+1\cdot i-\bar{1}\cdot i=0,$ t. y. $(1+i)z+(i-1)\bar{z}-2i=0.$ Kadangi taškas $K(k)$ yra tiesėje AB, tai teisinga lygybė $(1+i)k+(i-1)\bar{k}-2i=0.$ Kadangi tiesės CK ir BD yra statmenos, tai pagal tiesių statmenumo sąlygą turime lygybę $\frac{i-0{,}5}{0-k}=-\frac{\bar{i}-\overline{0{,}5}}{\bar{0}-\bar{k}}$, kurią pertvarkę gauname, kad $k(2i+1)=\bar{k}(2i+1)..$ Sprendžiame sistemą $(1+i)k+(i-1)\bar{k}-2i=0,\ k(2i+1)=\bar{k}(2i-1),$ iš kurios randame

$$\bar{k}=\frac{2i+1}{2i-1}k=\frac{3-4i}{5}k,\ \ (1+i)k+\frac{1}{5}(i-1)(3-4i)k=2i,$$

t. y., $(6+12i)k=10i.$ Iš čia seka, kad

$$k=\frac{5i}{3+6i}=\frac{5i(3-6i)}{(3+6i)(3-6i)}=\frac{2+i}{3}.$$

Taigi $k=\frac{i+2\cdot 1}{1+2}$, todėl pagal atkarpos dalijimo duotuoju santykiu lygybę iš čia seka, kad $BK:KA=2.$



19 pav.

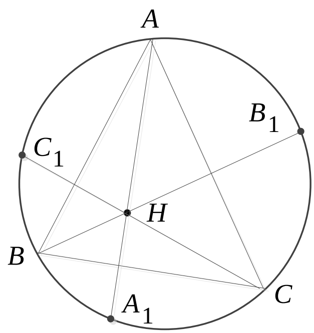
5. Sakykime, kad taškas G yra trikampio ABC sunkio centras, t. y., jo pusiaukraštinių sankirtos taškas (19 pav.). Kaip žinome, bet kuriam plokštumos taškui O yra teisinga vektorinė lygybė

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

Jei taškas O yra kompleksinės plokštumos koordinačių sistemos pradžios taškas, tai iš čia seka, kad taško G kompleksinei koordinatei g teisinga lygybė

$$g=\frac{1}{3}(a+b+c).$$

Sakykime, kad trikampis ABC yra įbrėžtas į vienetinį apskritimą $z\bar{z}=1$, taškuose $A_1(a_1)$, $B_1(b_1)$, $C_1(c_1)$ trikampio aukštinės kerta apibrėžtą apie trikampį apskritimą, o taškas H yra trikampio ortocentras, t. y. jo aukštinių susikirtimo taškas (20 pav.). Užrašome aukštinių AA_1 ir BB_1 lygtis, kurios yra atitinkamai $z+aa_1\bar{z}=a+a_1$ ir $z+bb_1\bar{z}=b+b_1$. Atėmę iš vienos lygties kitą, gauname, kad $\bar{z}=\dfrac{(a+a_1)-(b+b_1)}{aa_1-bb_1}$. Kadangi tiesės AA_1 ir BC yra statmenos, tai teisinga lygybė $\dfrac{a-a_1}{b-c}=-\dfrac{\bar{a}-\bar{a}_1}{\bar{b}-\bar{c}}$. Vienetinio apskritimo taškams turime $\bar{a}=\dfrac{1}{a}$, $\bar{b}=\dfrac{1}{b}$, $\bar{c}=\dfrac{1}{c}$, $\bar{a}_1=\dfrac{1}{a_1}$, todėl įrašę šias reikšmes ir suprastinę, gauname $1=-\dfrac{aa_1}{bc}$. Iš čia seka, kad $a_1=-\dfrac{bc}{a}$, analogiškai $b_1=-\dfrac{ac}{b}$, $c_1=-\dfrac{ab}{c}$. Taigi taško H koordinatei turime lygybę



20 pav.

$$\bar{h}=\frac{\left(a-\dfrac{bc}{a}\right)-\left(b-\dfrac{ac}{b}\right)}{a\cdot\left(-\dfrac{bc}{a}\right)-b\cdot\left(-\dfrac{ac}{b}\right)}=\frac{a^2b-b^2c-b^2a+a^2c}{ab(-bc+ac)}=$$

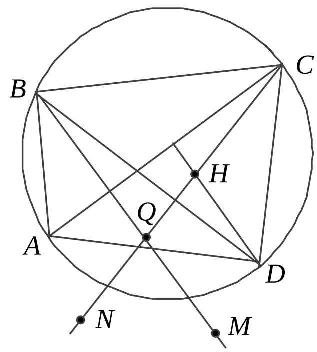
$$=\frac{ab(a-b)+c(a^2-b^2)}{abc(a-b)}=\frac{ab+c(a+b)}{abc}=\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}.$$

Iš čia seka, kad $h=a+b+c$. Pastebėkime, kad lygiai tokia pati trikampio ortocentro kompleksinė koordinatė gaunama ir tuomet, kai trikampis įbrėžtas į apskritimą $|z|=R$. Įrodymas yra toks pat, kaip ir atveju $|z|=1$, tuo galite įsitikinti savarankiškai.

10 pavyzdys. Atkarpos, jungiančios kiekvieną įbrėžto į apskritimą keturkampio viršūnę su trikampio, kurio viršūnės yra likusios trys keturkampio viršūnės, ortocentru, susikerta viename taške ir jame dalijamos pusiau. Įrodysime tai.

Sprendimas. Sakykime, kad keturkampis *ABCD* yra įbrėžtas į apskritimą $z\bar{z}=1$, o taškai *H*, *M*, *N*, *P* yra atitinkamai trikampių *BCD, ACD, ABD* ir *ABC* ortocentrai (21 pav.). Jei $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ – keturkampio viršūnių koordinatės, tai

$$h=b+c+d,$$
$$m=a+c+d,$$
$$n=a+b+d,$$
$$p=a+b+c$$



21 pav.

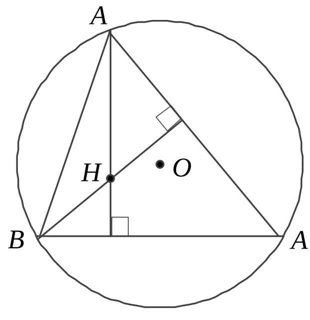
taškų *H*, *M*, *N*, *P* kompleksinės koordinatės. Tuomet atkarpos *AH* vidurio taško *Q* kompleksinė koordinatė

$$q=\frac{a+h}{2}=\frac{a+b+c+d}{2}.$$

Analogiškai gauname, kad ir atkarpų *BM*, *CN*, *DP* vidurio taškų koordinatė yra tokia pati

$$q=\frac{a+b+c+d}{2},$$

o tai ir reiškia, kad atkarpos *AH, BM, CN* ir *DP* turi tą patį vidurio tašką.



22 pav.

11 pavyzdys. Įrodysime, kad bet kuriam trikampiui *ABC* yra teisinga lygybė

$$OH^2=9R^2-(AB^2+BC^2+AC^2),$$

čia *H* yra trikampio *ABC* ortocentras, *O* yra apie trikampį apibrėžto apskritimo centras, *R* – to apskritimo spindulys (22 pav.).

Sprendimas. Sakykime, kad trikampis *ABC* įbrėžtas į apskritimą

$|z| = R$, t. y. $O(0)$, $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, ir $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = R^2$. Tuomet $H(h)$, $h = (a+b+c)$, taigi

$$OH^2 = h\bar{h} = (a+b+c)\left(\frac{R^2}{a} + \frac{R^2}{b} + \frac{R^2}{c}\right) = R^2\,\frac{(a+b+c)(bc+ac+ab)}{abc} =$$

$$= \frac{R^2}{abc}(3abc + a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a).$$

Randame

$$AB^2 = (a-b)(\bar{a}-\bar{b}) = (a-b)\left(\frac{R^2}{a} - \frac{R^2}{b}\right) =$$

$$= -R^2\left(\frac{R^2}{a} - \frac{R^2}{b}\right) = -R^2\,\frac{(a-b)^2}{ab},$$

analogiškai $BC^2 = -R^2\,\dfrac{(b-c)^2}{bc}$, $AC^2 = -R^2\,\dfrac{(a-c)^2}{ac}$.

Tuomet įrodomosios lygybės dešinioji pusė

$$9R^2 - (AB^2 + BC^2 + AC^2) =$$

$$= 9R^2 + R^2\left(\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(a-c)^2}{ac}\right) =$$

$$= \frac{R^2}{abc}(9abc + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + a^2b + c^2b - 6abc)$$

yra lygi tos lygybės kairiajai pusei, ką ir reikėjo įrodyti.

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Kompleksinėje plokštumoje pažymėkite taškus, kurių kompleksinei koordinatei z teisingos sąlygos

a) $1 \le |z - i| \le 4$,

b) $(z-(2-i))\,\overline{(z-(2-i))} = 4$.

2. Kvadrato $ABCD$ centras yra koordinačių pradžioje, viršūnės A koordinatės $A(-2,1)$. Raskite kitų kvadrato viršūnių koordinates.

3. Lygiakraščio trikampio centras yra taškas $M(-1,1)$, o vienos viršūnės koordinatės $A(2,4)$. Raskite kitų viršūnių koordinates.

4. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėse AD ir BC yra tokie taškai M ir N, kad $AM:MD=6:1$, o $BN:NC=2:5$. Raskite atkarpų, į kurias tiesė MN dalija lygiagretainio įstrižaines AC ir BD, ilgių santykius.

5. Trikampio ABC kraštinėse AB ir BC yra tokie taškai L ir K, kad $AL:LB=2:5$, $BK:KC=4:3$. Tiesės AK ir CL susikerta taške M. Raskite santykius $AM:MK$ ir $CM:ML$.

6. Į vienetinio spindulio apskritimą įbrėžtas keturkampis, kurio įstrižainės yra statmenos. Kam lygios šio keturkampio priešingųjų kraštinių ilgių kvadratų sumos?

7. Stačiojo lygiašonio trikampio ABC kampas C yra statusis, taškas M yra aukštinės CH vidurio taškas. Kokiu santykiu tiesė AM dalija statinį BC?

8. Stačiojo trikampio ABC statinių ilgiai $AC=b$, $BC=a$. Trikampio išorėje nubrėžtas kvadratas $ABMN$, kurio įstrižainės susikerta taške Q. Raskite atkarpos CQ ilgį.

9. Trikampio ABC ortocentras yra taškas H, apibrėžto apskritimo centras yra taškas O, karštinės BC vidurio taškas yra taškas D. Raskite santykį $HA:OD$.

10. Atkarpa AB yra apskritimo skersmuo, tiesė, liečianti apskritimą taške C, kerta tiesę AB taške M. Tiesė l, einanti per tašką M ir statmena tiesei AB, tieses AC ir BC kerta atitinkamai taškuose D ir E. Raskite santykį $DM:ME$.

VII. LAIPSNIAI, LOGARITMAI, RODIKLINĖS IR LOGARITMINĖS LYGTYS

Vilniaus Mykolo Biržiškos gimnazijos matematikos mokytojas ekspertas Antanas Apynis

Dvyliktoje klasėje jau žinomos visos laipsnių, logaritmų savybės, dauguma rodiklinių bei logaritminių lygčių sprendimo būdų. Šioje temoje išnagrinėsime kelis pavyzdžius, padėsiančius prisiminti savybes bei lygčių sprendimo būdus.

Laipsniai

Laipsnio su neneigiamu sveikuoju rodikliu apibrėžimas.

Sandauga *n* dauginamųjų, kurių kiekvienas lygus *a,* vadinama skaičiaus *a* *n*-tuoju laipsniu. Žymima a^n; čia *a* – laipsnio pagrindas, *n* – laipsnio rodiklis.

Jeigu laipsnio rodiklis yra neigiamas sveikasis skaičius, tai

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0.$$

Jeigu laipsnio rodiklis yra racionalusis skaičius, tai

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a > 0.$$

Laipsnio savybės:

- $a^0 = 1;$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n};$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$
- $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n};$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n;$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$

Jeigu lygties nežinomasis yra laipsnio rodiklis, tai tokia lygtis vadinama rodikline. Pavyzdžiui, lygtys $2^x = 8$, $2^x = 9$, $3^x + 2^{x+2} = 6$ yra rodiklinės.

Logaritmai

Jeigu $a^x = b$, $a > 0, a \neq 1$, tai *x* vadinamas skaičiaus *b* logaritmu pagrindu *a* ir žymimas $\log_a b$.

Pavyzdžiui, jei $2^x = 9$, tai $x = \log_2 9$.

Dešimtainio logaritmo (žym. $\lg a$) pagrindas yra skaičius 10 ($\lg a = \log_{10} a$).

Natūrinio logaritmo (žym. $\ln a$) pagrindas yra skaičius *e* ($e = 2{,}71828\ldots$).Taigi $\ln a = \log_e a$.

Logaritmo savybės:

- $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$;
- $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$;
- $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\dfrac{b}{c}\right)$;
- $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$, $b > 0$;
- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, $c > 0$, $c \neq 1$;
- $a^{\log_a b} = b$ (pagrindinė logaritmų tapatybė).

Pavyzdžiai:

1) $\log_2 5 + \log_2 0{,}4 = \log_2 (5 \cdot 0{,}4) = \log_2 2 = 1$;

2) $\log_3 10 - \log_3 2 = \log_3 \left(\dfrac{10}{2}\right) = \log_3 5$;

3) $\log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \log_{2^2} \left(2^2\right)^{1,5} = 1{,}5 \cdot \log_{2^2} 2^2 = 1{,}5$;

4) $\log_3 4 \cdot \log_2 9 = \dfrac{\lg 4}{\lg 3} \cdot \dfrac{\lg 9}{\lg 2} = \dfrac{\lg 2^2}{\lg 3} \cdot \dfrac{\lg 3^2}{\lg 2} = \dfrac{2 \cdot \lg 2}{\lg 3} \cdot \dfrac{2 \cdot \lg 3}{\lg 2} = 4$;

5) $5^{\log_5 3} = 3$;

6) $25^{\log_5 3} = \left(5^2\right)^{\log_5 3} = \left(5^{\log_5 3}\right)^2 = 3^2 = 9$;

7) $5^{\log_{25} 3} = \left(25^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{25} 3} = \left(25^{\log_{25} 3}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

1 pavyzdys. Palyginkime skaičius $2^{3001} - 4^{1500}$ ir 3^{2000}.

Sprendimas. Deja, neturime laipsnių skirtumo savybės. Tačiau matome, kad skirtumo $2^{3001} - 4^{1500}$ laipsnių pagrindai (skaičiai 2 ir 4) yra skaičiaus 2 laipsniai. Todėl

$2^{3001}-4^{1500}=2^{3001}-\left(2^2\right)^{1500}=2^{3001}-2^{3000}$.

Dabar galime iškelti prieš skliaustus 3000 dvejetų. Gausime:
$2^{3001}-2^{3000}=2^{3000}\left(2^1-2^0\right)=2^{3000}(2-1)=2^{3000}$.

Skaičių 2^{3000} ir 3^{2000} pagrindai yra skirtingi pirminiai skaičiai, todėl skaičius pertvarkykime taip:

$2^{3000}=\left(2^3\right)^{1000}=8^{1000}$,

$3^{2000}=\left(3^2\right)^{1000}=9^{1000}$.

Gauname, kad $9^{1000}>8^{1000}$, nes $9>8>1$.

Ats.: $2^{3001}-4^{1500}<3^{2000}$.

2 pavyzdys. Apskaičiuokime lygties $27^x-9^x-3^{x+2}+9=0$ sprendinių vidurkį.

Sprendimas. Pastebime, kad lygties kairėje pusėje laipsnių pagrindai yra skaičiaus 3 laipsniai, todėl lygtį galime pertvarkyti taip:

$\left(3^3\right)^x-\left(3^2\right)^x-3^{x+2}+9=0$,

$3^{3x}-3^{2x}-3^{x+2}+9=0$,

$3^{3x}-3^{2x}-3^x\cdot 3^2+9=0$

(taikėme laipsnių savybę $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$),

$3^{3x}-3^{2x}-9\cdot 3^x+9=0$,

$\left(3^x\right)^3-\left(3^x\right)^2-9\cdot 3^x+9=0$.

Pažymėję $3^x=t$, kubinę lygtį $t^3-t^2-9t+9=0$ sprendžiame grupuodami:

$t^2(t-1)-9(t-1)=0$,

$(t-1)\left(t^2-9\right)=0$,

$(t-1)(t-3)(t+3)=0$.

Nagrinėjame tris atvejus:

$t=1\Rightarrow 3^x=1\Rightarrow x=0$;

$t=3\Rightarrow 3^x=3\Rightarrow x=1$;

$t=-3\Rightarrow 3^x=-3$, lygtis sprendinių neturi.

Sprendinių vidurkis yra $\frac{0+1}{2}=0{,}5$.

Ats.: $0{,}5$.

3 pavyzdys. Išspręskime lygtį $3^{\log_3\left(\log_2 x^2\right)}=4$.

Sprendimas. Lygties kairėje pusėje turime laipsnį, kurio pagrindas 3, o laipsnio rodiklis yra logaritmas, kurio pagrindas irgi 3. Todėl galime taikyti pagrindinę logaritmų tapatybę $a^{\log_a b}=b$. Tik svarbu, kad neužmirštume logaritmo apibrėžimo srities! Taigi gauname sistemą

$$\begin{cases}\log_2 x^2=4,\\ \log_2 x^2>0.\end{cases}$$

Aišku, kad šiuo atveju pakanka išspręsti lygtį $\log_2 x^2=4$. Išspręskime ją dviem būdais:

1) $\log_2 x^2=4 \Rightarrow x^2=2^4 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=\pm 4$;

2)

$\log_2 x^2=4 \Rightarrow 2\log_2|x|=4 \Rightarrow \log_2|x|=2 \Rightarrow |x|=2^2 \Rightarrow x=\pm 4$

.

Atkreipkime dėmesį į tai, kad $\log_2 x^2=2\log_2|x|$, nes $\log_2 x^2$ apibrėžimo sritis yra $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Ats.: -4 arba 4.

4 pavyzdys. Išspręskime lygtį $x^{\lg x+9{,}9}=10$.

Sprendimas. Spręsdami šią lygtį negalime taikyti pagrindinės logaritmų tapatybės, nes logaritmo $\lg x$ pagrindas (skaičius 10) nebūtinai sutampa su laipsnio pagrindu *x*. Šią lygtį spręskime logaritmuodami (jeigu $a=b$, tai $\log_c a=\log_c b, c>0, c\neq 1$). Logaritmo pagrindu pasirinkime skaičių 10, nes tokio pagrindo logaritmą turime lygties sąlygoje. Gausime lygtį $\lg x^{\lg x+9{,}9}=\lg 10$. O tada (pagal logaritmų savybę $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$, $b > 0$) lygtį $(\lg x + 9{,}9)\lg x = \lg 10$.

Pažymėję $\lg x = t$, gausime kvadratinę lygtį $t^2 + 9{,}9t - 1 = 0$, kurios sprendiniai yra

$$t_1 = -10 \text{ ir } t_2 = \frac{1}{10}.$$

Taigi

$$\lg x = -10 \Rightarrow x = 10^{-10} = \frac{1}{10^{10}};$$

$$\lg x = \frac{1}{10} \Rightarrow x = 10^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{10}.$$

Ats.: $\frac{1}{10^{10}}$, $\sqrt[10]{10}$.

5 pavyzdys. Raskime lygties

$$\log_2\left(-x^2 - 2x + 7\right) + \log_5\left(1{,}5x^2 + 4x + 3{,}5\right) = 3$$

sveikuosius sprendinius.

Sprendimas. Logaritmų pagrindai yra skirtingi skaičiai, todėl tokios lygties sprendimas gali būti komplikuotas. Pirmiausia nustatykime leistinąsias kintamojo x reikšmes:

$$\begin{cases} -x^2 - 2x + 7 > 0, \\ 1{,}5x^2 + 4x + 3{,}5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left(-2\sqrt{2} - 1; 2\sqrt{2} - 1\right), \\ x \in \mathbf{R} \end{cases} \Rightarrow .$$

$$\Rightarrow x \in \left(-2\sqrt{2} - 1; 2\sqrt{2} - 1\right)$$

Gavome intervalą, kuriame yra baigtinis sveikųjų skaičių kiekis. Šie sveikieji skaičiai yra $\{-3; -2; -1; 0; 1\}$. Norėdami išsiaiškinti, kurie iš šių skaičių yra lygties sprendiniai, taikykime perrankos metodą:

1) jei $x = -3$, tai

$$\log_2\left(-(-3)^2 - 2 \cdot (-3) + 7\right) + \log_5\left(1{,}5 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3) + 3{,}5\right) =$$

$$= \log_2 4 + \log_5 5 = 3;$$

2) jei $x = -2$, tai

$$\log_2\left(-(-2)^2 - 2\cdot(-2) + 7\right) + \log_5\left(1{,}5\cdot(-2)^2 + 4\cdot(-2) + 3{,}5\right) =$$
$$= \log_2 7 + \log_5 1{,}5 \neq 3;$$

3) jei $x = -1$, tai

$$\log_2\left(-(-1)^2 - 2\cdot(-1) + 7\right) + \log_5\left(1{,}5\cdot(-1)^2 + 4\cdot(-1) + 3{,}5\right) =$$
$$= \log_2 8 + \log_5 1 = 3;$$

4) jei $x = 0$, tai

$$\log_2\left(-0^2 - 2\cdot 0 + 7\right) + \log_5\left(1{,}5\cdot 0^2 + 4\cdot 0 + 3{,}5\right) =$$
$$= \log_2 7 + \log_5 3{,}5 \neq 3;$$

5) jei $x = 1$, tai

$$\log_2\left(-1^2 - 2\cdot 1 + 7\right) + \log_5\left(1{,}5\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 3{,}5\right) =$$
$$= \log_2 4 + \log_5 9 \neq 3.$$

Matome, kad lygtis turi du sprendinius – skaičius -3 ir -1.
Ats.: $-3,\ -1$.

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1. Apskaičiuokite reiškinio $\dfrac{24^a}{3^{a-1}}$ reikšmę, kai

$$a = \log_{125} 200 - \frac{\log_5 7 \cdot \log_7 4}{\log_6 25 \cdot \log_5 6}.$$

2. Nustatykite, kuris iš skaičių $a = \dfrac{36^{705} + 216^{470}}{2\cdot 6^{410}}$ ir $b = 8^{834} - 2^{2501} - 16^{625}$ yra didesnis.

3. Išspręskite lygtį $\left(\sqrt{2}\right)^{2^{\sqrt{2}}} = \left(2^{\sqrt{2}}\right)^{x}$.

4. Išspręskite lygtį $4^{\log_2(3-x)} = x-1$.

5. Išspręskite lygtį $3^{\log_9\left(9-x^2\right)} = x^2-16$.

6. Išspręskite lygtį $2\log_{0,5}^2 x - 4\log_2 x = \log_{0,5}^3 x + 8$.

7. Išspręskite lygtį $4^{\log_5\left(x^2+1\right)} = 2 + 2^{\log_5\left(x^2+1\right)}$.

8. Išspręskite lygtį $x^{2\ln x} = e^3 \cdot x^5$.

9. Išspręskite lygtį $\log_6^2\left(x^2+5x\right)^2 - 6\log_6\left(x^2+5x\right)^2 + 8 = 0$.

10. Raskite lygties $\log_2\left(0{,}65x^3 - 1{,}25x^2 - 2{,}1x + 8\right) = 3^{-0{,}1x^2+0{,}3x+1}$ didžiausią neigiamą sveikąjį sprendinį.

VIII. FUNKCIJOS IŠVESTINĖ

Antanas Apynis

Iš karto pasakysime, kad šios užduoties uždaviniams išspręsti turėtų pakakti matematikos teorinių žinių , kurių galima rasti mokykliniuose vadovėliuose, formulių rinkiniuose ir žinynuose.

Vis dėlto prisiminkime, kad vieno kintamojo funkcijos *f*, apibrėžtos kuriame nors realiųjų skaičių tiesės intervale X formule $y = f(x),\ x \in X$, *išvestinė* (žym. $f',\ y',\ \dfrac{df}{dx},\ \dfrac{dy}{dx}$) *taške a*, $a \in X$, yra skaičius $f'(a)$, gaunamas pagal formulę

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},\ a \in X. \tag{1}$$

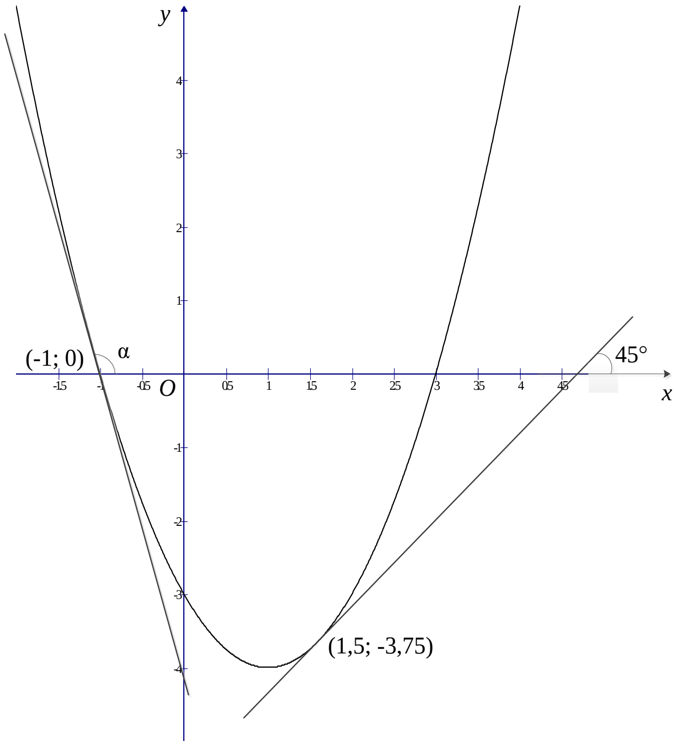
Skirtumas $x - a$ paprastai žymimas Δx ir vadinamas *argumento pokyčiu*, o skirtumas $f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$ žymimas Δy (kartais $\Delta f(a)$)ir vadinamas *funkcijos pokyčiu taške a*. Tada vietoj (1) formulės turėtume formulę

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x},\ a \in X. \tag{2}$$

Čia būtina atkreipti dėmesį į labai svarbią išlygą (sąlygą): skaičius $f'(a)$, apibrėžiamas (1) formule, turi būti baigtinis skaičius. O jeigu (1) riba neegzistuoja arba yra begalinė (∞ ar –∞), sakoma, kad taške *a* išvestinė f' neegzistuoja (neapibrėžta). Ribos

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{3}$$

egzistavimas „plika akimi“ ne visada aiškiai matomas, todėl šią problemą reikėtų specialiai pastudijuoti, iš universitetams skirtų matematikos vadovėlių (mokykliniuose vadovėliuose ši problema negvildenama). Kalbant populiariai, išvestinės $f'(a)$ egzistavimą galima susieti su funkcijos *f* grafiko liestinės egzistavimu taške $(a;\ f(a))$. Jeigu liestinė taške $(a;\ f(a))$ egzistuoja (ją įmanoma nubrėžti), tai ir išvestinė $f'(a)$ egzistuoja (įmanoma apskaičiuoti), o jeigu liestinės, einančios per grafiko tašką $(a;\ f(a))$ nubrėžti neįmanoma, tai išvestinės taške *a* funkcija f neturi. Beje, (tai gerai žinoma iš vadovėlių) pati išvestinė $f'(a)$ yra minėtos grafiko liestinės kampo, sakykim, α, sudaromo su ašimi Ox, tangentas $(f'(a) = \operatorname{tg} \alpha)$, kuris dar vadinamas tos *liestinės krypties koeficientu*.



1 pav.

Kad būtų aiškiau, išnagrinėkime porą pavyzdžių. Iš pradžių pasirinkime funkciją f, apibrėžtą formule $y = x^2 - 2x - 3.$ Jos apibrėžimo sritis – visa realiųjų skaičių tiesė, o grafikas – parabolė (žr. 1 pav.). Apskaičiavę išvestinę f' bet kuriame taške x, gauname, kad

$$f'(x) = (x^2 - 2x - 3)' = 2x - 2 = 2(x-1),\ x \in (-\infty; \infty). \qquad (4)$$

Iš šios formulės išplaukia, kad parabolės liestinė, einanti per tašką (–1; 0) su ašimi Ox sudaro kampą α (žr. 1 pav.), kurio tangentas lygus –4 $(\operatorname{tg}\alpha = -4)$, nes

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(-1) = 2(-1-1) = -4.$$

Iš tos pačios (4) formulės taip pat išplaukia, kad kampą, lygų 45°, su Ox sudaro parabolės liestinė, einanti per tašką (1,5; –3,75).

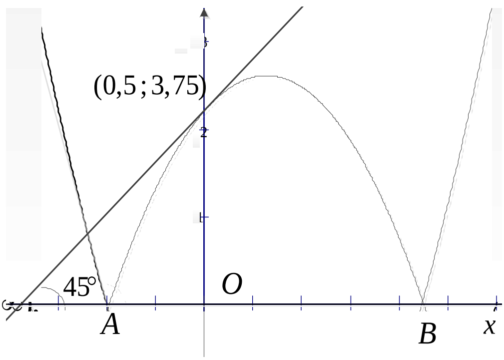
Taip pat nekyla jokių abejonių dėl galimybės nubrėžti liestinę bet kuriame šios parabolės taške.

O dabar pasirinkime kitą funkciją – apibrėžtą formule

$$f(x) = |x^2 - 2x - 3|,\ x \in (-\infty; \infty).$$

Kvadratinio trinario $x^2 - 2x - 3$ reikšmės yra teigiamos intervaluose (–∞; –1) ir (3; ∞), o neigiamos intervale (–1; 3). Vadinasi, (5) formulę galima pakeisti formule

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, & \text{jei } x \in (-\infty; -1] \text{ arba } x \in [3; \infty); \\ 3 + 2x - x^2, & \text{jei } x \in (-1; 3). \end{cases} \qquad (6)$$



Pažvelgę į grafiką (žr. 2 pav.), iš karto suprasime, kad neįmanoma nubrėžti kreivės liestinės nei taške A, nei taške B (jų koordinatės yra atitinkamai (–1; 0) ir (3; 0). Todėl sakome, kad funkcija $y = f(x)$,

$$f(x) = |x^2 - 2x - 3|,\ x \in (-\infty; \infty).$$

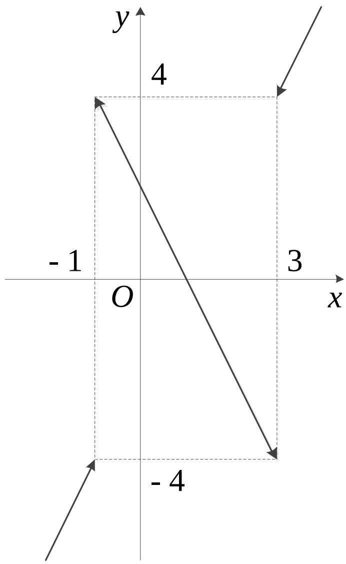
neturi išvestinės nei taške $x = -1$, nei taške $x = 3$. Žinoma, tai nėra „griežtas“ įrodymas.

O ką gautume skaičiuodami $f'(x),\ x \in (-\infty; \infty)$? Remdamiesi (6) formule, skaičiavimą suskaidykime į du atvejus: 1) $x \in (-\infty; -1)$ arba $x \in (3; \infty)$ ir2) $x \in (-1; 3)$. Gausime, kad

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & \text{jei } x \in (-\infty; -1) \text{ arba } x \in 3; \infty); \\ 2(1-x), & \text{jei } x \in (-1; 3). \end{cases}$$

Pagaliau gautą išvestinę funkciją f', tikrai apibrėžtą aibėje

$(-\infty;-1)\cup(-1;3)\cup(3;\infty)$, pavaizduokime grafiškai (žr. 3 pav.). Gautas geometrinis vaizdas nėra vientisa (nenutrūkstanti) kreivė (taškai $x=-1$ ir $x=3$ yra funkcijos f' trūkio taškai). Taškuose $x=-1$ ir $x=3$ funkcijos f' reikšmių neturime. Bet kodėl funkcija f' nėra apibrėžta nei taške $x=-1$, nei taške $x=3$, nebesiaiškinkime (atsakymo turėtume ieškoti universitetui skirtame vadovėlyje).



Truputį pagvildenome vieną probleminį išvestinės aspektą (jų yra ir daugiau). Dabar pasakysime kelis išvestinės apibrėžimui palankius žodžius.

Pasirodo, kad (žinoma, reikėtų įrodyti!) skaičiuojant konkrečių funkcijų išvestines visai nebūtina skaičiuoti (3) ribą. Palyginti nesunku iš apibrėžimo išvesti gana paprastas išvestinių skaičiavimo taisykles ir gana lengvai įsimenamas formules. Štai pavyzdžiui,

- jei $f(x)=u(x)+v(x),\ x\in X$, tai $f'(x)=u'(x)+v'(x)$;
- jei $f(x)=u(x)-v(x),\ x\in X$, tai $f'(x)=u'(x)-v'(x)$;
- jei $f(x)=u(x)\cdot v(x),\ x\in X$, tai $f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$;
- jei $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)},\ x\in X$, tai $f'(x)=\dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$.

Šiek tiek sunkiau rasti sudėtinės funkcijos $f(g(x)),\ x\in X$, išvestinę $(f(g(x)))'$, bet ir jos skaičiavimo formulę įmanoma be didelio vargo suprasti ir išmokti taikyti.

Norėtume atkreipti dėmesį dar į vieną kitą probleminį momentą, susijusį su išvestinių skaičiavimu, ypač taikymo uždaviniuose.

Pasirinkime, pavyzdžiui, funkciją f, apibrėžtą formule $f(x)=\ln(\ln(\sin x))$ ir pabandykime ištirti.

Jos išvestinę apskaičiuoti nesunku. Juk pakanka du kartus pritaikyti sudėtinės funkcijos $y = f(u),\ u = g(x),$ išvestinės skaičiavimo formulę

$$y' = f'(u)\cdot g'(x)$$

(pirmą kartą pasirinkus $f(u) = \ln u,\ u = \ln(\sin x),$ o antrą kartą $f(u) = \ln u,\ u = \sin x$). Rezultatas būtų toks:

$$f'(x) = (\ln(\ln(\sin x)))' = \frac{1}{\ln(\sin x)}\cdot(\ln(\sin x))' =$$

$$= \frac{1}{\ln(\sin x)}\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{1}{\ln(\sin x)}\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x.$$

Lengva įsitikinti, kad funkcija *f* kritinių taškų neturi, nes spręsdami lygtį $f'(x) = 0$ gautume, jog lygties $\cos x = 0$ sprendiniai $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$, netenkina sąlygos $0 < \sin x < 1.$

Bet išsprendę nelygybę $0 < \sin x < 1$ (patį sprendimą praleiskime), gautume, kad, pavyzdžiui, intervale $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ galioja nelygybės

$$0 < \sin x < 1,\ 0 < \cos x < 1 \text{ ir } \ln(\sin x) < 0,$$

o intervale $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ – nelygybės

$$0 < \sin x < 1,\ -1 < \cos x < 0 \text{ ir } \ln(\sin x) < 0.$$

Išeitų, kad $f'(x) < 0,$ kai $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right),$ ir $f'(x) > 0,$ kai $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right).$

Taigi funkcija *f* turėtų mažėti intervale $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ir didėti intervale $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Vadinasi, taškas $x = \frac{\pi}{2}$ lyg ir turėtų būti funkcijos *f* minimumo taškas. Bet tokia išvada būtų neteisinga, nes $x = \frac{\pi}{2}$ nepriklauso išvestinės f' apibrėžimo sričiai.

Štai čia gal ir visai sustokime ir pasižiūrėkime į pačią pradžią, taigi į funkcijos f formulę $f(x) = \ln(\ln(\sin x))$. Juk nėra nė vieno realiojo skaičiaus x, kuriame ši funkcija būtų apibrėžta.

Šio pavyzdžio, matyt, pakanka ne vienai protingai išvadai padaryti.

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Raskite funkcijos $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2x}{x^2 - 1}$ mažėjimo ir didėjimo intervalus.

2. Raskite funkcijos $f(x) = x^3 - 2x \cdot |x - 2|$ mažėjimo ir didėjimo intervalus bei ekstremumus intervale (–3; 7)

3. Raskite visas a, $a \in \mathbf{R}$, reikšmes, kurioms esant funkcija $f(x) = \sqrt{17} - 12x - ax^2 - x^3$ mažėja intervale $(-\infty; \infty)$.

4. Raskite visas a, $a \in \mathbf{R}$, reikšmes, kurioms esant funkcija

$$f(x) = (a^2 - 11a + 28) \cdot \sin \frac{x}{2} - (a - 4) \cdot (x - \sqrt{2})$$

neturi kritinių taškų.

5. Tiesė $y = x$ liečia parabolę $y = x^2 + bx + c$ taške (1; 1). Raskite koeficientus b ir c.

6. Funkcija $y = f(x)$ apibrėžta formule $f(x) = e^{ax^2 + bx + 1}$. Raskite a ir b reikšmes, kurioms esant galioja lygybė $f(1) = f(0) = f'(0)$.

7. Du taškai juda skaičių ašimi Ox. Pirmo taško koordinatė x_1 laiko momentu t nusakoma formule $x_1 = 3t^2 - 5$, o antro taško koordinatė x_2 nusakoma formule $x_2 = 3t^2 - t + 1$ (x_1 ir x_2 – metrais, t –

sekundėmis). Raskite kiekvieno taško judėjimo greitį tuo momentu, kai abiejų taškų koordinatės vienodos.

8. Išspręskite lygtį $f'(x) - \frac{2}{x} \cdot f(x) = 0$, kai $f(x) = x^3 \cdot \ln x$.

9. Tarp lygiagretainių, kurių smailusis kampas 30°, o plotas lygus 8, raskite mažiausio perimetro lygiagretainį. Kokie yra šio lygiagretainio kraštinių ilgiai?

10. Į lygiakraštį trikampį įbrėžtas stačiakampis, kurio viršutinės yra šio trikampio kraštinėse. Raskite didžiausio ploto stačiakampio kraštinių ilgius, jei trikampio kraštinės ilgis 12 cm.

BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus, Edmundas Mazėtis

1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{y} = 2. \end{cases}$$

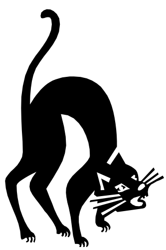
2. Apskritimo stygą AB taškas C dalija į dalis $AC = 8$, $BC = 10$, apskritimo spindulys lygus 12. Į kokio ilgio dalis taškas C dalija per jį nubrėžto apskritimo skersmenį?

3. Apskaičiuokite

$$\frac{(1 + i\sqrt{3})^4}{(1 - i\sqrt{3})^2}.$$

4. Išspręskite lygtį

$$2^{\log_4(2x-1)} = x - 2.$$



Užduočių sprendimai

STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tegu s yra atstumas tarp A ir B (km), o v_1 ir v_2 yra pirmo ir antro dviratininko greitis (km/h). Pagal uždavinio sąlygą turi galioti šios lygybės:

$$\frac{s-40}{v_1}=\frac{40}{v_2}, \quad \frac{s+20}{v_1}=\frac{s-20}{v_2}=8. \tag{1}$$

Iš sistemos

$$\begin{cases} \dfrac{s-40}{v_1}=\dfrac{40}{v_2}, \\ \dfrac{s+20}{v_1}=\dfrac{s-20}{v_2} \end{cases}$$

Gauname, kad

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{s-40}{40}=\frac{s+20}{s-20}.$$

Iš pastarosios lygybės gauname kvadratinę lygtį $s^2-100s=0$, kurios sprendiniai yra 0 ir 100.

Taigi atstumas tarp A ir B yra 100 km.

Tada iš (1) gauname, kad $v_1=15$ km/h ir $v_2=10$ km/h.

Ats.: $s=100$ km, $v_1=15$ km/h ir $v_2=10$ km/h.

2. Aišku, kad visas maršruto ilgis (minutėmis) yra 50, o sumažinti intervalai tarp gretimų autobusų yra $25\cdot 0{,}4=10$ (min). Gauname penkias laiko atkarpas po 10 minučių. Kadangi maršrutas uždaras, pakanka 4 autobusų, kad intervalai tarp gretimų atvykimo sumažėtų iki 10 minučių.

Taigi papildomų autobusų skaičius yra 3.

Ats.: 3.

3. Tegu $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ yra paeiliui rašomi dviženklio skaičiaus skaitmenys.

Aišku, kad Antanas lengvai gali pasiekti, kad būtų

$$a_2 + a_3 = a_4 + a_5 = ... = a_{18} + a_{19} = 6.$$

Tada suma $a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{18} + a_{19}$ būtų lygi $9 \cdot 6 = 54$.

Jei Antano pasirinktas pirmas skaitmuo būtų 1, 2 arba 3, tai sumos $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{19}$ reikšmė būtų 55, 56 arba 57.

Tada Edmundas tikrai nepasiektų, kad visų dviženklio skaičiaus skaitmenų suma dalytųsi iš 9.

Ats.: Gali.

4. Tegu *x* yra sūnaus, *y* – tėvo, o *z* – senelio (tėvo tėvo) amžius dabar.

Iš uždavinio sąlygos išplaukia, kad

$$z = 5x, \quad x + (z - y) = y + 8 \text{ ir } y + z = 100.$$

Iš šių lygčių gauname:

$$y = 100 - z = 100 - 5x,$$
$$x + (5x - (100 - 5x)) = (100 - 5x) + 8,$$
$$11x - 100 = 108 - 5x,$$
$$16x = 208,$$
$$x = 13.$$

Taigi sūnaus amžius yra 13 metų.

Ats.: 13.

5. Tegu *x* yra ieškomas daliklis, *k* – dalmuo, o *r* – liekana. Kadangi $r = 0{,}75k$, tai

$$540 = kx + 0{,}75k = k(x + 0{,}75).$$

Aišku, kad turi galioti nelygybė $0{,}75k \le x - 1$, o skaičius *k* turi dalytis iš 4.

Tegu $k = 4m \ (m \in \mathrm{N})$. Tada $3m \le x - 1$, o iš čia $m \le \frac{1}{3}(x-1)$.

Įvertinkime galimas *x* reikšmes spręsdami nelygybę

$$540 = 4m(x + 0{,}75) = m(4x + 3) \le \frac{1}{3}(x-1)(4x+3).$$

Atlikę veiksmus, gausime kvadratinę nelygybę $4x^2 - x - 1623 \ge 0$, kurios teigiamų sveikųjų sprendinių aibė yra {21; 22; ...}. Vadinasi, $4x + 3 \ge 4 \cdot 21 + 3 = 87$.

Skaičius 540 skaidinys pirminiais dauginamaisiais yra $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$, o skaičius $4x+3$ $(4x+3 \geq 87)$ yra nelyginis, todėl įmanomas, tik atvejis, kai $4x+3 = 3^3 \cdot 5 = 135$. Iš čia gauname vienintelę x reikšmę – skaičių 33.

Ats.: 33.

6. Lygties kairiąją pusę pertvarkykime taip:

$$5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 =$$
$$= (4x^2 + 8xy + 4y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) =$$
$$= (2x + 2y)^2 + (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4(x+y)^2 + (x-1)^2 + (y+1)^2.$$

Lygybė

$$4(x+y)^2 + (x-1)^2 + (y+1)^2 = 0$$

Galima tik kai galioja visos trys lygybės: $x + y = 0$, $x - 1 = 0$ ir $y + 1 = 0$.

Gauname vienintelį lygties sprendinį – realiųjų skaičių $(x; y)$ porą (1; –1).

Ats.: (1; –1).

7. Ieškomus skaitmenis pažymėkime x, y ir z.

Aišku, kad skaičius

$$\overline{523xyz} = 523\ 000 + 100x + 10y + z$$

turi dalytis iš skaičiaus $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$.

Kadangi

$$523\ 000 = 504 \cdot 1037 + 352,$$

tai skaičius

$$523\ 000 + 100x + 10y + z$$

turi dalytis iš 504. Yra tik dvi galimybės: $x = 1$, $y = 5$, $z = 2$ ir $x = 6$, $y = 5$, $z = 6$. Skaičiai 523 152 ir 523 656 dalijasi iš 504.

Ats.: 1, 5, 2 arba 6, 5, 6.

8. Iš antros lygties gauname, kad $x = y + z - 3$. Tada

$$x^2-y^2-z^2=(y+z-3)^2-y^2-z^2=$$
$$=y^2+z^2+9+2yz-6y-6z-y^2-z^2=$$
$$=2yz-6y-6z+9=(2yz-6y)-(6z-18)-9=$$
$$=2y(z-3)-6(z-3)-9=2(z-3)(y-3)-9.$$

Įrašę į pirmą lygtį, gauname:

$$2(z-3)(y-3)-9=1,$$
$$(y-3)(z-3)=5.$$

Ieškant sveikųjų sprendinių reikia išspręsti šias sistemas:

1) $\begin{cases} y-3=1, \\ z-3=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y-3=-1, \\ z-3=-5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y-3=5, \\ z-3=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y-3=-5, \\ z-3=-1. \end{cases}$

Iš pirmos sistemos gauname, kad $y=4,$ $z=8,$ o tada $x=9.$

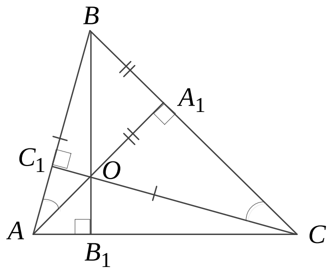
Iš antros sistemos gauname, kad $y=2,$ $z=-2,$ o tada $x=-3.$

Iš trečios sistemos gauname, kad $y=8,$ $z=4,$ o tada $x=9.$

Iš ketvirtos sistemos gauname, kad $y=-2,$ $z=2,$ o tada $x=-3.$

Ats.: (9; 4; 8), (–3; 2; –2), (9; 8; 4), (–3; –2; 2).

9. Sakykime, kad atkarpos AA_1, BB_1, CC_1 yra trikampio ABC aukštinės. Kadangi



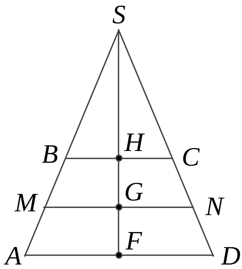
$$\angle BAA_1=\angle OCB=90^\circ-\angle B,$$

o $AB=CO,$ tai trikampiai ABA_1 ir OCA_1 yra lygūs, taigi $BA_1=OA_1$ ir statusis trikampis OBA_1 lygiašonis, todėl

$$\angle OBA_1=45^\circ \text{ ir}$$
$$\angle C=90^\circ-\angle OBA_1=45^\circ.$$

Ats.: 45°.

10. Sakykime, kad trapecijos *ABCD* šoninės kraštinės *AB* ir *CD* kertasi taške *S*, atkarpa $MN = m$ dalija trapecijos plotą pusiau, $BC = a$, $AD = b$, atkarpa $SH = n$ yra trikampio *BCS* aukštinė, atkarpos $GH = x$ ir $HF = y$ yra trapecijų *MBCN* ir *ABCD* aukštinės. Pagal sąlygą trapecijos *MBCN* plotas $\frac{a+m}{2} \cdot x$ lygus pusei trapecijos *ABCD* ploto $\frac{a+b}{2} \cdot h$, t. y. teisinga lygybė $\frac{a+m}{2} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot h$, t. y.



$$2(a+m)x = (a+b) \cdot h.$$

Iš trikampių panašumo gauname

$$\frac{n}{a} = \frac{n+x}{m} = \frac{n+h}{b},$$

t. y. $nm = an + ax$ **ir** $nb = an + ah$.

Iš čia $x = \frac{mn - an}{a}$, $h = \frac{nb - ah}{a}$, taigi (1) lygybė tampa tokia

$$\frac{2(a+m)(mn-an)}{a} = \frac{(a+b)(nb-an)}{a}.$$

Iš jos išplaukia, kad $m^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$.

Ats.: $m = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tegu *A* yra mokinių darbų skaičius, o x_1, x_2, x_3, x_4 ir x_5 – atitinkamai pirmo, antro, trečio, ketvirto ir penkto mokytojo darbo sparta (patikrintų per 1 valandą darbų skaičius).

Pagal uždavinio sąlygą,

$$x_1 + x_2 + x_4 = \frac{A}{20},\ \ x_2 + x_3 + x_5 = \frac{A}{15},\ \ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = \frac{A}{10}.$$

Sudėję pirmą ir antrą lygybes, gauname, kad

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \frac{7A}{60}.$$

Tada iš šios lygybės atėmę trečią gauname, kad $2x_2 = \frac{A}{60}$. Iš čia $x_2 = \frac{A}{120}$.

O sudėję visas tris lygybes gauname, kad

$$2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = \frac{13A}{60}.$$

Taigi $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{x_2} = 13.$

Ats.: 13.

2. Tegu A yra detalių, kurias reikėjo pagaminti, skaičius, o x ir y yra laikas (valandomis), per kurį visas detales galėtų pagaminti atitinkamai mokinys ir meistras.

Pagal sąlygą, $\frac{A}{x} \cdot 4 + \frac{A}{y} \cdot 7 = \frac{5}{9}A$ ir $\frac{5}{9}A + \left(\frac{A}{x} + \frac{A}{y}\right) \cdot 4 = \frac{17}{18}A.$ Iš čia gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{7}{y} = \frac{5}{9}, \\ \frac{4}{x} + \frac{4}{y} = \frac{7}{18}, \end{cases}$$

iš kurios išplaukia, kad $x = 24$.

Ats.: 24 h.

3. Tegu *A* yra darbo apimtis, *x* ir *y* yra valandų, per kurias visą darbą gali atlikti atitinkamai pirmas ir antras darbininkas, skaičius, o *t* – laikas, per kurį abu darbininkai atliko 0,45 viso darbo.

Remdamiesi sąlyga, gauname, kad

$$\frac{A}{x}+2\cdot\left(\frac{A}{x}+\frac{A}{y}\right)=0{,}55A,$$

$$\left(\frac{A}{x}+\frac{A}{y}\right)t=0{,}45A,$$

$$\frac{A}{x}+2\cdot\frac{A}{x}+t\cdot\frac{A}{x}=0{,}5A,$$

$$2\cdot\frac{A}{y}+t\cdot\frac{A}{y}=0{,}5A.$$

Atlikę veiksmus, gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases}\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=0{,}55,\\[2mm] \dfrac{t}{x}+\dfrac{t}{y}=0{,}45,\\[2mm] \dfrac{3}{x}+\dfrac{t}{x}=0{,}5,\\[2mm] \dfrac{2}{y}+\dfrac{t}{y}=0{,}5.\end{cases}$$

Iš trečios lygties išplaukia, kad $x=2t+6,$ o iš ketvirtos – $y=2t+4.$ Įrašę į pirmą lygtį, gauname:

$$\frac{3}{2(t+3)}+\frac{1}{t+2}=0{,}55\Rightarrow 1{,}1t^2+0{,}5t-5{,}4=0\Rightarrow t=2\ \ (\text{nes } t>0).$$

Taigi $x=10,\ \ y=8.$

Ats.: 10 h, 8h h.

4. Tegu A yra darbo apimtis (valandomis), x – darbininkų skaičius, o y – darbo dienos trukmė (h).

Pagal sąlygą, $A = 14xy = 7(x+4)(y+1).$

Iš čia gauname:

$$xy = x + 4y + 4 \Rightarrow y = \frac{x+4}{x-4} = 1 + \frac{8}{x-4}.$$

Aišku, kad galimos x reikšmės yra 5, 6, 8 ir 12, o atitinkamos y reikšmės yra 9, 5, 3, 2.

Ats.: 5 darb., 9 h; 6 darb., 5 h; 8 darb., 3 h; 12 darb., 2 h.

5. Tegu A yra detalių skaičius, numatytas pagaminti pirmu automatu, o x, y ir z – laikas (valandomis), per kurį tas detales pagamintų atitinkamai pirmas, antras ir trečias automatas.

Pagal uždavinio sąlygą,

$$\frac{A}{x} + \frac{A}{y} + \frac{A}{z} = 1{,}5\left(\frac{A}{x} + \frac{A}{y}\right), \quad \frac{A}{\frac{A}{y} + \frac{A}{z}} = x - 4{,}8 \ \text{ ir } \ x - y = 2.$$

Spręsdami šių lygčių sistemą, gauname:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x-4{,}8}, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1{,}5\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right), \\ y = x - 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-4{,}8} = 1{,}5\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2x-4{,}8}{x(x-4{,}8)} = \frac{3(x-1)}{x(x-2)} \Rightarrow 2(x-2{,}4)(x-2) = 3(x-4{,}8)(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 8{,}6x + 4{,}8 = 0 \Rightarrow x = 8 \text{ arba } x = 0{,}6.$$

Kadangi $x > 4{,}8,$ tai $x = 8.$

Ats.: 8.

6. Tegu S yra tunelio ilgis (km), o x ir y – laikas (dienomis), per kurį visą tunelį gali iškasti atitinkamai pirmas ir antras „kurmis“. Tada (pagal sąlygą) $\frac{S}{x}+\frac{S}{y}=\frac{S}{5}$ ir $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y=10.$ Gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}, \\ x+2y=30, \end{cases}$$

turinčią du sprendinius: (10; 10) ir (15; 7,5). Kadangi „kurmiai“ yra skirtingo galingumo, tai pirmą sprendinį reikia atmesti.

Ats.: 15 d. ir 7,5 d.

7. Tegu A yra krovinio apimtis (kuriais nors vienetais), o x ir y atitinkamai didesnio galingumo ir mažesnio galingumo krano našumas (iškraunamo per 1 h krovinio dalis). Tada (pagal sąlygą)

$$5\cdot 4x+3\cdot 2y=A \quad \text{ir} \quad 4{,}5(4x+2y)=A.$$

Sistema

$$\begin{cases} 20x+6y=A, \\ 18x+9y=A \end{cases}$$

turi vienintelį sprendinį: $x=\frac{1}{24}A,\ \ y=\frac{1}{36}A.$

Ieškomas laikas yra $\frac{A}{x+y}=\frac{1}{\frac{1}{24}+\frac{1}{36}}=\frac{24\cdot 36}{60}=14{,}4$ (h).

Ats.: 14,4 h.

8. Tegu S yra lauko plotas (ha), o x, y ir z – atitinkamai pirmo, antro ir trečio traktoriaus darbo našumas (ha/d).

Remdamiesi sąlyga sudarykime lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 4(x+y+z)=S, \\ 6(x+y)=S, \\ 8(x+z)=S. \end{cases}$$

Iš jos gauname:

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{1}{6}S, \\ 4\left(\dfrac{1}{6}S+z\right)=S \end{cases} \Rightarrow z=\frac{1}{12}S; \quad \begin{cases} x+z=\dfrac{1}{8}S, \\ 4\left(\dfrac{1}{8}S+y\right)=S \end{cases} \Rightarrow y=\frac{1}{8}S.$$

Taigi $\dfrac{y}{z}=\dfrac{1}{8}:\dfrac{1}{12}=\dfrac{3}{2}=1{,}5 \Rightarrow y=1{,}5z.$

Ats.: 1,5.

9. Tegu A yra baseino tūris (pavyzdžiui, kubiniais metrais), o x_1, x_2, x_3, x_4 ir x_5 – atitinkamai pirmo, antro ir t. t. vamzdžio darbo našumas (m^3/h).

Pagal uždavinio sąlygą sudarome lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=\dfrac{1}{3}A, \\ x_1+x_4+x_5=\dfrac{1}{2}A, \\ x_3+x_4=\dfrac{1}{6}A, \\ x_2+x_5=\dfrac{1}{4}A. \end{cases}$$

Sudėję visas keturias lygtis, gauname:

$$2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)A,$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=\frac{5}{8}A.$$

Vadinasi, ieškomas laikas yra $\dfrac{A}{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}=\dfrac{8}{5}=1{,}6$ (h),

t. y. 1 h 36 min.

Ats.: 1 h 36 min.

10. Tegu A yra baseino tūris (m^3), x – laikas (h), per kurį baseinas pripildomas vandeniu, o y – laikas (h), per kurį vanduo iš baseino išleidžiamas.

Pagal uždavinio sąlygą, $x = y + 2$ ir $\frac{1}{3}A + \frac{A}{x} \cdot 8 - \frac{A}{y} \cdot 8 = 0.$ Iš

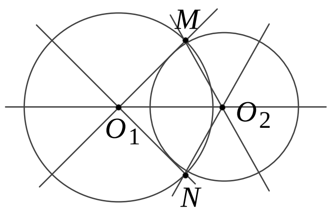
čia

$$\begin{cases} x = y + 2, \\ \frac{8}{y} - \frac{8}{x} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow y = 6,\ x = 8.$$

Ats.: 8 h.

ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Kadangi kampas tarp taškuose M ir N susikertančių apskritimų lygus kampui tarp jų liestinių taške M (ir taške N), tai iš uždavinio sąlygos seka, kad taške M ir taške N apskritimų liestinės statmenos. Kadangi pirmojo apskritimo spindulys O_1M yra statmenas šio apskritimo liestinei taške M, tai pagal uždavinio sąlygą ši apskritimo liestinė eina per antrojo apskritimo centrą O_2; analogiškai, antrojo apskritimo liestinė taške M eina per pirmojo apskritimo centrą O_1 (1 pav.). Taigi trikampis O_1O_2M yra statusis, t. y., $\angle O_1O_2M + \angle O_2O_1M$ = 90°. Dėl simetriškumo tiesės O_1O_2 atžvilgiu turime, kad $\angle NO_1M = \frac{1}{2}\angle O_2O_1M$, $\angle NO_2M = \frac{1}{2}\angle O_1O_2M$, todėl iš uždavinio sąlygos gauname lygybę $\angle O_1O_2M - \angle O_2O_1M = 15^\circ$. Iš gautųjų lygybių išplaukia, kad $\angle O_1O_2M = \frac{105^\circ}{2}$, $\angle O_2O_1M = \frac{75^\circ}{2}$.

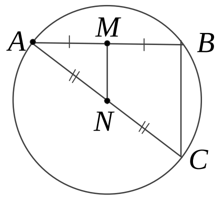


1 pav.

Taigi $\angle NO_1M = 105^\circ$, $\angle NO_2M = 75^\circ$. Kadangi centrinis kampas lygus lankui, į kurį jis remiasi, tai iš čia gauname, kad styga MN pirmąjį apskritimą dalija į lankus, kurių didumai lygūs 105° ir 255°, o antrąjį – į lankus, kurių didumai lygūs 75° ir 285°.

Ats.: pirmąjį apskritimą dalija į 105° ir 255° lankus, o antrąjį – į 75° ir 285° lankus.

2. Sakykime, kad nubrėžtos apskritimo stygos $AB=9$, $AC=17$, o taškai *M* ir *N* yra jų vidurio taškai, taigi $MN=5$ (2 pav.). Kadangi atkarpa *MN* yra trikampio *ABC* vidurinė linija, tai $BC=2MN=10$. Pagal Herono formulę randame trikampio *ABC* plotą:



2 pav.

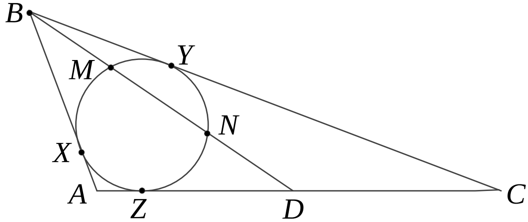
$$p=\frac{1}{2}(9+17+10)=18,$$

$$S=\sqrt{18\cdot(18-9)\cdot(18-17)\cdot(18-10)}=36.$$

Pagal apibrėžto apie trikampį apskritimo spindulio formulę turime $R=\dfrac{9\cdot17\cdot10}{4\cdot36}=\dfrac{85}{8}$.

Ats.: $\dfrac{85}{8}$.

3. Sakykime, kad įbrėžtas į trikampį apskritimas kraštines *AB*, *AC*, *BC* liečia atitinkamai taškuose *X*, *Y*, *Z* (3 pav.). Pagal įbrėžto į trikampį apskritimo savybes randame, kad



3 pav.

$$BX=\frac{a+c-b}{2},\quad DZ=\frac{b}{2}-AZ=\frac{b}{2}-\frac{b+c-a}{2}=\frac{a-c}{2}.$$

Pagal liestinių ir kirstinių savybes turime

$$BM\cdot BN=\frac{1}{4}BD\cdot\frac{3}{4}BD=BX^2=\frac{(a+c-b)^2}{4},$$

$$DN\cdot DM=\frac{1}{4}BD\cdot\frac{3}{4}BD=DZ^2=\frac{(a-c)^2}{4}.$$

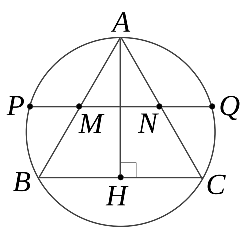
Kadangi šių lygybių kairiosios pusės lygios $\dfrac{3BD^2}{16}$, tai lygios ir dešiniosios, t. y., $a+c-b=a-c.$ Kadangi pagal sąlygą $b=8,$ tai iš čia gauname, kad $2c=b,$ t. y., $c=4.$ Pagal trikampio pusiaukraštinės ilgio formulę $BD^2=\dfrac{1}{4}(2a^2+2c^2-b^2)=\dfrac{1}{4}(2a^2-32).$ Iš gautųjų lygybių turime, kad $\dfrac{3}{16}\cdot\dfrac{1}{4}(2a^2-32)=\dfrac{(a-4)^2}{4}$, t. y., $5a^2-64a+176=0.$ Iš čia randame, kad $a=4$ ir $a=\dfrac{44}{5}.$ Bet reikšmė $a=4$ netinka, nes nėra trikampio, kurio kraštinių ilgiai būtų 8, 4 ir 4.

Ats.: $AB=4,\ BC=\dfrac{44}{5}.$

4. Kadangi trikampis *ABC* lygiakraštis, tai dėl simetrijos tiesės, kurioje yra jo aukštinė *AH*, atžvilgiu atkarpos *MP* ir *NQ* yra lygios (4 pav.). Pažymėkime $PM=QN=x.$ Kadangi atkarpa *MN* yra trikampio *ABC* vidurinė linija, tai

$$MN=\frac{BC}{2}=1,\quad AM=MB=\frac{AB}{2}=1,$$

$$MQ=1+x.$$



4 pav.

Pagal taške *M* susikertančių apskritimo stygų teoremą (2 teorema) turime $MP\cdot MQ=MA\cdot MB,$ t. y., $x(1+x)=1.$

Iš čia gauname, kad atkarpos *PM* ilgis *x* yra lygties $x^2+x-1=0$ sprendinys. Ši lygtis turi tik vieną teigiamą sprendinį $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, taigi $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, Todėl $PQ=MN+2PM=\sqrt{5}.$

Ats.: $\sqrt{5}.$

5. Sakykime, kad apskritimo skersmuo *DE* eina per tašką *C* ir $CD=7$ (5 pav.). Pagal taške *C* susikertančių apskritimo stygų teoremą (2 teorema) turime, kad $AC\cdot CB=CD\cdot CE.$ Iš čia

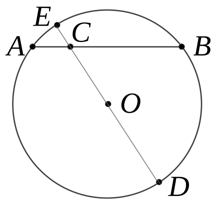
$$CE = \frac{AC \cdot CB}{CD} = \frac{48}{7}.$$

Tuomet skersmuo

$$DE = CD + CE = 7 + \frac{48}{7} = \frac{97}{7},$$

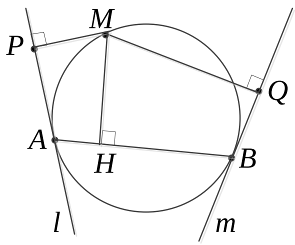
taigi apskritimo spindulys $R = \frac{DE}{2} = \frac{97}{14}$. Kadangi $2R = \frac{97}{7} \langle AB = 16,$ tai uždavinio sąlygą atitin–kančio apskritimo nėra.

Ats.: Nėra sprendinių.



5 pav.

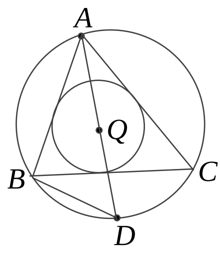
6. Sakykime, kad tiesės *l* ir *m* yra ap–skritimo liestinės taškuose *A* ir *B*, taškai *P* ir *Q* yra taško *M* ortogonaliosios projekcijos tiesėse *l* ir *m*, o taškas *H* yra taško *M* ortogonalioji projekcija tiesėje *AB* (6 pav.). Tuomet $MP = 4$, $MQ = 9$ ir pagal 4 pavyzdžio rezultatą $MH = \sqrt{MP \cdot MQ} = \sqrt{4 \cdot 9} = 6.$



6 pav.

*Ats.:*6.

7. Kadangi taškas *D* yra lanko *BC* vidurio taškas, tai tiesė *AD* yra kampo *A* pusiaukampinė, taigi įbrėžto į trikampį apskritimo centras *Q* yra atkarpoje *AD* (7 pav.). Kadangi $\angle BAD = 30°$, o apie trikampį *BAD* apibrėžto apskritimo spindulys $R = 10$, tai pritaikę sinusų teoremą šiam trikampiui turime, kad $\frac{BD}{\sin 30^\circ} = 2R$, t. y., $BD = 2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 10$. Iš 5 pavyzdžio rezultato seka, kad $BD = QD$, taigi $QD = 10$.



7 pav.

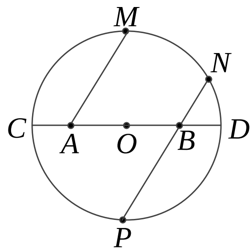
Ats.: 10.

8. Sakykime, kad atkarpa CD yra apskritimo skersmuo, einantis per taškus A ir B, o tiesė BN kerta apskritimą dar ir taške P (8 pav.). Kadangi tiesės AM ir BN yra lygiagrečios, o taškai A ir B yra simetriški taško O atžvilgiu, tai tiesės AM ir BN yra simetriškos taško O atžvilgiu, todėl ir atkarpos AM ir BP yra simetriškos taško O atžvilgiu, t. y., $AM = BP$. Iš čia seka, kad

$$AM \cdot BN = BP \cdot BN = BC \cdot BD.$$

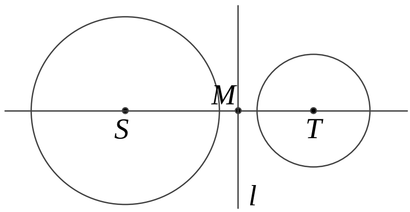
Kadangi $BC = 9 - 5 = 4,$ $DB = 5 + 9 = 14,$ tai $AM \cdot BN = 56.$

Ats.: 56.



8 pav.

9. Kadangi atstumas tarp apskritimų centrų ST yra didesnis už apskritimų spindulių sumą, tai apskritimai neturi bendrų taškų. Sakykime, kad tiesė l yra duotųjų apskritimų radikalioji ašis, kertanti tiesę ST taške M (9 pav.). Pažymėkime $SM = x,$ tuomet $TM = 10 - x.$ Taško M laipsnis pirmojo apskritimo atžvilgiu lygus $x^2 - 5^2,$ o jo laipsnis kito apskritimo atžvilgiu lygus $(10 - x)^2 - 3^2,$ Kadangi taškas M yra apskritimų radikaliojoje ašyje, tai šie jo laipsniai yra vienodi, t. y., teisinga lygybė $x^2 - 25 = (10 - x)^2 - 9,$ Iš jos randame, kad $x = \dfrac{29}{5},$ Taigi $SM = \dfrac{29}{5},$ tuomet $TM = 10 - SM = \dfrac{21}{5}.$



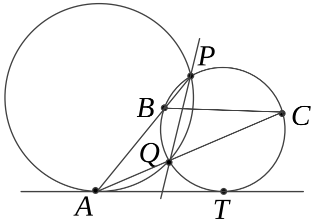
9 pav.

Ats.: $\dfrac{29}{5}$ ir $\dfrac{21}{5}$.

10. Per taškus A, P ir Q nubrėžiame apskritimą. Kadangi

$$\angle TAC = \angle BCA = \angle BCQ = \angle BPQ,$$

tai tiesė AT yra ir šio apskritimo liestinė. Kadangi šie du apskritimai kertasi taškuose P ir Q, tai tiesė PQ



10 pav.

yra jų radikalioji ašis, todėl ji kerta atkarpą *AT* jos vidurio taške.

Ats.: 1:1.

TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Kadangi

$363825 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11$, $5265 = 3^4 \cdot 5 \cdot 13$, tai $d = 3^3 \cdot 5 = 135$.

2. Pagal dalybos su liekana teoremą

$-1273 = -27 \cdot 48 + 23$. Taigi $r = 23$.

3.

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$

4.

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

5. $A = \bar{5}^4 + 4\cdot\bar{6}^3 - \bar{3}\cdot\bar{4}^2 + \bar{2} = \bar{2} + 4\cdot\bar{6} - \bar{3}\cdot\bar{2} + \bar{2} = \bar{2} + \bar{3} - \bar{6} + \bar{2} = \bar{1}.$

6. $11x - 6 \equiv 3(\mathrm{mod}\ 7) \Leftrightarrow 11x \equiv 2(\mathrm{mod}\ 7)$.
Patikrinę visas likinių klases moduliu 7, gauname $x \equiv 4(\mathrm{mod}\ 7)$.

7. Duotąjį lyginį tenkina likinių klasė $x \equiv 6(\mathrm{mod} 7)$. Tuo nesunku įsitikinti: $3\cdot\bar{6}^2 - \bar{6} = 3\cdot\bar{1} - \bar{6} = \bar{3} + \bar{1} = \bar{4}.$

8.

$3^4 \equiv 1(\mathrm{mod} 10) \Rightarrow (3^4)^{32} \equiv 1(\mathrm{mod} 10) \Rightarrow 3^{128} \equiv 1(\mathrm{mod} 10) \mid \cdot 3^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{131} \equiv 7(\mathrm{mod} 10)$

$3^4 \equiv 1(\mathrm{mod} 10) \Rightarrow (3^4)^{32} \equiv 1(\mathrm{mod} 10) \Rightarrow 3^{128} \equiv 1(\mathrm{mod} 10) \mid \cdot 3^3 \Rightarrow$.

$\Rightarrow 3^{131} \equiv 7(\mathrm{mod} 10).$

$7^2 \equiv 9(\mathrm{mod} 10) \Rightarrow 7^4 \equiv 1(\mathrm{mod} 10) \Rightarrow (7^4)^{35} \equiv 1(\mathrm{mod} 10) \Rightarrow$

$\Rightarrow 7^{140} \equiv 1(\mathrm{mod} 10) \mid \cdot 7 \Rightarrow 7^{141} \equiv 7(\mathrm{mod} 10).$

$13 \equiv 3(\mathrm{mod} 10) \Rightarrow 13^2 \equiv 9(\mathrm{mod} 10) \Rightarrow 13^4 \equiv 1(\mathrm{mod} 10) \Rightarrow$

$\Rightarrow (13^4)^{37} \equiv 1(\mathrm{mod} 10) \Rightarrow 13^{148} \equiv 1(\mathrm{mod} 10) \mid \cdot 3^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 13^{151} \equiv 7(\mathrm{mod} 10).$ Todėl $n \equiv 7 + 7 + 7 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 10)$.

Taigi paskutinis skaičiaus *n* skaitmuo yra 1.

9. $17^2 \equiv 89(\mathrm{mod} 100) \Rightarrow 17^4 \equiv 21(\mathrm{mod} 100) \Rightarrow 17^8 \equiv 41(\mathrm{mod} 100) \Rightarrow$

$\Rightarrow 17^{16} \equiv 81(\mathrm{mod} 100) \Rightarrow$

$17^{32} \equiv 61(\mathrm{mod} 100) \Rightarrow 17^{64} \equiv 21(\mathrm{mod} 100) \Rightarrow$

$\Rightarrow 17^{128} \equiv 41(\mathrm{mod} 100) \Rightarrow 17^{256} \equiv 81(\mathrm{mod} 100) \Rightarrow$

$17^{32} \equiv 61(\mathrm{mod} 100) \Rightarrow 17^{64} \equiv 21(\mathrm{mod} 100) \Rightarrow$

$\Rightarrow 17^{128} \equiv 41(\mathrm{mod} 100) \Rightarrow 17^{256} \equiv 81(\mathrm{mod} 100) \Rightarrow$

$17^{512} \equiv 61(\text{mod}\,100) \Rightarrow 17^{1024} \equiv 21(\text{mod}\,100) \,|\cdot 17^{512} \Rightarrow$
$17^{1792} \equiv 61(\text{mod}\,100) \,|\cdot 17^{128} \Rightarrow 17^{1920} \equiv 01(\text{mod}\,100) \,|\cdot 17^{64} \Rightarrow$
$\Rightarrow 17^{1984} \equiv 21(\text{mod}\,100) \,|\cdot 17^{32} \Rightarrow$
$17^{2016} \equiv 81(\text{mod}\,100) \,|\cdot 17 \Rightarrow 17^{2017} \equiv 77(\text{mod}\,100).$
Taigi skaičiaus n paskutiniai du skaitmenys yra 77.

10. $6^2 \equiv 10(\text{mod}\,13) \Rightarrow 6^4 \equiv 9(\text{mod}\,13) \Rightarrow 6^8 \equiv 3(\text{mod}\,13) \Rightarrow .$
$\Rightarrow 6^{16} \equiv 9(\text{mod}\,13) \Rightarrow 6^{32} \equiv 3(\text{mod}\,13) \Rightarrow$
$6^{64} \equiv 9(\text{mod}\,13) \,|\cdot 6^4 \Rightarrow 6^{68} \equiv 3(\text{mod}\,13) \,|\cdot 6^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6^{70} \equiv 4(\text{mod}\,13) \,|\cdot 6 \Rightarrow 6^{71} \equiv 11(\text{mod}\,13).$
$12 \equiv -1(\text{mod}\,13) \Rightarrow 12^8 \equiv 1(\text{mod}\,13) \,|\cdot 12 \Rightarrow 12^9 \equiv -1(\text{mod}\,13).$
$15 \equiv 2(\text{mod}\,13) \Rightarrow 15^2 \equiv 4(\text{mod}\,13) \Rightarrow 15^4 \equiv 3(\text{mod}\,13) \Rightarrow$
$\Rightarrow 15^8 \equiv 9(\text{mod}\,13) \Rightarrow 15^{16} \equiv 3(\text{mod}\,13) \,|\cdot 15^4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 15^{20} \equiv 9(\text{mod}\,13) \,|\cdot 15 \Rightarrow 15^{21} \equiv 5(\text{mod}\,13).$
Todėl $n \equiv 11+1+5 \equiv 4(\text{mod}\,13)$. Vadinasi, skaičiaus n dalybos iš 13 liekana lygi 4.

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Lygčių sistemą pertvarkome taip:

$$\begin{cases} z = 8-2x-y, \\ x+3y-(8-2x-y) = 2, \\ 4x-2y+8-2x-y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 8-2x-y, \\ 3x+4y = 10, \\ 2x-3y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 8-2x-y, \\ y = \dfrac{1}{4}(10-3x), \\ 2x - \dfrac{3}{4}(10-3x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 8-2x-y, \\ y = 2{,}5-0{,}75x, \\ 4{,}25x = 8{,}5. \end{cases}$$

Iš pastarosios sistemos gauname, kad $x=2,\quad y=1,\quad z=3.$ Taigi sistema turi vienintelį sprendinį (2; 1; 3).

Ats.: (2; 1; 3).

2. Lygčių sistemą pertvarkome taip:

$$\begin{cases} z=2x+4y-4, \\ 3x-y+2x+4y-4=1, \\ x-5y+2(2x+4y-4)=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2x+4y-4, \\ 5x+3y=5, \\ 5x+3y=5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=2x+4y-4, \\ 5x+3y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2x+4y-4, \\ x=1-0{,}6y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=2(1-0{,}6y)+4y-4, \\ x=1-0{,}6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2{,}8y-2, \\ x=1-0{,}6y. \end{cases}$$

Matome, kad pastaroji sistema (taigi ir pradinė) turi be galo daug sprendinių, kuriuos galima užrašyti taip: $(1-0{,}6t;\, t;\, 2{,}8t-2),\ t\in\mathbf{R}.$

Ats.: $(1-0{,}6t;\, t;\, 2{,}8t-2),\ t\in\mathbf{R}.$

3. Pažymėję $u=x+y,\ \ v=xy,$ gausime:

$$x^3+y^3+xy(x+y)=(x+y)(x^2+y^2)=(x+y)((x+y)^2-2xy)=$$
$$=u(u^2-2v);$$

$$x^2y^2(x^2+y^2)=(xy)^2((x+y)^2-2xy)=v^2(u^2-2v).$$

Šias išraiškas įrašykime į sprendžiamą sistemą. Gausime tokią lygčių su nežinomaisiais u ir v sistemą:

$$\begin{cases} u(u^2-2v)=13, \\ v^2(u^2-2v)=468. \end{cases}$$

Aišku, kad $u\neq 0,\ \ v\neq 0$ ir $u^2-2v\neq 0.$

Padalinę pirmą lygtį iš antros, gausime, kad $u=\dfrac{v^2}{36}.$

Remdamiesi šia išraiška spręskime antrą lygtį:

$$v^2\left(\left(\frac{v^2}{36}\right)^2-2v\right)=468,$$

$$v^3\left(\left(\frac{v}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6}-2\right)=13\cdot 36,$$

$$\left(\frac{v}{6}\right)^3\cdot\left(\left(\frac{v}{6}\right)^3-12\right)=13.$$

Pažymėję $a=\left(\frac{v}{6}\right)^3$, gausime:

$$a(a-12)=13,$$
$$a^2-12a-13=0,$$
$$(a-6)^2-49=0,$$
$$a=6\pm 7,$$
$$a=13 \text{ arba } a=-1.$$

Jei $a=13$, tai $v=6\sqrt[3]{13}$; jei $a=-1$, tai $v=-6$. Pirmu atveju $u=\sqrt[3]{169}$, o antru atveju $u=1$. Taigi $u=\sqrt[3]{169}$, $v=6\sqrt[3]{13}$ arba $u=1$, $v=-6$.

Kvadratinė lygtis $t^2-\sqrt[3]{169}\,t+6\sqrt[3]{13}=0$ sprendinių neturi (jos diskriminantas neigiamas), o kvadratinės lygties $t^2-t-6=0$ sprendiniai yra 3 ir –2. Todėl $x=3$, $y=-2$ arba $x=-2$, $y=3$.

Vadinasi, lygčių sistema turi du sprendinius: (3; –2) ir (–2; 3).

Ats.: (3; –2), (–2; 3).

4. Tegu $u=x+y$, $v=xy$. Kadangi

$$x^2+y^2+2(x+y)=((x+y)^2-2xy)+2(x+y)=u^2-2v+2u,$$

$$x^2+y^2+xy=((x+y)^2-2xy)+xy=(x+y)^2-xy=u^2-v,$$

tai sprendžiama lygčių sistema įgis tokį pavidalą:

$$\begin{cases} u^2 - 2v + 2u = 23, \\ u^2 - v = 19. \end{cases}$$

Šią sistemą galima spręsti taip:

$$\begin{cases} v = u^2 - 19, \\ u^2 - 2(u^2 - 19) + 2u = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = u^2 - 19, \\ u^2 - 2u - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = u^2 - 19, \\ (u-1)^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = u^2 - 19, \\ u = 1 \pm 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = u^2 - 19, \\ u = -3 \text{ arba } u = 5. \end{cases}$$

Taigi $u = -3,\ v = -10$ arba $u = 5,\ v = 6.$

Kvadratinės lygties $t^2 + 3t - 10 = 0$ sprendiniai yra –5 ir 2, o kvadratinės lygties $t^2 - 5t + 6 = 0$ sprendiniai yra 2 ir 3, todėl gauname keturias skaičių *x* ir *y* poras $(x;\, y),$ kurios tenkina pradinę lygčių sistemą: (–5; 2), (2; –5), (2; 3) ir (3; 2).

Ats.: (–5; 2), (2; –5), (2; 3) ir (3; 2).

5. Sudauginę ir sutraukę panašiuosius narius, gausime tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 14x - 12y - 3xy = 0, \\ 18x - 6y - 7xy = 0. \end{cases}$$

Antrą lygtį padauginę iš –2 ir sudėję su pirma lygtimi, gausime lygtį $-22x + 11xy = 0,$ iš kurios išplaukia, kad $x = 0$ arba $y = 2.$

Įrašę $x = 0,$ tiek iš pirmos, tiek iš antros lygties gausime, kad $y = 0.$ O įrašę į sistemą $y = 2,$ gausime, kad $x = 3.$

Vadinasi, lygčių sistema turi du sprendinius: (0; 0) ir (3; 2).

Ats.: (0; 0), (3; 2).

6. Aišku, kad $x \neq 0$ ir $y \neq 0.$ Todėl pirmą lygtį padauginę iš *xy* gausime ekvivalenčią lygčių sistemą

$$\begin{cases} y - x = \dfrac{1}{36} \cdot xy, \\ xy^2 - x^2 y = 324. \end{cases}$$

Ją spręskime taip:

$$\begin{cases} y-x=\dfrac{1}{36}xy, \\ xy(y-x)=324 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-x=\dfrac{1}{36}xy, \\ xy\cdot\dfrac{1}{36}xy=324 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-x=\dfrac{1}{36}xy, \\ (xy)^2=36^2\cdot 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y-x=\dfrac{1}{36}xy, \\ xy=\pm 108 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-x=3, \\ xy=108 \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} y-x=-3, \\ xy=-108. \end{cases}$$

Pirma sistema turi du sprendinius: (–12; –9) ir (9; 12), o antra sistema sprendinių neturi. Taigi pradinė sistema turi du sprendinius: (–12; –9) ir (9; 12).

Ats.: (–12; –9) ir (9; 12).

7. Sudėję abi lygtis gausime lygtį $2xy+2\cdot\dfrac{y}{x}=25,$ o iš jos – lygtį

$$2y\left(x+\frac{1}{x}\right)=25. \qquad (1)$$

Atėmę iš pirmos antrą lygtį, gausime lygtį $2\cdot\dfrac{1}{xy}+2\cdot\dfrac{x}{y}=1,$ o iš jos – lygtį

$$\frac{2}{y}\left(\frac{1}{x}+x\right)=1. \qquad (2)$$

Toliau spręskime (1) ir (2) lygčių sistemą. Gausime:

$$\begin{cases} 2y\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=25, \\ \dfrac{2}{y}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{25}{2y}, \\ \dfrac{2}{y}\cdot\dfrac{25}{2y}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{25}{2y}, \\ y^2=25 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=-5, \\ x+\dfrac{1}{x}=-2{,}5 \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} y=5, \\ x+\dfrac{1}{x}=2{,}5. \end{cases}$$

Lygties $x+\frac{1}{x}=-2{,}5$ sprendiniai yra -2 ir $-0{,}5$, o lygties $x+\frac{1}{x}=2{,}5$ sprendiniai yra 0,5 ir 2. Todėl gauname keturis pradinės lygčių sistemos sprendinius: (–2; –5), (–0,5; –5), (0,5; 5) ir (2; 5).

Ats.: (–2; –5), (–0,5; –5), (0,5; 5), (2; 5).

8. Sandaugos *xy* atžvilgiu antra lygtis yra kvadratinė lygtis. Ją išsprendę gauname, kad $xy=-3$ arba $xy=2$.

Vadinasi, reikia rasti tokias nežinomųjų *x* ir *y* reikšmių poras, kurios tenkina arba lygčių sistemą

$$\begin{cases}\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{x}{y}\right)^3=12,\\ xy=-3,\end{cases} \tag{3}$$

arba lygčių sistema

$$\begin{cases}\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{x}{y}\right)^3=12,\\ xy=2.\end{cases} \tag{4}$$

Tuo tarpu pirmą lygtį galima pertvarkyti taip:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{x}{y}\right)^3=12,$$

$$\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2-4\right)+\left(\left(\frac{x}{y}\right)^3-8\right)=0,$$

$$\left(\frac{x}{y}-2\right)\left(\frac{x}{y}+2\right)+\left(\frac{x}{y}-2\right)\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+4\right)=0,$$

$$\left(\frac{x}{y}-2\right)\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\cdot\frac{x}{y}+6\right)=0,$$

$$\left(\frac{x}{y}-2\right)\left(\left(\frac{x}{y}+1\right)^2+5\right)=0.$$

Matome, kad būtinai $\frac{x}{y}-2=0,$ arba $x=2y.$

Taigi (3) sistema ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} x=2y, \\ xy=-3, \end{cases} \tag{5}$$

o (4) sistema ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} x=2y, \\ xy=2. \end{cases} \tag{6}$$

Aišku, kad (5) sistema sprendinių neturi, o (6) sistemos sprendiniai yra (–2; –1) ir (2; 1).

Gauname du pradinės lygčių sistemos sprendinius: (–2; –1) ir (2; 1).

Ats.: (–2; –1) ir (2; 1).

9. Iš pirmos lygties gauname, kad $y+z=6-x$ ir $x+z=6-y.$ Todėl

$$\begin{cases} x(y+z)=5, \\ y(x+z)=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(6-x)=5, \\ y(6-y)=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-6x+5=0, \\ y^2-6y+8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \text{ arba } x=5, \\ y=2 \text{ arba } y=4. \end{cases}$$

Iš pradinės sistemos pirmos lygties gauname, kad $z=6-(x+y),$ todėl:

$$z=3, \text{ kai } x=1, \ y=2;$$
$$z=1, \text{ kai } x=1, \ y=4;$$
$$z=-1, \text{ kai } x=5, \ y=2;$$
$$z=-3, \text{ kai } x=5, \ y=4.$$

Taigi pradinė lygčių sistema turi keturis sprendinius: (1; 2; 3), (1; 4; 1), (5; 2; –1), (5; 4; –3).

Ats.: (1; 2; 3), (1; 4; 1), (5; 2; –1), (5; 4; –3).

10. Lygčių sistemą pertvarkykime taip:

$$\begin{cases} x+y+z=13, \\ (x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2=91-169, \\ y^2=xz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=13, \\ xy+xz+yz=39, \\ y^2=xz \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=13, \\ xy+y^2+yz=39, \\ y^2=xz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=13, \\ y(x+y+z)=39, \\ y^2=xz \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=13, \\ y(x+y+z)=39, \\ y^2=xz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=13, \\ y=3, \\ y^2=xz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3, \\ x+z=10, \\ xz=9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=3, \\ z=10-x, \\ x(10-x)=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3, \\ z=10-x, \\ x^2-10x+9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3, \\ z=10-x, \\ x=1 \text{ arba } x=9. \end{cases}$$

Taigi lygčių sistema turi du sprendinius: (1; 3; 9) ir (9; 3; 1).
Ats.: (1; 3; 9) ir (9; 3; 1).

PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Nagrinėjamąjį reiškinį pažymėkime A. Tuomet

$$A=\frac{(7+4i)\cdot(-2+4i)}{\frac{1-i+1+i}{2}}=\frac{-14-16+28i-8i}{1}=-30+20i.$$

Ats. $-30+20i.$

2. Pritaikę geometrinės progresijos n narių sumos formulę gausime:

$A=\dfrac{1-i^{2018}}{1-i}$. Kadangi $i^{2018}=i^{4\cdot 504+2}=i^2=-1$, tai

$$A=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)}=1+i.$$

Ats. $1+i.$

3. Pirmąją sistemos lygtį padauginę iš $3-2i$, antrąją – iš $-2+i$ ir abi lygtis sudėję gausime lygtį

$$\big((2+i)\cdot(3-2i)+(3+2i)\cdot(-2+i)\big)\,x=6(3-2i)+8(-2+i).$$

Išsprendę ją, randame $x=2+i$. Vadinasi, nagrinėjamoji lygčių sistema ekvivalenti tokiai lygčių sistemai:

$$\begin{cases}(2+i)x+(2-i)y=6,\\ x=2+i.\end{cases}$$

Įrašę į šios sistemos pirmąją lygtį $x=2+i$ ir ją išsprendę, gauname $y=2-i$.

Ats. $x=2+i$, $y=2-i$.

4. Tegu $z=x+iy$. Perrašome lygtį įrašę $z=x+iy$:

$$\sqrt{x^2+y^2}+x+iy=1+3i.$$

Pagal kompleksinių skaičių lygumo apibrėžimą ši lygtis ekvivalenti sistemai:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+x=1,\\ y=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+9}=1-x,\\ y=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-4,\\ y=3.\end{cases}$$

Ats. $z=-4+3i.$

5. Duotosios trupmenos skaitiklį ir vardiklį užrašykime trigono–metrine forma:

$$-\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right),$$

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right).$$

Tuomet

$$(-\sqrt{3}+i)^{15}=2^{15}\left(\cos\frac{75\pi}{6}+i\sin\frac{75\pi}{6}\right)=$$

$$=2^{15}\left(\cos(6\cdot2\pi+\frac{3\pi}{6})+i\sin(6\cdot2\pi+\frac{3\pi}{6})\right)=$$

$$= 2^{15}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2^{15} i,$$

$$(1-i)^{20} = 2^{10}\big(\cos(-5\pi) + i\sin(-5\pi)\big) = 2^{10}\cdot(-1) = -2^{10},$$

$$\frac{(-\sqrt{3}+i)^{15}}{(1-i)^{20}} = \frac{2^{15}}{-2^{10}} = -2^5 i = -32i.$$

Ats. $-32i$.

6. Skaičių $1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$ užrašykime trigonometrine forma:

$$1-\frac{\sqrt{3}-i}{2} = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i = 1-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6} =$$

$$= 2\sin^2\frac{\pi}{12} + 2i\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = 2i\sin\frac{\pi}{12}\left(\frac{1}{i}\sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}\right) = .$$

$$= 2i\sin\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right) = 2i\sin\frac{\pi}{12}\left(\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12})\right).$$

Tuomet $\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24} = \left(2i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)^{24}\left(\cos(-\dfrac{\pi}{12}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{12})\right)^{24} =$

$$= 2^{12}\left(2\sin^2\frac{\pi}{12}\right)^{12}\big(\cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi)\big) =$$

$$= 2^{12}\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)^{12} = 2^{12}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12} = (2-\sqrt{3})^{12}.$$

Ats. $(2-\sqrt{3})^{12}$.

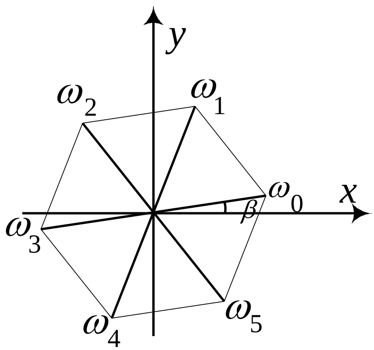
7. Kadangi $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, tai

$$\sqrt[6]{1+i} = \sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{6}\right) = \omega_k\,,$$

$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$;

$$\omega_0 = \sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\right), \quad \omega_1 = \sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{24} + i\sin\frac{9\pi}{24}\right),$$
$$\omega_2 = \sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{24} + i\sin\frac{17\pi}{24}\right), \quad \omega_3 = \sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{24} + i\sin\frac{25\pi}{24}\right),$$
$$\omega_4 = \sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{33\pi}{24} + i\sin\frac{33\pi}{24}\right), \quad \omega_5 = \sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{41\pi}{24} + i\sin\frac{41\pi}{24}\right).$$

Geometriškai šaknys $\sqrt[6]{1+i}$ vaizduojamos taisyklingojo šešiakampio su centru koordinačių pradžioje, pasukto kampu $\beta = \dfrac{\pi}{24} = 7{,}5^0$ prieš laikrodžio rodyklę, viršūnėmis (žr. pav.).



8. Nagrinėkime sumą

$$R + iI =$$
$$= (\cos 2x + \cos 4x + \ldots + \cos 12x) + i(\sin 2x + \sin 4x + \ldots \sin 12x) =$$
$$= (\cos 2x + i\sin 2x) + (\cos 4x + i\sin 4x) + \ldots + (\cos 12x + i\sin 12x) =$$
$$= (\cos 2x + i\sin 2x) + (\cos 2x + i\sin 2x)^2 + \ldots + (\cos 2x + i\sin 2x)^6 =$$
$$= \frac{(\cos 2x + i\sin 2x)^7 - (\cos 2x + i\sin 2x)}{\cos 2x + i\sin 2x - 1}.$$

Apskaičiuokime gautąjį reiškinį:

$$\frac{\cos 14x + i\sin 14x - \cos 2x - i\sin 2x}{\cos 2x - 1 + i\sin 2x} =$$

$$=\frac{\cos 14x-\cos 2x+i(\sin 14x-\sin 2x)}{-2\sin^2 x+2i\sin x\cos x}=$$

$$\frac{-2\sin 8x\cdot\sin 6x+2i\cos 8x\cdot\sin 6x}{2\sin x\cdot(i\cos x-\sin x)}=\frac{2i\sin 6x(\cos 8x+i\sin 8x)}{2i\sin x(\cos x+i\sin x)}=$$

$$=\frac{\sin 6x(\cos 7x+i\sin 7x)}{\sin x}=\frac{\sin 6x\cdot\cos 7x}{\sin x}+i\frac{\sin 6x\cdot\sin 7x}{\sin x}.$$

Taigi $I=\sin 2x+\sin 4x+...+\sin 12x=\dfrac{\sin 6x\sin 7x}{\sin x}$.

Ats. $\dfrac{\sin 6x\cdot\cos 7x}{\sin x}$.

9. $x^6+1=0\Leftrightarrow x^6=-1$. Skaičiaus -1 trigonometrinė forma yra: $-1=\cos\pi+i\sin\pi$. Todėl turėsime tokius šešis pastarosios lygties sprendinius:

$$x_k=\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6},\ k=0,1,2,3,4,5.\ \Rightarrow$$

$$x_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,$$

$$x_1=\cos\frac{3\pi}{6}+i\sin\frac{3\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i,$$

$$x_2=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,$$

$$x_3=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,$$

$$x_4=\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i,$$

$$x_5=\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$$

10. Padalykime abi lygties puses iš $(z-i)^3$. Gauname lygtį $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3=1$

ir tuomet $\frac{z+i}{z-i}=\sqrt[3]{1}$. Kadangi

$$\sqrt[3]{1}=\cos\frac{0+2k\pi}{3}+i\sin\frac{0+2k\pi}{3},\ k=0,1,2,\Rightarrow$$

$$x_0=\cos 0+i\sin 0=1,\quad x_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$x_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

tai turime spręsti tris lygtis:

$$\frac{z+i}{z-i}=1,\quad \frac{z+i}{z-i}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \frac{z+i}{z-i}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Nesunku įsitikinti, kad pirmoji lygtis sprendinių neturi.

Sprendžiame antrąją lygtį:

$$\frac{z+i}{z-i}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\Leftrightarrow z+i=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot(z-i)\Leftrightarrow (3-i\sqrt{3})z=\sqrt{3}+i.$$

Iš čia gauname, kad $z_1=\frac{\sqrt{3}-i}{3-i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-i)}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Analogiškai apskaičiuojamas trečiosios lygties sprendinys:

$$\frac{z+i}{z-i}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\Leftrightarrow z+i=-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot(z-i)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})z=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\Rightarrow$$

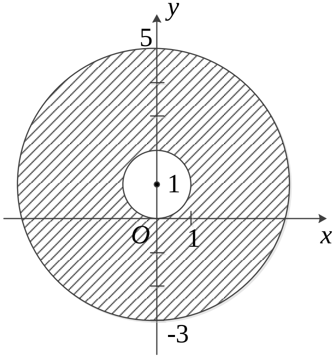
$$z_2=-\frac{\sqrt{3}+i}{3+i\sqrt{3}}=-\frac{(\sqrt{3}+i)\cdot(3-i\sqrt{3})}{(3+i\sqrt{3})\cdot(3-i\sqrt{3})}=-\frac{4\sqrt{3}}{12}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Pastaba. Šią lygtį galima spręsti ir kitaip: pakėlę abu reiškinius kubu ir sutraukę panašiuosius narius gausime kvadratinę lygtį.

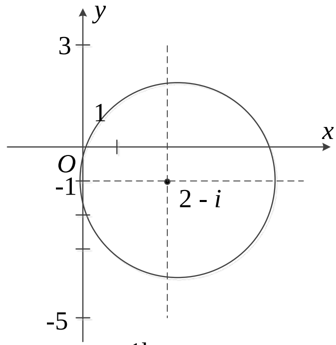
Ats. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. 1. Žr. 1a) ir 1b) pav.



1a pav.

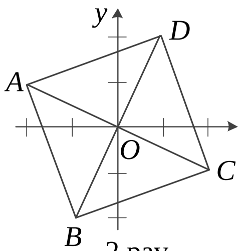


1b pav.

2. Kadangi $\angle AOB = 90°$, tai taškas ***B*** yra gaunamas taško *A* posūkiu apie tašką *O* 90° kampu. Kompleksinis skaičius, kurio modulis lygus 1, o argumentas lygus 90° yra lygus $z = i$ (2 pav.). taigi taško *B* kompleksinė koordinatė

$$b = ai = (-2+i)i = -1-2i,$$

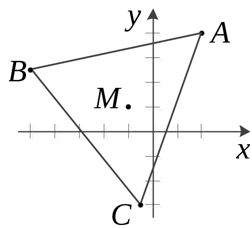
t. y., $B(-1, -2)$. Analogiškai taško *C* kompleksinė koordinatė $c = bi = (-1-2i)i = 2-i$, o taško *D* kompleksinė koordinatė $d = ci = (2-i)i = 1+2i$. Taigi $C(-2, -1)$, $D(1, 2)$.



2 pav.

Ats.: (–1, -2), (2, –1), (1, 2).

3. Kadangi $\angle AMB = 120°$, o kompleksinio skaičiaus $z = \cos 120° + i \sin 120°$ modulis lygus 1, o argumentas lygus 120°, tai pagal 4 pavyzdyje gautą formulę turime, kad taško *B* kompleksinė koordinatė *b* tenkina lygybę



3 pav.

$$b=-1+i+((2+4i)-(-1+i))\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=$$

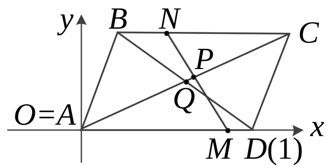
$$=\left(-\frac{5}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)i.$$

Analogiškai taško $C(c)$ kompleksinei koordinatei turime

$$c=a+(b-a)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left(-\frac{5}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i.$$

Ats.: $B\left(-\frac{5}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)$, $C\left(-\frac{5}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. Parinkime plokštumos koordinačių sistemą Oxy taip, kad taškas O sutaptų su lygiagretainio viršūne A, o jo viršūnė D turėtų kompleksinę ko–ordinatę $D(1)$ (4 pav.). Sakykime, kad viršūnės B kompleksinė koordinatė $B(b)$, tai pagal 1 pavyzdžio rezultatą viršūnė $C(b+1)$. Kadangi $AM:MB=6:1$,



4 pav.

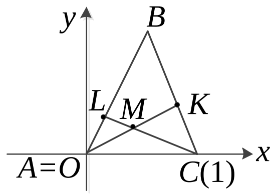
tai $a=6$, todėl $M\left(\frac{0+6\cdot 1}{1+6}\right)$, t. y., $M\left(\frac{6}{7}\right)$. Kadangi $BN:NC=2:5$, tai $a=\frac{2}{3}$, todėl taško N kompleksinei koordinatei n turime $n=\dfrac{b+\frac{2}{3}(b+1)}{1+\frac{2}{3}}=\dfrac{7b+2}{7}$, taigi $N\left(\frac{7b+2}{7}\right)$. Sakykime, kad tiesė MN įstrižainę AC kerta taške $P(p)$ ir $AP:PC=x$, o $MP:PN=y$. Tuomet $p=\dfrac{0+x\cdot(b+1)}{1+x}=\dfrac{\frac{6}{7}+y\frac{7b-2}{7}}{1+y}$. Iš čia gauname lygybes $\frac{x}{1+x}=\frac{y}{1+y}$, $\frac{x}{1+x}=\frac{6+2y}{7(1+y)}$. Iš čia seka, kad $x=y=\frac{6}{5}$. Analogiškai tarę, kad tiesės MN ir BD kertasi taške $Q(q)$, o $BQ:QD=x$, $MQ:QN=y$, turime, kad $q=\frac{b+x\cdot 1}{1+x}=\frac{\frac{6}{7}+y\frac{7b+2}{7}}{1+y}$, t. y., $\frac{1}{1+x}=\frac{y}{1+y}$, $\frac{x}{1+x}=\frac{6+2y}{7(1+y)}$.

Iš čia randame, kad $y=\frac{1}{2}$, $x=2$.

Ats.: Įstrižainė AC dalijama santykiu $AP:PC=6:5$, įstrižainė BD santykiu $BQ:QD=2:1$.

4. Parinkime plokštumos koordinačių sistemą Oxy taip, kad taškas A būtų koordinačių pradžios taškas, o taškas C turėtų kompleksinę koordinatę $C(1)$ (5 pav.). Sakykime, kad $B(b)$, tuomet iš uždavinio sąlygos

$$L(l),\ l=\frac{0+\frac{2}{3}b}{1+\frac{2}{3}}=\frac{2b}{7},$$



5 pav.

$$K(k),\ k=\frac{1+\frac{2}{3}b}{1+\frac{2}{3}}=\frac{4+3b}{7}.$$

Jei $E(e)$, o $AM:MK=x$, $CM:ML=y$, tai $e=\frac{0+xk}{1+x}=\frac{1+yi}{1+y}$,

t. y., $k=\frac{1+\frac{2}{3}b}{1+\frac{2}{3}}=\frac{4+3b}{7}$. $\frac{x(4+3b)}{7(1+x)}=\frac{1+y\frac{2b}{7}}{1+y}$. Iš čia seka, kad

$\frac{4x}{7(1+x)} = \frac{1}{1+y}$, $\frac{3x}{7(1+x)} = \frac{2y}{7(1+y)}$. Išsprendę šią sistemą randame, kad $x = \frac{14}{15}$, $y = \frac{21}{8}$.

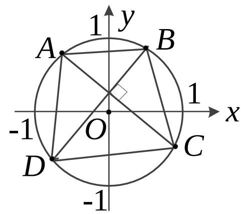
Ats.: $AM : MK = 14:15$, $CM : ML = 21:8$.

6. Sakykime, kad $ABCD$ – įbrėžtas į apskritimą $z\bar{z} = 1$ keturkampis, kurio įstrižainės AC ir BD yra statmenos (6 pav.), o viršūnių koordinatės yra $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$.

Turime

$$AB^2 = (a-b)(\bar{a}-\bar{b}) =$$

$$= (a-b)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) = -\frac{(a-b)^2}{ab},$$



6 pav.

ir analogiškai $CD^2 = -\frac{(c-d)^2}{cd}$. Kadangi keturkampio įstrižainės AC ir BD yra statmenos, tai $ac + bd = 0$, t. y., $a = -\frac{bd}{c}$. Todėl

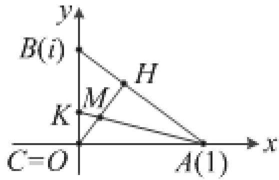
$$AB^2 + CD^2 = -\frac{(a-b)^2}{ab} - \frac{(c-d)^2}{cd} = \left(\frac{\left(-\frac{bd}{c} - b\right)^2}{-\frac{bd}{c}b} + \frac{(c-d)^2}{cd} \right) =$$

$$= -\left(-\frac{(d+c)^2}{dc} + \frac{(c-d)^2}{cd} \right) = \frac{-2cd - 2cd}{cd} = 4.$$

Analogiškai įrodoma, kad ir $AD^2 + BC^2 = 4$.

Ats.: 4.

7. Sakykime, kad kompleksinės plokštumos koordinačių sistema *Oxy* parinkta taip, kad $C(0)$, $A(1)$, $B(i)$ (7 pav.). Kadangi lygiašonio trikampio aukštinė nubrėžta į pagrindą yra ir pusiaukraštinė, tai pagal atkarpos vidurio taško koordinatės formulė taško *H* koordinatė yra $H\left(\frac{1+i}{2}\right)$, o taško *M*



7 pav.

koordinatė $M\left(\frac{1+i}{4}\right)$, Tiesė *AM* eina per taškus $A(1)$ ir $M\left(\frac{1+i}{4}\right)$, todėl jos lygtis

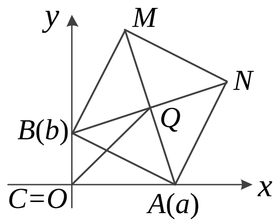
$$\left(1-\frac{1-i}{4}\right)z+\left(\frac{1+i}{4}-1\right)\bar{z}+1\cdot\frac{1-i}{4}-1\cdot\frac{1+i}{4}=0,$$

t. y., $(3+i)z+(-3+i)\bar{z}-2i=0.$ Rasime taško *K*, kuriame tiesė *AM* kerta statinį *BC* kompleksinę koordinatę. Tiesė *BC* yra menamoji ašis, todėl jos lygtis yra $z=-\bar{z}.$ Įrašę šią išraišką į tiesės *AM* lygtį, gauname, kad $(3+i)z-(-3+i)z=2i,$ t. y., $6z=2i,$ todėl $z=\frac{1}{3}.$

Taigi taško *K* koordinatė $K\left(\frac{1}{3}\right)$, taigi $CK:KB=1:2.$

Ats.: $CK:KB=1:2.$

8. Parinkime kompleksinės plokštumos koordinačių sistemą *Oxy* taip, kad trikampio viršūnių koordinatės būtų $C(0)$, $A(a)$, $B(bi)$ (8 pav.), čia *a* ir *b* – realieji skaičiai, ir sakykime, kad kvad–rato *ABMN* centro *Q* koordinatė $Q(q)$. Kadangi $\angle AQB=90°$, o $QA=QB,$ tai taškas *B* gaunamas atlikus taško *A* po–sūkį apie tašką *Q* 90° kampu. Kadangi



8 pav.

$$\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ = i,$$

tai iš 4 pavyzdžio rezultato išplaukia lygybė $bi = q + (a - q)i.$ Iš čia gauname, kad $q = \dfrac{bi - a}{1 - i},$ tuomet $\overline{q} = \dfrac{-bi - c}{1 + i},$ taigi $OQ^2 = q\overline{q} = \dfrac{a^2 + b^2}{2}.$

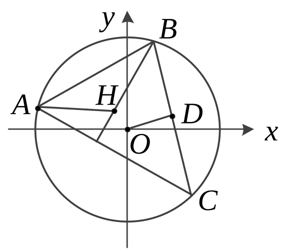
Ats.: $OQ = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}.$

9. Sakykime, kad trikampis ABC įbrėžtas į vienetinį apskritimą $z\overline{z} = 1,$ tuomet jo ortocentro H komp–leksinė koordinatė yra $h = a + b + c$ (9 pav.). Tuomet

$$AH^2 = (h - a)(\overline{h} - \overline{a}) = (b + c)(\overline{b} + \overline{c}) =$$

$$= (b + c)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{(b + c)^2}{bc};$$

taigi $AH = \dfrac{b + c}{\sqrt{bc}}.$ Kadangi $O(0),$ o



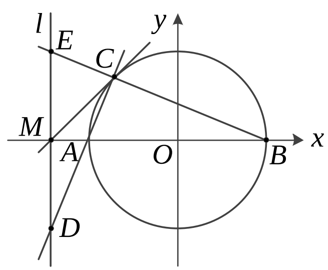
9 pav.

$D\left(\dfrac{b + c}{2}\right),$ tai $OD^2 = (d - 0)(\overline{d} - 0) = d\overline{d} = \dfrac{b + c}{2} \cdot \dfrac{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{2} = \dfrac{(b + c)^2}{4bc},$

taigi $OD = \dfrac{b + c}{2\sqrt{bc}}.$ Iš čia seka, kad $AH : OD = 2.$

Ats.: 2.

10. Sakykime, kad apskritimo lygtis kompleksinėje plokštumoje yra $z\overline{z} = 1,$ o koordinačių sistema parinkta taip, kad $A(-1),$ $B(1),$ (10 pav.). Jei c yra taško C kompleksinė koordinatė, tai $c\overline{c} = 1.$ Kadangi taškas $M(m)$ yra realiojoje ašyje,



10 pav.

tai $m=\overline{m}.$ Kadangi liestinė *CM* ir spindulys *OC* yra statmeni, tai iš čia taškui $M(m)$ turime lygybę $\frac{0-c}{c-m}=-\frac{0-\overline{c}}{\overline{c}-m}$, iš kurios randame, kad $m=\frac{c}{c+\overline{c}}=\frac{2c}{c^2+1}.$ Kadangi tiesė l yra lygiagreti su menamąja ašimi, tai taškams $D(d)$ ir $E(e)$ turime, kad $m-d=-(m-\overline{d})$ ir $m-e=-(m-\overline{e}).$ Kadangi taškai $A(-1)$ ir $C(c)$ yra vienetinio apskritimo taškai, tai tiesės *AC* lygtis yra C Taigi taško ***D*** koordinatę randame iš sistemos $m-d=-(m-\overline{d}),$ $d-c\overline{d}=c-1.$ Spręsdami ją gauname, kad $\overline{d}=2m-d,$ $d-c(2m-d)=c-1,$ $d=\frac{c-1+2cm}{c+1}$, o įrašę m reikšmę ir suprastinę, randame $d=\frac{c-1+\frac{2c^2}{c^2+1}}{c+1}=\frac{c^3+3c^2+c-1}{(c+1)(c^2+1)}.$ Analo– giškai užrašome tiesės *BC* lygtį $z+c\overline{z}=c+1$ ir iš lygčių sistemos $m-e=-(m-\overline{e}),$ $e+c\overline{e}=c+1$ randame $e=\frac{c^3-3c^2+c+1}{(1-c)(c^2+1)}.$

Kadangi $d+e=\frac{4c}{c^2+1}=2m,$ tai taškas *M* yra atkarpos *DE* vidurys.

Ats.: 1.

SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. $a=\log_{125}200-\frac{\log_5 7\cdot\log_7 4}{\log_6 25\cdot\log_5 6}=\log_{125}200-\frac{\log_5 4}{\log_5 25}=$

$=\log_{125}200-\log_5 2=\log_{125}200-\log_{125}8=\frac{2}{3},$

$$\frac{24^a}{3^{a-1}}=\frac{8^a\cdot 3^a}{3^{a-1}}=8^a\cdot 3=8^{\frac{2}{3}}\cdot 3=4\cdot 3=12.$$

Ats.: 12.

2. $a=\dfrac{36^{705}+216^{470}}{2\cdot 6^{410}}=\dfrac{6^{1410}+6^{1410}}{2\cdot 6^{410}}=\dfrac{2\cdot 6^{1410}}{2\cdot 6^{410}}=6^{1000}=\left(6^2\right)^{500}=36^{500}$,

$b=8^{834}-2^{2501}-16^{625}=2^{2502}-2^{2501}-2^{2500}=2^{2500}(4-2-1)=$

$=2^{2500}=\left(2^5\right)^{500}=32^{500}.$

Kadangi $36^{500}>32^{500}$ (nes $36>32>1$), tai $a>b$.

Ats.: $a>b$.

3. Taikydami laipsnių savybes, lygtį pertvarkome taip:

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{2^{\sqrt{2}}}=2^{\sqrt{2}\cdot x},$$

$$2^{\frac{1}{2}\cdot 2^{\sqrt{2}}}=2^{\sqrt{2}\cdot x}.$$

Lygties abiejose pusėse esančių laipsnių pagrindai lygūs, todėl

$$\frac{1}{2}\cdot 2^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\cdot x,$$

$$x=\frac{2^{-1}\cdot 2^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\frac{2^{\sqrt{2}-1}}{2^{\frac{1}{2}}}=2^{\sqrt{2}-1-\frac{1}{2}}=2^{\sqrt{2}-1\frac{1}{2}}.$$

Ats.: $x=2^{\sqrt{2}-1\frac{1}{2}}$.

4. Nustatome leistinąsias x reikšmes:

$$\begin{cases}3-x>0,\\ x-1>0\end{cases}\Rightarrow x\in(1;3).$$

Pradinę lygtį pertvarkykime taip:

$$\left(2^2\right)^{\log_2(3-x)} = x-1,$$
$$2^{2\log_2(3-x)} = x-1,$$
$$2^{\log_2(3-x)^2} = x-1.$$

Pritaikę pagrindinę logaritmų tapatybę, gauname kvadratinę lygtį $(3-x)^2 = x-1$, kurios sprendiniai yra $x_1 = 2$, $x_2 = 5$. Skaičius 5 nėra pradinės lygties sprendinys, nes jis nepriklauso intervalui $(1;3)$. Taigi lygtis turi vieną sprendinį $x = 2$.

Ats.: $x = 2$.

5. Nustatykime leistinąsias *x* reikšmes:

$$\begin{cases} 9-x^2 > 0, \\ x^2 - 16 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-3;3), \\ x \in (-\infty;-4) \cup (4;+\infty). \end{cases}$$

Sistema sprendinių neturi, todėl ir pradinė lygtis sprendinių neturi.

Ats.: $\varnothing$.

6. Kadangi $\log_2 x = -\log_{0,5} x$, tai pradinė lygtis ekvivalenti lygčiai

$$\log_{0,5}^3 x - 2\log_{0,5}^2 x - 4\log_{0,5} x + 8 = 0.$$

Šią lygtį sprendžiame grupuodami:

$$\log_{0,5}^2 x\left(\log_{0,5} x - 2\right) - 4\left(\log_{0,5} x - 2\right) = 0,$$
$$\left(\log_{0,5} x - 2\right)\left(\log_{0,5}^2 x - 4\right) = 0.$$

Matome, kad

$$\log_{0,5} x - 2 = 0 \text{ arba } \log_{0,5}^2 x - 4 = 0,$$
$$\log_{0,5} x = 2 \text{ arba } \log_{0,5}^2 x = 4,$$
$$\log_{0,5} x = 2 \text{ arba } \log_{0,5} x = 2, \text{ arba } \log_{0,5} x = -2,$$
$$x = \frac{1}{4} \text{ arba } x = 4.$$

Ats.: $x = \frac{1}{4}$ arba $x = 4$.

7.
$$4^{\log_5(x^2+1)} - 2^{\log_5(x^2+1)} - 2 = 0,$$
$$\left(2^2\right)^{\log_5(x^2+1)} - 2^{\log_5(x^2+1)} - 2 = 0,$$
$$\left(2^{\log_5(x^2+1)}\right)^2 - 2^{\log_5(x^2+1)} - 2 = 0.$$

Pažymėję $2^{\log_5(x^2+1)} = t$, $t > 0$, sprendžiame kvadratinę lygtį $t^2 - t - 2 = 0$. Jos sprendiniai yra $t_1 = -1$ (netenkina sąlygos $t > 0$) ir $t_2 = 2$. Tada sprendžiame lygtį $2^{\log_5(x^2+1)} = 2^1$. Ir gauname:
$\log_5(x^2+1) = 1 \Rightarrow x^2 + 1 = 5^1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

Ats.: $x = -2$ arba $x = 2$.

8. Lygtį sprendžiame logaritmuodami pagrindu *e*:
$$\ln\left(x^{2\ln x}\right) = \ln\left(e^3 \cdot x^5\right),$$
$$2\ln x \ln x = \ln e^3 + \ln x^5,$$
$$2\ln^2 x - 5\ln x - 3 = 0.$$

Pažymėję $\ln x = t$, gauname lygtį $2t^2 - 5t - 3 = 0$. Jos sprendiniai yra $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = 3$. Taigi $\ln x = -\frac{1}{2}$ arba $\ln x = 3$. Iš čia gauname, kad $x = e^{-0,5}$ arba $x = e^3$.

Ats.: $x = e^{-0,5}$ arba $x = e^3$.

9. Aišku, kad leistinajai aibei nepriklauso tik 0 ir -5. Pažymėję $\log_6\left(x^2+5x\right)^2 = t$, gauname kvadratinę lygtį $t^2 - 6t + 8 = 0$, kurios sprendiniai yra $t_1 = 2$, $t_2 = 4$.

Nagrinėjame du atvejus:

1) jei $t = 2$, tai

$\log_6\left(x^2+5x\right)^2 = 2 \Rightarrow 2\log_6\left|x^2+5x\right| = 2 \Rightarrow \log_6\left|x^2+5x\right| = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|x^2+5x\right| = 6 \Rightarrow x^2 + 5x = 6$ arba

$x^2+5x=-6 \Rightarrow x \in \{-6;1\}$ arba $x \in \{-3;-2\}$;

2) jei $t=4$, tai

$$\log_6\left(x^2+5x\right)^2=4 \Rightarrow 2\log_6\left|x^2+5x\right|=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_6\left|x^2+5x\right|=2 \Rightarrow \left|x^2+5x\right|=36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+5x=36 \text{ arba } x^2+5x=-36 \Rightarrow x \in \{-9;4\}.$$

Ats.: $x \in \{-9;-6;-3;-2;1;4\}$.

10. Lygtį sprendžiame perrankos būdu. Pradedame nuo didžiausio neigiamo sveikojo skaičiaus, priklausančio logaritmo apibrėžimo sričiai. Įrašę $x=-1$, gauname:

$$\log_2\left(0{,}65\cdot(-1)^3-1{,}25\cdot(-1)^2-2{,}1\cdot(-1)+8\right)=\log_2 10{,}7>3$$

ir

$$3^{-0{,}1\cdot(-1)^2+0{,}3\cdot(-1)+1}=3^{0{,}8}<3.$$

Taigi -1 nėra lygties sprendinys.

Skaičius -2 taip pat priklauso leistinajai aibei. Įrašę $x=-2$, gauname:

$$\log_2\left(0{,}65\cdot(-2)^3-1{,}25\cdot(-2)^2-2{,}1\cdot(-2)+8\right)=\log_2 2=1$$

ir

$$3^{-0{,}1\cdot(-2)^2+0{,}3\cdot(-2)+1}=3^0=1.$$

Vadinasi, $x=-2$ yra didžiausias neigiamas sveikasis lygties sprendinys.

Ats.: -2.

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Aišku, kad funkcijos apibrėžimo sričiai nepriklauso realiųjų skaičių tiesės taškai $x=0$ ir $x=\pm1$. Kitaip sakant, funkcija apibrėžta intervaluose $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$ ir $(1;\infty)$.

Iš pradžių apskaičiuokime išvestinę:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2-1}\right)'=\left(\frac{3x^2-1}{x(x^2-1)}\right)'=-\frac{3x^4+1}{x^2(x^2-1)^2}.$$

Matome, kad $f'(x)<0,$ kai $x\neq 0,$ $x\neq \pm 1.$ Vadinasi, kiekvienas iš intervalų (–∞; –1), (–1; 0), (0; 1) ir (1; ∞) yra funkcijos mažėjimo intervalas.

Ats.: mažėjimo intervalai: (–∞; –1), (–1; 0), (0; 1) ir (1; ∞); didėjimo intervalų nėra.

2. Dvinaris $x-2$ taške $x=2$ keičia ženklą:

⊗ $x-2<0,$ jei $x\in(-3;2);$

⊗ $x-2>0,$ jei $x\in(2;7).$

Vadinasi,

$$|x-2|=\begin{cases}2-x, \text{ jei } x\in(-3;2),\\ 0, \text{ jei } x=2,\\ x-2, \text{ jei } x\in(2;7).\end{cases}$$

Todėl

$$f(x)=\begin{cases}x^3-2x(2-x), \text{ jei } x\in(-3;2),\\ 8, \text{ jei } x=2,\\ x^3-2x(x-2), \text{ jei } x\in(2;7).\end{cases}$$

Nagrinėjamos funkcijos kitimą intervaluose (–3; 2) ir (2; 7) ištirkime atskirai.

⊗ Tegu $x\in(-3;2).$ Tada

$$f'(x)=(x^3-2x(x-2))'=3x^2+4x-4.$$

Lygties $3x^2+4x-4=0$ sprendiniai –2 ir $\frac{2}{3}$ yra funkcijos $f(x)$ kritiniai taškai intervale (–3; 2).

Kadangi $3x^2+4x-4<0,$ kai $x\in\left(-2;\frac{2}{3}\right),$ ir $3x^2+4x-4>0,$ kai $x\in(-3;-2)$ arba $x\in\left(\frac{2}{3};2\right),$ tai intervale

$\left(-2;\frac{2}{3}\right)$ funkcija mažėja, o intervaluose (–3; –2) ir $\left(\frac{2}{3};2\right)$ ji didėja. Taškas $x=-2$ yra funkcijos maksimumo taškas ($f(-2)=8$), o $x=\frac{2}{3}$ yra jos minimumo taškas $\left(f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{40}{27}\right)$.

⊗ Tegu $x\in(2;7)$. Tada

$$f'(x)=(x^3-2x(x-2))'=3x^2-4x+4.$$

Kadangi $3x^2-4x+4=\left(\sqrt{3}\cdot x-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{8}{3}>0,$ tai visame intervale (2; 7) funkcija $f(x)$ didėja. Ekstremumo taškų šiame intervale nėra.

Atkreipkime dėmesį į tai, kad (pagal gautus rezultatus) funkcija didėja ir intervale $\left(\frac{2}{3};2\right)$, ir intervale (2; 7). Ar galima teigti, jog funkcija $f(x)$ didėja intervale $\left(\frac{2}{3};7\right)$? Prieš atsakant į šį klausimą būtina sugretinti $f(x)$ reikšmes intervale $\left(\frac{2}{3};2\right)$ su $f(2)=8$ ir reikšmėmis $f(x)$, $x\in(2;7)$.

Nesunku suvokti, kad $f(x)<8$, kai $x\in\left(\frac{2}{3};2\right)$, ir $f(x)>8$, kai $x\in(2;7)$. Todėl galima padaryti išvadą, kad $f(x)$ didėja intervale $\left(\frac{2}{3};7\right)$.

Ats.: mažėjimo intervalas $\left(-2;\frac{2}{3}\right)$; didėjimo intervalai $(-3;-2)$ ir $\left(\frac{2}{3};7\right)$; $f_{\max}=f(-2)=8$, $f_{\min}=f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{40}{27}$.

3. Apskaičiuokime išvestinę:

$$f'(x) = (\sqrt{17} - 12x - ax^2 - x^3)' = -12 - 2ax - 3x^2 = -(3x^2 + 2ax + 12).$$

Kad galiotų sąlyga $f'(x) \leq 0$, $x \in (-\infty; \infty)$, parametro a reikšmė turi būti tokia, kad galiotų sąlyga $3x^2 + 2ax + 12 \geq 0$, $x \in (-\infty; \infty)$.

Funkcijos $y = 3x^2 + 2ax + 12$ grafikas yra parabolė, todėl pakanka rasti tik tas a reikšmes, kurioms esant kvadratinė lygtis $3x^2 + 2ax + 12 = 0$ neturi sprendinių arba turi tik vieną sprendinį. Jos gaunamos iš nelygybės $D = (2a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 4a^2 - 144 \leq 0.$ Taigi jei $a \in [-6; 6]$, funkcija $f(x)$ mažėja intervale $(-\infty; \infty)$.

Ats.: $[-6; 6]$.

4. Funkcija apibrėžta visoje realiųjų skaičių tiesėje. Todėl reikia rasti tas parametro a, $a \in \mathbf{R}$, reikšmes, kurioms esant lygtis $f'(x) = 0$ neturi sprendinių intervale $(-\infty; \infty)$.

Iš pradžių panagrinėkime $f(x)$ išraišką. Kadangi kvadratinio trinario $a^2 - 11a + 28$ šaknys (lygties $a^2 - 11a + 28 = 0$ sprendiniai) yra 4 ir 7, tai $a^2 - 11a + 28 = (a-4)(a-7)$. Todėl

$$f(x) = (a-4)(a-7)\sin\frac{x}{2} - (a-4)(x - \sqrt{2}) =$$

$$= (a-4)\left((a-7)\sin\frac{x}{2} - x + \sqrt{2}\right).$$

Jei $a = 4$, tai $f(x) = 0$, kai $x \in (-\infty; \infty)$. Šiuo atveju visi intervalo $(-\infty; \infty)$ taškai yra kritiniai.

Jei $a = 7$, tai $f(x) = 3(-x + \sqrt{2})$. Šiuo atveju funkcija kritinių taškų neturi, nes $f'(x) = -3$, kai $x \in (-\infty; \infty)$.

Nagrinėkime atvejį, kai $a \notin \{4; 7\}$. Skaičiuodami išvestinę, gausime:

$$f'(x) = \left((a-4)\left((a-7)\sin\frac{x}{2} - x + \sqrt{2}\right)\right)' = (a-4)\left(\frac{a-7}{2}\cos\frac{x}{2} - 1\right) =$$

$$= \frac{(a-4)(a-7)}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \frac{2}{a-7}\right).$$

Aišku, kad lygtis $f'(x) = 0$ (šiuo atveju) neturi sprendinių tik kai $\left|\dfrac{2}{a-7}\right| > 1.$ Iš čia gauname:

$|a-7| < 2, \quad -2 < a-7 < 2, \quad -2+7 < a < 2+7, \quad 5 < a < 9.$

Skaičius $a = 7$ (gautas anksčiau) priklauso intervalui (5; 9), todėl darome išvadą, kad funkcija

$$f(x) = (a^2 - 11a + 28)\cdot\sin\frac{x}{2} - (a-4)\cdot(x - \sqrt{2})$$

neturi kritinių taškų tik jei $a \in (5; 9).$

Ats.: $a \in (5; 9).$

5. Tiesės $y = x$ krypties koeficientas lygus 1. Vadinasi, $y'(1) = 1.$ Skaičiuodami gauname:

$$y'(x) = (x^2 + bx + c)' = 2x + b, \quad y'(1) = 2\cdot 1 + b = 2 + b.$$

Iš lygties $2 + b = 1$ išplaukia, kad $b = -1.$

Lietimosi taškas (1; 1) priklauso parabolei $y = x^2 + bx + c,$ todėl turi galioti lygybė $1 = 1^2 + b\cdot 1 + c,$ iš kurios išplaukia, kad $c = -b = 1.$

Taigi $b = -1,$ $c = 1,$ o parabolės lygtis yra $y = x^2 - x + 1.$

Ats.: $b = -1,$ $c = 1.$

6. Apskaičiuokime $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(e^{ax^2+bx+1}\right)' = e^{ax^2+bx+1}\cdot(ax^2 + bx + 1)' =$$

$$= (2ax + b)e^{ax^2+bx+1}.$$

Kadangi

$$f(1) = e^{a+b+1}, \quad f(0) = e, \quad f'(0) = be,$$

gauname dvigubą lygybę

$$e^{a+b+1} = e = be.$$

Lygybė $e^{a+b+1}=e$ galioja tik kai $a+b=0$, o lygybė $e=be$ galioja tik kai $b=1$. Vadinasi, $b=1$, $a=-1$.

Ats.: $a=-1$, $b=1$.

7. Tegu v_1 yra pirmo, o v_2 – antro taško greitis (m/s).

Iš fizikos žinome, kad $v_1=x_1'(t)$, $v_2=x_2'(t)$. Skaičiuodami gauname, kad

$$v_1(t)=(3t^2-5)'=6t, \quad v_2(t)=(3t^2-t+1)'=6t-1.$$

Laiko momentui rasti reikia išspręsti lygtį $3t^2-5=3t^2-t+1$. Gauname, kad laiko momentu $t=6$ abiejų taškų koordinatės sutampa.

Taškų greičiai laiko momentu $t=6$ tokie: $v_1(6)=36$, $v_2(6)=35$.

Ats.: 36 m/s, 35 m/s.

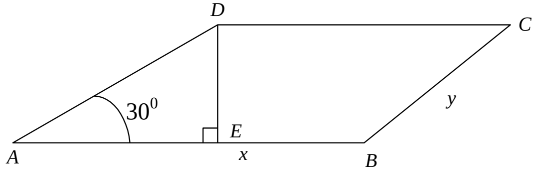
8. Iš pradžių apskaičiuokime $f'(x)$ ir reiškinį $f'(x)-\frac{2}{x}\cdot f(x)$:

$$f'(x)=(x^3\ln x)'=3x^2\ln x+x^3\cdot\frac{1}{x}=3x^2\ln x+x^2,$$

$$f'(x)-\frac{2}{x}\cdot f(x)=3x^2\ln x+x^2-\frac{2}{x}x^3\ln x=x^2\ln x+x^2=x^2(\ln x+1).$$

Pastarojo reiškinio apibrėžimo sritis yra intervalas $(0;\infty)$, todėl lygtis $x^2(\ln x+1)=0$ ekvivalenti lygčiai $\ln x+1=0$, kuri turi vienintelį sprendinį $x=e^{-1}$.

Ats.: e^{-1}.



9. Tegu *ABCD* yra lygiagretainis, kurio smailusis kampas lygus 30° ($\angle A$ =30°), o plotas lygus 8. Jo kraštinių ilgius pažymėkime *x* ir *y* (žr. pav.), o perimetrą – *P*.

Iš ΔADE gauname, kad $DE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}y.$ Todėl lygiagretainio *ABCD* plotas (žym. *S*) užrašomas formule $S = \frac{1}{2}xy.$ Kadangi $S = 8,$ tai $xy = 16,$ o iš čia išplaukia, kad $y = \frac{16}{x}.$

Lygiagretainio perimetrą $P = 2(x + y)$ išreiškę pagrindo ilgiu *x*, ieškokime mažiausio perimetro lygiagretainio. Gausime:

$$P(x) = 2\left(x + \frac{16}{x}\right), \quad P'(x) = 2\left(1 - \frac{16}{x^2}\right),$$

$$1 - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 \quad (\text{nes } x > 0).$$

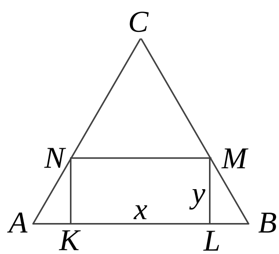
Intervale (0;4) išvestinės $P'(x)$ reikšmės yra neigiamos, o intervale (4; ∞) – teigiamos. Todėl $x = 4$ yra funkcijos $P(x) = 2\left(x + \frac{16}{x}\right)$ – minimumo taškas, kai $x > 0.$ Be to,

$$P(4) = P_{\min} = 2\left(4 + \frac{16}{4}\right) = 16.$$

Taigi mažiausio perimetro lygiagretainio kraštinių ilgiai yra 4 ir 4. Kitaip sakant, tas lygiagretainis yra rombas.

Ats.: 4 ir 4.

10. Aišku, kad dvi stačiakampio viršūnės yra toje pačioje trikampio kraštinėje (žr. pav.). Tegu $KN = x,$ $KL = y.$ Tada stačiakampio *KLMN* plotas (žym. *S*) yra $S = xy.$



Iš ΔAKN gauname, kad $AN = \dfrac{KN}{\sin 60^\circ} = \dfrac{2x}{\sqrt{3}}$, o iš ΔMCN (jis yra lygiakraštis) gauname, kad $NC = y$. Todėl $AC = \dfrac{2x}{\sqrt{3}} + y$. Iš lygybės $\dfrac{2x}{\sqrt{3}} + y = 12$ išplaukia, kad $y = 12 - \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot x$.

Vadinasi, $S = x\left(12 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}x\right)$. Ieškodami didžiausio ploto stačiakampio, iš pradžių raskime funkcijos $S = S(x)$, $x > 0$, kritinius taškus:

$$S'(x) = \left(x\left(12 - \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot x\right)\right)' = 12 - \frac{4}{\sqrt{3}}x, \quad 12 - \frac{4}{\sqrt{3}}x = 0 \Rightarrow x = 3\sqrt{3}.$$

Jei $x \in (0; 3\sqrt{3})$, gauname, kad $S'(x) > 0$; jei $x > 3\sqrt{3}$, tai $S'(x) < 0$. Vadinasi, $x = 3\sqrt{3}$ yra funkcijos $S = x\left(12 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}x\right)$ maksimumo taškas. Be to, $S(3\sqrt{3}) = 18\sqrt{3}$.

Taigi didžiausio ploto ($S = 18\sqrt{3}$ cm kraštinių ilgiai tokie: $x = 3\sqrt{3}$ cm, $y = 6$ cm.

Ats.: $3\sqrt{3}$ cm, 6 cm.

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

1	2	3	4
37,5 %	–1	$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathrm{Z}$	$\frac{1}{6}a^3 \mathrm{tg}\alpha$