LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Jaunajam matematikui

20

2017–2019 mokslo metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Vilnius, 2019

Leidinio sudarytojai:
Antanas APYNIS
Edmundas MAZĖTIS
Eugenijus STANKUS

Leidinį redagavo

Maketavo Kristina LYNDIENĖ

© Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla

TURINYS

PRATARMĖ 4
METODINĖ MEDŽIAGA IR UŽDUOTYS 5
A. Apynis, E. Mazėtis, E. Stankus, J. Šinkūnas. STOJAMOJI UŽDUOTIS 6
I. **J.Banionis.** ISTORINIAI TEKSTINIAI UŽDAVINIAI 8
PIRMOJI UŽDUOTIS 13
II. **E. Mazėtis.** TRIKAMPIŲ ČEVIANOS 17
ANTROJI UŽDUOTIS 26
III. **A. NOVIKAS.** KVADRATINĖS LIEKANOs 28
TREČIOJI UŽDUOTIS 39
IV. **R. Kašuba.** MATEMATINIAI ŽAIDIMAI 41
KETVIRTOJI UŽDUOTIS 54
V. **E. Mazėtis.** KETURKAMPIAI` 58
PENKTOJI UŽDUOTIS 64
VI. **A. Novikas.** TEIGINIŲ ALGEBRA 58
ŠEŠTOJI UŽDUOTIS 77
VII. **E. Stankus.** PAPRASČIAUSIOS DIFERENCIALINĖS LYGTYS 81
SEPTINTOJI UŽDUOTIS 94
VIII. **A. Apynis.** NELYGYBIŲ SISTEMOS 96
AŠTUNTOJI UŽDUOTIS 100
A. Apynis, E. Stankus, E. Mazėtis. BAIGIAMOJI UŽDUOTIS 102

UŽDUOČIŲ SPRENDIMAI 103
Stojamosios užduoties sprendimas 104
Pirmosios užduoties sprendimas 108
Antrosios užduoties sprendimas 112
Trečiosios užduoties sprendimas 118
Ketvirtosios užduoties sprendimas 123
Penktosios užduoties sprendimas 130
Šeštosios užduoties sprendimas 134
Septintosios užduoties sprendimas 140
Aštuntosios užduoties sprendimas 146
Baigiamosios užduoties atsakymai 153

PRATARMĖ

Šioje dvidešimtoje Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos knygelėje „Jaunajam matematikui“ yra pateikta 2017–2019 mokslo metais nagrinėtų temų metodinė medžiaga, užduotys LJMM klausytojams ir jų sprendimai.

Knygelės turinį sudaro šios temos: istoriniai tekstiniai uždaviniai (J. Banionis), trikampių čevianos (E. Mazėtis), kvadratinės liekanos (A. Novikas), matematiniai žaidimai (R. Kašuba), keturkampiai (E. Mazėtis), teiginių algebra (A. Novikas), paprasčiausios diferencialinės lygtys (E. Stankus), nelygybių sistemos (A. Apynis). Skaitytojas taip pat ras 2017 metų stojamąją užduotį ir jos sprendimą bei 2019 metų baigiamosios užduoties pavyzdį.

Antanas Apynis
Edmundas Mazėtis
Eugenijus Stankus

Metodinė medžiaga ir užduotys

STOJAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Edmundas Mazėtis,
Eugenijus Stankus, Juozas Šinkūnas,

1. Trys mergaitės – Agnė, Rūta ir Živilė – dalijosi tam tikrą skaičių saldainių. Iš pradžių Agnė pasiėmė 20 % saldainių ir dar 12 saldainių. Paskui Rūta pasiėmė 25 % likusių saldainių ir dar 15 saldainių. O tada Živilė pasiėmė 30 % likusių saldainių ir dar 21 saldainį. Taip ir nebeliko nė vieno saldainio. Kuri mergaitė gavo daugiau saldainių už kitas?

2. Pagal planą, darbininkų brigada turėjo pagaminti 8000 detalių, kasdien gamindama po tiek pat detalių. Iš tikrųjų visos detalės buvo pagamintos 8 dienomis anksčiau, nes brigada kasdien pagamindavo 50 detalių daugiau negu buvo planuota. Apskaičiuokite, keliais procentais buvo viršijama darbo dienos užduotis.

3. Kokia yra didžiausia galima triženklio skaičiaus ir jo skaitmenų sumos santykio reikšmė?

4. Raskite visus penkiaženklius skaičius, turinčius tokią savybę: kiekvienas iš pirmųjų trijų skaitmenų yra didesnis už visų į dešinę nuo jo esančių skaitmenų sumą, o ketvirtas skaitmuo didesnis už penktą.

5. Raskite visas realiųjų skaičių, kurių suma, sandauga ir kvadratų skirtumas yra lygūs, poras.

6. Išspręskite nelygybę $x^4 - 5x^2 + 4 < 0.$

7. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} \dfrac{6}{x} + \dfrac{8}{y} = \dfrac{11}{3}, \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{y} = \dfrac{29}{6}. \end{cases}$

8. Lygties $x^2 - 27x + 6m + 144 = 0$ sprendiniai x_1 ir x_2 tenkina lygybę $2x_1 - x_2 = 9$. Raskite *m* reikšmę.

9. Apskritimo susikertančios stygos *AB* ir *CD* yra statmenos. Raskite apskritimo spindulio ilgį, jei $AD = 6$, $CB = 8$.

10. Trapecijos įstrižainė lygi 6, ji dalija trapeciją į du panašiuosius trikampius. Raskite trapecijos mažesniojo pagrindo ilgį, jei didesnysis pagrindas lygus 12.

I. ISTORINIAI TEKSTINIAI UŽDAVINIAI

Juozas Banionis

Trumpa lietuviškų matematikos vadovėlių istorinė apžvalga

Lietuvišką matematikos vadovėlių istorija nėra sena ir skaičiuoja tik antrąjį šimtmetį. Pirmieji aritmetikos vadovėliai lietuvių kalba pasirodė baigiantis XIX šimtmečiui. Matematikos istorijos tekstai pažymi 1885 metus, kaip pirmojo aritmetikos vadovėlio lietuvių kalba išspausdinimo data. Tuomet Tilžėje dienos šviesą išvydoJ. Gailučio (Jono Spudulio (1860–1920) slapyvardis) parengtas uždavinynas „Užduotinas tai ira Rankius užduoczių Aritmetikos arba Rokundos mokslo“. Metais vėliau, 1886 m. tame pačiame Rytų Prūsijos mieste buvo išleistas išsamesnis aritmetikos vadovėlis, turintis ir teorinių elementų. Tai P. Nėrio (Petro Vileišio(1851–1926)) parašyti „Keturi svarbiausieji veikalai Aritmetikos“. Beje, pats rankraštis buvo parengtas dar 1876 m. ir net visą dešimtmetį tęsėsi autoriaus žygiai gauti oficialų leidimą išspausdinimui Rusijos imperijoje. Bet taip ir nepasiekus tikslo, teko pasinaudoti Tilžės spaustuvės paslaugomis. P. Vileišis yra ir pirmojo lietuviško vadovėlio „Trumpa Geometrija“, pasirodžiusio 1900 m. Tilžėje, autorius.

1904 m. atgavus spaudą lietuvių kalba, ženkliai pagyvėja lietuviškų matematikos dalykų vadovėlių leidyba. Jų autorių gretose atrasime pedagogus Petrą Bendorių (1863–1906), Juozą Damijonaitį (1871–1926), Praną Daugirdą (1882–1926), Praną Mašiotą (1863–1940), teologą Aleksandrą Jakštą-Dambrauską (1860–1938), ir net būsimą mūsų valstybės prezidentą Antaną Smetoną (1874–1944)) ir kt. Beje, A. Smetona, nors turėjo juristo diplomą, bet būdamas Lietuvių mokslo draugijos nariu, 1916 m. pirmąkart lietuviškai išleido „Elementarinės algebros vadovėlį“.

1918 m. susikūrus Lietuvos respublikai, matematinis švietimas tapo visapusiškiau organizuotas ir buvo kreipiamas modernumo linkme. Iš pastarojo laikotarpio mus pasiekė visas pluoštas profesionaliai perengtų aritmetikos, algebros, trigonometrijos, geometrijos vadovėlių. Tuomet Nepriklausomoje Lietuvoje iškilo talentingi autoriai: Zigmas Balutis (1907–1964), Antanas Busilas (1889–1951), Juozas Dailidė (1876–

1949), Kazimieras Klimavičius (1886–1972), Antanas Juška (1902–1985), Jonas Mašiotas (1897–1953), Marcelinas Šikšnys (1874–1970) ir kt. Visi jie buvo pagarsėję to meto Lietuvos pedagogai, sumaniai diegę pačias reikalingiausias matematikos mokslo žinias mūsų Tėvynės jaunajai kartai. (*Išsamiau apie tai galima paskaityti: Banionis J. Matematinė mintis Lietuvoje .Istorinė apžvalga: 1832–1990. Vilnius, 2006*).

Šioje Užduotyje Jums ir pasiūlysime Nepriklausomos Lietuvos laikotarpio aritmetikos, algebros vadovėliuose pateiktus, tuolaik įvardintus „sakomuosius uždavinius“ (dabar tai vadiname tekstiniais arba žodiniais uždaviniais).

Uždavinių sprendimo pavyzdžiai

Pradžioje supažindinsime su XX a. 3–4 dešimtmečio aritmetikos ir algebros vadovėliuose pateikiamų tekstinių uždavinių sprendimo pavyzdžiais. Sąlygų formulavime ir uždavinių sprendimo aiškinimuose laikomasi to meto originalo kalbos.

1 pavyzdys. Du piemenys ganė 48 avis; kai iš pirmojo 5 avys perbėgo pas antrąjį, tai antrojo kaimenė pasidarė 3 kartus didesnė už pirmojo. Po kiek avių ganė piemenys?

Sprendimas. Pirmas piemuo ganė x avių; tada antras piemuo ganė $(48 - x)$ avis. Kai iš pirmo perbėgo pas antrą 5 avys, pirmajam liko $(x - 5)$ avys. Kai tos 5 avys perbėgo pas antrąjį, tai šis turėjo $(48 - x + 5)$ avis.

Kadangi antroji kaimenė pasidarė 3 kartus didesnė už pirmą, tai padidinę pirmą kaimenę 3 kartus, gautume antrą kaimenę, kada į ją buvo perbėgusios tos 5 avys.

Todėl gauname tokią lygtį:

$$(x-5)\cdot 3 = 48 - x + 5.$$

Išsprendę gauname: $x = 17,\ 48 - x = 31.$

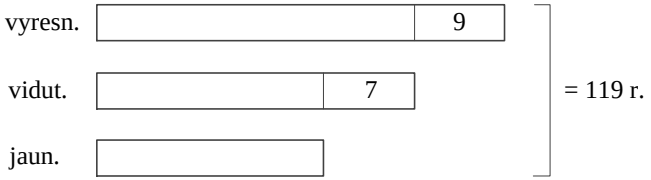
Patikriname: $17 - 5 = 12,\ 31 + 5 = 36,\ 36 : 12 = 3.$

Ats.: Pirmasis piemuo ganė 17 avių, antrasis – 31 avį.

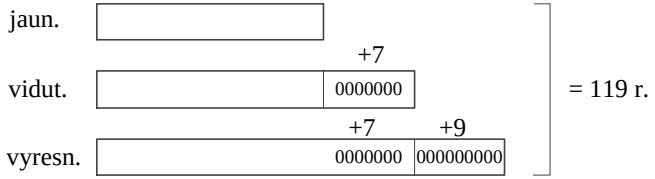
[J. Mašiotas, Matematikos vadovėlis. Aritmetika ir Algebra. II dalis, Kaunas, 1939, p. 105.]

2 pavyzdys. Trys broliai pasidalijo 119 riešutų taip, kad vidutinis brolis gavo 9 riešutais mažiau už vyresnįjį ir 7 riešutais daugiau už jaunesnįjį. Po kiek riešutų gavo kiekvienas brolis?

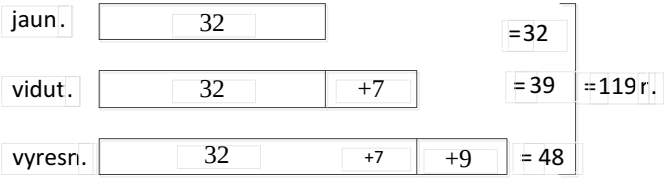
Sprendimas. Siūloma spręsti vaizduojant grafiškai. Jei vaizduosimės, kad vidutinio (*vidurinio*) brolio riešutai tilptų ant tam tikro ilgio popierinės juostelės, tai vyresniojo brolio riešutai tilptų ant ilgesnės juostelės, o jaunesniojo ant trumpesnės.



Arba vaizdžiau:



Gauname:



Ats.: Vyresnysis brolis gavo 48 riešutus, vidutinis – 39, o jaunesnysis –32 riešutus.

[K. Klimavičius. Matematikos vadovėlis. Teorija ir uždaviniai. Kaunas, 1933, p. 97.]

3 pavyzdys. Du keleiviai išėjo pėsti vienas priešais kitą: vienas iš Kapčiamiesčio į Alytų, antras iš Alytaus į Kapčiamiestį ir susitiko per 9 valandas. Jei pirmasis eitų 1,5 karto greičiau, o antrasis 2 kart greičiau, tai būtų susitikę per 5 valandas. Sužinokite, kiek ėjo per valandą kiekvienas iš jų, jeigu iš Kapčiamiesčio į Alytų 63, km.

Sprendimas. Sakykime, kad pirmas keleivis eina po x km per valandą, o antras – po y. Tuomet turėsime vieną lygtį:

$$9x+9y=63, \text{ arba (suprastinus) } x+y=7. \qquad (1)$$

Antru atveju pirmas keleivis eitų $1{,}5x$ km per valandą, o antras – $2y$ km. Šitai turėdami galvoje, sudarome antrąją lygtį:

$$9x+9y=63, \text{ arba } 7{,}5+10y=63. \qquad (2)$$

Gautosios lygtys (1) ir (2) sudaro sistemą

$$\begin{cases} x+y=7, \\ 7{,}5+10y=63. \end{cases}$$

Sistemą išsprendę, turime gauti: $y=4{,}2$, $x=2{,}8$. (*Patikrinkite*.)

[A. Busilas, Z. Balutis. Algebra. II dalis. Kaunas, p. 200.]

4 pavyzdys. Suraskite triženklį skaičių, kuris padalytas iš 17 duoda liekanos 8, o padalytas iš 23 duoda liekanos 20.

Sprendimas. Tegul ieškomasis skaičius, padalytas iš 17, duoda dalmens x, o padalytas iš 23 duoda dalmens y; tuomet šis skaičius yra lygus $17x+8$, arba $23y+20$; taigi turime lygtis: $17x+8=23y+20$, arba $17x-23y=12$. Kadangi dalmens turi būti sveiki skaičiai, tai ir išspręsime šias lygtis sveikaisiais skaičiais; būtent:

$$x=23t-2 \quad \text{ir} \quad y=17t-2;$$

mūsų ieškomasis skaičius, kaip matėme, yra lygus $17x+8$; įstatę čionai vietoje x-o jo reikšmę gausime, kad kalbamasis skaičius yra lygus $17\cdot(23t-2)+8$ arba $391t-26$. Kadangi ieškomasis skaičius yra *triženklis*, tai jis turi būti didesnis už 99 ir mažesnis už 1000, – taigi t skaičių išrinksime tokį, kad patenkintume nelygybes:

$$391t-26>99 \quad \text{ir} \quad 391t-26<1000;$$

iš čia

$$t>\frac{125}{391} \text{ ir } t<\frac{1026}{391} \text{ arba } t<2\frac{244}{391};$$

taigi t gali būti lygu 1 arba 2; tuomet ieškomasis skaičius bus $391\cdot1-26=365$ arba $391\cdot2-26=782-26=756$.

[A. Busilas, Z. Balutis. Algebra. II dalis. Kaunas, p. 38.]

5 pavyzdys. Kuri suma reikia įnešti į banką kiekvienų metų pradžioje per 21 metus, kad po to per 8 metus galima būtų gauti po 1200 litų metinės rentos[1]? Bankas duoda 4 sudėtinius procentus.

Sprendimas. Šį uždavinį išspręskime pagal rentos formulę. Čia $b = 1200;\ p = 4;\ n = 8;\ t = 21,$ o reikia rasti a. Randame:

$$a = \frac{1200(1{,}04^8 - 1)}{1{,}04^9 \cdot (1{,}04^{21} - 1)}.$$

Visų pirma išskaičiuojame reiškinius $1{,}04^8 - 1$ ir $1{,}04^{21} - 1$.

a) $\lg 1{,}04^8 = 8 \lg 1{,}04 = 8 \cdot 0{,}01703 = 0{,}13624$

L N

0,13609.....1368 $\Delta = 31$

15.....5 5 | 15,5

$1{,}04^8 = 1{,}3685$

Taigi $1{,}04^8 - 1 = 0{,}3685.$

b) $\lg 1{,}04^{21} = 21 \lg 1{,}04 = 21 \cdot 0{,}01703 = 0{,}35763$

L N

0,35755.....2278 $\Delta = 19$

8.....44 | 7,6

$1{,}04^{21} = 2{,}2784$

Taigi $1{,}04^{21} - 1 = 1{,}2784.$

Iš čia

$$a = \frac{1200 \cdot 0{,}3685}{1{,}04^9 \cdot 1{,}2784}.$$

Išskaičiuojame:

$\lg 1200 = 3{,}07918$

$\lg 0{,}3685 = \bar{1}{,}56644$

---

[1] Renta (nuošimčių gavimas). Skaičiuojama pagal taisyklę:

$a = \dfrac{b(q^n - 1)}{q^{n+1}(q^t - 1)}, \left(q = 1 + \dfrac{p}{100} \right)$; a –įnešama suma, t – metų skaičius, p – sudėtiniai procentai; b – išmokama suma per n metų.

3) $9\,\mathrm{colg}\,1{,}04 = \bar{1}{,}84673$

4) $\mathrm{colg}\,1{,}2784 = \bar{1}{,}89333$[2]

$\lg a = 2{,}38568$

3) $\lg 1{,}04 = 0{,}01703;\ 9\,\mathrm{colg}\,1{,}04 = -9 \cdot 0{,}01703 = -0{,}15327 = \bar{1}{,}84673$

4) 1,278.....0,10653 $\Delta = 34$

4..... 14 4 | 13,6

0,10667

$\mathrm{colg}\,1{,}2784 = \bar{1}{,}89333$

2,38561 2430 $\Delta = 17$

7..... 4 4 | 6,8

$a = 243{,}04$

Taigi kasmet (metų pradžioje) įmokamoji suma turi būti lygi ~243 litams.

[A. Busilas ir Z. Balutis. Algebra, IV dalis, Kaunas, 1935, p. 188–189.]

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Trys būriai kareivių ėmė šaudyti tuo pačiu laiku; iš pirmojo būrio šūviai eina kas 5 sekundes, iš antrojo – kas 6 sek., o iš trečiojo – kas 7 sek. Kiek kartų iššovė kiekvienas būrys, jeigu visas šis šaudymas

[2] Kologaritmas (logaritmo papildymas). Jo dėka galime neigiamą logaritmą parašyti kologaritmu be minuso ženklo, t. y.

$\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b = \lg a + \mathrm{colg}\, b.$ Pavyzdžiui, atliekant konkrečius skaičiavimus: $-2{,}35273 = -2 + (-0{,}35273) =$

$= -2(-1) + (1 - 0{,}35273) = -3 + 0{,}6472\bar{7} = 3{,}64727.$ Taigi, –235273 keičiame į $\bar{3}{,}64727.$

tęsėsi mažiau negu 1 val.; be to dar yra žinoma, kad antrasis būrys šaudė 4 minutėmis ilgiau už pirmąjį ir 3 min. trumpiau už trečiąjį?
[M. Šikšnys. Elementarinė algebra, IV dalis, 1928, Vilnius, p. 41.]

2. Vienas karalius liepęs pakaustyti savo arklį ir, kalviui pabaigus darbą, juokais pasakęs jam: „na, nesusiderėjau su tavimi iš anksto, tai dabar gali nuplėšti nuo manęs nors 100 frankų!“; į tai jam kalvis atsakęs šitaip: „kam man imti nuo Tamstos 100 frankų? kaustydamas arklį suvartojau iš viso 16 vinių; tai prašom už pirmąją vinį užmokėti man 1 centimą, už antrąją – 3 cent., už trečiąją – 9 cent. It tt., ir man pakaks“. Kiek pareikalavo kalvis už savo darbą?
[M. Šikšnys. Elementarinė algebra, IV dalis, 1928, Vilnius, p. 85.]

3. Pirklys turėdamas 19950 litų skolos, apsiėmė išmokėti ją dalimis, mokėdamas kas mėnuo vis 50 litų daugiau, negu prieš tai. Kiek jis užmokėjo pirmą mėnesį ir per kiek laiko išmokėjo visą skolą, jeigu paskutinį mėnesį jis turėjo užmokėti 1500 litų?
[M. Šikšnys. Elementarinė algebra, IV dalis, 1925, Vilnius, p. 76.]

4. Vienas žmogus išėjo iš Leipalingio į Lazdijus, o kitas iš Lazdijų į Leipalingį ir susitiko per 4 valandas. Kitą kartą einant, pirmasis išėjo 1 val. 12 min. anksčiau, negu antrasis ir susitiko antrąjį po 3 val. 20 min. Po kiek km jie nueina per valandą, jeigu iš Leipalingio į Lazdijus yra 36 km?
[A. Busilas ir Z. Balutis. Algebra, II dalis, Kaunas, 1934, p. 203.]

5. Vienoje mokykloje buvo 54 mokiniai – berniukai ir mergaitės. $\frac{1}{15}$ dalis berniukų ir $\frac{1}{8}$ dalis mergaičių mokyklą apleido. Antroje mokykloje buvo 2 berniukais ir 4 mergaitėmis daugiau negu pirmoje. Kai iš antrosios mokyklos išstojo $\frac{1}{8}$ dalis berniukų ir $\frac{1}{7}$ dalis mergaičių, tai pasirodė, kad iš antrosios mokyklos išstojo 3 mokiniais daugiau , negu iš pirmosios. Kiek buvo berniukų ir kiek mergaičių kiekvienoj mokykloj?
[A. Busilas ir Z. Balutis. Algebra, II dalis, Kaunas, 1934, p. 167.]

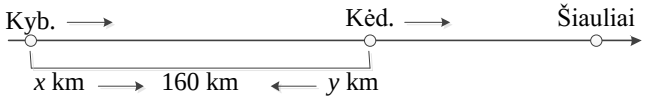
6. Apskaitykite, kuria suma pavirstu 1 centas, leistas apyvarton iš 4 sud. proc. nuo Kristaus gimimo ligi 1936 metų, jei apskaitymą darytum, kad 1 litas turi 0,150462 gramų gryno aukso, o žemės diametras (skersmuo) yra lygus 12756776 m.

[A. Busilas ir Z. Balutis. Algebra, IV dalis, Kaunas, 1935, p. 194.]

7. Vežimo priešakinio rato ratlankis turi 3 metrus, užpakalinio 4 m; iki vežimas apvažiavo kiemą, priešakinis ratas palyginti su užpakaliniu apsisuko 5 kartus viršaus. Kiek metrų buvo nuvažiuota?

[J. Mašiotas. Matematikos vadovėlis. Aritmetika ir Algebra. II dalis, Kaunas, 1939, p. 110.]

8. Iš Kybartų ir Kėdainių tuo pačiu metu turi išeiti du traukiniai (brėž. 65). Kai išeis juodu į vieną pusę, tai pavys vienas kitą po 5 valandų; kai eis priešais, tai susitiks po 2 valandų. Iš vienos stoties į kitą yra 160 km. Išskaičiuoti traukinių greitį.



Brėž. 65

[J. Mašiotas. Matematikos vadovėlis. Aritmetika ir Algebra. II dalis, Kaunas, 1939, p. 149.]

9. Du broliukai susiginčijo, ar jaunesnysis išspręs užduotus vyresniojo brolio 16 aritmetikos uždavinių. Už kiekvieną gerai išspręstą uždavinį jaunesnysis brolis gauna iš vyresniojo po 15 riešutų, o už kiekvieną neišspręstą uždavinį jis pats duoda vyresniajam po 10 riešutų. Darbą pabaigęs, jaunesnysis gavo 65 riešutus. Kiek jis uždavinių gerai išsprendė?

[K. Klimavičius. Matematikos vadovėlis. I dalis, Kaunas, 1933, p. 100.]

10. 1926 m. iš Kauno stoties išvyko 380900 keleivių ir atvyko 96470 keleiv. daugiau, negu išvyko. Vidutiniškai kas šeštas keleivis buvo

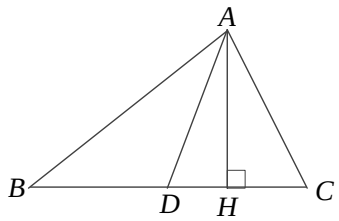
arba išlydėtas arba sutiktas vieno asmens. Kiek vidutiniškai per vieną dieną žmonių perėjo per Kauno stotį (apytikriai)?

[K. Klimavičius. Matematikos vadovėlis. I dalis, Kaunas, 1933, p. 113.]

II. TRIKAMPIŲ ČEVIANOS

Edmundas Mazėtis

Matematikos pamokose nagrinėjamos trikampių pusiaukraštinės, pusiaukampinės, aukštinės yra atkarpų, kurios jungia trikampio viršūnę su prieš ją esančios kraštinės tašku, atvejai. Tokios atkarpos yra vadinamos *trikampio čevianomis*; šiuo pavadinimu pagerbiant italų matematiką Džiovanį Čevą (Giovani Ceva (1648 – 1734)).



1 pav.

Sakykime, kad trikampio ABC kraštinių ilgiai

$$AB = c,\ BC = a,\ AC = b,$$

o kraštinėje BC yra taškas D, kuris dalija šią kraštinę į atkarpas $BD = m,\ \ DC = n.$ Rasime čevianos AD ilgį d (1 pav.).

Nubrėžkime trikampio ABC aukštinę $AH = h$ ir pažymėkime $HD = p.$ Taikydami trikampiams ABH, ADH ir ACH Pitagoro teoremą, gauname, kad

$$AB^2 = AH^2 + HB^2,\ \ AD^2 = DH^2 + HA^2,\ \ AC^2 = CH^2 + AH^2,$$

Pažymėkime $HD = p,$ tuomet $c^2 = h^2 + (m+p)^2$ ir $h^2 = d^2 - p^2.$ Iš čia seka, kad

$$c^2 = d^2 - p^2 + (m+p)^2 = d^2 + m^2 + 2pm.$$

Kadangi $CH = n - p,$ tai Iš lygybės $AC^2 = CH^2 + AH^2$ seka, kad $b^2 = d^2 - p^2 + (n-p)^2 = d^2 + n^2 - 2np.$ Iš gautųjų lygybių išplaukia, kad $c^2 n = d^2 n + nm^2 + 2pmn,$ ir $b^2 m = d^2 m + n^2 m - 2mnp.$ Sudėję šias lygybes, gauname, kad $c^2 n + b^2 m = d^2(m+n) + mn(m+n).$ Kadangi $m + n = a,$ tai iš čia ir išplaukia, kad $d^2 = \dfrac{c^2 n + b^2 m - amn}{a}.$ Taigi gavome čevianos ilgio formulę

$$d=\sqrt{\frac{c^2n+b^2m-amn}{a}}. \qquad (1)$$

Gautoji čevianos ilgio formulė yra vadinama Stiuarto formule (Mathew Stewart ((1717 – 1785) – škotų matematikas).

Atskiri šios formulės atvejai yra trikampio pusiaukraštinių ir pusiaukampinių ilgio formulės. Jei atkarpa AD yra trikampio ABC pusiaukraštinė, tai $BD=DC=\frac{a}{2}$, taigi gauname tokią pusiaukraštinės ilgio formulę

$$AD=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}. \qquad (2)$$

Pagal trikampio pusiaukampinės savybę, pusiaukampinė AD dalija trikampio kraštinę BC į dalis, kurių santykis lygus $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$. Iš lygybių $\frac{m}{n}=\frac{c}{b}, m+n=a$ randame, kad $m=\frac{ac}{b+c}, n=\frac{ab}{b+c}$. Įrašę šias reikšmes į (1) lygybę ir atlikę veiksmus gauname, kad

$$AD=\sqrt{\frac{b^2ca^2+c^3ab+b^3ac+b^2ac^2-a^3bc}{a(b+c)^2}}=\sqrt{\frac{abc(b^2+c^2+2bc-a^2)}{a(b+c)^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{bc((b+c)^2-a^2)}}{b+c}=\frac{\sqrt{bc(b+c-a)(b+c+a)}}{b+c}.$$

Taigi trikampio pusiaukampinės ilgis skaičiuojamas pagal formulę

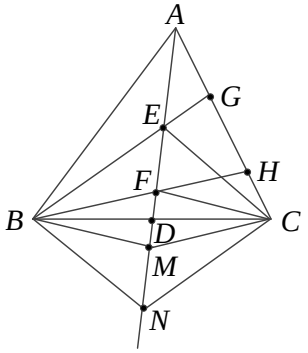
$$AD=\frac{\sqrt{bc(b+c-a)(b+c+a)}}{b+c}. \qquad (3)$$

Kadangi trikampių ABC, ABD ir ACD aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės A, yra vienodo ilgio, tai šių trikampių plotai sutinka kaip atitinkamų kraštinių ilgiai, t. y., $S_{ABC}:S_{ABD}:S_{ACD}=(m+n):m:n$.

1 pavyzdys. Atkarpa AD yra trikampio ABC pusiaukraštinė, taškai E ir F dalija šią pusiaukraštinę santykiu $AE:EF:FD=4:3:1$. Tiesės BE ir BF kerta kraštinę AC taškuose G ir H. Rasime santykius $AG:GH:HC$.

Sprendimas. Sakykime, kad $AE = 4x, EF = 3x, FD = x$. Atkarpos AD tęsinyje už taško D atidedame taškus M ir N, kad $DM = DF, DN = DE$ (2 pav.). Kadangi keturkampių $BMCF$ ir $BNCE$ įstrižainės susikerta jų vidurio taške, tai šie keturkampiai yra lygiagretainiai. Iš čia išplaukia, kad tiesės BE ir NC yra lygiagrečios, taigi trikampiai AGE ir ACN yra panašieji, todėl $\frac{AG}{AC} = \frac{AE}{AN} = \frac{4x}{12x} = \frac{1}{3}$. Trikampiai AHF ir ACM irgi yra panašieji, todėl

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AF}{AM} = \frac{7x}{9x} = \frac{7}{9}.$$



2 pav.

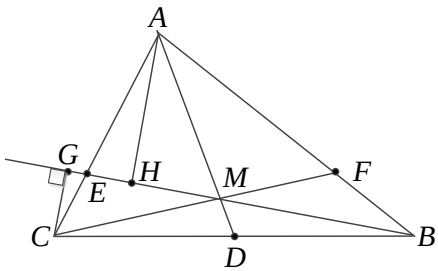
Taigi

$$AG = \frac{1}{3}AC, AH = \frac{7}{9}AC,$$

todėl $GH = AH - AG = \frac{4}{9}AC, HC = AC - AH = \frac{2}{9}AC.$ Iš čia gauname, kad $AG : GH : HC = 3 : 4 : 2.$

Sakykime, kad atkarpos AD, BE ir CF yra trikampio ABC čevianos. Jos susikerta viename taške tada ir tik tada, kai $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1$ (Čevos teorema). Įrodysime šį teiginį.

Sakykime, kad trikampio čevianos AD, BE ir CF susikerta taške M (3 pav.). Trikampių ABM, AMC ir BMC plotus žymėkime S_1, S_2, S_3 ir nubrėžkime trikampių ABM ir BMC aukštines AH ir CG, nubrėžtas į jų bendrą kraštinę BM. Tuomet trikampių ABM ir BMC plotų santykis $S_1 : S_3 = \frac{AH}{CG}$. Iš trikampių AEH ir CEG



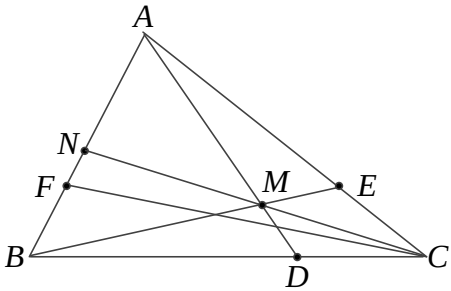
3 pav.

panašumo turime, kad $\frac{AH}{CG}=\frac{AE}{EC}$. Taigi $\frac{AE}{EC}=\frac{S_1}{S_3}$. Analogiškai surandame, kad $\frac{CD}{DB}=\frac{S_3}{S_2}$, o $\frac{BF}{FA}=\frac{S_2}{S_1}$. Iš čia gauname, kad $\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BF}{FA}=1$.

Atvirkščiai, sakykime, kad trikampio čevianoms yra teisinga lygybė

$$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BF}{FA}=1,$$

atkarpos AD ir BE susikerta taške M, o tiesės CM ir AB susikerta taške N (4 pav.). Kadangi trikampio čevianos AD, BE ir CN susikerta viename taške, tai pagal jau įrodytą faktą yra teisinga lygybė $\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BN}{NA}=1$. Kadangi teisinga lygybė $\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BF}{FA}=1$, tai iš čia išplaukia, kad $\frac{BN}{NA}=\frac{BF}{FA}$. Kadangi atkarpoje AB yra vienintelis taškas, dalijantis ją duotuoju santykiu, tai iš čia gauname, kad taškai N ir F sutampa, t. y., atkarpos AD, BE ir CF susikerta viename taške.



4 pav.

Atskiru atveju, kai atkarpos AD, BE ir CF yra trikampio ABC pusiaukraštinės, tai $\frac{AE}{EC}=\frac{CD}{DB}=\frac{BF}{FA}=1$, todėl teisinga lygybė $\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BF}{FA}=1$, taigi trikampio pusiaukraštinės susikerta viename taške, kuris vadinamas trikampio centroidu arba trikampio *sunkio centru*. Kai atkarpos AD, BE ir CF yra trikampio ABC pusiaukampinės, tai pagal trikampio pusiaukampinių savybes $\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}$, $\frac{CD}{DB}=\frac{CA}{CB}$, $\frac{BF}{FA}=\frac{CB}{CA}$, taigi lygybė $\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BF}{FA}=1$ ir šiuo atveju yra teisinga. Taigi trikampio pusiaukampinės susikerta viename taške – *įbrėžto į trikampį apskritimo centre*. Kai atkarpos AD, BE ir CF yra trikampio

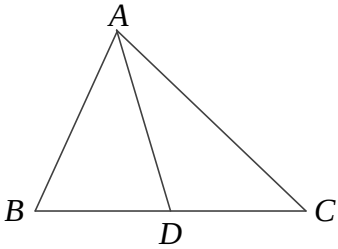
ABC aukštinės, tai iš stačiųjų trikampių gauname, kad $\frac{AE}{EC}=\frac{\text{ctg}\angle A}{\text{ctg}\angle C}$, $\frac{CD}{DB}=\frac{\text{ctg}\angle C}{\text{ctg}\angle B}$, $\frac{BF}{FA}=\frac{\text{ctg}\angle B}{\text{ctg}\angle A}$, taigi teisinga lygybė $\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BF}{FA}=1$, todėl trikampio aukštinės susikerta viename taške, kuris vadinamas *trikampio ortocetras*.

Sakykime, kad atkarpa AD yra trikampio ABC čeviana (5 pav.), tuomet teisinga lygybė

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB\sin\angle BAD}{AC\sin\angle CAD}$$

(teorema apie santykius). Iš tikrųjų, trikampiams ABD ir ACD pritaikę sinusų teoremą turime lygybes

$$\frac{BD}{AB}=\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle ADB},\quad \frac{DC}{AC}=\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle ADC}.$$



5 pav.

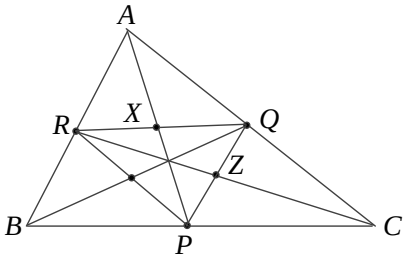
Kadangi $\angle ADB+\angle ADC=180^\circ$, tai $\sin\angle ADB=\sin\angle ADC$, todėl

$$\frac{BD}{DC}=\frac{\frac{AB\sin\angle BAD}{\sin\angle ADB}}{\frac{AC\sin\angle CAD}{\sin\angle ADC}}=\frac{AB\sin\angle BAD}{AC\sin\angle CAD}.$$

Iš čia gauname Čevos teoremos trigonometrinę formą: trikampio ABC čevianos AD, BE ir CF susikerta viename taške tada ir tik tada, kai

$$\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}\cdot\frac{\sin\angle CBE}{\sin\angle ABE}\cdot\frac{\sin\angle ACF}{\sin\angle BCF}=1. \qquad (4)$$

2 pavyzdys. Trikampio ABC čevianos AP, BQ, CR susikerta viename taške, taškai X, Y, Z yra atitinkamai atkarpų QR, RP, PQ vidurio takai (6 pav.). Įrodysime, kad tiesės AX, BY, CZ susikerta viename taške.



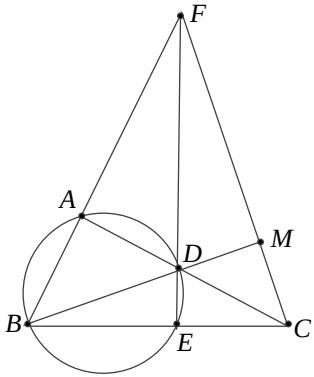
6 pav.

Sprendimas. Pagal teoremą apie santykius turime lygybę $\frac{AR\sin\angle RAX}{QA\sin\angle XAQ}=\frac{RX}{XQ}=1,$ todėl $\frac{\sin\angle RAX}{\sin\angle XAQ}=\frac{AQ}{AR}.$ analogiškai gauname, kad $\frac{\sin\angle PBY}{\sin\angle YBR}=\frac{RB}{PB}$ ir $\frac{\sin\angle QCZ}{\sin\angle PCZ}=\frac{PC}{CQ}.$ Iš šių lygybių gauname, kad

$$\frac{\sin\angle RAX}{\sin\angle XAQ}\cdot\frac{\sin\angle PBY}{\sin\angle YBR}\cdot\frac{\sin\angle QCZ}{\sin\angle ZCP}=\frac{AQ}{AR}\cdot\frac{RB}{PB}\cdot\frac{PC}{QC}=\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CP}{PB}\cdot\frac{BR}{RA}=1,$$

nes čevianos AP, BQ, CR susikerta viename taške. Taigi pagal Čevos teoremos trigonometrinę formą tiesės AX, BY, CZ susikerta viename taške.

3 pavyzdys. Apskritimas eina per trikampio ABC viršūnes A ir B, o kraštines AC ir BC kerta atitinkamai taškuose D ir E. Tiesės AB ir DE kertasi taške F, o tiesės BD ir CF kertasi taške M. Įrodysime, kad taškas M yra atkarpos FC vidurio taškas, kai $MC^2=MB\cdot MD$ (7 pav.).



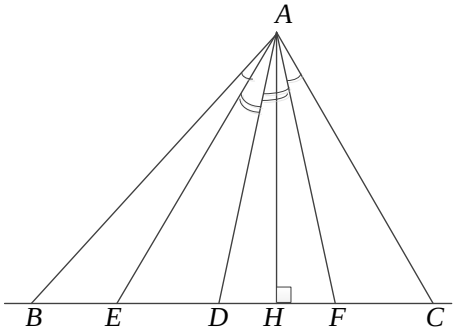
7 pav.

Sprendimas. Kadangi trikampio BFC čevianos BM, FE ir CA susikerta taške D, tai pagal Čevos teoremą

$$\frac{FA}{AB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CM}{MF}=1.$$

Kadangi taškas M yra atkarpos FC vidurio taškas, tai $FM=MC$, taigi $\frac{FA}{AB}\cdot\frac{BE}{EC}=1,$ t. y., $\frac{FA}{AB}=\frac{EC}{EB}.$ Iš čia išplaukia, kad tiesės CF ir AE yra lygiagrečios. Tuomet $\angle FCA=\angle EAC=$ $=\angle MBC$ (antroji lygybė gaunama iš to, kad įbrėžtiniai kampai EAC ir MBC remiasi į tą patį lanką). Taigi trikampiai MCD ir MBC yra panašieji, todėl $\frac{MB}{MC}=\frac{MC}{MD},$ t. y., $MC^2=MB\cdot MD.$

Dvi čevianos, simetriškos trikampio pusiaukampinės atžvilgiu, vadinamos *jungtinėmis čevianomis.* 8 pav. atkarpa AD yra jo pusiaukampinė, o čevianos AE ir AF yra simetriškos tiesės AD atžvilgiu, taigi jos yra jungtinės. Aišku, kad jungtinės čevianos sudaro vienodus kampus su trikampio pusiauampine $(\angle EAD = \angle FAD)$, o taip pat ir su trikampio kraštinėmis $\angle BAE = \angle CAF$.



8 pav.

Jei čevianos AE ir AF yra jungtinės, tai

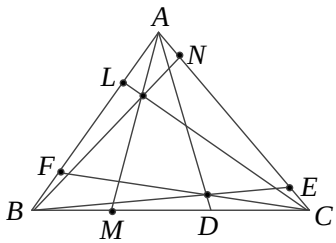
$$\frac{BE}{EC}\cdot\frac{BF}{FC}=\frac{c^2}{b^2}.$$

Įrodysime šią lygybę. Jei trikampio ABC aukštinė $AH = h$, tai dviem būdais skaičiuodami trikampio BAE plotą, turime lygybę $BE \cdot h = AB \cdot AE \sin\angle BAE$. Analogiškai dviem būdais skaičiuodami trikampio CAF plotą, gauname, kad $CF \cdot h = AC \cdot AF \sin\angle CAF$. Kadangi $\angle BAE = \angle CAF$, tai iš gautųjų lygybių seka, kad $\frac{BE}{CF}=\frac{AB\cdot AE}{AC\cdot AF}$. Analogiškai skaičiuodami trikampių ABF ir ACE plotus, gauname lygybes

$$BF \cdot h = AB \cdot AF \sin\angle BAF$$

ir $$CE \cdot h = AC \cdot AE \sin\angle CAE.$$

Kadangi $\angle BAF = \angle CAE$, tai iš čia turime lygybę $\frac{BF}{CE}=\frac{AB\cdot AF}{AC\cdot AE}$. Taigi



9 pav.

$$\frac{BE}{CF}\cdot\frac{BF}{EC}=\frac{AB\cdot AE\cdot AB\cdot AF}{AC\cdot AF\cdot AC\cdot AE}=\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{c^2}{b^2}.$$

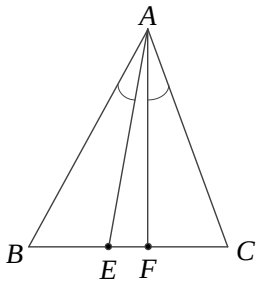
Iš gautosios formulės išplaukia toks teiginys: jei trikampio ABC čevianos AD, BE, CF susikerta viename taške, tai ir jungtinės joms čevianos AM, BN, CL (9 pav.) irgi susikerta viename taške. Tikrai, iš gautos formulės turime lygybes

$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{BD}{DC}=\frac{AB^2}{AC^2},\quad \frac{CN\cdot CE}{AN\cdot EA}=\frac{BC^2}{BA^2},\quad \frac{AL\cdot AF}{LB\cdot FB}=\frac{CA^2}{CB^2}.$$

Tuomet

$$\frac{BM\cdot BD\cdot CN\cdot CE\cdot AL\cdot AF}{MC\cdot DC\cdot NA\cdot EA\cdot LB\cdot FB}=\frac{AB^2}{AC^2}\cdot\frac{BC^2}{BA^2}\cdot\frac{CA^2}{CB^2}=1.$$

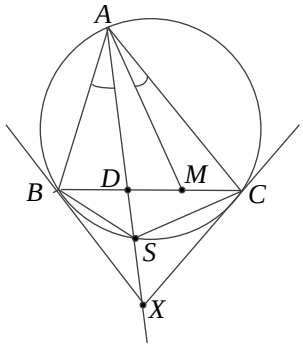
Kadangi čevianos AD, BE, CF susikerta viename taške, tai pagal Čevos teoremą teisinga lygybė $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$ taigi iš čia išplaukia, kad $\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AL}{LB}=1,$ o tai pagal Čevos teoremą reiškia, kad čevianos AM, BN, CL susikerta viename taške.



10 pav.

Jei trikampio ABC čevianos AD, BE, CF susikerta viename taške P, o joms jungtinės čevianos AM, BN, CL susikerta viename taške Q, tai taškai P ir Q yra vadinami *jungtiniais taškais*.

Trikampio čeviana, kuri yra jungtinė su trikampio pusiaukraštine, vadinama *trikampio simediana*. Jei atkarpa AE yra trikampio ABC pusiaukraštinė, o atkarpa AF – jo simediana (10 pav.), tai $\frac{BE}{EC}=1,$ taigi iš lygybės $\frac{BE}{EC}\cdot\frac{BF}{FC}=\frac{c^2}{b^2}$ seka, kad $\frac{BF}{FC}=\frac{c^2}{b^2}.$ Kadangi trikampio pusiaukraštinės susikerta viename taške, tai ir su jomis jungtinės čevianos – trikampio simedianos irgi susikerta viename taške, kuris yra vadinamas trikampio *Lemuano tašku* (E. Lemoine 1840–1912 – prancūzų matematikas), šis taškas yra jungtinis trikampio sunkio centrui.



11 pav.

4 pavyzdys. Sakykime, kad taške X susikerta apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo liestinės, nubrėžtos taškuose B ir C (11

pav.), tiesė AX kerta trikampio kraštinę BC taške D. Įrodysime, kad atkarpa AD yra trikampio simediana.

Sprendimas. Sakykime, kad apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo liestinės, nubrėžtos taškuose B ir C, susikerta taške X, tiesė AX kerta trikampio kraštinę BC taške D, o apskritimą – taške S. Sakykime, kad kraštinės BC taškas M yra toks, kad atkarpos AD ir AM yra jungtinės, t. y., $\angle BAD = \angle CAM$, o $\angle BAM = \angle CAD$. Taikydami sinusų teoremą trikampiams BAM ir CAM gauname, kad

$$\frac{BM}{\sin\angle BAM} = \frac{AB}{\sin\angle AMB},$$

$$\frac{CM}{\sin\angle CAM} = \frac{AC}{\sin\angle AMC},$$

t. y., $BM = \dfrac{c\sin\angle BAM}{\sin\angle AMB}, CM = \dfrac{b\sin\angle CAM}{\sin\angle AMC}$.

Kadangi $\angle AMB + \angle AMC = 180^0$, tai $\sin\angle AMB = \sin\angle AMC$, todėl $\dfrac{BM}{CM} = \dfrac{c\sin\angle BAM}{b\sin\angle CAM} = \dfrac{c\sin\angle CAX}{b\sin\angle BAX}$. Jei R - apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo spindulys, tai pagal sinusų teoremą

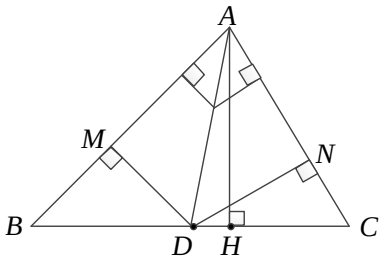
$$\sin\angle CAX = \sin\angle CAS = \frac{CS}{2R}, \sin\angle BAX = \sin\angle BAS = \frac{BS}{2R},$$

taigi $\dfrac{BM}{CM} = \dfrac{c\cdot CS}{b\cdot BS}$. Pagal kampo tarp liestinės ir stygos savybę $\angle XBS = \angle ABS$, todėl trikampiai ABX ir BSX yra panašieji, t. y., $\dfrac{AB}{BS} = \dfrac{AX}{BX}$. Iš čia gauname, kad $BS = \dfrac{AB\cdot BX}{AX}$. Analogiškai $\angle SCX = \angle CBS$, trikampiai CAX ir SCX yra panašieji, todėl $\dfrac{CA}{SC} = \dfrac{AX}{CX}$, taigi $CS = \dfrac{CA\cdot CX}{AX}$. Kadangi pagal apskritimo liestinių, nubrėžtų iš vieno taško, savybes $BX = CX$, todėl $\dfrac{BM}{CM} = \dfrac{c\cdot CS}{b\cdot BS} = \dfrac{c\cdot CA}{b\cdot AB} = 1$. Iš čia seka, kad taškas M yra kraštinės BC vidurio taškas, taigi atkarpa AD yra jungtinė pusiaukraštinei AM, todėl ji yra simediana.

5 pavyzdys. Jei atkarpa AD yra trikampio ABC simediana, tai bet kurio jos taško atstumų iki tiesių AB ir AC santykis lygus $\frac{AB}{AC}$.

Įrodysime tai.

Sprendimas. Iš taško D nuleiskime statmenis DM ir DN į tieses AB ir AC. Dėl trikampių panašumo bet kuro tiesės AD taško atstumų iki tiesių AB ir AC santykis lygus $\frac{DM}{DN}$ (12 pav.). Nubrėžkime trikampio ABC aukštinę AH ir dviem būdais skaičiuojame trikampių ABD ir ACD plotų santykį. Gauname lygybę $\frac{AB \cdot DM}{AC \cdot DN} = \frac{BD \cdot AH}{DC \cdot AH} = \frac{BD}{DC}$.



12 pav.

Kadangi atkarpa AD yra trikampio simediana, tai pagal jos savybę $\frac{BD}{DC} = \frac{AB^2}{AC^2}$. Iš lygybės $\frac{AB \cdot DM}{AC \cdot DN} = \frac{AB^2}{AC^2}$ išplaukia, kad $\frac{DM}{DN} = \frac{AB}{AC}$.

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB = \sqrt{198}$, $AC = 18$, $BC = 12$. Raskite į kokio ilgio atkarpas šio trikampio pusiaukraštinę AD dalija pusiaukampinė CF.

2. Trikampio ABC čevianos AD, BE, CF nubrėžtos taip, kad $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = \frac{1}{3}$. Raskite trikampių ABC ir DEF plotų santykį.

3. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB = 15$, $AC = 12$, $BC = 18$. Pusiaukampinė AD ir pusiaukampinė BE susikerta taške K, padalydamos trikampį į keturias dalis. Raskite tų dalių plotus.

4. Atkarpa BM yra trikampio ABC pusiaukraštinė, kraštinė BC taškais E ir F dalijama į tris lygias dalis. Atkarpos AE ir AF kerta pusiaukraštinę BM taškuose G ir H. Raskite santykius $BG:GH:HM$.

5. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB=12, AC=15, BC=18,$ jo pusiaukampinė BD ir aukštinė AE kertasi taške F. Į kokio ilgio atkarpas tiesė CF dalija kraštinę AB?

6. Trikampio ABC čevianos AD, BE ir CF susikerta taške M, trikampių AEM ir CEM plotai lygūs atitinkamai 24 ir 36, o $CD:DB=1:2$. Raskite trikampio ABC plotą.

7. Trikampio ABC kratinių ilgiai $AB=4, BC=5, AC=6,$ atkarpa AD yra pusiaukampinė, atkarpa BE yra pusiaukraštinė. Raskite į kokio ilgio atkarpas kraštinę AB dalija per atkarpų AD ir BE sankirtos tašką ir viršūnę C nubrėžta tiesė.

8. Kuris taškas yra jungtinis trikampio ABC aukštinių sankirtos taškui H?

9. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB=20, AC=30, BC=26.$ Raskite jo simedianos AD ilgį.

10. Apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo liestinės taškuose C ir B susikerta taške X, tiesė AX kerta tą apskritimą taškuose A ir S. Trikampio kraštinių ilgiai $AB=12,$ $AC=18,$ $BC=26.$ Raskite atkarpų BS ir CS ilgius.

III. KVADRATINĖS LIEKANOS

Aivaras Novikas

Įžanginiai pastebėjimai

Nagrinėkime bet kokį natūralųjį skaičių n ir visus jo kartotinius: $\ldots, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \ldots$ Po kiekvieno kartotinio kn iš eilės eina skaičiai $kn+1, kn+2, \ldots, kn+(n-1)$, o tada – kitas iš eilės kartotinis $(k+1)n = kn+n$. Todėl visus sveikuosius skaičius galima suskirstyti į tokias sekas: $kn, kn+1, kn+2, \ldots, kn+(n-1)$. Kiekvienas sveikasis skaičius m priklauso lygiai vienai sekai, todėl jį galima lygiai vienu būdu užrašyti pavidalu $m = kn+r$, kur kn yra n kartotinis, o r yra vienas iš skaičių 0, 1, 2, ... , $n-1$. Vienareikšmiškai nustatomas skaičius r vadinamas *skaičiaus m dalybos iš n liekana*. Dar sakysime, kad r yra *skaičiaus m liekana moduliu n*, ir žymėsime $r = m \bmod n$. Taigi dalybos iš n galimos liekanos yra 0, 1, 2, ... , $n-1$. Jei sveikųjų skaičių a ir b liekanos moduliu n sutampa, sakysime, kad a lygsta b moduliu n, ir žymėsime $a \equiv b (\bmod n)$. Skaičių a ir b liekanos moduliu n sutampa tada ir tik tada, kai jie skiriasi per n kartotinį, t. y. kai $a-b$ dalijasi iš n.

Pavyzdžiui, $154 \bmod 8 = 2$, $26 \bmod 8 = 2$ ir $68 \bmod 8 = 4$, todėl $154 \equiv 26 \pmod 8$, bet 154 nelygsta 68 moduliu 8. Visi skaičiai -29, $-2 = -29 + 9 \cdot 3$ ir $16 = -2 + 9 \cdot 2$ dalijasi iš 9 su liekana 7.

Tarkime, kad dauginame du sveikuosius skaičius $m_1 = k_1 n + r_1$ ir $m_2 = k_2 n + r_2$, kurie dalijasi iš n su liekanomis r_1 ir r_2. Jų sandauga $m_1 m_2 = n(k_1 k_2 n + r_1 k_2 + r_2 k_1) + r_1 r_2$ skiriasi nuo liekanų sandaugos $r_1 r_2$ per n kartotinį, todėl $m_1 m_2 \equiv r_1 r_2 (\bmod n)$, kur $r_1 = m_1 (\bmod n)$ ir $r_2 = m_2 (\bmod n)$.

1 pavyzdys. Norint rasti sandaugos $123 \cdot 321$ dalybos iš 7 liekaną, galima apskaičiuoti pačią sandaugą, o tada dalyti ją iš 7. Bet galima pastebėti, kad 123 dalijasi iš 7 su liekana 4, o 321 – su liekana 6. Todėl $m_1 m_2 = 123 \cdot 321$ liekana sutampa su $r_1 r_2 = 4 \cdot 6 = 24$ liekana 3. T. y. $123 \cdot 321 \equiv 4 \cdot 6 (\bmod n)$, todėl $(123 \cdot 321) \bmod 7 = (4 \cdot 6)(\bmod 7) = 3$.

2 pavyzdys. Raskime sandaugos $5^4 \cdot 121^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 123 \cdot 123 \cdot 123$ dalybos iš 4 liekaną.

Kadangi 5 dalijasi iš 4 su liekana 1, o 123 – su liekana 3, tai pakanka rasti sandaugos $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \times 3 \cdot 3 = 1^4 \cdot 3^3 = 27$ dalybos iš 4 liekaną. Ji lygi 3.

3 pavyzdys. Raskime skaičių 981^2, 982^2, 983^2, 984^2, 985^2, 986^2, 987^2 dalybos iš 7 liekanas.

Kadangi $981^2 = 981 \cdot 981$, o $981 = 980 + 1 = 7 \cdot 140 + 1$ dalijasi iš 7 su liekana 1, tai $981^2 \equiv 1^2 (\mathrm{mod}\, 7)$. Analogiškai $982^2 \equiv 2^2 (\mathrm{mod}\, 7), \ldots$, $986^2 \equiv 6^2 (\mathrm{mod}\, 7), \ldots$, $987^2 \equiv 0^2 (\mathrm{mod}\, 7)$. Todėl vietoj pradinių skaičių galime imti 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 0^2. Lengva patikrinti, kad šie septyni skaičiai dalijasi iš 7 su liekanomis 1, 4, 2, 2, 4, 1, 0.

Pagrindinis apibrėžimas

Skaičius vadinamas tiksliuoju kvadratu, jei yra sveikojo skaičiaus kvadratas. Skaičių a vadinsime *kvadratine liekana moduliu n*, jei jo liekana moduliu n lygi kokio nors tiksliojo kvadrato m^2 liekanai moduliu n, t. y. jei $a \equiv m^2 (\mathrm{mod}\, n)$, kur m yra sveikasis skaičius. Priešingu atveju sveikąjį skaičių a vadinsime kvadratine neliekana moduliu n. (Dažnai apibrėžiant ir nagrinėjant kvadratines liekanas bei neliekanas, apsiribojama tik tokiais a, kuriems $\mathrm{DBD}(a, n) = 1$, bet čia laikysimės platesnio apibrėžimo.) Pavyzdžiui, 23 yra kvadratinė liekana moduliu 7, nes $23 \bmod 7 = 2 = 3^2 \bmod 7$, t. y. $23 = 3^2 (\mathrm{mod}\, 7)$. Pastebėkime, kad a buvimas kvadratine liekana moduliu n priklauso tik nuo $a \bmod n$ (tiesiog $a \bmod n$ turi sutapti su $m^2 \bmod n$). T. y. a yra kvadratinė liekana moduliu n, kai $a \bmod n$ yra kvadratinė liekana moduliu n. Vadinasi, norint rasti visas kvadratines liekanas moduliu n, pakanka išsiaiškinti, kokios jos yra intervale $[0; n-1]$.

4 pavyzdys. Nustatykime visas kvadratines liekanas moduliu 7.

3 pavyzdžio išvada reiškia, kad 0, 1, 2 ir 4 yra kvadratinės liekanos. Tada kvadratinė liekana yra bet koks sveikasis skaičius, kuris dalijasi iš

7 su liekana 0, 1, 2 arba 4. Dėl likusių skaičių, kurie dalijasi iš 7 su liekana 3, 5, 6, dar negalime būti tikri. Jei m yra sveikasis skaičius, tai $m \bmod 7 = 0, 1, 2, \ldots, 6.$ Tada $m^2 \equiv 0^2, 1^2, 2^2, \ldots, 6^2 (\bmod 7).$ Bet skaičių $0^2, 1^2, 2^2, \ldots, 6^2$ liekanas jau radome 3 pavyzdyje. Vadinasi, sveikieji skaičiai, kurie dalijasi iš 7 su liekana $3, 5$ arba 6, yra kvadratinės neliekanos.

5 pavyzdys. Nustatykime visas kvadratines liekanas moduliu 24 intervale [0; 23].

Kaip ir 4 pavyzdyje, pakanka patikrinti skaičių $0^2, 1^2, 2^2, \ldots, 23^2$ liekanas moduliu 24. Tačiau darbo galima dar sumažinti. Pastebėkime, kad $(-1) \bmod 24 = (-1+24) \bmod 24 = 23.$ Todėl $23^2 \equiv (-1)^2 \bmod 24,$ Analogiškai $22^2 \equiv (-2)^2 \bmod 24,$ ir t. t. Taip gauname, kad vietoj $23^2, 22^2, 21^2, \ldots, 13^2$ galime atitinkamai imti $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 11^2.$ Todėl pakanka nagrinėti $0^2, 1^2, 2^2, \ldots, 12^2$ liekanas. Jos lygios 0, 1, 4, 9, 16, 1, 12, 1, 16, 9, 4, 1, 0. Intervale [0; 23] yra 6 kvadratinės liekanos moduliu 24: tai 0, 1, 4, 9, 12, 16.

6 pavyzdys. Kiek yra natūraliųjų triženklių skaičių m, kuriems $m^2 - 37$ dalijasi iš a) 24; b) 7?

a) Skaičius $m^2 - 37$ dalijasi iš 24 tada ir tik tada, kai $m^2 - 37 + 24 = m^2 - 13$ dalijasi iš 24. Tada $m^2 = 24k + 13,$ kur skaičius k yra sveikasis, ir $m^2 \bmod 24 = 13.$ Tačiau 5 pavyzdyje įsitikinome, kad 13 nėra kvadratinė liekana moduliu 24. Vadinasi, tokių skaičių m nėra.

b) Skaičius $m^2 - 37$ dalijasi iš 7 tada ir tik tada, kai $m^2 - 37 + 35 = m^2 - 2$ dalijasi iš 7 arba kai $m^2 \bmod 7 = 2.$ Prisiminkime 3 ir 4 pavyzdžius. Jei $r = m \bmod 7,$ tai $m^2 \equiv r^2 (\bmod 7).$ Todėl reikia patikrinti, su kuria reikšme $r^2 = 0^2, 1^2, 2^2, \ldots, 6^2$ turime $r^2 (\bmod 7) = 2.$ Tinka $r = 3$ ir $r = 4.$ Belieka nustatyti, kiek triženklių skaičių m dalijasi iš 7 su liekana $r = 3$ arba $r = 4.$ Mažiausi tokie skaičiai yra 101 ir 102. Toliau eina 108 ir 109, 115 ir 116, ..., 997 ir 998. Kadangi

$997 = 101 + 7 \cdot 128$, tai turime 129 skaičių poras arba iš viso 258 skaičius.

Kvadratinių liekanų skaičius

Tarkime, kad p yra nelyginis pirminis skaičius. Kiek skaičių intervale $[0; p-1]$ yra kvadratinės liekanos moduliu p? Pakanka nagrinėti skaičių $0^2, 1^2, 2^2, \ldots, (p-1)^2$ liekanas moduliu p. Analogiškai 5 pavyzdžiui, nagrinėtinų skaičių kiekį galima dar sumažinti: $(p-1)^2 \equiv (-1)^2 (\text{mod } p)$, $(p-2)^2 \equiv (-2)^2 (\text{mod } p)$, ir t. t. Todėl vietoj skaičių $(p-1)^2, (p-2)^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$ galima imti atitinkamai $1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Taip mums belieka skaičiai $0^2, 1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Jei kurie nors du skirtingi iš jų i^2 ir j^2 dalijasi iš p su ta pačia liekana, tai jie skiriasi per p kartotinį, t. y. $i^2 - j^2 = (i-j)(i+j)$ dalijasi iš p. Kadangi skaičius p pirminis, tai tada iš p dalijasi $i-j$ arba $i+j$. Tačiau $-\frac{p-1}{2} \le i-j \le \frac{p-1}{2}$ ir $1 \le i+j \le p-1$, todėl vienintelė galimybė yra $i-j=0$ – kai $i=j$. Vadinasi, skaičių $0^2, 1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. liekanos moduliu p yra skirtingos. Tai ir yra visos ieškomos kvadratinės liekanos. Jų yra $\frac{p+1}{2}$: tai nulis ir lygiai pusė likusių nenulinių dalybos iš p liekanų.

7 pavyzdys. Imkime $p = 11$. Pastebėkime, kad skaičiaus $g = 2$ iš eilės einantys laipsniai $2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{10}$ dalijasi iš 11 su skirtingomis liekanomis 2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6, 1 ir taip gauname visas nenulines dalybos iš 11 liekanas. Jau žinome, kad lygiai pusė iš jų yra kvadratinės liekanos moduliu 11. Žinoma, tai liekanos, gautos iš tiksliųjų kvadratų – laipsnių su lyginiais rodikliais $2^2, 2^4, 2^6, 2^8, ,2^{10}$. Vadinasi, laipsnių su

nelyginiais rodikliais liekanos 2, 8, 10, 7, 6 yra kvadratinės neliekanos moduliu 11.

Yra įrodyta, kad kiekvienam nelyginiam pirminiam skaičiui *p* egzistuoja toks sveikasis skaičius *g*, vadinamas **primityviąja šaknimi** moduliu *p*, kurio laipsniai $g^1, g^2, g^3, \ldots, g^{p-1}$ dalijasi iš *p* su visomis įmanomomis nenulinėmis liekanomis (toks skaičius *g* nėra vienintelis). Ir vėl laipsniai su lyginiais rodikliais bus kvadratinės liekanos, o su nelyginiais – kvadratinės neliekanos moduliu *p*. Pats skaičius $g^1 = g$ yra kvadratinė neliekana.

Ležandro simbolis

Toliau laikysime, kad p yra nelyginis pirminis skaičius, o *a* yra sveikasis skaičius. Norint nustatyti, ar skaičius *a* yra kvadratinė liekana moduliu *p*, galima perrinkti visas galimybes, rasti visas kvadratines liekanas intervale [0; p – 1], kaip 4 ir 5 pavyzdžiuose. Tačiau tai gali užtrukti, jei *p* yra didelis skaičius. Yra greitesnis būdas.

Ležandro simbolį $\left(\frac{a}{p}\right)$ apibrėžia lygybės: $\left(\frac{a}{p}\right) = 0$, jei *a* dalijasi iš *p*; $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, jei *a* yra kvadratinė liekana moduliu *p*, bet nesidalija iš *p*; $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, jei *a* yra kvadratinė neliekana moduliu *p*. Taigi Ležandro simbolis parodo, ar *a* yra kvadratinė liekana, ar ne. Jei fiksuojame *p*, tai Ležandro simbolis yra funkcija, apibrėžta ir įgyjanti reikšmes sveikųjų skaičių aibėje. Įrodyta, kad Ležandro simbolis tenkina šias savybes:

1) jei $a \equiv b (\bmod p)$, tai $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$; atskiru atveju $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{r}{p}\right)$; kur $r = a \bmod p$;

2) $\left(\frac{a \cdot b}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right)$ bet kokiems sveikiesiems *a* ir *b*;

3) $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$; atskiru atveju $\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ ir $\left(\frac{1}{p}\right) = 1$;

4) $\left(\frac{2}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$;

5) jei q yra nelyginis pirminis skaičius, tai $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) \cdot (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$.

Remiantis šiomis savybėmis, galima apskaičiuoti bet kokią Ležandro simbolio $\left(\frac{a}{p}\right)$ reikšmę: 1 savybė leidžia gauti $a \in [0; p-1]$, tada 2 savybė leidžia gauti 4 ir 5 savybių situacijas, o toliau 5 savybė – sumažinti p; kartojamas, šis procesas negali tęstis be galo.

8 pavyzdys. Nustatykime, ar 77 yra kvadratinė liekana moduliu 101 (skaičius 101 pirminis).

Remiantis 2 savybe, $\left(\frac{77}{101}\right) = \left(\frac{7}{101}\right) \cdot \left(\frac{11}{101}\right)$.

Remiantis 5 savybe,

$$\left(\frac{7}{101}\right) \cdot \left(\frac{11}{101}\right) = \left(\frac{101}{7}\right) \cdot (-1)^{\frac{101-1}{2} \cdot \frac{7-1}{2}} \cdot \left(\frac{101}{11}\right) \cdot (-1)^{\frac{101-1}{2} \cdot \frac{11-1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{101}{7}\right) \cdot (-1)^{50 \cdot 3} \cdot \left(\frac{101}{11}\right) \cdot (-1)^{50 \cdot 5} = \left(\frac{101}{7}\right) \cdot \left(\frac{101}{11}\right).$$

Remiantis 1 savybe, $\left(\frac{101}{7}\right) \cdot \left(\frac{101}{11}\right) = \left(\frac{3}{7}\right) \cdot \left(\frac{2}{11}\right)$.

Remiantis 4 savybe,

$$\left(\frac{2}{11}\right) = (-1)^{\frac{11^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{(11-1)(11+1)}{8}} = (-1)^{\frac{10 \cdot 12}{8}} = (-1)^{5 \cdot 3} = -1.$$

Remiantis 5, 1 ir 3 savybėmis,

$$\left(\frac{3}{7}\right) = \left(\frac{7}{3}\right) \cdot (-1)^{\frac{7-1}{2} \cdot \frac{3-1}{2}} = -\left(\frac{7}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right) = -1.$$

Todėl $\left(\frac{77}{101}\right)=\left(\frac{3}{7}\right)\cdot\left(\frac{2}{11}\right)=(-1)^2=1.$ Vadinasi, 77 yra kvadratinė liekana moduliu 101.

Galimas ir kitoks skaičiavimas. Kadangi $77\equiv -24(\mathrm{mod}\,101),$ tai

$$\left(\frac{77}{101}\right)=\left(\frac{-24}{101}\right)=\left(\frac{-1}{101}\right)\cdot\left(\frac{3}{101}\right)\cdot\left(\frac{2}{101}\right)^3=$$

$$=(-1)^{50}\cdot\left(\frac{101}{3}\right)\cdot(-1)^{\frac{101-1}{2}\cdot\frac{3-1}{2}}\cdot(-1)^{\frac{(101^2-1)\cdot 3}{8}}=$$

$$=-\left(\frac{101}{3}\right)=-\left(\frac{2}{3}\right)=-\left(\frac{-1}{3}\right)=1.$$

9 pavyzdys. Nustatykime, ar 206 yra kvadratinė liekana moduliu 83 (skaičius 83 pirminis).

Turime

$$\left(\frac{206}{83}\right)=\left(\frac{2}{83}\right)\cdot\left(\frac{103}{83}\right)=(-1)^{\frac{83^2-1}{8}}\cdot\left(\frac{20}{83}\right)=-\left(\frac{20}{83}\right)=-\left(\frac{5}{83}\right)\cdot\left(\frac{2}{83}\right)^2=-\left(\frac{5}{83}\right)=.$$

$$=-\left(\frac{83}{5}\right)\cdot(-1)^{\frac{83-1}{2}\cdot\frac{5-1}{2}}=-\left(\frac{3}{5}\right)=-\left(\frac{3-5}{5}\right)=-\left(\frac{-2}{5}\right)=-\left(\frac{-1}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\right)=-(1\cdot(-1))=1.$$

Vadinasi, 206 yra kvadratinė liekana moduliu 83.

Sužinojome, kad egzistuoja sveikasis *m*, kuriam m^2 dalijasi iš 83 su liekana $206\,\mathrm{mod}\,83=40,$ Ar galima rasti kokį nors tokį *m*, netikrinant galimų jo reikšmių iš eilės? Kadangi $1=\left(\frac{206}{83}\right)=\left(\frac{40}{83}\right),$ tai, remiantis 3 savybe, $40^{41}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,83).$ Tada $40^{41}\cdot 40\equiv 1\cdot 40\,(\mathrm{mod}\,83).$ ir $40^{42}=(40^{41})^2$ dalijasi iš 83 su liekana 40. Taigi, tinka $m=40^{21}.$ Tai gana didelis skaičius. Jei norėtume gauti tinkamą $m\in[0;82],$ tai turėtume rasti $40^{21}\,\mathrm{mod}\,83.$ Tai galima padaryti, neapskaičiuojant didelio skaičiaus: $40^3\,\mathrm{mod}\,83=7,$ todėl $(40^3)^7\equiv 7^7\,(\mathrm{mod}\,83)$; $7^3\,\mathrm{mod}\,83=11,$ todėl $(7^3)^2\cdot 7\equiv 11^2\cdot 7(\mathrm{mod}\,83)$; $11^2\cdot 7\,\mathrm{mod}\,83=17,$

todėl galime imti $m_1 = 40^{21} \bmod 83 = 17$. Iš tiesų, lengva patikrinti, kad $17^2 \equiv 206 (\bmod 83)$. Pastebėkime, kad tada tinka ir $m_2 = 83 - 17 = 66$.

9 pavyzdyje gavome, kad x^2 dalijasi iš 83 su liekana 40, kai $x = 40^{21}$. Analogiškai įrodomas toks bendras **teiginys**: jei *a* yra kvadratinė liekana moduliu *p*, nesidalijanti iš *p*, o pirminis skaičius *p* dalijasi iš 4 su liekana 3, tai x^2 dalijasi iš *p* su liekana $a \bmod p$, kai $x = a^{\frac{p+1}{4}}$.

10 pavyzdys. Raskime lygties $x^2 131y + 52$ du natūraliuosius sprendinius (x, y), kur $x < 132$.

Skaičius 131 pirminis. Lygtis iš esmės reiškia lygybę $x^2 \bmod 131 = 52$. Patikrinkime, kad sprendinys apskritai egzistuoja:

$$\left(\frac{52}{131}\right) = \left(\frac{2}{131}\right)^2 \cdot \left(\frac{13}{131}\right) = \left(\frac{13}{131}\right) = \left(\frac{131}{13}\right) \cdot (-1)^{\frac{131-1}{2} \cdot \frac{13-1}{2}} = \left(\frac{1}{13}\right) = 1.$$

Kadangi $p = 131$ dalijasi iš 4 su liekana 3, o $a = 52$ yra kvadratinė liekana moduliu 131, tai lygybę $x^2 \bmod 131 = 52$ tenkina $x = a^{\frac{p+1}{4}} = 52^{33}$ ir $x = 52^{33} \bmod 131$. Pastebėkime: $52^3 (\bmod 131) = 45$, todėl $(52^3)^{11} \equiv 45^{11} (\bmod 131)$; $45^5 (\bmod 131) = 84$, todėl $(45^5)^2 \cdot 45 \equiv 84^2 \cdot 45 (\bmod 131)$; $84^2 \cdot 45 \cdot \bmod 131 = 107$, todėl galime imti $x = 52^{33} \bmod 131 = 107$. Tada $y = (x^2 - 52) : 131 = 87$. Tinka ir $x = 131 - 107 = 24$ bei $y = 4$.

11 pavyzdys. Įrodykime, kad lygtis $13x^2 + 14x + 2 = 97y$ neturi sveikųjų sprendinių (x, y), (x, y), t. y. kad $z = 13x^2 + 14x + 2$ nesidalija iš 97 su jokiu sveikuoju *x*.

Kairėje lygybės pusėje bandykime išskirti pilnąjį kvadratą, t. y. gauti išraišką $a^2 + 2ab + b^2$. Kad $13x^2$ virstų a^2, a^2, padauginkime *z* iš 13. Gauname

$$13z = 13^2 x^2 + 14 \cdot 13x + 26 = (13x)^2 + 2 \cdot 13x \cdot 7 + 26 =$$
$$= (13x)^2 + 2 \cdot 13x \cdot 7 + 7^2 - 7^2 + 26 = (13x + 7)^2 - 23.$$

Tada $(13x+7)^2 = 13z+23 = 97\cdot 13y+23$ yra tikslusis kvadratas, o 23 yra kvadratinė liekana moduliu 97. Tačiau skaičius 97 pirminis ir $\left(\frac{23}{97}\right) = -1$ (patikrinkite). Vadinasi, pradinė lygtis neturi sveikųjų sprendinių.

12 pavyzdys. Įrodykime, kad jei *x* yra sveikasis skaičius, o pirminis skaičius *p* dalijasi iš 7 su liekana 3, tai $z = x^2 + 11x + 32$ nesidalija iš *p*.

Vėl išskirkime pilnąjį kvadratą. Turime

$$4z = 4x^2 + 4\cdot 11x + 128 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 11 + 128 =$$
$$= (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 11 + 11^2 - 11^2 + 128 = (2x+11)^2 + 7.$$

Jei z dalijasi iš p, tai tikslusis kvadratas $(2x+11)^2 = 4z-7$ dalijasi iš *p* su ta pačia liekana, kaip ir skaičius –7. Tada –7 yra kvadratinė liekana moduliu *p*, tačiau

$$\left(\frac{-7}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\cdot\left(\frac{7}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\cdot\left(\frac{p}{7}\right)\cdot(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{7-1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot(1+3)}\cdot\left(\frac{p}{7}\right) =$$
$$= (-1)^{2(p-1)}\cdot\left(\frac{3}{7}\right) = \left(\frac{3}{7}\right) = -1$$

(kad skaičius 3 yra kvadratinė neliekana moduliu 7, įsitikinome 4 pavyzdyje). Vadinasi, –7 yra kvadratinė neliekana moduliu *p*, o *z* nesidalija iš *p*.

Sudėtinio *n* atvejis

Tarkime, kad natūralusis skaičius *n* yra sudėtinis ir reikia išsiaiškinti, ar sveikasis skaičius *a*, kuriam $\mathrm{DBD}(a, n) = 1$, yra kvadratinė liekana moduliu *n*. Teisingas toks *kriterijus*. Skaičius *a* yra kvadratinė liekana moduliu *n* tada ir tik tada, kai tenkinamos visos trys sąlygos: 1) jei *p* yra bet kuris nelyginis pirminis skaičiaus *n* daliklis, tai *a* yra kvadratinė liekana moduliu *p*; 2) jei *n* dalijasi iš 4, tai $a-1$ dalijasi iš 4; 3) jei *n* dalijasi iš 8, tai $a-1$ dalijasi iš 8.

13 pavyzdys. Nustatykime, ar skaičiai 123 ir 421 yra kvadratinės liekanos moduliu 203.

Kadangi $203 = 7 \cdot 29$, o nei 123, nei 421 iš 7 nei 29 nesidalija, tai galime taikyti pateiktą kriterijų.

Kadangi $\left(\frac{123}{7}\right) = \left(\frac{123}{29}\right) = 1$, tai 123 yra kvadratinė liekana. Nors $\left(\frac{421}{7}\right) = 1$, , bet $\left(\frac{421}{29}\right) = -1$, todėl 421 yra kvadratinė neliekana.

Kadangi 123 yra kvadratinė liekana moduliu 203, tai lygtis $x^2 = 203y + 123$ turi sveikųjų sprendinių. Pamėginkime rasti bent vieną iš jų. Turime rasti tokį *x*, kad $x^2 - 123$ dalytųsi iš 203, t. y. dalytųsi iš 7 ir dalytųsi iš 29. Rasti tokį *x*, kad $x^2 - 123$ dalytųsi iš 7, visai nesunku: pakanka perrinkti galimybes $x = 0, 1, \ldots, 6$. Tinka $x = 2$ ir $x = 5$. Tada tinka ir bet koks *x*, kuris dalijasi iš 7 su liekana 2 arba 5. Rasti tokį *x*, kad $x^2 - 123$ dalytųsi iš 29, taip pat galima perranka, o kadangi *x* tinka tada ir tik tada, kai tinka $29 - x$, tai pakanka patikrinti $x = 0, 1, \ldots, 14$. Tinka $x = 6$, todėl ir $x = 29 - 6 = 23$. Tada pradines sąlygas tenkina bet kuris *x*, kuris dalijasi iš 29 su liekana 6 arba 23, o iš 7 su liekana 2 arba 5. Jei $x \bmod 29 = 6$, tai $x = 6, 35, 64, 93, 122, \ldots$ Jau ketvirtasis skaičius dalijasi iš 7 su liekana 2, todėl turi tikti. Tada $y = (93^2 - 123) : 203 = 42$ ir gauname sprendinį $(x, y) = (93, 42)$.

Kvadratinės liekanos gali būti sėkmingai naudojamos kriptografijoje (moksle apie šifravimą). Tarkime, kad Alytė siunčia Broniui šifruotus pranešimus. Pirmiausiai Bronius sugalvoja šifro *privatųjį raktą* – du skirtingus pirminius skaičius p ir q, kurie dalijasi iš 4 su liekana 3 ir kurie turi likti žinomi tik jam. Tada jis pasiunčia Alytei sandaugą $n = pq$, *viešąjį raktą*. Jei skaičiai *p* ir *q* pakankamai dideli, juos rasti net žinant *n* gali būti sunkus, gerokai per daug laiko reikalaujantis darbas. Todėl skaičiai *p* ir *q* lieka nežinomi tiek Alytei, tiek bet kam, kas sužinotų viešąjį raktą. Tada Alytė, remdamasi viešuoju raktu, užšifruoja pranešimą. Ji suformuluoja pranešimą sveikojo skaičiaus tarp 0 ir $n - 1$ pavidalu, o tada šį skaičių *x* užšifruoja, pakeisdama jį į $y = x^2 \cdot \bmod n$. Ji siunčia skaičių *y* Broniui, o šis turi iššifruoti pranešimą – žinodamas *y*, turi rasti *x*. Kadangi Bronius žino privatųjį raktą, jis pirmiausiai gali rasti

tokį x_1, kad $x_1^2 - y$ dalytųsi iš *p*, ir tokį x_2, kad $x_2^2 - y$ dalytųsi iš *q*. Pirminiai skaičiai dalijasi iš 4 su liekana 3, todėl Bronius gali pasinaudoti mūsų jau naudotu teiginiu ir imti $x_1 = y^{\frac{p+1}{4}} \bmod p$ bei $x_2 = y^{\frac{q+1}{4}} \bmod q$. Tada, kaip jau darėme 13 pavyzdyje, jam beliks pasirinkti tą sekos x_2, $x_2 + q$, $x_2 + 2q$, ... narį, kuris dalijasi iš *p* su liekana x_1. Jei skaičiai *p* ir *q* dideli, šie skaičiavimai taip pat gali užtrukti, bet vis tiek daug trumpiau, nei skaičiavimai, kurių prireiktų pašaliniam asmeniui, sekančiam Broniaus ir Alytės bendravimą bei sužinojusiam *y* ir *n*.

14 pavyzdys. Tarkime, Bronius pasiuntė Alytei viešąjį raktą $n = 1011421$, o Alytė Broniui pasiuntė šifruotą pranešimą $y = 280887$. Tada Bronius, žinodamas, kad $n = 827 \cdot 1223$, kur 827 ir 1223 yra pirminiai skaičiai, gali rasti $x_1 = 280887^{207} \bmod 827 = 534^{207} \bmod 827$.

Jis gali pastebėti:

$534^9 \bmod 827 = 306$ ir $(534^9)^{23} \equiv 306^{23} (\bmod 827)$;

$306^{11} \bmod 827 = 12$ ir $(306^{11})^2 \cdot 306 \equiv 12^2 \cdot 306 \ (\bmod\ 827)$,

todėl $x_1 = (12^2 \cdot 306) \bmod 827 = 233$. Analogiškai randama, kad

$$x_2 = 280887^{306} \bmod 1223 = 820^{306} \bmod 1223 = 258^{34} \bmod 1223 =$$
$$= 522^{17} \bmod 1223 = (522^8)^2 \cdot 522 \bmod 1223 =$$
$$= 1043^2 \cdot 522 \bmod 1223 = 1156.$$

Toliau tikrinama seka 1156, $1156 + 1223$, $1156 + 1223 \cdot 2$, ... ir joje ieškoma nario, besidalijančio iš 827 su liekana 233. Toks yra sekos narys $1156 + 1223 \cdot 100 = 123456$. Tačiau yra dar trys sprendiniai, gaunami imant $x_1 = 827 - 233$ arba/ir $x_2 = 1223 - 1156$, kurie gali būti skaičiaus *x* reikšme. Kuris iš jų teisingas? Bronius ir Alytė gali būti iš anksto susitarę dėl papildomų pasirinkimo kriterijų, pavyzdžiui, kad Alytės pranešimas visada turi baigtis skaitmeniu 6. Žinoma, kad šifras būtų tikrai saugus, skaičius n turėtų būti didesnis, nei čia parodyta.

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Nesinaudodami skaičiuotuvu, raskite *x* mod *n* ir nustatykite, ar *x* yra kvadratinė liekana moduliu *n*, kai

a) $x = 7142128354^2 \cdot 4249566372^3, \quad n = 7;$

b) $x = 1111111 \cdot 222222222 \cdot 33333333333, \quad n = 11;$

c) $x = 12634256789^{11}, \quad n = 9$.

2. Intervale $[0;12]$ raskite visas kvadratines liekanas ir neliekanas moduliu 13. Nurodykite vieną iš rastųjų kvadratinių neliekanų, kuri nebūtų primityvioji šaknis moduliu 13.

3. Raskite visas kvadratines liekanas moduliu 31 intervale $[0; 30]$. Kiekvienu atveju a)-d) arba raskite bent vieną lygties natūralųjį sprendinį (x, y), kur $x < 32$, arba įrodykite, kad lygtis neturi sveikųjų sprendinių: a) $x^2 = 31y + 70$; b) $x^2 = 31y + 9377$; c) $x^2 = 31y - 59$; d) $x^2 = 31y - 641$.

4. Apskaičiuodami atitinkamą Ležandro simbolio reikšmę, nustatykite, ar *x* yra kvadratinė liekana moduliu *p*, kai a) $x = 71, \quad p = 1009$; b) $x = 96, \quad p = 173$; c) $x = -1030, \quad p = 97$. (Žinoma, kad visos pateiktos *p* reikšmės yra pirminiai skaičiai.)

5. Įrodykite, kad $3x^2 + 10x + 6$ nesidalija iš 67 su jokiu sveikuoju *x*.

6. Skaičius 499 pirminis. Raskite tokį sveikąjį $x \in [0; 498]$, kuriam $x^2 - 73$ dalijasi iš 499. Spręskite, kaip parodyta 10 pavyzdyje.

7. Skaičius 1471 pirminis. Įrodykite, kad $x^2 - 13x + 41$ dalijasi iš 1471 su kokiu nors sveikuoju *x*.

8. Skaičius *x* sveikasis, skaičius *p* pirminis, o skaičius $p + 1$ dalijasi iš 52. Įrodykite, kad $x^2 + 2x + 118$ nesidalija iš *p*.

9. Nustatykite, kurie iš skaičių 127, 1201 ir 2017 yra kvadratinės liekanos moduliu 9576.
Nurodymas. Išskaidykite 9576 pirminiais daugikliais.

10. Bronius pasiuntė Alytei skaičių $n = 17513$, o Alytė pasiuntė Broniui pranešimą – skaičių x, užšifruotą skaičiumi $y = 13818$. Žinodami, kad n turi dviženklį daliklį, raskite p, q ir keturias galimas skaičiaus $x \in [0; n-1]$ reikšmes (žr. paskutinį skyrelį).

IV. MATEMATINIAI ŽAIDIMAI

Romualdas Kašuba

Matematiniu žaidimu labiausiai klasikine, galima būtų išdrįsti pasakyti, labiau įprastine, ar netgi labiausiai suprantama ar suvokiama to žodžio prasme yra laikoma situacija, kai keletas (labai dažnai du) žaidėjų turi ką nors jiems nurodytoje situacijoje padaryti ir kur yra pasakyta, ką reikėtų padaryti, kad būtum pripažintas sėkmingesniu už kitą – arba, kitaip tariant, būtum paskelbtas laimėjusiu tą žaidimą.

Savaime suprantama, kad tos sąlygos turi būti paskelbtos iš anksto.

Be to, jos turėtų būti apibūdintos neprieštaringai ir pagal galimybę ne per daug supainiotai.

Nes, ką čia daug bekalbėti, vadinamieji žaidimų uždaviniai anaiptol nėra patys paprasčiausieji iš visų matematinių uždavinių.

Jie neretai turi daug išsišakojimų ir todėl susigaudyti, kaip ten viskas galėtų atrodyti ir kaip ten kuriam žaidėjui derėtų elgtis, neretai gali atrodyti ir dažnai yra nelengvas galvosūkis.

Tačiau, kaip sako išminčiai ir, svarbiausia, patvirtina kasdienė praktika, net ir labai nelengvi dalykai sykiais prasideda nuo tikrai paprastų ir niekam jokio galvos skausmo nekeliančių dalykų.

Kitaip sakant, kai kada tai visai nesunku: nei suformuluoti uždavinį, nei aprašyti jį, nei gerai suprasti, kas darytina, kad būtum paskelbtas sėkmingesniu už kitą – arba laimėjusiu tą žaidimą.

Pasižiūrėkime vieną tokį pavyzdį.

1 pavyzdys. Jonas ir Petras turi skaičius 1, 2, 3, 4 ir 5 (paprastai yra sakoma, kad tie skaičiai parašyti lentoje, prie kurios jiems yra patogu prieiti) ir išbraukinėja juos iš eilės (nors tai ir nebūtina, jie galėtų juos išbraukinėti ir nebūtinai iš eilės), pradėdami nuo skaičiaus 1.

Kiekvienu ėjimu kiekvienas iš jų turi išbraukti arba vieną, arba du skaičius, o laimėjusiu žaidimą yra pripažįstamas tas, kuriam pasiseka išbraukti patį paskutinįjį skaičių. Ar gali kuris nors iš jų laimėti, jeigu pirmasis išbraukinėti pradeda Jonas?

1 pastaba. Tokiu atveju, kai kuris nors iš jų visada gali laimėti, kad ir ką bedarytų kitas žaidėjas, tada yra dar sakoma, kad tas žaidėjas turi išlošimo strategiją.

Mūsų atveju reikalai yra akivaizdžiai tokie, kad Jonas visada laimi, kad ir ką bedarytų Petras. Dar linksmiau nuteikia tai, kad suvokti, ką Jonas turėtų daryti, kad taip tikrai nutiktų, yra visai paprasta - tam Jonui pakanka savo pirmuoju ėjimu išbraukti pirmuosius du skaičius 1 ir 2 paliekant tris skaičius, kurie yra 3, 4 ir 5.

Jei braukoma ne iš eilės, tai tada Jonas galėtų išbraukti bet kuriuos du skaičius.

Taip po Jono ėjimo lentoje lieka skaičiai 3, 4 ir 5 (jei braukoma iš eilės), arba kažkokie trys skaičiai (jeigu braukoma bet kaip, svarbu tik, kaip sakyta, kad kiekvienu savo ėjimu kiekvienas žaidėjas išbrauktų arba vieną, arba du skaičius).

Taigi Jonas savo pirmuoju ėjimu sukuria tokią situaciją, kad lentoje lieka trys skaičiai.

Kodėl ta situacija iš karto padaro jį laiminčiuoju?

Ogi todėl, kad dabar daryti ėjimą, arba braukyti skaičius turi Petras, kuris taip pat privalės išbraukti vieną arba du skaičius. Jeigu jis išbrauks tik vieną skaičių – tada 3 (kaip paprasčiausiuoju atveju), tai tada lentoje liks dar neišbraukti skaičiai 4 ir 5, kuriuos savo antruoju ėjimu ir išbrauks Jonas, taip laimėdamas žaidimą. O jeigu Petras išbrauks du skaičius – tada 3 ir 4 – tai tada jis paliks Jonui malonią galimybę antruoju ėjimu išbraukti tą užsilikusį 5 ir laimėti visą žaidimą.

2 *pastaba.* Visiškai aišku, kad Jono strategija rėmėsi tuo, kad po savo ėjimo jam pavyksta sukurti tokią situaciją, kai jis palieka tris skaičius ir tada, kad ir ką Petras bedarytų, viskas bus blogai. Pastebėkime, kad kai lentoje yra 3 skaičiai, tai jų visų savo atsakomuoju ėjimu Petras išbraukti negali, nes taisyklės leidžia išbraukti tik daugiausiai du skaičius, o kadangi daryti ėjimą jis privalo, tai po bet kurio jo išbraukimo Jonas jau baigs išbraukti tai, kas dar yra užsilikę lentoje, t.y. ir paskutinį skaičių.

Taigi Jono strategija yra po savo išbraukimo palikti lentoje „nei per daug, nei per mažai skaičių“, arba, pagal mūsų taisykles, pavyzdžiui, lygiai 3.

2 pavyzdys.

Š		

Kairiajame apatiniame lentelės 3 × 3 kampe yra padėta šaškė. Kiekvienu ėjimu Jonas ir Justas perkėlinėja ją į gretimą pagal kraštinę langelį. Negalima perkelti šaškės į tokį langelį, kuriame šaškė jau yra pabuvojusi. Pralaimi tas, kuris nebegali padaryti ėjimo. Ar gali kuris nors žaidėjas laimėti, kad ir ko imtųsi kitas žaidėjas, ir, jeigu jau taip, tai kaip tada jis galėtų elgtis?

Paprastumo dėlei likusius langelius – tuos, kur dabar nėra šaškės – sunumeruokime skaičiais nuo 1 iki 8 taip, kaip tai parodyta brėžinyje:

1	2	3
4	5	6
Š	7	8

Dabar suskirstykime tuos langelius poromis, sakysime, tokiu būdu:

(1;4), (2; 5), (3; 6) ir (7; 8).

Pastebėkime, kad visais atvejais tie porų langeliai turi bendrą kraštinę.

Dabar Jonas, kuris pradeda žaidimą, neišvengiamai perkels šaškę arba į 4, arba į 7 langelį, t.y. „įžengs“ į kurią nors porą, o savo atsakymu Justas galėtų perkelti tą šaškę būtent į kitą tos poros langelį. Todėl kitu savo ėjimu Jonas (jei tik galėtų paeiti) vėl neišvengiamai įžengtų į naują porą, o Justas tada eitų į kitą tos poros langelį.

Vadinasi, kiekvienu savo ėjimu Jonas, jei tik galėtų paeiti, vėl įžengtų į naują porą, o tada Justas eitų į kitą tos poros langelį. Kadangi gretimų langelių porų yra tik 4, tai Jonas daugiausiai galėtų padaryti 4 ėjimus ir vėliausiai po 4-to aiškaus Justo atsakymo neišvengiamai ir akivaizdžiai pralaimės.

Taigi žaidėjo strategija ir meistriškumas ir būtų susigaudyti, kad įmanoma suskirstyti likusius lentelės langelius poromis taip, kad suskirstyti poromis būtų visi „bešaškiai“ langeliai ir, žinoma, kad tos pačios poros langeliai turėtų bendrą šoną (bendrą kraštinę).

3 pavyzdys. Jonas ir Justas turi pakaitomis 5 žvaigždutes

* * * * *

pakeisti 5 skaitmenimis

1, 3, 5, 7 ir 9,

kiekvieną skaitmenį panaudodami po vieną kartą; pirmasis skaitmenį renkasi Jonas. Po to, kai jie suformuoja 5-ženklį skaičių, yra nustatoma

jų sudaryto skaičiaus dalybos iš 3 liekana. Jeigu jų suformuotasis skaičius, padalintas iš 3, turi liekaną 1, tai laimėjusiu žaidimą yra laikomas Justas, o jeigu liekaną 2, tai Jonas. Kuris iš jų gali laimėti, jeigu abu, kaip dažnai sakoma, žaistų „protingai“.

Sprendimas. Pastebėkime, kad parašytasis galutinis 5-ženklis skaičius turi skaitmenų sumą, kuri yra lygi visų 5-ių išvardintųjų skaičių skaitmenų sumai, ir kuri yra

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$$

Jeigu tą suformuotąjį 5-ženklį skaičių vienu vienetu sumažintume, tai jo skaitmenų suma taip pat vienu vienetu sumažėtų ir būtų lygi 24. Todėl tas skaičius pagal dalumo iš 3 požymį dalintųsi be liekanos iš 3, todėl vienu vienetu didesnis skaičius, padalintas iš 3, turėtų 1-tui lygią liekaną, o tai reiškia, jog žaidimą, kad ir ką jie darytų, neišvengiamai visada laimi Justas.

3 pastaba. Pastebėkime, jog šiuo atveju turime padėtį, kai žaidimo rezultatas nepriklauso nuo žaidžiančiojo meistriškumo, o tiktai nuo to, koks jo eiliškumas šiame žaidime, tai yra tik nuo to, ar jis yra pradedantysis, ar „pratęsiantysis“, tai yra antrasis žaidėjas.

Tikrai, kad ir kaip jie „formuotų“ tą skaičių, jame visada bus vienintelis vienetas, vienintelis trejetas, lygiai kaip ir vienintelis penketas, septynetas ir devynetas. Taigi jo skaitmenų suma visada bus lygi tų paminėtų penkių nelyginių skirtingų skaitmenų sumai ir visada yra lygi 25 ir, vadinasi, suformuoto skaičiaus dalybos iš 3 liekana bus visada 1, o tai ir reiškia, kad žaidimą visada laimi Justas.

Šiuo atveju jokios strategijos nereikia ir Justas gali imti „bet kaip“, o laimėjimą jam garantuoja tai, kad jis laimi, kai suformuoto 5-ženklio skaičiaus dalybos iš 3 liekana bus 1, o taip, kaip įsitikinome, bus visada.

Pastebėkime, jog gali nutikti ir taip, kad nė vienas iš žaidžiančiųjų žaidėjų garantuotai laimėti negali.

Taip nutinka tada, kai nė vienas iš jų visais atvejais negali užsitikrinti laiminčiųjų sąlygų.

O dar gali būti ir taip, jog jiems visiems, kad ir ko kuris griebtųsi, vis tiek „viskas ir visada blogai baigsis“.

Čia mes nekalbame apie tuos atvejus, kai nėra aišku, ko apskritai griebtis, nors ir suprantama, jog gali būti ir taip, kad tokia laiminčioji strategija kuriam nors iš jų ir egzistuoja, tik mes arba jie jos nepajėgia „įžiūrėti“.

Kai kada žaidimų uždaviniai atrodo labai sudėtingi ir nėra labai aišku, kas darytina – tada reikėtų atidžiai dar kartą perskaityti sąlygą ir tada dažnai būna ir nutinka, kad „staiga nušvinta“.

4 pavyzdys. Du žaidėjai, Antanas ir Martynas, ant stalo, kurio matmenys yra 1 m × 2 m, pakaitomis dėlioja 1 euro cento monetas. Monetos negali persidengti bei „išsikišti“ už stalo krašto; pirmasis monetą deda Antanas. Žaidėjas, kuris nebegali padėti monetos taip, kaip nurodyta, pralaimi.

Negi ir čia kuris nors iš jų gali laimėti, kad ir ko besigriebtų jo varžovas?

Pradžioje čia viskas regisi labai supainiota, nes stalas didžiulis ir ant jo tilps daug monetų, o jų dėlionės būdų yra dar daugiau.

Tačiau ir čia, kiek pagalvojus, mus gali išgelbėti kokia nors paprasta mintis, kurios vardas šioje vietoje būtų vadinamoji simetrijos idėja. Užtektų kažkaip susigaudyti, kad stalo paviršius, nors ir didžiulis, bet yra stačiakampis, o tai labai simetriškas darinys.

Todėl jeigu ateitų į galvą pirmąją monetą padėti tiksliai į stalo centrą (po tokio padėjimo neuždengtoji stalo dalis būtų simetriška stalo centro atžvilgiu), tai tada pirmasis žaidėjas, kuris dėdamas monetą „nesugadino“ neuždengtosios stalo dalies simetriškumo stalo centro atžvilgiu, galėtų persiimti neuždengtosios stalo dalies simetrijos saugojimu, kitaip sakant, virsti uoliu simetrijos „atkūrėju“ (ir tai, kaip pamatysime, nuves jį pergalėn).

Tikrai, jeigu antrasis žaidėjas dar ras kur padėti savo monetą, tai jis, suprantama, tą neuždengtosios stalo dalies simetriškumą stalo centro atžvilgiu „sugadins“. Tačiau po tokio sugadinimo simetriškai stalo centrui atsiras vietos ir eilinei kitai pirmojo žaidėjo vieno cento monetai padėti, todėl ją ten ir padėjus, toji simetrija bus atstatyta.

Toliau viskas kartosis – antrasis žaidėjas, jei tik galės padėti monetą, tą simetriją vėl sugadins, o pirmasis, dėdamas simetriškai stalo centro atžvilgiu, ją atstatys.

Kadangi stalo paviršius nėra begalinis, tai kažkada ėjimai – arba galimybė padėti monetą į laisvą stalo „plotą“– baigsis – ir ta galimybė nebegalėti padėti monetos neišvengiamai nutiks būtent antrajam žaidėjui, arba tam vadinamajam neišvengiamajam neuždengtosios stalo dalies simetrijos gadintojui.

Todėl antrasis žaidėjas šiuo atveju pralaimės, jeigu pirmasis žaidėjas savo pirmuoju ėjimu padės monetą į centrą ir toliau jau „atstatinės“ neuždengtosios dalies simetriją stalo centro atžvilgiu.

Kai kada reikalai gali klostytis ir šiek tiek sudėtingiau.

5 pavyzdys. „Akmenukų žaidimas“ vyksta taip. Yra keletas akmenukų krūvelių. Du žaidėjai pakaitomis daro tokius ėjimus: leidžiama paimti bet kokią krūvelę, kurioje yra daugiau negu vienas akmenukas ir savo nuožiūra padalinti ją į dvi arba tris naujas krūveles. Pralaimi tas, kuris nebeišgali padaryti eilinio ėjimo. Pačioje žaidimo pradžioje buvo viena vienintelė akmenukų krūva, kurioje buvo $n > 1$ akmenukų. Kuris žaidėjas laimi teisingai žaisdamas?

Sprendimas. Įrodysime, kad pradedantis žaidimą visada laimi (gali laimėti). Jeigu pradinėje krūvoje yra lyginis akmenukų skaičius, tai pradedantysis savo pirmuoju ėjimu dalina ją į dvi lygias krūveles. Jeigu savo pirmuoju ėjimu antrasis žaidėjas ką nors daro su viena kuria iš turimų krūvelių, tai pirmasis žaidėjas atsako jam darydamas tą patį su kita tokio paties didumo krūvele. Taip susidaro tam tikras vienodo didumo krūvelių porų skaičius. Pastebėkime, kad pirmasis žaidėjas kiekvienu savo atsakomuoju ėjimu gali išlaikyti tokią situaciją (t. y. kai krūvelės yra suskirstytos poromis su vienodu akmenukų skaičiumi kiekvienos poros krūvelėje). Jam pakanka su kita poros krūvele kartoti tai, ką antrasis žaidėjas ką tik darė su pirmąja poros krūvele. Aišku, kad pirmasis žaidėjas visada galės atlikti savąjį ėjimą (kadangi jį galėjo atlikti antrasis žaidėjas). Tai reiškia, kad pralaimėti jis negali. O kadangi anksčiau ar vėliau žaidimas turės baigtis, tai, vadinasi, pralaimėti turės antrasis žaidėjas.

Liko išnagrinėti atveji, kai pradinėje krūvelėje yra nelyginis akmenukų skaičius, arba kai akmenukų skaičius yra $2n + 1$, kur n yra tam tikras natūralusis skaičius. Tada pirmasis žaidėjas gali suvesti dalykus į jau nagrinėtą atvejį dalindamas pradinę krūvelę į tris krūveles, kuriose yra vienoje atitinkamai n akmenukų, kitoje – vėl n akmenukų ir dar 1 akmenukas lieka trečiojoje krūvelėje.

Pastebėkime, kad ir šiuo atveju vėl turime tam tikrą laiminčiojo žaidėjo elgsenos arba laiminčiosios strategijos simetriją. Šiuo atveju paprastai laimintysis iš pradžių „gudriai“ paeina ir, jeigu jam tai pavyksta, tai toliau jis jau tik kartoja tai, ką daro antrasis žaidėjas.

O kadangi krūvelių smulkinimas neišvengiamai baigiasi, tai antrasis žaidėjas, kaip ir čia matėme, yra „pastatomas“ į pralaiminčio žaidėjo padėtį.

Kaip matome, nauda „dviguba“ – ir galvoti nereikia, ir pergalė, kaip paaiškėja, tikrai garantuota. Reikia tik vienu dalyku pasirūpinti – tokiu preliudu, arba tokiu pirmuoju ėjimu, kuris toliau jau leistų ramiai laukti žaidimo pabaigos, arba „kol išsikvėps antrasis žaidėjas“.

Savaime suprantama, taip nutinka ne visada.

Pastebėkime, kad, kaip jau esame užsiminę, kartais žaidimas vyksta „forsuotai“ ir visada baigiasi vieno kurio žaidėjo pergale visiškai ne dėl to žaidėjo sumanumo, bet tik todėl, kad duotoje konkrečioje situacijoje kitaip būti negali, tiktai tai reikia suvokti.

Todėl atskiru atveju galėtume pasakyti, kad, pavyzdžiui, iš kiekvieno tokio uždavinio, kur ko nors padaryti negalima, visiškai aiškiu būdu galima padaryti žaidimą.

Pateiksime pavyzdį.

6 pavyzdys. Du žaidėjai pakaitomis į lentelės 25 × 25 langelius, po vieną skaičių į kiekvieną langelį įrašinėja arba – 1, arba +1. Po to, kai visa lentelė užpildyta, yra skaičiuojama visų kiekvienos eilutės ir visų kiekvieno stulpelio skaičių sandaugos. Galiausiai visos tos gautosios 50 sandaugų yra sudedamos. Pirmasis žaidėjas laimi, jeigu tų visų 50-ties sandaugų suma yra lygi nuliui, o antrasis, atvirkščiai, laimi, jei toji sandaugų suma nėra lygi nuliui.

Tradicinis klausimas: ar gali kuris nors iš jų visada laimėti, kad ir ko imtųsi kitas, ir kaip jis tada galėtų įrašinėti skaičius?

Pačioje žaidimo pradžioje ir vėl, kaip dažnai būna žaidimų uždaviniuose, viskas atrodo labai painiai, nes pati lentelė yra didžiulė, tokias lenteles mes pildome ne kasdien ir apskritai čia (kaip neretai neblogame uždavinyje) iš pradžių „visiškai viskas neaišku“.

Tuo didesnė nauda būna mums susigaudžius, kaip čia reikalai klostosi.

Pradžioje truputį pasamprotaukime.

Visos 50 mūsų nagrinėjamų sandaugų natūraliai skyla į dvi grupes – tai yra į eilučių ir į stulpelių skaičių sandaugas. Tų abiejų rūšių sandaugų – ir eilučių, ir stulpelių – yra, suprantama, po 25. Į kiekvieną iš tų 25 sandaugų eilutėmis ir stulpeliais po kartą įeina kiekvienas užpildytosios

lentelės skaičius. Visos tos sandaugos (eilutėmis ir stulpeliais), kaip minus vienetų ir plius vienetų sandaugos, ir pačios tuomet bus vėl lygios arba –1, arba +1.

Lemiama pastaba čia būtų tokia, kad visų eilučių sandaugų sandauga, jeigu tik ją suskaičiuotume, būtų griežtai tokia pati kaip ir visų stulpelių sandaugų sandauga, nes jos abi yra lygios visų visos lentelės skaičių sandaugai, arba abi sandaugų sandaugos yra lygios tam pačiam skaičiui.

Vadinasi, pirmas rimtesnis pastebėjimas būtų tas, kad visų eilučių sandaugų sandauga yra lygi visų stulpelių sandaugų sandaugai.

Todėl jeigu visų stulpelių sandaugų sandauga yra lygi –1, tai buvo sudauginta nelyginis –1 lygių sandaugų stulpeliais skaičius, bet tada tas pats bus ir su eilutėmis, todėl tų 50-ties skaičių sumoje bus lyginis minus vienetų skaičius.

Bet tai prieštarauja tam, kad tų 50 skaičių suma galėtų būti lygi 0, nes tada tų –1-tų turėtų būti 25. O 25 tikrai nėra lyginis skaičius.

Panašus samprotavimas pasikartotų, jeigu visų 25 stulpelių sandaugų sandauga būtų lygi +1.

Taigi uždavinio atsakymas būtų toks: kadangi mes įsitikinome, kad tų 50-ties sandaugų suma niekada nelygi nuliui, todėl pirmasis žaidėjas pralaimės (arba antrasis žaidėjas, kaip šiuo atveju, visada laimės).

Ir laimės antrasis žaidėjas „nieko daug neveikdamas ir sau galvos nekvaršindamas“, arba įrašinėdamas bet kaip.

Ats. Antrasis žaidėjas visada laimi, kadangi mes įsitikinome, kad tų 50-ties sandaugų eilutėmis ir stulpeliais suma niekada nelygi 0, nes joje visada yra lyginis ir +1 ir –1 lygių sandaugų skaičius (o juk kad tokia sandaugų suma galėtų būti lygi nuliui, abiejų rūšių sandaugų turėtų būti po 25).

7 pavyzdys. Sesė Geltonkasė ir Bešvilpaujantis Berniokas žaidžia tokį žaidimą, kuriame kiekvienu ėjimu juodu pakaitomis ima po natūralųjį skaičių, mažesnį už 31, ir užrašo jį ant lentos. Pasirenkamasis skaičius turi tenkinti 2 sąlygas:

1) jis negali būti lygus jokiam lentoje jau užrašytam skaičiui;

2) nė su vienu iš lentoje esančių skaičių jis negali turėti bendro daliklio, didesnio už 1.

Pirmoji savo skaičių lentoje užrašo Sesė Geltonkasė.

Žaidimą pralaimi tas žaidėjas, kuris pirmasis jau nebegali pasirinkti skaičiaus taip, kad tas skaičius tenkintų 1) ir 2) sąlygas.

Ar gali kuris nors iš žaidžiančiųjų laimėti, kad ir ką bedarytų jo priešininkas? Jei taip, tai nurodykite jo žaidimo strategiją.

Sprendimas. Sesė Geltonkasė gali laimėti savo pirmuoju ėjimu pasirinkdama skaičių 30, kuris yra trijų pirmųjų pirminių skaičių 2, 3 ir 5 sandauga

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Pasirinkdama 30, kuris yra trijų pirmųjų pirminių skaičių 2, 3 ir 5 sandauga, ji tuo pačiu „ateičiai uždraudžia“ imti visus skaičius, turinčius su jais bendrų daliklių, didesnių už 1, arba skaičius

2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10,
12, 14, 15, 16, 18, 20,
21, 22, 24, 25, 26, 27, 28,

tepalikdama galimiems ateities pasirinkimams tik likusius 8 skaičius, kuriais yra skaičiai

1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 ir 29.

Pastebėkime, kad jokie du iš likusių 8-ių skaičių bendrų didesnių už 1-tą pirminių daliklių neturi – tai ir nenuostabu, nes liko 7 pirminiai skaičiai 7, 11, 13, 17, 19, 23 ir 29, o aštuntasis skaičius – pats yra 1-tas.

Todėl kad ir kokį skaičių dabar Bešvilpaujantis Berniokas bepasirinktų, Sesė Geltonkasė savo kitu ėjimu galės imti bet kurį kitą to nedidelio telikusio sąrašėlio skaičių, po to panašiai turės rinktis Berniokas ir taip toliau.

Kadangi likusių skaičių 8, o tai yra lyginis skaičius, tai po to pirmojo Sesės Geltonkasės pasirinkimo, kuris buvo 30, Bešvilpaujantis Berniokas galės padaryti 4 ėjimus, kiekvieną kartą palikdamas Sesei nelyginį skaičių galimybių rinktis: pirmiau 7, po to 5, vėliau 3 ir galiausiai vieną vienintelį belikusį skaičių, kurį ji ir pasirinks, taip laimėdama visą žaidimą.

Po tos vienintelės Sesės Geltonkasės pasirinktos paskutinės galimybės Bešvilpaujančiam Berniokui jau nebebus ko rinktis ir jis, deja, pralaimės.

Ats. Sesė Geltonkasė gali laimėti, pirmu ėjimu rinkdamasi skaičių 30.

4 *pastaba.* Kaip matome, Sesė Geltonkasė pirmuoju ėjimu renkasi skaičių 30, kuris turi daugiausiai pirminių daliklių, būtent 2, 3 ir 5 ir tuo labai „susiaurina“ padėtį ir tai, kaip pasirodė, yra jai labai paranku.

8 pavyzdys. Lentoje užrašytos 9 žvaigždutės *********. Priėję prie jų Gervazas ir Protazas žaidžia tokį žaidimą, pakaitomis atlikdami ėjimus ir naudodami skaitmenis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Gervazas, kuris ir pradeda žaidimą, savo ėjimu turi įrašyti skaitmenį vietoje bet kurios žvaigždutės. Savuoju ėjimu Protazas turi pakeisti skaitmenimis bet kurias dvi žvaigždutes. Skaitmenį galima panaudoti tik vienintelį kartą. Protazas laimi, jeigu galutinis skaičius su devyniais skirtingais skaitmenimis, gautas žaidėjams atlikus po tris ėjimus, dalijasi iš 27 ir pralaimi, jeigu nesidalina. Ar Protazas turi pergalės strategiją (t. y., ar jis visada gali laimėti, kad ir kaip žaistų Gervazas)?

Sprendimas. Padarysime keletą euristinių, arba „ūkiškų“ pastebėjimų, dar vadinamų ir sveiko proto pastabomis. Tai savotiška aritmetinė filosofija, kuri yra vienas iš labiausiai nepastebimų, o kartu ir pačių vertingiausių dalykų, kurių pasisemiame „vargdami“ su iš pažiūros nežinia kam reikalingais tokiais ir panašiais galvosūkiais.

Neslėpsime, kad Protazo popieriai iš pirmo žvilgsnio regisi labai keblūs, nes tam, kad laimėtų, jis turi užtikrinti suformuoto 9-ženklio skaičiaus dalumą net iš 27.

Mes, tiesa, atsimename, kad jei būtų gana dalumo iš 9, tai jis „sektų“ pats savaime, nes suformuoto skaičiaus skaitmenų suma bus 45, vadinasi, ji bus dali iš 9, o kartu iš 9 bus dalus ir pats suformuotasis skaičius.

Tačiau dalumas iš 27 yra rimčiau, negu dalumas iš 9, nes tai reiškia, kad suformuotas skaičius iš 3 turi dalintis net ne du, o „ištisus“ tris kartus, nes juk 27 yra „trys kubu“.

Tiesa, Protazas ir renkasi ne vieną skaičių kaip Gervazas, o „ištisus“ 2. Bet ar tai gali kompensuoti jo užduoties „keblumą“?

Mes tuojau pasistengsime skaitytoją įtikinti, kad tikrai gali.

Ir nors pats uždavinys buvo „aukštuose“ konkursuose, jo pagrindinė idėja, kai prie jos prisilieti, visiškai nėra gąsdinanti.

Sprendimas. Protazas (o ir Gervazas) žino du dalykus.

1. Jei triženklis skaičius dalijasi iš 27, tai, nors jūs gal iš karto ir nepatikėsite, bet jie dar moka ir įrodyti, kad iš 27 dalijasi ir kiekvienas

triženklis skaičius, kuris gaunamas to iš 27 dalaus skaičiaus skaitmenis „sukant ratuku“.

Kitais žodžiais tariant, Protazas ir Gervazas žino, jog jeigu 3-ženklis skaičius

$$ABC$$

dalijasi iš 27, tai iš 27 dalijasi ir skaičiai

$$BCA$$

ir

$$CAB.$$

Kodėl taip yra?

Tarkime, kad ABC dalijasi iš 27, tada iš 27 dalijasi ir dešimteriopai didesnis skaičius

$$10ABC.$$

Jeigu dabar pajėgtume įrodyti, jog ir skirtumas

$$10ABC - BCA$$

irgi dalijasi iš 27, tai tada iš 27 būtų „priverstas dalintis“ ir pats BCA.

Pažiūrime skirtumą

$$\begin{aligned} 10ABC - BCA &= \\ 10(100A + 10B + C) - (100B + 10C + A) &= \\ 1000A + 100B + 10C - 100B - 10C - A &= 999A. \end{aligned}$$

Tačiau tas skirtumas, kuris pasirodė esąs $999A$, tikrai dalijasi iš 27, nes iš 27 dalijasi skaičius 999, kuris yra ne kas kita, kaip dviejų septynetais besibaigiančių skaičių, būtent 27 ir 37, sandauga – kas netiki, lai su skaičiuokliu rankose patikrina – ir tai, beje, visada derėtų daryti.

Tuo mūsų tvirtinimas yra įrodytas ir todėl Protazas prireikus gali sukti 3-ženklį skaičių ratuku neprarasdamas dalumo iš 27. Jie abu, beje, tikrai supranta ir tai, kad trečiojo pasukimo jie vėl gautų pradinį skaičių.

Dabar antrasis dalykas, kurį žino ir Gervazas ir Protazas, yra tas, kad visus tuos devynis skaitmenis įmanoma yra taip suskirstyti į tris grupes, po tris skaičius kiekvienoje grupėje, kad visus tris „sulipdžius“ gautas galutinis skaičius dalijasi be liekanos iš 27.

Daug neaiškindami kviečiame įsitikinti, kad tinka, pavyzdžiui, skaičiai

189, 243 ir 567.

Po šių dviejų faktų mums daug kalbėti, aiškinant, ką darys Protazas, jau nebeteks.

Jis tiesiog po kiekvieno Gervazo pasirinkimo, kad ir kokį skaitmenį jis imtų ir į kokią poziciją savo pasirinktąjį skaičių įrašytų, ims tą patį bloką, iš kurio skaičių ėmė Gervazas ir pasuks jį taip, kad jis „tiktų“ prie Gervazo pasirinktojo skaitmens užimdamas likusias dvi pozicijas – tam ir buvo reikalinga žinoti, kad sukiojimas „nepameta“ dalumo iš 27.

Taip pasikartos 3 kartus ir bus suformuotas 9-ženklis skaičius, kuris susideda iš trijų blokų po tris skaitmenis. Kadangi atskiri blokai dalijasi iš 27, tai ir tas gautasis galutinis skaičius, kad ir kaip tie trys blokai po tris skaičius būtų išsidėstę, akivaizdu, taip pat dalijasi iš 27.

Pabaigoje pakalbėkime truputį bendriau arba užsiminkime apie vadinamąsias laiminčias pozicijas. Daug kas sako, kad tai pats galingiausias ir universaliausias tos rūšies uždavinių sprendimo metodas. Šioje vietoje laiminčiąja pozicija mes vadinsime tokią padėtį, arba poziciją, kurią naudinga palikti po savo ėjimo, o, atitinkamai, pralaiminčiąja pozicija laikysime tokią, kurią, atvirkščiai, nenaudinga palikti po savo ėjimo.

Pagrindinės tokių pozicijų visumos savybės, kad viskas „gerai veiktų“, galėtų būti tokios:

1) Kiekviena susidaranti pozicija turi būti arba laiminti, arba pralaiminti – ir jokių kitokių „tarpinių padėčių“☺

2) Iš laiminčios pozicijos, ką bedarytum, pakliūni į pralaiminčią poziciją;

3) Iš bet kurios pralaiminčios pozicijos „randasi“ ėjimas į laiminčiąją poziciją.

Tada, jeigu pradinė padėtis yra pralaiminti, tai laimi pirmasis, o jeigu laiminti – tai antrasis žaidėjas.

Visais tokiais atvejais strategija yra viena ir tokia pat – kiekvieną kartą eiti į laiminčiąją poziciją. Tada priešininkas bus priverstas darydamas savo ėjimą, pakliūti į pralaiminčią padėtį (pagal antrą nurodytą savybę), o tada mes, arba vadinamoji laiminčioji pusė, vėl darysime ėjimą į laiminčiąją poziciją.

Metodo esmė, kaip jau sakėme, yra padalinti visus įmanomas žaidimo padėtis į dvi rūšis – laiminčias ir pralaiminčias. Primename, kad suskirstyti privalome visas galimas padėtis arba pozicijas – kitaip metodas gali „nesuveikti“.

Jis yra, kaip sakyta, yra praktiškai universaliai naudingas ir mes savo pavyzdžiuose jį iš esmės jau taikėme, nors „aukštų“ terminų ir nevartojome.

Imsime konkretų pavyzdį.

9 pavyzdys.

Yra dvi saldainių krūvelės, vienoje yra 30, o kitoje 31 saldainis. Vienu ėjimu reikia suvalgyti visus vienos kurios krūvelės saldainius, o kitą būtina padalinti į dvi nebūtinai vienodas (netuščias) krūveles. Pralaiminčiu yra laikomas tas žaidėjas, kuris nebegali atlikti savojo ėjimo. Kuris laimės?

Sprendimas. Jeigu mes taikytume laiminčių pozicijų principą, tai privalėtume jas nurodyti. Pradėkime nuo pačių paprasčiausių pozicijų.

Pati paprasčiausia laiminčioji pozicija tam žaidėjui, kuris ją „sukūrė“, arba tam, kuris ką tik darė ėjimą yra padėtis, arba pozicija 1 ir 1. Aišku, kad tokiu atveju laimi antrasis žaidėjas, nes pirmasis žaidėjas, kuris dabar turi daryti ėjimą, jo „neturi“.

Akivaizdu, kad pozicija 2 ir 1 yra laiminčioji pirmajam ir pralaiminčioji antrajam žaidėjui.

Padėtis 3 ir 1 vėl yra laiminčioji antrajam, kuo nesunku įsitikinti pasvarsčius galimus ėjimus.

Padėtis 3 ir 2 yra laiminčioji pirmajam, jeigu jis 3 suvalgys, o 2 dalins į krūveles.

Padėtyje 3 ir 3 pergalė vėl grįžta antrajam žaidėjui, kuo nesunku įsitikinti pasvarsčius, kas iš tokios pozicijos „gali gautis“.

Taip ir „atsitrenkiame“ į dėsningumą: jeigu kiekvienoje krūvelėje yra po nelyginį saldainių skaičių, tai pozicija yra laiminčioji antrajam žaidėjui.

O jeigu bent vienoje krūvelėje yra lyginis saldainių skaičius, tai tokia padėtis arba pozicija yra laiminčioji pirmajam žaidėjui.

Visiškai nesunku suvokti, jog jeigu abiejose krūvelėse yra po nelyginį saldainių skaičių, tai tada, kad ir ką darytum, tokioje pačioje situacijoje nebepasiliksi, nes bet kaip skaidydamas bet kurį nelyginį skaičių į du sveikuosius dėmenis abiejų nelyginių dėmenų tikrai negausi.

Tačiau jeigu bent vienoje krūvelėje yra lyginis saldainių skaičius, tai tokią krūvelę tikrai galima padalinti į dvi nelygines krūveles, pavyzdžiui, kad ir atskiriant nuo jos vieną saldainį, o kitoje krūvelėje tada lai lieka, kas likę.

Taigi mes matome, kad visai visas susidarančias padėtis arba pozicijas mes tikrai galime suskirstyti į laiminčias ir pralaiminčias

pozicijas, pagal tai ar iš tų dviejų krūvelių kuri nors yra su lyginiu saldainių skaičiumi, ar tokios krūvelės nėra. Ir laiminčiojo reikalas yra daryti ėjimus į tas laiminčiąsias padėtis arba pozicijas.

Šiuo atveju pirmasis suvalgo 31 saldainį, o krūvelę iš 30 saldainių padalina į dvi dalis, pavyzdžiui, imdamas 1 ir 29.

Ir visai aišku, kas darysis toliau.

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Jonas ir Petras turi juostelę, kurioje didėjančia eile užrašyti visi skaičiai nuo 1 iki 2018. Kiekvienu savo ėjimu jie pakaitomis turi išbraukti arba vieną, arba du skaičius; pirmasis išbraukinėti vėl pradeda Jonas. Laimėjusiu laikomas tas, kuris išbraukia paskutinįjį skaičių. Ar gali kuris nors iš jų visada laimėti, kad ir ką darytų jo varžovas? Aprašykite, kaip tada tas visada galintis laimėti žaidėjas galėtų žaisti.

2. Jonas ir Petras turi juostelę, kurioje surašyti visi skaičiai nuo 1 iki 1001. Kiekvienu savo ėjimu jie pakaitomis turi išbraukti nuo 1 iki 10 skaičių; pirmasis išbraukinėti pradeda Jonas. Laimėjusiu laikomas tas, kuris savo ėjimu išbraukia paskutinįjį skaičių. Ar gali kuris nors iš jų visada laimėti, kad ir ką darytų jo varžovas ir nurodykite, kaip jis tada galėtų braukyti skaičius.

Kai kada matematiniai žaidimai „vyksta“ nebūtinai juostelėje, bet ir lentelėje, kur vėl viskas daroma pakaitomis, kur pasakyta, ką galima daryti ir, žinoma, aiškiai pasakoma, kada žaidėjas yra laikomas laimėjusiu tą žaidimą.

3. Kairiajame apatiniame lentelės 10×10 langelyje yra padėta šaškė. Kiekvienu ėjimu Aistė ir Beatričė pakaitomis perkėlinėja ją į gretimą pagal kraštinę langelį; pirmoji pradeda Aistė. Negalima perkelti šaškės į tokį langelį, kuriame šaškė jau yra pabuvojusi. Pralaimi ta mergaitė, kuri nebeišgali padaryti ėjimo. Ar gali kuris nors žaidėja laimėti, kad ir ką darytų kita žaidėja ir kaip ji tada turėtų (galėtų) elgtis?

Š									

4. Lentoje užrašyta 10 žvaigždučių

* * * * * * * * * *,

kurias Jonas ir Justas bet kuria tvarka pakaitomis keičia skaitmenimis

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir 9,

kiekvieną skaitmenį panaudodami po vieną kartą; pirmasis skaitmenį renkasi Jonas (pirmosios žvaigždutės negalima pakeisti 0-iu). Po to, kai jie jau turi „suformavę“ tokį 10-ženklį skaičių, yra nustatoma jo dalybos iš 9 liekana. Jeigu jų suformuotasis skaičius, padalintas iš 9, turi liekaną 1, tai laimi Justas, o jeigu liekaną 2, tai Jonas. Ar kuris nors iš jų gali laimėti, kad ir kaip protingai abu žaistų?

5. Ant stalo guli 7 kortelės su skaičiais 0, 1, 2, 3, 4, 5 ir 6. Aistė ir Aušra pakaitomis ima po 1 kortelę; pradeda Aistė. Žaidimą laimi ta mergaitė, kuri pirmoji iš savo turimų kortelių (nebūtinai visų) gali išdėlioti tokį skaičių, kuris dalijasi iš 17. Ar gali kuri nors mergaitė laimėti žaidimą, jeigu abi žaidžia protingai.

6. Robinzonas ir Penktadienis turi juostelę 2×5 ir kiekvienu savo ėjimu gali nudažyti arba vieną tos juostelės langelį, arba du bendrą kraštinę turinčius langelius. Pirmasis dažo Robinzonas. Jei kuris nors iš jų negali atlikti ėjimo, tai jis laikomas pralaimėjusiu. Ar gali kuris nors iš jų laimėti, kad ir ko imtųsi jo varžovas ir ką tokiu atveju jis turėtų (galėtų) daryti?

7. Mažylis ir Karlsonas turi 5 × 5 šokolado plytelę, kurią grioveliai dalija į 25 vienetinius langelius 1 × 1.
Karlsonui leidžiama išsilaužti šokolado 2 × 2 dalį (sudarytą iš 4 vienetinių langelių), o Mažyliui – tik iš vieno vienetinio langelio 1 × 1 sudarytą dalį. Jeigu kuris nors nebegali išsilaužti jam leidžiamos „eilinės“ šokolado dalies, tai visas likęs šokoladas atitenka jo priešininkui. Pirmasis, kuris lauš, bus Karlsonas.
Laimėjusiu laikomas tas, kuriam „po visko“ atitenka didesnė pradinės šokolado plytelės. Ar gali kuris nors iš jų laužti savas dalis taip, kad jam „po visko“ garantuotai atitektų didesnė šokolado plytelės pusė?

8. Išmintingoji Albina ir profesorius Gaudencijus žvelgia į dvi brangakmenių krūveles; vienoje iš jų yra 2018, kitoje 13 akmenukų. Jie pakaitomis šluoja tuos akmenukus nuo stalo; pirmoji brangakmenius ima išmintingoji Albina. Kiekvienu ėmimu bet kuris iš jų gali imti bet kokį brangakmenių skaičių, bet tik iš vienos krūvelės, o laimėtoju bus pripažintas tas, kuris paims nuo stalo paskutinį brangakmenį.

Ar gali kuris nors iš jų laimėti, kad ir ko imtųsi kitas, ir jeigu jau taip, tai nurodykite, kaip jis tada galėtų žaisti?

9. Ant stalo guli 2019 monetų. Rimas ir Nerimas pakaitomis ima tas monetas nuo stalo; pirmasis imti pradeda Rimas, kuris gali imti bet kurį nelyginį monetų skaičių nuo 1 iki 99 imtinai, o Nerimas gali imti bet kurį lyginį monetų skaičių nuo 2 iki 100 imtinai. Pralaimi tas, kuris nebegali atlikti savo eilinio ėjimo. Kuris iš jų laimi teisingai žaisdamas? Paaiškinkite, kuris iš jų gali laimėti ir kaip tada jis galėtų žaisti?

10. Kairiajame apatiniame šachmatų lentos 8 × 8 kampe stovi mįslinga figūra (F), kuri savo „eiliniu“ ėjimu gali pereiti į vieną iš trijų gretimų laukelių: į tą, kuris yra aukščiau (ėjimas „aukštyn“), į tą, kuris yra dešiniau (ėjimas „dešinėn“) ir dar ir į tą, kuris yra aukščiau pagal įstrižainę (ėjimas „aukštyn-dešinėn“).

Greta ir Deividas pakaitomis daro ėjimus ta mįslinga figūra; pirmoji savo ėjimą atlieka Greta. Laimėjusiu žaidimą yra laikomas žaidėjas, kuris savo ėjimu pasiekia dešinįjį viršutinį tos lentos laukelį. Ar kuris nors iš jų gali savo ėjimais judinti tą mįslingą figūrą taip, kad būtent jis pirmas įžengtų į tą dešinįjį viršutinį šachmatų lentos langelį, kad ir ko imtųsi jo varžovas ir, jei jau taip, tai kaip tada būtų galima „vaikščioti“?

F							

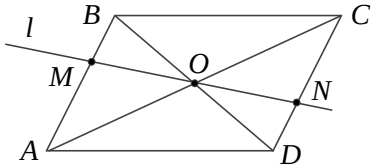
V. KETURKAMPIAI

Edmundas Mazėtis

Matematikos pamokose mokėtės apie kai kuriuos keturkampius – lygiagretainius ir jų atskirus atvejus – rombus, stačiakampius, kvadratus, taip pat trapecijas. Atlikdami šią užduotį, ne tik papildysite žinias apie minėtas figūras, bet ir susipažinsite su kitokiais keturkampiais bei jų savybėmis.

1. Pirmiausiai išspręsime keletą uždavinių, kuriuose atskleidžiamos lygiagretainio savybės.

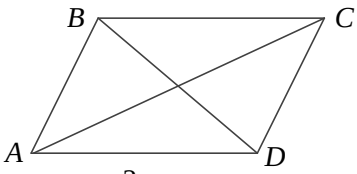
1 pavyzdys. Įrodysime, kad bet kuri tiesė, einanti per lygiagretainio centrą, jo plotą dalija pusiau.



1 pav.

Tikrai, kaip žinome, lygiagretainio įstrižainių sankirtos taškas yra jo simetrijos centras. Tarkime, kad lygiagretainio *ABCD* įstrižainės susikerta taške *O* (1 pav.), per šį tašką einanti tiesė *l* kraštinę *AB* kerta taške *M*, o kraštinę *CD* – taške *N* (jei tiesė *l* kerta kraštines *AD* ir *BC*, įrodymas analogiškas, įsitikinkite tuo savarankiškai). Kadangi tiesės *AB* ir *CD* lygiagrečios, tai pagal Talio teoremą $OM:ON = OB:OD = 1$, t. y., taškas *O* yra atkarpos *MN* vidurio taškas. Nagrinėkime simetriją taško *O* atžvilgiu: taškams *A*, *D*, *N* ir *M* simetriški taškai yra atitinkamai *C*, *D*, *M* ir *N*. Taigi keturkampiai *ADNM*, ir *CBMN*, į kuriuos tiesė *l* dalija lygiagretainį, yra simetriški taško *O* atžvilgiu, taigi jie lygūs ir jų plotai vienodi.

2 pavyzdys. Įrodysime, kad lygiagretainio įstrižainių kvadratų suma lygi jo kraštinių kvadratų sumai.



2 pav.

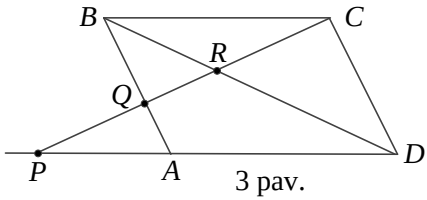
Sakykime, kad *ABCD* – lygiagretainis (2 pav.). Trikampiams *ABC* ir *ABD* taikome kosinusų teoremą ir gauname, kad

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\angle ABC,$$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - AB \cdot AD \cos\angle BAD.$$

Akivaizdu, kad $\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$, taigi $\cos\angle ABC = -\cos\angle BAD$. Kadangi $BC = AD$, tai sudėję gautąsias lygybes, turime, kad $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$, ką ir reikėjo įrodyti.

3 pavyzdys. Lygiagretainio *ABCD* kraštinės *DA* tęsinyje už taško *A* pažymėtas taškas *P*. Tiesė *PC* kraštinę *AB* kerta taške *Q*, o įstrižainę *BD*– taške *R* (3 pav.). Rasime atkarpos *RC* ilgį, jei $PQ = a$, $QR = b$.



3 pav.

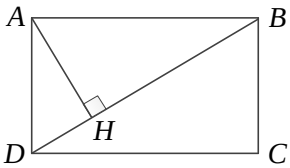
Sprendimas. Iš trikampių *RBC* ir *RDP* panašumo gauname, kad $\frac{RB}{RD} = \frac{RC}{RP}$. Iš trikampių *RBQ* ir *RDC* panašumo išplaukia, kad $\frac{RB}{RD} = \frac{RQ}{RC}$. Iš gautųjų lygybių turime, kad $\frac{RC}{RP} = \frac{RQ}{RC}$. Iš čia seka, kad

$$RC^2 = RP \cdot RQ = (PQ + QR) \cdot RQ = (a+b)b.$$

Taigi $RC = \sqrt{(a+b)b}$.

4 pavyzdys. iakampio vienos kraštinės ilgis lygus *a*, o atstumas nuo jo viršūnės iki įstrižainės lygus *h*. Rasime stačiakampio plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad stačiakampio *ABCD* kraštinė $AB = a$, o atstumas nuo viršūnės *A* iki įstrižainės *BD* yra lygus $AH = h$ (4 pav.). Statieji trikampiai *ABD* ir *HBA* yra panašieji, todėl $\frac{AB}{HB} = \frac{BD}{AB}$. Iš čia seka, kad $DB = \frac{AB^2}{HB}$. Kadangi $HB = \sqrt{a^2 - h^2}$, tai stačiakampio plotas *S*, lygus dvigubam trikampio *ABD* plotui, t. y., $S = \frac{a^2 h}{\sqrt{a^2 - h^2}}$.



4 pav.

5 pavyzdys. Lygiagretainis *ABCD* yra toks, kad jo kampų *A* ir *B* pusiaukampinės susikerta taške *E*, esančiame kraštinėje *CD* (5 pav.). Rasime jo kraštinių santykį $AB : AD$.

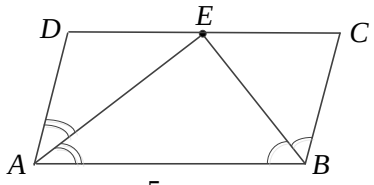
Sprendimas. Kadangi tiesės *AB* ir *CD* yra lygiagrečios, tai

$$\angle AED = \angle EAB = \angle DAE,$$

taigi trikampis *ADE* yra lygiašonis, t. y., $AD = DE$. Analogiškai

$$\angle CEB = \angle ABE = \angle EBC,$$

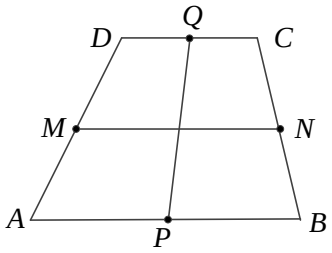
todėl $EC = CB = AD$. Iš gautųjų lygybių seka, kad $AB = CD = DE + CE = AD + AD = 2AD$, t. y., ieškomasis santykis lygus 2.



5 pav.

Pastebėkime, kad teisingas ir atvirkščias teiginys: jei lygiagretainio *ABCD* kraštinė *AB* yra 2 kartus ilgesnė už kraštinę *AD*, tai kampų *A* ir *B* pusiaukampinės susikerta kraštinės *CD* vidurio taške. Tikrai, jei kampo *A* pusiaukampinė kraštinę *CD* kerta taške *E*, tai, kaip jau įrodyta, $DE = AD$. Kadangi pagal sąlygą $AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$, tai taškas *E* yra kraštinės *CD* vidurio taškas. Analogiškai įrodome, kad, jei kampo *B* pusiaukampinė kraštinę *CD* kerta taške *F*, tai taškas *F* yra kraštinės *CD* vidurio taškas, t. y., jis sutampa su tašku *E*.

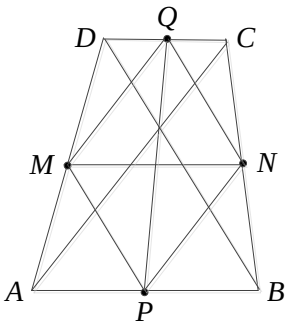
2. Sakykime, kad keturkampis *ABCD* yra trapecija, kraštinės *AB* ir *CD* yra jos pagrindai, taškai *M* ir *N* yra šoninių kraštinių *AD* ir *BC* vidurio taškai. Atkarpa *MN* yra vadinama trapecijos vidurinė linija, ji yra lygiagreti su trapecijos pagrindais, o jos ilgis lygus trapecijos pagrindų ilgių sumos pusei. Yra ir kita trapecijos vidurinė linija – antroji vidurinė linija, jungianti jos pagrindų *AB* ir *CD* vidurio taškus *P* ir *Q* (6 pav.).



6 pav.

6 pavyzdys. Trapecijos pagrindų ilgiai lygūs 5 ir 3, o jos įstrižainių ilgiai lygūs 7 ir 6. Rasime jos antrosios vidurinės linijos ilgį.

Sprendimas. Sakykime, kad trapecijos *ABCD* pagrindai $AB = 5$, $CD = 3$, o įstrižainės $AC = 7$, $BD = 6$. Jei taškai *M* ir *N* yra šoninių kraštinių *AD* ir *BC* vidurio taškai, o taškai *P* ir *Q* yra pagrindų *AB* ir *CD* vidurio taškai (7 pav.), tai atkarpa *MQ* yra trikampio *ADC* vidurinė linija, taigi ji yra lygiagreti su įstrižaine *AC* ir jos ilgis lygus šios įstrižainės ilgio pusei, t. y., $MQ = 3{,}5$. Analogiškai atkarpa *PN* yra trikampio *ABC* vidurinė linija, ji lygiagreti su įstrižaine *AC*, o jos ilgis irgi lygus šios įstrižainės ilgio pusei, t. y., $PN = 3{,}5$. Keturkampio *MQNP* priešingos kraštinės *MQ* ir *NP* yra lygios ir lygiagrečios, todėl šis keturkampis yra lygiagretainis. Analogiškai, atkarpos *MP* ir *NQ* yra trikampių *ABD* ir *DCB* vidurinės linijos, jos yra lygiagrečios su įstrižaine *BD* ir lygios jos pusei, t. y., $MP = NQ = 3$. Atkarpos *MN* ir *PQ* yra lygiagretainio *MQNP* įstrižainės, todėl pagal 2 pavyzdyje gautą lygybę turime $PQ^2 + MN^2 = 2(MQ^2 + NQ^2)$. Kadangi $MN = \frac{1}{2}(AB + CD) = 4$, tai $PQ^2 = 2(3{,}5^2 + 3^2) - 4^2 = 26{,}5$, t. y., $PQ = \sqrt{26{,}5}$.



7 pav.

7 pavyzdys. Įrodysime, kad 6 pavyzdyje gauto lygiagretainio *MQNP* plotas lygus trapecijos *ABCD* ploto pusei.

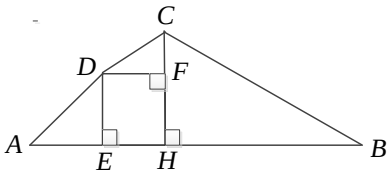
Tikrai, visų pirma pastebėkime, kad antroji vidurinė linija dalija trapeciją į dvi lygiaplotes trapecijas, nes trapecijų *ADQP* ir *BCQP* yra vienodi pagrindai ($AP = PB$, $DQ = QC$), o jų aukštinės lygios trapecijos *ABCD* aukštinei. Kita vertus, trikampių *AMP* ir *DMQ* plotų suma lygi trapecijos *ABCD* ploto ketvirtadaliui, nes jų kraštinės *AP* ir *DQ* lygios trapecijos pagrindų pusei, o į jas nuleistos aukštinės lygios trapecijos aukštinės pusei. Taigi trikampio *MPQ* plotas

$$S_{MPQ} = S_{ADPQ} - (S_{AMP} + S_{DMQ}) = \frac{1}{2}S_{ABCD} - \frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

Kadangi trikampio *MPQ* plotas lygus pusei lygiagretainio *MPNQ* plotui, tai iš čia ir seka tai, ką ir reikėjo įrodyti.

3. Dabar nagrinėkime keturkampius, kurie nėra nei lygiagretainiai, nei trapecijos.

8 pavyzdys. Keturkampio *ABCD* kraštinių ilgiai $AB = 10 + 6\sqrt{3}$, $BC = 12$, $AD = 4\sqrt{2}$, kampai *A* ir *B* atitinkamai lygūs 45° ir 30°. Rasime kraštinės *CD* ilgį (8 pav.).



8 pav.

Sprendimas. Iš keturkampio viršūnių *C* ir *D* nuleiskime statmenis *CH* ir *DE* į kraštinę *AB*. Iš stačiųjų trikampių *ADE* ir *BCH* randame, kad

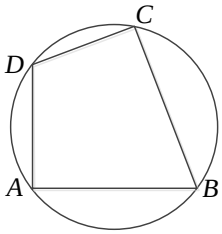
$$AE = ED = AD\sin 45^\circ = 4,\ BH = BC\cos 30^\circ = 6\sqrt{3},\ CH = BC\sin 30^\circ = 6.$$

Iš taško *D* nuleidžiame statmenį *DF* į tiesę *CH*, kadangi $DE < CH$, tai taškas *F* yra atkarpoje *CH*. Keturkampis *EHFD* yra stačiakampis, todėl

$$DF = EH = AB - AE - BH =$$
$$= 10 + 6\sqrt{3} - 4 - 6\sqrt{3} = 6,$$

o $FH = DE = 4$. Tuomet $CF = CH - FH = 2$. Todėl iš stačiojo trikampio *DFC* turime

$$DC = \sqrt{DF^2 + CF^2} = \sqrt{40}.$$

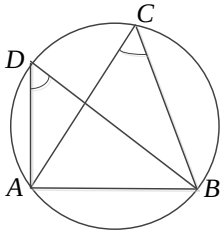


9 pav.

Keturkampis *ABCD*, kurio visos viršūnės yra vieno apskritimo taškai, yra vadinamas įbrėžtu į apskritimą. Iš matematikos pamokų gerai žinome, kad keturkampis *ABCD* yra įbrėžtas į apskritimą tada ir tik tada, kai jo priešingų kampų sumos lygios 180°, t. y., kai

$$\angle ABC + \angle ADC = \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$$

(9 pav.). Iš čia išplaukia, kad keturkampis *ABCD* yra įbrėžtas į apskritimą tada ir tik tada, kai taškai *B* ir *C* yra vienoje tiesės *AB* pusėje ir $\angle ACB = \angle ADB$ (10 pav.).

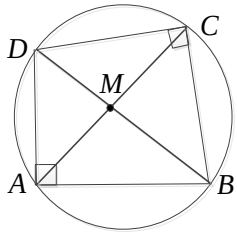


10 pav.

9 pavyzdys. Keturkampis *ABCD* yra toks, kad $\angle A = \angle C = 90^\circ$, $AB = a$, $AD = b$, $CB = CD$. Rasime į kokio ilgio atkarpas įstrižainė *AC* dalija įstrižainę *BD* (11 pav.).

Sprendimas. Sakykime, kad keturkampio įstrižainės susikerta taške M. Kadangi $\angle A + \angle C = 180^\circ$, tai keturkampis $ABCD$ yra įbrėžtas į apskritimą. Apskritimo stygos BC ir CD yra lygios, todėl lygūs lankai BC ir CD, t. y., $\angle BAC = \angle DAC$. Taigi įstrižainė AC yra kampo A pusiaukampinė, todėl pagal trikampio pusiaukampinės savybę

$$BM : MD = AB : AD = a : b.$$



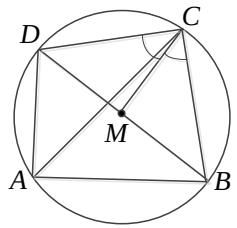
11 pav.

Kadangi $DB = \sqrt{a^2 + b^2}$,

tai $BM = \dfrac{a}{a+b}\sqrt{a^2+b^2}$, $MD = \dfrac{b}{a+b}\sqrt{a^2+b^2}$.

4. Įbrėžto į apskritimą keturkampio įstrižainių sandauga lygi jo priešingų kraštinių sandaugų sumai (Ptolomėjo teorema).

Įrodymui sakykime, kad keturkampis $ABCD$ įbrėžtas į apskritimą (12 pav.). Įstrižainėje BD pažymėkime tašką M, tenkinantį sąlygą $\angle DCM = \angle ACB$. Kadangi $\angle BAC = \angle BDC$, tai trikampiai ABC ir DMC yra panašieji, todėl $\dfrac{AB}{DM} = \dfrac{AC}{DC}$, t. y., $AB \cdot CD = DM \cdot AC$. Kita vertus $\angle BCM = \angle DCA$, nes jie gauti, prie lygių kampų DCM ir ACB pridėjus (arba iš jų atėmus) tą patį kampą ACM. Kadangi $\angle CBD = \angle CAD$, tai trikampiai BCM ir ACD yra panašieji, taigi $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{BM}{AD}$, todėl $BC \cdot AD = AC \cdot BM$..

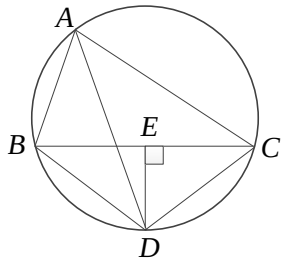


12 pav.

Sudedame gautąsias lygybes ir gauname:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot DM + AC \cdot BM =$$
$$= AC(DM + BM) = AC \cdot BD.$$

10 pavyzdys. Trikampio ABC kampo A pusiaukampinė kerta apibrėžtą apie trikampį apskritimą taške D (13 pav.). Įrodysime, kad $AB + AC < 2AD$.



13 pav.

Įrodymui įbrėžtam į apskritimą keturkampiui $ABDC$ taikome Ptolomėjo teoremą:

$AD \cdot BC = AB \cdot CD + AC \cdot BD.$ Kadangi atkarpa AD yra kampo A pusiaukampinė, tai lankai BD ir CD yra lygūs, todėl lygios stygos $BD = CD$. Jei taškas E yra kraštinės BC vidurio taškas, tai $BC \perp DE$, taigi stačiojo trikampio BED įžambinė BD yra ilgesnė už statinį BE, t. y., $BC = BD > \frac{1}{2}BC$. Atsižvelgdami į šią nelygybę turime, kad

$$AD \cdot BC = AB \cdot CD + AC \cdot BD > AB \cdot \frac{1}{2}BC + AC \cdot \frac{1}{2}BC = (AB + AC) \cdot \frac{1}{2}BC.$$

Suprastinę iš BC, gauname įrodomąją nelygybę.

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB = 12$, $AC = 15$, $BC = 16$. Taškas M yra simetriškas taškui A kraštinės BC vidurio taško atžvilgiu. Raskite atkarpos AM ilgį.

2. Lygiagretainio $ABCD$ kampo C pusiaukampinė kraštinę AD kerta jos vidurio taške M. Kokiu santykiu ši pusiaukampinė dalija lygiagretainio įstrižainę BD?

3. Vienos rombo įstrižainės ilgis lygus 10, o rombo įstrižainių sankirtos taškas nutolęs nuo rombo kraštinės atstumu lygiu 3. Raskite rombo plotą.

4. Keturkampis $ABCD$ yra rombas, atkarpa AK yra trikampio ABC pusiaukampinė. Raskite rombo plotą, jei $BK = b$, o $\angle BAD = 4\varphi$.

5. Lygiagretainio $ABCD$ kampų A ir B pusiaukampinės susikerta kraštinės CD taške E. Raskite lygiagretainio kraštinių ilgius, jei $AE = 6$, $BE = 8$.

6. Stačiojo trikampio ABC, $\angle C = 90°$ išorėje nubrėžtas kvadratas $ABCD$, kurio kraštinė lygi duotojo trikampio įžambinei. Raskite į

kokio didumo dalis tiesė, kurioje yra duotojo trikampio stačiojo kampo pusiaukampinė, dalija kvadrato plotą, jei $BC = 6$, $AC = 8$.

7. Iškilajame keturkampyje $ABCD$ $BC = 8$, $CD = 12$, $AD = 10$, o $\angle A = \angle B = 60°$. Raskite kraštinės AB ilgį.

8. Taškai M ir N yra trapecijos $ABCD$ pagrindų AB ir CD vidurio taškai, $MN = 4$, trapecijos įstrižainių ilgiai lygūs $AC = 6$, $BD = 8$. Raskite trapecijos plotą.

9. Kvadrato $ABCD$ kraštinės BC tęsinyje už taško C pažymėtas taškas G. Tiesė AC kerta kvadrato kraštinę CD taške F, o įstrižainę BD – taške E. Raskite atkarpos FG ilgį, jei $AE = 5$, $EF = 3$.

10. Apie kvadratą $ABCD$ apibrėžto apskritimo lanke CD pažymėtas taškas P. Raskite atkarpą PB, jei $PA = a$, $PC = b$.

VI. TEIGINIŲ ALGEBRA

Aivaras Novikas

Pagrindinės operacijos su teiginiais

Teiginiu vadinsime bet kurį tvirtinimą, kuris yra arba teisingas, arba klaidingas. Pavyzdžiui, sakiniai „Žemė sukasi aplink savo ašį“ ir „Keturkampio kampų suma visada lygi 360° yra teisingi teiginiai, o sakiniai „Barselona yra Portugalijos sostinė“ bei „Du kart du lygu penki“ yra klaidingi teiginiai. Sakinys „Yra be galo daug tokių natūraliųjų skaičių *n*, kad skaičius n^2+1 yra pirminis“ taip pat yra teiginys: nors šio tvirtinimo teisingumo matematikai kol kas nenustatė, jis yra arba teisingas, arba klaidingas.

Visiems yra žinomi keturi veiksmai (operacijos), atliekami su skaičiais: sudėtis, atimtis, daugyba ir dalyba. Turint omenyje, kad atimtis ir dalyba yra veiksmai, priešingi kitiems dviem, galima sakyti, kad iš esmės realiųjų skaičių aibėje dvi pagrindinės aritmetinės operacijos: sudėtis ir daugyba. Operacijas galima apibrėžti taip pat ir teiginių aibėje. Jos vadinamos *loginėmis* operacijomis. Pavyzdžiui, dvi iš jų nuolatos taikome kalbėdami: tai teiginių jungimas į *sudėtinius teiginius* jungtukais „ir“ bei „arba“.

Kai išsakome teiginį, paprastai turime omenyje, kad jis teisingas. Kai apjungiame du teiginius jungtuku „ir“, pasakome, kad jie *abu* teisingi. Teiginių *A* ir *B* apjungimo į teiginį, kad jie abu teisingi, operacija vadinama *konjunkcija*. Jos rezultatas (naujas sudėtinis teiginys) taip pat vadinamas teiginių *A* ir *B* konjunkcija bei žymimas $A \wedge B$ (kartais taip pat $A \cdot B$ arba *A*&*B*). Kai jungiame du teiginius jungtuku „arba“, tai tvirtiname, kad *bent vienas* iš teiginių teisingas. Tokia operacija su teiginiais *A* ir *B* bei jos rezultatas vadinami *disjunkcija*, naujas teiginys žymimas $A \vee B$. Buitinėje kalboje „arba“ dažnai reiškia, kad teisingas *lygiai vienas* iš teiginių, ypač kai sakoma „arba..., arba...“. Tai jau kita operacija – *griežta disjunkcija*. Atitinkamas sudėtinis teiginys žymimas $A \oplus B$. Toliau laikysime, kad „*A* arba *B*“ $= A \vee B$ ir „Arba *A*, arba *B*“ $= A \oplus B$.

Kiekvienam teiginiui priskirkime jo *loginę reikšmę*: skaičių 1, jei teiginys teisingas, ir skaičių 0, jei jis klaidingas. Sudėtinio teiginio

reikšmė priklauso nuo jį sudarančių pradinių teiginių reikšmių ir pritaikytų operacijų. Tad ir operacijas galima apibrėžti ne tik teiginiams, bet ir jų reikšmėms. Pavyzdžiui, teiginys „$2\times 3=6$ ir $2\times 2=5$“ yra teiginių „$2\times 3=6$“ ir „$2\times 2=5$“ konjunkcija, o teiginys „Nelyginio skaičiaus kvadratas visada yra nelyginis pirminis skaičius“ yra teiginių „Nelyginio skaičiaus kvadratas visada yra nelyginis skaičius“ ir „Nelyginio skaičiaus kvadratas visada yra pirminis skaičius“ konjunkcija (nors čia sakinys iš dviejų pradinių teiginių padarytas kitaip, be jungtuko „ir“, apie konjunkciją sprendžiame pagal sakinio prasmę, o ne pavidalą). Abiem atvejais dviejų teiginių, sudarančių sudėtinį teiginį, loginės reikšmės yra 1 ir 0. Abiem atvejais viso sudėtinio teiginio reikšmė yra 0, nes vienas iš jį sudarančių teiginių (antrasis) yra klaidingas. Apskritai, kad ir kokie būtų teiginiai *A* ir *B*, jei jų reikšmės atitinkamai yra 1 ir 0, tai $A\wedge B$ reikšmė yra 0 (teiginys *B* klaidingas, todėl teiginiai *A* ir *B* abu vienu metu nėra teisingi). Tuo remiantis, rašoma: $1\wedge 0=0$ (teiginiai *A*, *B*, $A\wedge B$ pakeičiami savo reikšmėmis). Analogiškai galima išmąstyti, kodėl yra sutarta taip atlikti operacijas su teiginių loginėmis reikšmėmis: $0\wedge 0=0$, $0\wedge 1=0$, $1\wedge 1=1$, $0\vee 0=0$, $1\vee 0=1$, $0\vee 1=1$, $1\vee 1=1$, $0\oplus 0=0$, $1\oplus 0=1$, $0\oplus 1=1$, $1\oplus 1=0$ (patikrinkite!).

Nesunku pastebėti, kad griežta disjunkcija atitinka skaičių sudėtį. Jei keturių paskutinių lygybių kairėje pusėje vietoj 0 rašysime bet kokius lyginius skaičius, vietoj 1 bet kokius nelyginius, o vietoj $\oplus$ įprastą pliuso ženklą, tai sumos (ne)lyginumas atitiks griežtos disjunkcijos rezultatą: lyg.+lyg.=lyg., nelyg.+lyg.=nelyg., lyg.+nelyg.=nelyg., nelyg.+nelyg.=lyg. Lygiai taip pat konjunkcija atitinka sveikųjų lyginių ir nelyginių skaičių daugybą (patikrinkite; beje, atitinka ir pačių skaičių 0 bei 1 daugybą). Taigi su teiginiais, jų loginėmis reikšmėmis (jų teisingumu ir klaidingumu) savo kalboje nejučia nuolatos atliekame veiksmus, analogiškus aritmetiniams.

Iš pastebėtojo atitikimo galima padaryti dar vieną išvadą: „sudedant“ ir „dauginant“ teiginių reikšmes, reiškinius galima prastinti taip pat, kaip ir skaitinius reiškinius. Pavyzdžiui, įprastinės (skaičių) algebros tapatybes

$(a+b)+c=a+(b+c)$, $a\cdot b=b\cdot a$ ir $(a+b)(c+d)=ab+ac+bc+bd$

atitinka *teiginių algebros* tapatybės

$$(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c),\ a\wedge b=b\wedge a,$$

$$(a \oplus b) \wedge (c \oplus d) = (a \wedge b) \oplus (a \wedge c) \oplus (b \wedge c) \oplus (b \wedge d).$$

Skliaustai teiginių algebros reiškinyje žymi veiksmų atlikimo tvarką (vėlgi analogiškai įprastiniams reiškiniams). Pavyzdžiui, $(1 \vee 1) \wedge 0 = = 1 \wedge 0 = 0$, bet $1 \vee (1 \wedge 0) = 1 \vee 0 = 1$. Sudėtiniams teiginiams galima vėl taikyti logines operacijas ir gauti ilgesnius sudėtinius teiginius. Pavyzdžiui, teiginys „Skaičius 91 yra sudėtinis arba jis yra nelyginis ir pirminis“ yra sudarytas iš teiginių *A*= „Skaičius 91 sudėtinis“, *B*= „Skaičius 91 nelyginis“, *C*= „Skaičius 91 pirminis“ ir gali būti pažymėtas $A \vee (B \wedge C)$, o lygybė $1 \vee (1 \wedge 0) = 1$ parodo, kad šis teiginys teisingas (skaičius $91 = 7 \cdot 13$ yra sudėtinis bei nelyginis ir nėra pirminis). Tuo tarpu teiginys „Skaičius 91 yra sudėtinis arba nelyginis, ir jis yra pirminis“ $= (A \vee B) \wedge C$ yra klaidingas, nes $(1 \vee 1) \wedge 0 = 0$.

Apibrėžkime dar tris dažnai naudojamas logines operacijas, kurias taikant duotiems teiginiams sudaromi sudėtiniai teiginiai.

Operacija, kai iš teiginio *A* padaromas teiginys, reiškiantis „Netiesa, kad *A*“, ir jos rezultatas vadinami *neiginiu*, rezultatas žymimas $\neg A$. Jei teiginys teisingas arba klaidingas, tai neiginys $\neg A$ atitinkamai klaidingas arba teisingas. Pavyzdžiui, klaidingas teiginys „Visi pirminiai skaičiai nelyginiai“ virsta teisingu teiginiu „Netiesa, kad visi pirminiai skaičiai nelyginiai“. Jei ir vėl pereisime prie operacijos taikymo ne patiems teiginiams, o jų loginėms reikšmėms 0 ir 1, tai gausime, kad $\neg 0 = 1$ ir $\neg 1 = 0$. Pastebėkime, kad abiem atvejais $\neg a = a \oplus 1$. Tai reiškia, kad teiginiai „Netiesa, kad *A*“ ir „Arba *A*, arba $2 \cdot 2 = 4$“ yra vienu metu abu teisingi arba abu klaidingi. Nenuostabu, juk jie reiškia tą patį: kad teiginys *A* klaidingas.

Operacija, kai iš teiginių *A* ir *B* padaromas teiginys, reiškiantis „Jei *A*, tai *B*“, ir jos rezultatas vadinami *implikacija*, rezultatas žymimas $A \to B$. Ši operacija reiškia tik tiek, kad jei teiginys *A* teisingas, tai teisingas ir teiginys *B*. Todėl sudėtinis teiginys „Jei *A*, tai *B*“ klaidingas tik tada, kai teiginys *A* teisingas, o teiginys *B* klaidingas. Vadinasi, $1 \to 0 = 0$, bet $0 \to 0 = 0 \to 1 = 1 \to 1 = 1$. Implikacijomis laikomi bet kaip užrašyti sakiniai, kurių prasmė tokia pati, kaip sakinio „Jei *A*, tai *B*“. Pavyzdžiui, (teisingą) teiginį „Jei šis keturkampis yra kvadratas, tai jis yra rombas“ galima suformuluoti ir taip: „Iš to, kad šis keturkampis yra kvadratas, išplaukia, kad jis yra rombas“, „Šis keturkampis yra kvadratas tik tada, jei jis yra rombas“, „Kad šis keturkampis būtų

kvadratas, būtina, kad jis būtų rombas“, „Kad šis keturkampis būtų rombas, pakanka, kad jis būtų kvadratas“. Tai tinka ir kitoms operacijoms. Pavyzdžiui, teiginio „Šis trikampis yra statusis arba lygiašonis“ prasmė tokia pati kaip „Šis trikampis yra statusis arba jis yra lygiašonis“. Todėl jis taip pat laikomas teiginių *A*= „Šis trikampis statusis“ ir *B*=„Šis trikampis lygiašonis“ disjunkcija.

Pabrėžkime, kad implikacijos $A \to B$ loginė reikšmė neparodo, ar iš *A* galima samprotavimais išvesti, įrodyti *B*. Toks tvirtinimas tik formaliai teigia, kad atvejis „*A* yra tiesa, o *B* tuo pat metu yra melas“ negalimas. Todėl, pavyzdžiui, teiginiai „Jei kiaulės moka skraidyti, tai trikampio kampų suma lygi 180°“, „Jei trikampio kampų suma lygi 360°, tai kiaulės nėra žinduoliai“ ir „Jei trikampio kampų suma lygi 180°, tai kiaulės nemoka skraidyti“ laikomi teisingais, kad ir kaip keistai skambėtų. Tuo tarpu teiginys “Jei kiaulės yra žinduoliai, tai trikampio kampų suma lygi 90°“ klaidingas. Kitaip tariant, leidžiama, kad iš bet ko išplauktų bet kas, išskyrus vienintelę išimtį: iš tiesos negali išplaukti netiesa.

Operacija, kai iš teiginių *A* ir *B* padaromas teiginys, reiškiantis „*A* tada ir tik tada, kai *B*“, ir jos rezultatas vadinami *ekvivalentumu*, rezultatas žymimas $A \leftrightarrow B$ (kartais taip pat $A \sim B$). Toks sudėtinis teiginys reiškia, kad teiginiai *A* ir *B* arba abu teisingi, arba abu klaidingi. Todėl laikoma, kad $0 \leftrightarrow 0 = 1 \leftrightarrow 1 = 1$, bet $0 \leftrightarrow 1 = 1 \leftrightarrow 0 = 0$. Galima pastebėti, kad kiekviena gaunama loginė reikšmė $a \leftrightarrow b$ priešinga atitinkamai reikšmei $a \oplus b$. Todėl teisinga tapatybė
$a \leftrightarrow b = \neg(a \oplus b) = a \oplus b \oplus 1$.

Kita vertus, teiginys $A \leftrightarrow B =$ „*A* tada ir tik tada, kai *B*“ reiškia tą patį, ką ir teiginys „Jei *A*, tai *B*, ir jei *B*, tai *A*“. O pastarąjį sakinį jau galima interpretuoti ir kitu būdu: kaip dviejų implikacijų konjunkciją $(A \to B) \wedge (B \to A)$. Todėl nenuostabu, kad lygybė $a \leftrightarrow b = (a \to b) \wedge (b \to a)$ yra tapatybė, t. y. ją tenkina visos keturios galimos teiginių *A* ir *B* loginių reikšmių *a* ir *b* poros (patikrinkite!). Kadangi $a \leftrightarrow b$ ir $(a \to b) \wedge (b \to a)$ reikšmės visada sutampa, tai visada $(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow ((a \to b) \wedge (b \to a)) = 1$. Vadinasi, bet koks sudėtinis teiginys $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \to B) \wedge (B \to A))$ yra teisingas, kad ir kokie būtų teiginiai *A* ir *B* bei jų (loginės) reikšmės.

Teiginio teisingumą ką tik nustatėme, nepaisydami jo sudėtinių dalių prasmės, remdamiesi vien turima algebra. Tai leidžia teiginių algebrą priskirti sričiai, kuri tiria tokius formalius tiesos nustatymo būdus: *matematinei logikai*. Sudėtinis teiginys, kuris teisingas, kad ir kokios būtų teiginių, iš kurių jis sudarytas, reikšmės, vadinamas *tapačiai teisingu* arba *tautologija*. Tarkime, kad iš pradinių teiginių *A, B, C, ...* sudarytas sudėtinis teiginys $U \leftrightarrow V$ (čia teiginiai *U* ir *V* patys gali būti sudėtiniai). Jei šis teiginys tapačiai teisingas, tai teiginiai *U* ir *V* vadinami *ekvivalenčiais*, žymima $U \equiv V$. Taigi teiginys $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \to B) \wedge (B \to A))$ yra tapačiai teisingas, o teiginiai $A \leftrightarrow B$ ir $(A \to B) \wedge (B \to A)$ ekvivalentūs. Kitaip tariant, teiginiai *U* ir *V* ekvivalentūs, kai jų loginės reikšmės u ir v sutampa, nesvarbu kokios yra teiginių *A, B, C, ...* reikšmės. Lygybė $U \equiv V$ reiškia, kad lygybė $u = v$ yra tapatybė. Pavyzdžiui, teiginiai $A \leftrightarrow B$ bei $\neg(A \oplus B)$ ekvivalentūs, nes $a \leftrightarrow b$ bei $\neg(a \oplus b)$ visos galimos reikšmės sutampa:

$$0 \leftrightarrow 0 = 1 = \neg(0 \oplus 0), \quad 0 \leftrightarrow 1 = 0 = \neg(0 \oplus 1),$$

$$1 \leftrightarrow 0 = 0 = \neg(1 \oplus 0) \quad \text{ir} \quad 1 \leftrightarrow 1 = 1 = \neg(1 \oplus 1).$$

Loginių operacijų taikymas

1 pavyzdys. Tarkime, yra kambariai Nr. 1 ir Nr. 2, kiekviename iš kurių yra paslėptas arba aukso lobis, arba alkanas liūtas. Virš kambarių parašyta: „Bent viename iš šių dviejų kambarių yra lobis“ ir „Kambaryje Nr. 1 yra liūtas“. Žinoma, kad arba abu teiginiai teisingi, arba abu jie klaidingi. Sužinokime, kas gi paslėpta kambariuose.

Tokį uždavinį nesunku išspręsti žodiniais samprotavimais, bet mėginkime jį spręsti formaliai taikydami logines operacijas. Pažymėkime teiginius: *A*= „Kambaryje Nr. 1 yra lobis“ ir *B*= „Kambaryje Nr. 2 yra lobis“. Teiginių logines reikšmes atitinkamai pažymėkime *a* ir *b*. „Kambaryje Nr. 2 yra liūtas“ reiškia tą patį, kaip „Netiesa, kad *B*“ $= \neg B$. O „Bent viename iš šių dviejų kambarių yra lobis“ galime performuluoti taip: „Kambaryje Nr. 1 yra lobis arba kambaryje Nr. 2 yra lobis“ $= A \vee B$. Žinoma, kad virš durų užrašyti teiginiai abu teisingi arba klaidingi. Tai reiškia, kad teiginys $(\neg B) \leftrightarrow (A \vee B)$ teisingas ir $(\neg b) \leftrightarrow (a \vee b) = 1$. Patikrinę visus 4 atvejus, kokios gali būti reikšmės a ir b, gauname, kad tinka tik $a = 1$ ir

$b = 0$. Vadinasi, kambaryje Nr. 1 yra lobis, o kambaryje Nr. 2 yra liūtas.

Pastebėkime, kad gautasis teiginys $(\neg B) \leftrightarrow (A \vee B)$ praktiškai reiškia tą patį, ką visa uždavinio sąlyga. Iš jo gavome išvadą, kad teiginys A teisingas, o teiginys B klaidingas, t. y. jei teiginys $(\neg B) \leftrightarrow (A \vee B)$ teisingas, tai teisingi teiginiai A, $\neg B$ ir $A \wedge \neg B$. Tai gavome vien iš paties formalaus reiškinio $(\neg B) \leftrightarrow (A \vee B)$, nesinaudodami teiginių turiniu. Iš to būtų galima spėti, kad, pavyzdžiui, teiginys „Jei $(\neg B) \leftrightarrow (A \vee B)$, tai $\neg B$“ $= ((\neg B) \leftrightarrow (A \vee B)) \rightarrow (\neg B)$ tapačiai teisingas. Patikrinkime, kad taip ir yra. Tam reikia įrodyti tapatybę $((\neg b) \leftrightarrow (a \vee b)) \rightarrow (\neg b) = 1$. Ją galima įrodyti, įrašant į ją iš eilės visas keturias galimas poras (a, b).

Bet uždavinį spręskime kitaip – prastindami reiškinį $((\neg b) \leftrightarrow (a \vee b)) \rightarrow (\neg b)$. Tam teiginių algebroje yra taikomos įvairios formulės – iš anksto žinomos tapatybės. Kadangi jau esame pastebėję, kaip atlikti veiksmus ir prastinti reiškinius su konjunkcija ir griežta disjunkcija (kaip su įprastomis sudėtimi ir daugyba), tai pamėginkime visas operacijas reiškinyje pakeisti šiomis dviem operacijomis. Kad pabrėžtume analogiją su aritmetinėmis operacijomis, čia konjunkcijai vietoj žymėjimo $x \wedge y$ naudosime kitą įprastą žymėjimą $x \cdot y$. Taip pat laikysime, kad nesant skliaustų „daugybos“ (konjunkcija) ir „sudėties“ (griežta disjunkcija) veiksmai atliekami tokia tvarka, kaip įprasta aritmetikoje (pvz., daugyba turi pirmumą prieš sudėtį). Pastebėkime, kad visada $x \cdot x = x$ ir $x \oplus x = 0$.

Jau žinome, kad $\neg x = x \oplus 1$ ir $x \rightarrow y = x \oplus y \oplus 1$. Kaip galima kitaip užrašyti $x \rightarrow y$? Galima mąstyti taip: $x \rightarrow y = 1$, kai $(x, y) = (0, 0), (0, 1), (1, 1)$. Konjunkcija $(\neg x) \cdot (\neg y)$ lygi 1, tik kai $(x, y) = (0, 0)$; $(\neg x) \cdot y = 1$, tik kai $(x, y) = (0, 1)$; $x \cdot y = 1$, tik kai $(x, y) = (1, 1)$. Tada jų „suma“ $(\neg x) \cdot (\neg y) \oplus (\neg x) \cdot y \oplus x \cdot y$ lygi 1, kai vienas iš „dėmenų“ lygus 1, t. y. kai $(x, y) = (0, 0), (0, 1)$, arba $(1, 1)$. Taigi

$$
\begin{aligned}
x \rightarrow y &= (\neg x) \cdot (\neg y) \oplus (\neg x) \cdot y \oplus x \cdot y = \\
&= (x \oplus 1) \cdot (y \oplus 1) \oplus (x \oplus 1) \cdot y \oplus x \cdot y = \\
&= (x \cdot y \oplus x \oplus y \oplus 1) \oplus (x \cdot y \oplus y) \oplus x \cdot y =
\end{aligned}
$$

$$= (x \cdot y \oplus x \cdot y) \oplus (y \oplus y) \oplus x \cdot y \oplus x \oplus 1 =$$
$$= 0 \oplus 0 \oplus x \cdot y \oplus x \oplus 1 = x \cdot y \oplus x \oplus 1.$$

Analogiškai gauname ir norimą disjunkcijos išraišką: $x \vee y = 1$, kai $(x, y) = (1, 0), (0, 1), (1, 1)$. Šias poras atitinka konjunkcijos $x \cdot (\neg y)$, $(\neg x) \cdot y$, $x \cdot y$. Todėl

$$x \vee y = x \cdot (\neg y) \oplus (\neg x) \cdot y \oplus x \cdot y = x \cdot (y \oplus 1) \oplus (x \oplus 1) \cdot y \oplus x \cdot y =$$
$$= x \cdot y \oplus x \oplus x \cdot y \oplus y \oplus x \cdot y = (x \cdot y \oplus x \cdot y) \oplus x \cdot y \oplus x \oplus y =$$
$$= x \cdot y \oplus x \oplus y.$$

Vadinasi,

$$(\neg b) \leftrightarrow (a \vee b) = (b \oplus 1) \leftrightarrow (a \cdot b \oplus a \oplus b) =$$
$$= (b \oplus 1) \leftrightarrow (a \cdot b \oplus a \oplus b) \oplus 1 =$$
$$= (b \oplus b) \oplus (1 \oplus 1) \oplus a \cdot b \oplus a = a \cdot b \oplus a$$

ir

$$((\neg b) \leftrightarrow (a \vee b)) \rightarrow (\neg b) = (a \cdot b \oplus a) \rightarrow \cdot (b \oplus 1) =$$
$$= (a \cdot b \cdot b \oplus a) \cdot (b \oplus 1) \oplus a \oplus (a \cdot b \oplus a) \oplus 1 =$$
$$= a \cdot b \cdot b \oplus a \cdot b \oplus a \cdot b \oplus a \oplus a \cdot b \oplus a \oplus 1 =$$
$$= (a \cdot b \oplus a \cdot b) \oplus (a \cdot b \oplus a \cdot b) \oplus (a \oplus a) \oplus 1 =$$
$$= 1.$$

– loginė reikšmė visada lygi 1. Beje, kadangi visada $a \cdot b \oplus a = a \cdot (b \oplus 1) = a \cdot (\neg b)$, tai teiginiai $(\neg B) \leftrightarrow (A \vee B)$ ir $A \wedge (\neg B) =$ „Kambaryje Nr.1 yra lobis, o kambaryje Nr. 2 – liūtas“ yra ekvivalentūs.

Metodas, kurį pritaikėme, kad $x \rightarrow y$ ir $x \vee y$ užrašytume vien simboliais *x*, *y*, $\cdot$, $\oplus$, 1 tinka ir pačiu bendriausiu atveju. Operaciją $x \rightarrow y$ galima įsivaizduoti kaip dviejų kintamųjų funkciją, kur kiekvienas kintamasis ir pati funkcija įgyja tik dvi reikšmes 0 ir 1. Tarkime, kad turime bet kokią funkciją $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, kurios kintamieji $x_1, x_2, ..., x_n$ įgyja tik reikšmes 0 ir 1 ir kuri pati gali įgyti tik šias reikšmes. Tokios funkcijos vadinamos *Būlio funkcijomis* (XIX a. anglų matematiko Dž. Būlio garbei). Kiekvienam konkrečiam rinkiniui $x_1, x_2, ..., x_n$, kuriam $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$, galima sukonstruoti Būlio funkciją, kuri įgyja reikšmę 1 tik su tuo vieninteliu rinkiniu, iš eilės

„dauginant“ (taikant konjunkciją) kintamuosius x_i ar jų neiginius $\neg x_i$. Tada belieka visas tokias „sandaugas“ „sudėti“ (sujungti griežtos disjunkcijos simboliais $\oplus$) ir gautoji „suma“ bus tapačiai lygi funkcijai $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (pamąstykite kodėl). (Vienu atveju to padaryti nepavyks: kai funkcija tapačiai lygi 0, bet tada ją formaliai galima užrašyti $x_1 \oplus x_1$.) Pagaliau vietoj kiekvieno $\neg x_i$ galima įrašyti $x_i \oplus 1$, o tada gautąjį reiškinį atskliausti ir suprastinti (kad neliktų vienodų „sandaugų“). Vadinasi, teisinga tokia

Išvada. Kiekvieną Būlio funkciją $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ galima užrašyti, naudojant vien kintamųjų $x_1, x_2, \ldots, x_n$ simbolius ir simbolius $\cdot$, $\oplus$, 1.

Tokia išraiška be pasikartojančių „dėmenų“ vadinama funkcijos *f* *algebrine normaliąja forma* arba *ANF*. Reiškiniai, užrašomi tik kintamųjų simboliais ir simboliais $\cdot$, $\oplus$, 1, dar vadinami Žegalkino daugianariais (XIX–XX a. rusų matematiko I. Žegalkino garbei).

Loginių operacijų sistema vadinama *pilnąja*, jei kiekviena (bet kiek kintamųjų turinti) Būlio funkcija gali būti užrašyta naudojant vien funkcijos kintamųjų, tų loginių operacijų ir skliaustų simbolius. Simbolį 1 taip pat galima interpretuoti kaip žymintį operaciją (Būlio funkciją konstantą, tapačiai lygią 1).

Išvada. Operacijų sistema, sudaryta iš konjunkcijos, griežtos disjunkcijos ir konstantos 1, yra pilnoji.

2 pavyzdys. Raskime sudėtinį teiginį, užrašomą naudojant tik simbolius *A, B, C*, konjunkcijos bei griežtos disjunkcijos operacijas ir kuris pats arba jo neiginys būtų ekvivalentus sudėtiniam teiginiui $((A \vee B) \leftrightarrow (\neg C)) \rightarrow ((\neg A) \oplus C)$. Šio teiginio teisingumą ar klaidingumą parodo Būlio funkcijos $f(a, b, c) = ((a \vee b) \leftrightarrow (\neg c)) \rightarrow ((\neg a) \oplus c)$ reikšmė. Raskime funkcijos ANF tuo bendruoju metodu, kurį nusakėme. Kintamųjų reikšmių rinkiniai, kuriems $f(a, b, c) = 1$, yra $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ (patikriname, perrinkdami visus galimus 8 rinkinius). Juos atitinka „sandaugos“, $(\neg a) \cdot (\neg b) \cdot (\neg c)$, $(\neg a) \cdot b \cdot (\neg c)$, $(\neg a) \cdot b \cdot c$, $a \cdot (\neg b) \cdot c$, $a \cdot b \cdot c$. Todėl

$$f(a, b, c) = (\neg a) \cdot (\neg b) \cdot (\neg c) \oplus (\neg a) \cdot b \cdot (\neg c) \oplus (\neg a) \cdot b \cdot c \oplus$$
$$\oplus a \cdot (\neg b) \cdot c \oplus a \cdot b \cdot c =$$

$$= (a \oplus 1)\cdot(b \oplus 1)\cdot(c \oplus 1) \oplus (a \oplus 1)\cdot b\cdot(c \oplus 1) \oplus (a \oplus 1)\cdot b\cdot c \oplus$$
$$\oplus\, a\cdot(b \oplus 1)\cdot c \oplus a\cdot b\cdot c =$$
$$= a\cdot b\cdot c \oplus a\cdot c \oplus b\cdot c \oplus c \oplus a\cdot b \oplus a \oplus b \oplus 1 \oplus a\cdot b\cdot c \oplus a\cdot b \oplus b\cdot$$
$$\cdot\, c \oplus b \oplus a\cdot b\cdot c \oplus b\cdot c \oplus a\cdot b\cdot c \oplus a\cdot c \oplus a\cdot b\cdot c =$$
$$= a\cdot b\cdot c \oplus b\cdot c \oplus a \oplus c \oplus 1.$$

Remiantis tapatybe $x \oplus 1 = \neg x$ ir gautąja ANF, turime, kad $f(a, b, c) = \neg(a\cdot b\cdot c \oplus b\cdot c \oplus a \oplus c)$. Vadinasi, pradinis teiginys ekvivalentus $(A \wedge B \wedge C) \oplus (B \wedge C) \oplus A \oplus C$ neiginiui.

3 pavyzdys. Įrodykime, kad konjunkcija ir neiginys sudaro pilnąją operacijų sistemą. Kadangi žinome, kad kiekviena Būlio funkcija išreiškiama per konjunkciją, griežtą disjunkciją ir 1, tai pakanka patikrinti, ar per atitinkamas operacijas galima išreikšti funkcijas $f_1(x, y) = x\cdot y$, $f_2(x, y) = x \oplus y$ ir $f_3(x) = 1$. Pastebėkime, kad disjunkcija išreiškiama per neiginį ir konjunkciją:

$$x \vee y = x\cdot y \oplus x \oplus y = (x\cdot y \oplus x \oplus y \oplus 1) \oplus 1 =$$
$$= (x \oplus 1)\cdot(y \oplus 1) \oplus 1 = \neg((\neg x)\cdot(\neg y)).$$

Gautąją tapatybę galima būtų išmąstyti ir kitaip: teiginys „*A* arba *B*“ reiškia teiginio „Nei *A*, nei *B*“ neiginį, o teiginys „Nei *A*, nei *B*“ reiškia tą patį, kaip ir „Netiesa, kad *A*, ir netiesa, kad *B*“ $= (\neg A) \wedge (\neg B)$, todėl funkcijų $x \vee y$ ir $\neg((\neg x)\cdot(\neg y))$ reikšmės turi visada sutapti (o kad taip ir yra, nesunku patikrinti). Dabar pakanka įsitikinti, kad f_2 ir f_3 galima išreikšti per konjunkciją, neiginį ir disjunkciją. Teiginys „Arba *A*, arba *B*“ reiškia tą patį, kaip „*A* arba *B*, ir netiesa, kad *A* ir *B*“ (t. y., „teisingas lygiai vienas iš teiginių“ reiškia „teisingas bent vienas iš teiginių, ir netiesa, kad teisingi jie abu“). Todėl turėtų būti teisinga lygybė $f_2(x, y) = (x \vee y)\cdot(\neg(x\cdot y))$ (patikrinkite, kad ši lygybė išties yra tapatybė). Tada

$$f_2(x, y) = (x \vee x)\cdot(\neg(x\cdot x)) = x \oplus x = 0$$

ir $$f_3(x) = \neg 0 = \neg((x \vee x)\cdot(\neg(x\cdot x))).$$

Na, o konjunkcijos f_1 nereikia nė išreiškinėti. Įrodyta. Tai, beje, reiškia, kad kiekvienam sudėtiniam teiginiui galima rasti jam ekvivalentų teiginį, gautą iš tokių pačių pradinių teiginių, naudojant vien neiginio ir konjunkcijos operacijas.

Įrodykime, kad konjunkcija, disjunkcija ir konstanta 1 pilnosios operacijų sistemos nesudaro. Tam pakanka įrodyti, kad bent viena Būlio funkcija per duotąsias operacijas neišreiškiama. Tarkime, kad funkcija $f(x)=\neg x$ per duotąsias operacijas išreiškiama. Tačiau jei $x=1$, tai kad ir ką bedarytume su *x* ir konstanta 1, jungdami juos konjunkcijomis ir disjunkcijomis, atsakymo $f(1)=0$ negausime (nes $1\cdot 1=1$ ir $1\vee 1=1$). Gavome prieštarą. Įrodyta.

Įrodykime, kad konjunkcija, disjunkcija ir konstantos 1 bei 0 pilnosios operacijų sistemos nesudaro. Tarkime, kad funkcija $f(x)=\neg x$ per duotąsias operacijas išreiškiama. Nagrinėkime trumpiausią iš tokių išraiškų (t. y. tokią, kurioje yra mažiausias skaičius operacijų). Jei toje išraiškoje yra fragmentas ... 0 arba 0 ... , tai jį galima pakeisti tiesiog konstanta 0 ir taip sutrumpinti. Vadinasi, tokio fragmento trumpiausioje išraiškoje nėra. Taip pat joje negali būti fragmento $0\vee 0$. Tačiau jei $x=1$, tai kad ir kaip bejungtume *x*, 0 ir 1 konjunkcijomis ir disjunkcijomis likusiais leistinais būdais, atsakymo $f(1)=0$ negausime (nes $1\cdot 1=1$, $1\vee 1=1$ ir $0\vee 1=1\vee 0=1$). Gavome prieštarą. Įrodyta.

4 pavyzdys. Išspręskime dar vieną loginį uždavinį, pasinaudodami teiginių algebra.

Vienas ar keli iš penkių mamos sūnų nupirko jai gėlių. Mamos klausiami, kas tai padarė, sūnūs iš eilės atsakė štai ką:

Adomas: Gėles pirko arba Domas, arba Tomas.
Domas: Nei aš, nei Rimas gėlių nepirkome.
Tomas: Judu abu ką tik sumelavote.
Romas: Ne, sumelavo lygiai vienas iš jų.
Rimas: Romai, tu pats ką tik sumelavai.

Jų sesuo Rima pastebėjo, kad tiesą pasakė nelyginis skaičius jos brolių. Žinodami, kad Rima nesuklydo, nustatykime, kas dalyvavo gėlių pirkime.

Pažymėkime teiginius $D=$ „Gėles pirko Domas“, $T=$ „Gėles pirko Tomas“, $R=$ „Gėles pirko Rimas“. Atitinkamas logines reikšmes pažymėkime *d*, *t*, *r*. Kitų su uždaviniu susijusių teiginių žymėti neskubėkime, nes juos galėsime išreikšti per šiuos tris. Adomo teiginys yra $D\oplus T$. Domo teiginys reiškia „Netiesa, kad *D*, ir netiesa, kad *R*“ $=(\neg D)\cdot(\neg R)$. Tomo teiginys reiškia „Adomo teiginys yra netiesa ir

Domo teiginys yra netiesa“ $=(\neg D)\cdot(\neg R)$. Analogiškai Romo teiginys yra $=(\neg(D\oplus T))\cdot(\neg((\neg D)\cdot(\neg R)))$ Rimo teiginys yra Romo teiginio neiginys $\neg((\neg(D\oplus T))\oplus(\neg((\neg D)\cdot(\neg R))))$. Brolių penkių teiginių loginės reikšmės atitinkamai lygios $d\oplus t$, $(\neg d)\cdot(\neg r)$, $(\neg(d\oplus t))\cdot(\neg((\neg d)\cdot(\neg r)))=(d\oplus t\oplus 1)\cdot((\neg d)\cdot(\neg r)\oplus 1)$, $u=(\neg(d\oplus t))\oplus(\neg((\neg d)\cdot(\neg r)))$, $\neg((\neg(d\oplus t))\oplus(\neg((\neg d)\cdot(\neg r))))=$ $=u\oplus 1$. Iš anksto nežinome, kurios iš šių penkių reikšmių lygios 1. Žinoma tik tiek, kad vienetų tarp jų yra nelyginis kiekis. Prisiminkime, kad „sudėtis“ griežta disjunkcija yra analogiška sveikųjų skaičių sudėčiai, kai vienetai ir nuliai pakeičiami nelyginiais ir lyginiais skaičiais. Jei duoti keli sveikieji skaičiai, tai nelyginių skaičių tarp jų yra nelyginis kiekis tada ir tik tada, kai visų skaičių suma yra nelyginis skaičius. Todėl kai duotos kelios loginės reikšmės, tai vienetų tarp jų yra nelyginis kiekis tada ir tik tada, kai visų reikšmių „suma“ lygi 1. Rimos teiginio teisingumas reiškia, kad reiškinio

$$
\begin{aligned}
&(d\oplus t)\oplus(\neg d)\cdot(\neg r)\oplus(d\oplus t\oplus 1)\cdot((\neg d)\cdot(\neg r)\oplus 1)\oplus u\oplus(u\oplus 1)=\\
&=(d\oplus t\oplus 1)\cdot((\neg d)\cdot(\neg r)\oplus 1)\oplus(d\oplus t\oplus 1)\oplus(\neg d)\cdot(\neg r)\oplus(u\oplus u)=\\
&=(d\oplus t\oplus 1)\cdot((\neg d)\cdot(\neg r)\oplus 1\oplus 1)\oplus(\neg d)\cdot(\neg r)=\\
&=(d\oplus t\oplus 1)\cdot((\neg d)\cdot(\neg r))\oplus(\neg d)\cdot(\neg r)=(d\oplus t\oplus 1)\cdot((\neg d)\cdot(\neg r))=\\
&=(d\oplus t)\cdot((\neg d)\cdot(\neg r))
\end{aligned}
$$

reikšmė lygi 1. Bet $x\cdot y=1$, tik jei $x=y=1$. Todėl $d\oplus t=(\neg d)\cdot(\neg r)=1$ ir $(\neg d)=(\neg r)=1$. Vadinasi, $d=r=0$ ir $1=d\oplus t=0\oplus t=t$. Tai reiškia, kad teiginys T teisingas: gėles tikrai pirko Tomas (ir galbūt Adomas ar Romas – to iš turimos informacijos nustatyti negalime), bet ne Domas ar Rimas.

Pabaigai pastebėkime, kad vien teiginių algebros nepakanka bet kokio samprotavimo teisingumui nustatyti. Pavyzdžiui, teiginio „Jei skaičius iracionalusis, tai jis nėra sveikasis“ teisingumui patikrinti nepakanka pasižymėti jį $A\to B$, reikia remtis ne vien logika, bet ir teiginių *A* bei *B* konkrečia matematine prasme. O garsųjį samprotavimą „Kiekvienas žmogus yra mirtingas, o Sokratas yra žmogus, todėl Sokratas mirtingas“ jau galima ištirti vien matematinės logikos priemonėmis, bet teiginių algebros nepakaks, teks pasinaudoti dar viena logikos dalimi – predikatų logika, kurios čia jau nenagrinėsime.

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Sudėtinis teiginys U yra teisingas. Nustatykite, kuris ar kurie iš teiginių A, B, C gali būti teisingi, jei

a) $U = (A \vee B) \to ((\neg B) \wedge C)$;

b) $U = ((A \vee (\neg B)) \to C) \wedge ((\neg(A \wedge B)) \leftrightarrow (\neg C))$;

c) $U = ((\neg A) \vee B) \wedge (B \to ((\neg C) \wedge (\neg A))) \wedge (A \vee C)$.

Kiekvienu atveju raskite visus galimus variantus, kokios gali būti A, B, C loginės reikšmės.

2. Kurie iš teiginių $U = (A \to B) \wedge C$, $V = (A \vee B) \wedge ((\neg A) \vee C)$, $W = ((\neg A) \wedge B) \vee (A \wedge C)$, $X = A \cdot B \cdot C \oplus C \cdot A \oplus C$ yra ekvivalentūs? (Nustatykite visas tokias teiginių poras.)

3. Mažoji Dalia paėmė vieną saldainį iš vazos ir pasiūlė atspėti kurį. Aušra pasakė: „Jei šis saldainis popierėlyje, tai jis šokoladinis.“ Benas pasakė: „Jis nėra šokoladinis tuo ir tik tuo atveju, jei jis apvalus.“ Česius padarė išvadą: „Iš to, ką pasakėte, išplaukia, kad jei saldainis apvalus, tai jis nėra popierėlyje.“

a) Pažymėję teiginius $S =$ „Saldainis yra šokoladinis“, $P =$ „Saldainis yra popierėlyje“, $A =$ „Saldainis yra apvalus“, užrašykite Česiaus teiginį per juos ir logines operacijas. Patikrinę atitinkamą Būlio funkciją, nustatykite, ar gautasis sudėtinis teiginys yra tapačiai teisingas. b) Atlikite užduotį a) tardami, kad Beno teiginys buvo „Jis nėra šokoladinis tik tuo atveju, jei jis apvalus.“

Pastaba. Taip iš esmės patikriname, ar Česiaus išvada *logiškai pagrįsta*. Jei jo teiginys būtų teisingas, bet ne tapačiai teisingas, tai tereikštų, kad jis pataikė (taip nutiko, kad išvada atitiko nežinomas konkrečias S, P, A reikšmes), o ne kad logiškai teisingai išmąstė ją vien iš ankstesnių teiginių. Beje, Česius galėjo pasakyti tą patį trumpiau: „Vadinasi, jei saldainis apvalus, tai jis nėra popierėlyje“. Įterpinys „*Vadinasi,...*“ vis tiek nurodytų loginę implikacijos operaciją „*Jei* Aušra teisi *ir* Benas teisus, *tai*...“.

4. Nusikaltėlį *N* teisė teisėjai *X*, *Y* ir *Z*. Jie pasakė jam tokius samprotavimus. *X*: „Jei esi kaltas, tai būsi nubaustas. Nesi kaltas. *Vadinasi*, nebūsi nubaustas.“ *Y*: „Jei esi kaltas, tai būsi nubaustas. Nebūsi nubaustas. *Vadinasi*, nesi kaltas.“ *Z*: „Jei esi kaltas, tai būsi nubaustas. Būsi nubaustas. *Vadinasi*, esi kaltas.“ Pažymėję teiginius $K =$„*N* kaltas“, $B =$„*N* bus nubaustas“, per juos išreikškite paryškintas teisėjų išvadas ir taip patikrinkite, kurios iš jų logiškai pagrįstos (žr. 3 užd. pastabą).

5. Jonukas pažadėjo tėčiui: „Per artimiausią valandą aš arba sutvarkysiu kambarį, arba paruošiu namų darbus, arba miegosiu.“ Tėtė šį sudėtinį teiginį $f(A, B, C) =$ „Arba *A*, arba *B*, arba *C*“, reiškiantį, kad teisingas lygiai vienas iš teiginių *A*, *B*, *C*, pažymėjo taip: $A \oplus B \oplus C$. a) Remdamiesi vien Jonuko sudėtinio teiginio prasme, raskite visas 8 logines reikšmes $f(0,0,0)$, $f(0,0,1)$, ... , $f(1,1,1)$ ir įrodykite, kad tėčio formulė klaidinga. b) Raskite atitinkamos Būlio funkcijos $f(a,b,c)$ ANF ir tokiu būdu teisingą $f(A,B,C)$ išraišką per *A*, *B*, *C* bei logines operacijas (žr. 2 pavyzdį).

6. Įrodykite, kad loginių operacijų sistema $\wedge$, $\rightarrow$, 0 yra pilnoji, o sistemos $\wedge$, $\rightarrow$, 1 ir $\oplus$, 1 nėra pilnosios.

7. Teiginių *A* ir *B* apjungimą „Abu teiginiai *A* ir *B* nėra vienu metu teisingi“ vadinsime *Šeferio operacija* ir žymėsime $A \uparrow B$. a) Remdamiesi šiuo apibrėžimu, nustatykite reikšmes $0 \uparrow 0$, $0 \uparrow 1$, $1 \uparrow 0$, $1 \uparrow 1$. b) Performuluokite teiginį „Abu teiginiai *A* ir *B* nėra vienu metu teisingi“ taip, kad jo prasmė liktų ta pati ir būtų naudojamos tik neiginio bei konjunkcijos operacijos. Atlikite užduotį, vietoj konjunkcijos imdami disjunkciją. Užrašykite atitinkamas Būlio funkcijos $a \uparrow b$ išraiškas bei šios funkcijos ANF. c) Įrodykite, kad sistema, sudaryta iš vienintelės Šeferio operacijos, yra pilnoji.

8. Yra kambariai Nr. 1 ir Nr. 2, kiekviename iš kurių yra paslėptas arba aukso lobis, arba alkanas liūtas. Ant jų durų *atitinkamai*

parašyta: „Čia paslėptas liūtas tuo ir tik tuo atveju, jei liūtas yra už bent vienų durų“ ir „Jei užrašas ant kitų durų klaidingas arba čia paslėpta tas pats, kas už kitų durų, tai čia yra lobis“. Žinoma, kad *lygiai vienas iš dviejų užrašų teisingas*. Abu užrašus, o tada ir paryškintąjį teiginį užrašykite per teiginius $A=$ „Kambaryje Nr. 1 yra liūtas“ ir $B=$ „Kambaryje Nr. 2 yra liūtas“ bei logines operacijas. Remdamiesi Būlio funkcija, atitinkančia paryškintąjį teiginį, nustatykite, kas paslėpta kiekviename iš kambarių.

9. Vienas ar keli iš 4 brolių sudaužė vazą. Kai jų paklausė, kas tai padarė, jie pasakė štai ką. Adomas: „Arba vazą sudaužė Domas, arba Rimas.“ Domas: „Nei aš, nei Rimas vazos nesudaužėme.“ Romas: „Jei Adomas sumelavo, tai jis ir vazą sudaužė.“ Rimas: „Romai, Adomas sudaužė vazą tuo ir tik tuo atveju, jei jis ją sudaužė, o Domas – ne.“ Žinoma, kad tiesą pasakė lyginis skaičius berniukų, o Romas vazos nesudaužė. Spręsdami analogiškai kaip 4 pavyzdyje, nustatykite, kas sudaužė vazą.

10. Vienas logikos specialistas (L) susitiko savo kaimyną (K). Tarp jų įvyko toks pokalbis. K: „Štai ką aš sugalvojau. Jei tik neklystu, sniego žmogus egzistuoja.“ L: „Jūsų teiginys visiškai teisingas: sniego žmogus išties egzistuoja, JEI jūs dabar neklystate.“ K: „Tai aš teisus?“ L: „Tikrai taip.“ K: „Taigi jūs, logikas, pripažįstate: 1) kad aš neklystu; 2) kad jei aš neklystu, tai sniego žmogus egzistuoja. *Vadinasi,* sniego žmogus egzistuoja... Ir žinote, aš manau, kad jūs ir esate tas sniego žmogus.“ L: „Ką?..“ K: „Matot, sniego žmogų aš laikau žmogumi. Todėl 1) jei manau jus esant sniego žmogumi, tai manau jus esant žmogumi.“ L: „Sunku nesutikti, bet...“ K: „O 2) jei manau jus esant žmogumi, tai juk manau teisingai! *Vadinasi*, jei manau jus esant sniego žmogumi, tai manau teisingai.“ Teiginius „K neklysta“, „sniego žmogus egzistuoja“, „K mano L esant sniego žmogumi“, „K mano L esant žmogumi“ ir „K mano teisingai“ pažymėkime atitinkamai *A, B, C, D* ir *E*. Paryškintas kaimyno išvadas iš 1) ir 2) galima užrašyti $U=(A\wedge(A\to B))\to B$ ir $V=((C\to D)\wedge(D\to E))\to(C\to E)$.

a) Patikrinkite, kad teiginiai *U* ir *V* tapačiai teisingi (bent vienam iš

jų suprastindami Būlio funkciją, kaip parodyta 1 pavyzdžio pabaigoje). b) Savais žodžiais paaiškinkite, kodėl Kaimyno abu samprotavimai visgi yra klaidingi, t. y. kodėl U ir V formulės netinkamai interpretuoja situaciją.

VII. PAPRASČIAUSIOS DIFERENCIALINĖS LYGTYS

Eugenijus Stankus

Diferencialinės lygtys taikomos sprendžiant įvairius gamtos, ekonomikos, visuomenės uždavinius. Nagrinėjant tokius uždavinius susiduriama su įvairiais dėsniais, siejančiais vienus dydžius su kitais. Tokias sąsajas tarp kintamų dydžių – funkcijas – surasti nėra lengva, tačiau sąryšiai tarp šių funkcijų ir jų išvestinių funkcijų būna ne tokie sudėtingi. Pavyzdžiui, materialaus kūno judėjimas aprašomas antruoju Niutono (Isaac Newton – anglų matematikas ir fizikas, 1643-1727) dėsniu: kūno įgyjamas pagreitis *a* yra tiesiogiai proporcingas kūną veikiančių jėgų atstojamajai *F* ir atvirkščiai proporcingas kūno masei *m*. Šis dėsnis užrašomas formule $a = \frac{F}{m}$.

Tarkime, kūno padėtį *x* (kad būtų paprasčiau, tegu kūnas juda ašimi *Ox*) priklausomai nuo laiko *t* nusako funkcija *x*(*t*). Tuomet, kaip žinome, šios funkcijos išvestinė reiškia kūno judėjimo greitį *v*, t. y. $v(t) = x'(t)$), o pastarosios funkcijos išvestinė – kūno judėjimo pagreitį *a*, t. y. $a(t) = v'(t)$. Taigi kūno pagreitis yra taip vadinama funkcijos *x*(*t*) antroji išvestinė, kuri žymima $x'' = x''(t)$. Bendruoju atveju kūną veikianti jėga gali kisti bėgant laikui, taip pat priklausyti nuo kūno padėties ir kūno judėjimo greičio. Šią priklausomybę matematiškai galime užrašyti trijų kintamųjų funkcijos pavidalu: $F = F(t, x, x')$. Vadinasi, antrasis Niutono dėsnis, užrašytas matematiškai, tampa lygtimi

$$x'' = \frac{F(t, x, x')}{m},$$

kuri yra antrosios eilės diferencialinės lygtis. Jeigu mokėtume ją išspręsti, rastume ieškomą kūno judėjimo funkciją *x*(*t*). Tokios lygties (skirtingai nuo algebrinių lygčių, kurių sprendiniai yra nežinomojo reikšmės, tenkinančios lygtį) sprendiniai yra funkcijos, tenkinančios lygtį.

Kitas pavyzdys. Tegu $y = y(t)$ yra kokios nors šalies nacionalinės pajamos *t* metais. Ekonomikos dėsnis teigia, kad nacionalinių pajamų kitimo greitis $y' = y'(t)$ (nacionalinių pajamų kitimo funkcijos išvestinė) ir pačios nacionalinės pajamos susietos priklausomybe

$$y' = k \cdot y$$

(čia k yra tam tikras proporcingumo koeficientas), kuri yra pirmos eilės diferencialinė lygtis. Išsprendę šią lygtį rastume funkciją $y = y(t)$, charakterizuojančią nacionalinių pajamų kitimą priklausomai nuo laiko.

Dar vienas pavyzdys – radioaktyvios medžiagos skilimo diferencialinė lygtis

$$x' = -k\,x\,,$$

išreiškianti dėsnį: radioaktyvios medžiagos skilimo greitis $x' = x'(t)$ yra proporcingas medžiagos kiekiui $x(t)$ laiko momentu t, čia k – medžiagos radioaktyvaus skilimo koeficientas.

Diferencialinių lygčių terminą pasiūlė G. V. Leibnicas (Gottfried Wilhelm Leibniz – vokiečių matematikas ir filosofas, 1646−1716). Sprendžiant kai kuriuos mechanikos ir geometrijos uždavinius pirmieji diferencialinių lygčių tyrimai atlikti XVII amžiaus pabaigoje. Dabar diferencialinės lygtys taikomos matematikoje, mechanikoje, fizikoje, astronomijoje, chemijoje, biologijoje, ekonomikoje ir kitur. Be jų neįmanomas technikos vystymasis.

Sprendžiant diferencialines lygtis, kad ir pačias paprasčiausias, reikalingos gilesnės matematinės analizės žinios. Manome, kad mūsų mokiniai jau yra susipažinę su funkcijos išvestine ir įsisavinę jos skaičiavimo taisykles. Todėl šioje temoje išsamiau panagrinėsime kitas mums reikalingas sąvokas – funkcijos diferencialą, pirmykštę funkciją bei neapibrėžtinį integralą ir kai kuriuos integravimo metodus. Tik tuomet pereisime prie diferencialinių lygčių ir kai kurių iš jų sprendimo.

Diferencialas.

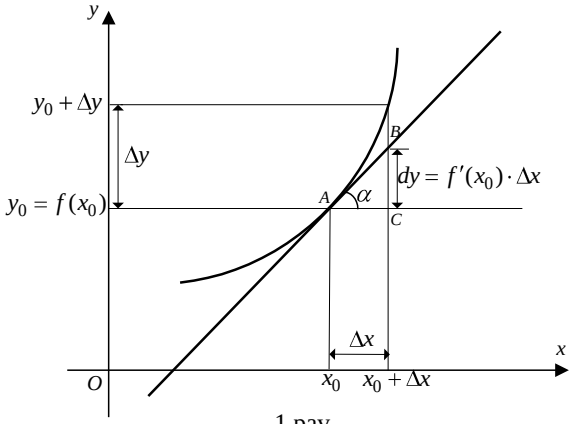
1 apibrėžimas. Tarkime, funkcija $y = f(x)$ nagrinėjamame intervale turi išvestinę. Funkcijos $y = f(x)$ *diferencialu* taške x vadiname $dy = f'(x) \cdot \Delta x$.

1 paveiksle diferencialas taške x_0 iliustruojamas geometriškai atkarpa BC – iš stačiojo trikampio ABC turime:

$$BC = \mathrm{tg}\alpha \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot \Delta x = dy\,.$$

Čia $f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha$, $\alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Atkreipkime dėmesį, kad esant mažam pokyčiui Δx funkcijos diferencialas dy pakankamai tiksliai įvertina funkcijos pokyčio Δy didumą. Todėl dažnai apytikslė formulė $\Delta y \approx dy$ naudojama funkcijos pokyčiui vertinti.



1 pav.

Dar pastebėkime, kad funkcijos diferencialo išraiškoje vietoje Δx galime įrašyti dx, nes pagal tą patį diferencialo apibrėžimą $dx = \Delta x$. Taigi $dy = f'(x) \cdot dx$ arba tiesiog $dy = y' \cdot dx$. Iš čia išplaukia, kad funkcijos $y = f(x)$ išvestinė gali būti išreikšta kintamųjų y ir x diferencialų santykiu: $y' = \dfrac{dy}{dx}$. Šią išvestinės išraišką dažnai naudosime spręsdami diferencialines lygtis.

Kaip matome, funkcijos diferencialas nuo jos išvestinės skiriasi tik daugikliu dx. Todėl diferencialų skaičiavimo taisyklės tiesiogiai išplaukia iš išvestinių skaičiavimo taisyklių. Tegu $u = f(x)$ ir $v = g(x)$ yra funkcijos, turinčios išvestines nagrinėjamame intervale (tokios funkcijos vadinamos *diferencijuojamomis* šiame intervale). Tuomet

$$d(u+v) = du + dv;$$

$$d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}, \quad v = v(x) \neq 0.$$

1 pavyzdys. Apskaičiuokime funkcijos $y=\dfrac{\sin x}{x}$ diferencialą.

Sprendimas. $d\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)=\dfrac{x\cdot d\sin x-\sin x\cdot dx}{x^2}=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}dx$.

2 pavyzdys. Apskaičiuokime funkcijos $y=e^{x^2+x}$ diferencialą.

Sprendimas.

$$d\ e^{x^2+x}\ =\ e^{x^2+x}\ '\ dx=e^{x^2+x}\cdot(x^2+x)'dx=(2x+1)e^{x^2+x}dx.$$

Pirmykštė funkcija ir neapibrėžtinis integralas.

Matematikoje, ypač diferencialinių lygčių teorijoje, reikia mokėti rasti ne tik pasirinktosios funkcijos išvestinę, bet ir spręsti atvirkštinį uždavinį, t. y. rasti funkciją, kai jos išvestinė žinoma.

2 apibrėžimas. Funkcijos $y=f(x)$ *pirmykšte funkcija* nagrinėjamame intervale vadinama funkcija $y=F(x)$, su kuria galioja lygybė $F'(x)=f(x)$.

Pavyzdžiui, funkcijos $y=\sin x$ pirmykštė funkcija realiųjų skaičių aibėje yra $y=-\cos x$, nes $(-\cos x)'=\sin x$. Atkreipkime dėmesį, kad ir funkcija $y=-\cos x+C$ su bet kuriuo skaičiumi C taip pat yra funkcijos $y=\sin x$ pirmykštė funkcija, nes $(-\cos x+C)'=\sin x$. Vadinasi, pasirinktosios funkcijos pirmykščių funkcijų yra be galo daug – kaip ir realiųjų skaičių. Čia skaičius C paprastai vadinamas *laisvąja konstanta*.

Kalbant bendriau, jeigu $y=F(x)$ yra funkcijos $y=f(x)$ pirmykštė funkcija (kokiame nors intervale), tai $y=F(x)+C$, laisvajai konstantai C įgyjant realiąsias reikšmes, taip pat yra pirmykštės. Dar daugiau, formulė $y=F(x)+C$ apibrėžia visas funkcijos $y=f(x)$ pirmykštes funkcijas. Šiais pastebėjimais remiasi ir neapibrėžtinio integralo sąvoka.

3 apibrėžimas. Tegu $y=F(x)$ yra funkcijos $y=f(x)$ pirmykštė funkcija (kokiame nors intervale). Tuomet visos funkcijos $y=F(x)+C$ su laisvąja konstanta C vadinamos funkcijos $y=f(x)$ *neapibrėžtiniu integralu***.** Užrašę tai matematiniais simboliais, turėsime:

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C\,; \qquad (1)$$

čia $f(x)$ vadinama *pointegraline funkcija*, o reiškinys $f(x)dx$ – *pointegraliniu reiškiniu*.

Iš integralo apibrėžimo gauname, kad

$$(F(x)+C)' = f(x) \tag{2}$$

arba tiesiog

$$\int f(x)dx\,' = f(x). \tag{3}$$

Taigi pasirinktosios funkcijos $y = f(x)$ pirmykštės funkcijos radimas ir jos neapibrėžtinio integralo apskaičiavimas yra ekvivalentiški uždaviniai. Vis tik apskaičiuoti funkcijos $y = f(x)$ neapibrėžtinį integralą (sakoma – *suintegruoti funkciją* $y = f(x)$) yra patogiau, nes žinoma nemažai integravimo metodų. Pirmiausia, naudojantis pagrindinių funkcijų išvestinių lentele (šios išvestinių formulės Jums tikriausiai žinomos) ir (2) formule, nesunkiai sudaroma tokių pagrindinių funkcijų integralų lentelė:

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \text{ nes } \left(\frac{x^{a+1}}{a+1} + C\right)' = x^a;$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \text{ nes } e^x + C\,' = e^x;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \text{ nes } \ln|x| + C\,' = \frac{1}{x};$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \text{ nes } -\cos x + C\,' = \sin x;$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \text{ nes } \sin x + C\,' = \cos x;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \text{ nes } \operatorname{tg} x + C\,' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \text{ nes } -\operatorname{ctg} x + C\,' = \frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C, \text{ nes } \operatorname{arctg} x + C\,' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Skaičiuodami funkcijų išvestines dažnai taikome tokias savybes:

1) skaitinį daugiklį galima iškelti prieš išvestinės ženklą, t. y. $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$;

2) funkcijų sumos išvestinė lygi dėmenų išvestinių sumai, t. y. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

Pasinaudoję (2) ir (3) lygybėmis ir šiomis išvestinių savybėmis galime įsitikinti, kad tokie pat teiginiai galioja ir neapibrėžtiniam integralui:

1) skaitinį daugiklį galima iškelti prieš integralo ženklą, t. y.

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx; \qquad (4)$$

2) funkcijų sumos integralas lygus dėmenų integralų sumai, t. y.

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx. \qquad (5)$$

Pavyzdžiui, (4) lygybė įrodoma taip:

$$k \cdot \int f(x)\,dx\,' = k \cdot \int f(x)\,dx\,' = k \cdot f(x).$$

Naudojantis aukščiau pateikta neapibrėžtinių integralų lentele bei (4) ir (5) savybėmis apskaičiuojami sudėtingesnių funkcijų integralai.

3 pavyzdys.

$$\int (1-x)^2\,dx = \int (1 - 2x + x^2)\,dx = \int 1 \cdot dx - 2\int x dx + \int x^2 dx = x - x^2 + \frac{x^3}{3} + C$$

Atkreipkime dėmesį, kad užrašant kelių dėmenų sumos neapibrėžtinį integralą, rašoma viena laisvoji konstanta.

4 pavyzdys.

$$\int \left(\frac{1}{x} - 3\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx = \int \frac{dx}{x} - 3\int x^{\frac{1}{2}} dx + 2\int x^{\frac{1}{3}} dx =$$

$$= \ln x - 3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \ln|x| - 2x\sqrt{x} + \frac{3}{2}x\sqrt[3]{x} + C$$

5 pavyzdys.

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= -\mathrm{ctg}x - \mathrm{tg}x + C.$$

Integravimas keičiant kintamąjį.

Aukščiau pateiktų pavyzdžių integralų apskaičiavimo metodą galima apibūdinti taip – pointegralinės funkcijos pertvarkiais nagrinėjamasis integralas išskaidomas kelių žinomų integralų suma. Tačiau sudėtingesnes funkcijas tokiu būdu suintegruoti ne visuomet įmanoma.

Panagrinėsime dar vieną integravimo metodą – kintamojo keitimą.

Kintamojo keitimo teorema. *Tarkime,*

$$\int f(t)\,dt = F(t) + C, \tag{6}$$

tuomet su bet kuria funkcija $t = g(x)$, *turinčia išvestinę, galioja lygybė*

$$\int f(g(x))\,d\,g(x) = F(g(x)) + C. \tag{7}$$

Šios teoremos *įrodymas* gana paprastas – apskaičiavę (7) lygybės dešiniosios pusės diferencialą, gauname kairiosios pusės integralo pointegralinį reiškinį:

$$d(F(g(x)) + C) = F'(g(x)) \cdot dg(x) = f(g(x))\,d(g(x)).$$

Taigi, jeigu (6) integralas žinomas, tai vietoje kintamojo t galima įrašyti bet kurią diferencijuojamą funkciją $t = g(x)$.

6 *pavyzdys*. Apskaičiuokime integralą $\int \cos 5x\,d\,x$.

Sprendimas. Žinome, kad $\int \cos t\,dt = \sin t + C$. Čia įrašę $t = 5x$, gauname:

$$\int \cos 5x d(5x) = \sin 5x + C \Rightarrow 5\int \cos 5x dx = \sin 5x + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \cos 5x dx = \frac{1}{5}\sin 5x + C$$

Atkreipiame dėmesį, kad išreikšdami ieškomąjį integralą (antrąją lygybę padaliję iš 5), laisvąją konstantą žymime ta pačia raide C, o ne $\frac{C}{5}$ ($\frac{C}{5}$ taip pat yra laisvoji konstanta) .

7 pavyzdys. Apskaičiuokime integralą $\int (3-2x)^{10}\,d\,x$.

Sprendimas. Kadangi $\int t^{10}\,d\,t = \frac{t^{11}}{11} + C$, tai ieškomąjį integralą apskaičiuosime pasinaudoję keitiniu $t = 3 - 2x$. Turime

$$dt = d(3-2x) = (3-2x)'dx = -2dx\,,$$

todėl

$$-2\int (3-2x)^{10}\,dx = \frac{(3-2x)^{11}}{11} + C\,.$$

Iš čia

$$\int (3-2x)^{10}\,dx = -\frac{(3-2x)^{11}}{22} + C\,.$$

Pastaba. Sprendimą kartais patogiau užrašyti kiek kitaip. Nustatę, kad keitinys $t = 3-2x$ yra tinkamas, apskaičiuojame: $dt = -2dx \Rightarrow$ $\Rightarrow dx = -\frac{1}{2}dt$. Tuomet

$$\int (3-2x)^{10}\,dx = -\frac{1}{2}\int t^{10}dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{11}}{11} + C = -\frac{(3-2x)^{11}}{22} + C\,.$$

8 pavyzdys. Apskaičiuokime integralą $\int \sin(x^2)\,x\,dx$.

Sprendimas. Tegu $t = x^2$. Tuomet

$$dt = d(x^2) = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}dt$$

ir

$$\int \sin(x^2)\,x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{2}\cos t + C = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C\,.$$

Paprasčiausių diferencialinių lygčių sprendimas.

Diferencialine lygtimi *vadiname lygybę, siejančią nežinomą funkciją, jos išvestines ir nepriklausomą kintamąjį.*

Jeigu nežinomoji funkcija yra $y = y(x)$, o $y' = y'(x)$ – jos išvestinė (x – nepriklausomas kintamasis), tai bendruoju atveju *pirmosios eilės diferencialinę lygtį* galima užrašyti taip

$$F(x, y, y') = 0\,. \qquad (8)$$

Kai į lygtį įeina nežinomos funkcijos antrosios eilės išvestinė, tai lygtis

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad (9)$$

vadinama *antrosios eilės diferencialine lygtimi*.

Diferencialinės lygties sprendiniu vadinama funkcija $y = y(x)$, kurią įrašius į diferencialinę lygtį gaunama tapatybė.

Sprendinio radimo procedūra paprastai vadinama *diferencialinės lygties integravimu*, nes jos sprendiniai gaunami integruojant tam tikras funkcijas.

9 pavyzdys. Raskime pirmosios eilės diferencialinės lygties $xy' - x^2 - 1 = 0$ sprendinius.

Sprendimas. Pertvarkykime pasirinktąją lygtį išreikšdami nežinomos funkcijos išvestinę y'. Turėsime lygtį $y' = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$. Tuomet integruodami gauname, kad

$$y = \int (x + \frac{1}{x})\, dx = \int x\, dx + \int \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C$$

su laisvąja konstanta *C*, kuri gali įgyti bet kurią realiąją reikšmę

Ats.: $y = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C$, C – laisvoji konstanta.

Šis sprendinys vadinamas pasirinktosios diferencialinės lygties *bendruoju sprendiniu*. Sprendinys, gautas iš bendrojo sprendinio, įrašius kokią nors konstantos *C* reikšmę, vadinamas *atskiruoju sprendiniu*. Pavyzdžiui, įrašius $C = 0, -1, 2$, gaunami atitinkamai tokie atskirieji sprendiniai:

$$y = \frac{x^2}{2} + \ln|x|,\ y = \frac{x^2}{2} + \ln|x| - 1,\ y = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + 2.$$

Dažnai diferencialinių lygčių teorijoje svarbu rasti diferencialinės lygties atskirąjį sprendinį $y = y(x)$, tenkinantį sąlygą $y(x_0) = y_0$ (čia x_0 ir y_0 – realieji skaičiai).

Pavyzdžiui, raskime lygties $xy' - x^2 - 1 = 0$ atskirąjį sprendinį, tenkinantį sąlygą $y(1) = 0$. Tuo tikslu į bendrojo sprendinio išraišką $y = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C$ įrašome $x = 1$, $y = 0$ ir apskaičiuojame konstantos C reikšmę: $0 = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + \ln|x| - \frac{1}{2}$.

10 pavyzdys. Raskime antrosios eilės diferencialinės lygties $y'' - x^2 + x = 0$ bendrąjį sprendinį.

Sprendimas. Išreiškę nežinomos funkcijos išvestinę, turėsime lygtį $y'' = x^2 - x$. Du kartus suintegravę funkciją $f(x) = x^2 - x$ gausime diferencialinės lygties sprendinius:

$$y' = \int (x^2 - x)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_1,$$

$$y = \int (\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_1)\,dx = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 .$$

Čia C_1 ir C_2 yra laisvosios konstantos (jų reikšmės – laisvai pasirenkami realieji skaičiai).

Ats.: $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$, C_1 ir C_2 – laisvosios konstantos.

Pastaba. Atkreipkime dėmesį, kad antros eilės diferencialinės lygties bendrasis sprendinys turi dvi laisvąsias konstantas. Norėdami gauti lygties atskirąjį sprendinį, turėtume pasirinkti abiejų konstantų reikšmes. Pavyzdžiui, kai $C_1 = -2$, $C_2 = 1$, gauname atskirąjį sprendinį $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} - 2x + 1$.

Panagrinėkime truputį sudėtingesnes pirmosios eilės diferencialines lygtis.

Pirmosios eilės diferencialinės lygtys su atskiriamaisiais kintamaisiais.

Lygtį

$$f_1(x) \cdot f_2(y) + g_1(x) \cdot g_2(y) \cdot y' = 0, \qquad (10)$$

į kurią įeinančios funkcijos $f_1(x)$, $f_2(y)$, $g_1(x)$, $g_2(y)$ yra savo kintamųjų tolydžios funkcijos, vadiname *lygtimi su atskiriamaisiais kintamaisiais*.

Primename, kad *tolydžios funkcijos* grafikas funkcijos apibrėžimo srityje yra nenutrūkstanti kreivė.

Pasinaudoję diferencialo apibrėžimu, (10) lygtį galime užrašyti ir diferencialine forma – padauginkime šią lygtį iš dx. Gausime lygtį

$$f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot dx + g_1(x) \cdot g_2(y) \cdot dy = 0, \qquad (11)$$

kurioje kintamuosius atskirsime ją padalydami iš $g_1(x)\cdot f_2(y)$ (tarkime, $g_1(x)\cdot f_2(y)\neq 0$). Parašę jos dėmenis skirtingose lygties pusėse, turėsime *lygtį su atskirtais kintamaisiais*

$$\frac{g_2(y)}{f_2(y)}\cdot dy=-\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot dx. \qquad (12)$$

Norėdami ją išspręsti, tarkime, kad funkcija $y=y(x)$ yra (12) lygties sprendinys. Tuomet įrašę šią funkciją į lygtį, gauname tapatybę

$$\frac{g_2(y(x))}{f_2(y(x))}\cdot d\,y(x)=-\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot dx,$$

kurios abiejų pusių neapibrėžtiniai integralai skiriasi tik pastoviu dydžiu – konstanta. Dar, integruodami kairiąją tapatybės pusę, pasinaudoję kintamojo keitimo teorema, gausime lygybę

$$\int\frac{g_2(y)}{f_2(y)}\cdot d\,y=-\int\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot dx+C,\quad C-\text{laisvoji konstanta.} \qquad (13)$$

Pasirinktosios (10) pavidalo diferencialinės lygties integravimas užbaigtas – pastaroji lygybė išreiškia šios diferencialinės lygties bendrąjį sprendinį.

11 pavyzdys. Raskime diferencialinės lygties $xy'-y=0$ bendrąjį sprendinį.

Sprendimas. Pasirinktoji lygtis – su atskiriamaisiais kintamaisiais. Padauginę lygtį iš $\frac{dx}{xy}$, $xy\neq 0$, ir dėmenį su kintamuoju x perkėlę į dešinę pusę, gauname lygtį su atskirtais kintamaisiais $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$. Suintegravę turėsime:

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}+C_1\Rightarrow\ln|y|=\ln|x|+C_1,$$

C_1 – laisvoji konstanta. Iš čia išreiškę kintamąjį y, gausime $y=\pm e^{C_1}\cdot x$.

Atkreipkime dėmesį, kad pastovioji funkcija $y=0$ taip pat yra diferencialinės lygties sprendinys (įrašius ją į lygtį, gauname tapatybę), o ir kintamasis x gali įgyti nulinę reikšmę. Vadinasi, nagrinėjamos diferencialinės lygties sprendiniai yra $y=\pm e^{C_1}x$ ir $y=0$. Pažymėję

$C = \pm e^{C_1}$, bendrąjį sprendinį užrašysime taip: $y = C\,x$ su laisvąja konstanta C (kuri gali įgyti ir nulinę reikšmę).

Ats.: $y = C\,x$, C – laisvoji konstanta.

Pirmosios eilės tiesinės diferencialinės lygtys. Lygtį

$$f(x)y' + g(x)y = h(x) \tag{14}$$

(funkcijos $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ yra tolydžios) vadiname *tiesine lygtimi*. Jeigu funkcija $h(x)$ nėra pastovioji nulinė funkcija, tai (14) lygtis vadinama *tiesine nehomogenine lygtimi*. Priešingu atveju, lygtį

$$f(x)y' + g(x)y = 0 \tag{15}$$

vadiname *tiesine homogenine lygtimi*.

Iš karto pastebime, kad (14) ir (15) lygtis galime suprastinti jas padaliję iš

$$f(x): \quad y' + \frac{g(x)}{f(x)}y = \frac{h(x)}{f(x)}, \quad f(x) \neq 0\,.$$

Pažymėję $p(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$, $q(x) = \dfrac{h(x)}{f(x)}$, toliau galime nagrinėti lygtis – nehomogeninę

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{16}$$

ir homogeninę

$$y' + p(x)y = 0\,. \tag{17}$$

Suintegruoti šią lygtį nesunku – tai lygtis su atskiriamaisiais kintamaisiais. Padauginę lygtį iš $\dfrac{dx}{y}$, atskiriame kintamuosius. Turėsime:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + C_1 \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \pm e^{C_1}\cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Pažymėję $C = \pm e^{C_1}$ ir „prijungę“ nulinę reikšmę (nes $y = 0$ yra (17) lygties sprendinys), gauname (17) lygties bendrąjį sprendinį

$$y = C\cdot e^{-\int p(x)dx}. \tag{18}$$

Integruojant (16) nehomogeninę lygtį dažnai taikomas *konstantos varijavimo metodas*, pasiūlytas prancūzų matematiko Lagranžo (Joseph

Louis Lagrange, 1736-1813). Šio metodo idėja – tiesinės nehomogeninės lygties bendrasis sprendinys apskaičiuojamas iš atitinkamos homogeninės lygties sprendinio (18), vietoje laisvosios konstantos C įrašius $C(x)$. Funkcija $C(x)$ parenkama taip, kad sprendinys $y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$ tenkintų tiesinę nehomogeninę lygtį. Galutinės (16) lygties bendrojo sprendinio formulės dėl jos sudėtingumo čia nepateiksime, tačiau toliau šį metodą pademonstruosime integruodami konkrečią diferencialinę lygtį.

12 pavyzdys. Raskime diferencialinės lygties $y' + \frac{1}{x} y = 2x$ bendrąjį sprendinį.

Sprendimas. Suintegruokime atitinkamą tiesinę homogeninę lygtį:

$$y' + \frac{1}{x} y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C_1 \Rightarrow y = \frac{C}{x}.$$

Taikant konstantos varijavimo metodą, funkcija $y = \frac{C(x)}{x}$ turi tenkinti sąlygos
nehomogeninę lygtį:

$$\frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = 2x \Rightarrow C'(x) = 2x^2 \Rightarrow C(x) = 2\int x^2 dx = \frac{2}{3}x^3 + A.$$

Čia raide A pažymėta laisvoji konstanta. Įrašę gautąją išraišką į lygybę $y = \frac{C(x)}{x}$, gausime nehomogeninės lygties bendrąjį sprendinį

$$y = \frac{1}{x}\left(\frac{2}{3}x^3 + A\right) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{A}{x}.$$

Ats.: $y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{A}{x}$, A – laisvoji konstanta.

Išnagrinėjome tik kelių paprasčiausių diferencialinių lygčių sprendimo būdus. Pažymėtina, kad diferencialinių lygčių teorija yra viena iš labiausiai pažengusių ir plačiausiai taikomų matematikos šakų. Diferencialinės lygtys išsamiau studijuojamos universitetų studijų programose.

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1. Apskaičiuokite funkcijos $y=\sqrt{1+x^2}$ diferencialą.

2. Apskaičiuokite neapibrėžtinį integralą $\int(x\sqrt{x}-\frac{1}{x^2})\,dx$.

3. Apskaičiuokite neapibrėžtinį integralą

$$\int\sqrt{2-3x}\,dx.$$

4. Raskite pirmosios eilės diferencialinės lygties $x^2y'+x+1=0$ bendrąjį sprendinį ir atskirąjį sprendinį, tenkinantį sąlygą $y(1)=2$.

5. Raskite antrosios eilės diferencialinės lygties

$$\sqrt{x}\cdot y''-\sqrt{2x^2-x}=0$$

bendrąjį sprendinį.

6. Raskite pirmosios eilės diferencialinės lygties su atskiriamaisiais kintamaisiais $(x-2)y'=y+2$ bendrąjį sprendinį.

7. Raskite pirmosios eilės diferencialinės lygties su atskiriamaisiais kintamaisiais $x+3y^2y'=1$ atskirąjį sprendinį, tenkinantį sąlygą $y(1)=1$.

8. Raskite pirmosios eilės tiesinės diferencialinės lygties $y'+y=e^{-x}$ bendrąjį sprendinį.

9. Raskite pirmosios eilės tiesinės diferencialinės lygties $y'-\frac{y}{x}=x^2$ atskirąjį sprendinį, tenkinantį sąlygą $y(-1)=0$.

10. Raskite pirmosios eilės tiesinės diferencialinės lygties $x^2 y' - 2y = 1$ bendrąjį sprendinį ir atskirąjį sprendinį, tenkinantį sąlygą $y(2) = 0$.

VIII. NELYGYBIŲ SISTEMOS

Antanas Apynis

Šioje temoje apsiribosime nelygybių sistemomis su vienu nežinomuoju, kurio galimos reikšmės – realieji skaičiai.

Nelygybė su vienu nežinomuoju, sakykim, x paprastai užrašoma vienu iš šių pavidalų:

$$f(x) > g(x),\quad f(x) < g(x),\quad f(x) \geq g(x),\quad f(x) \leq g(x);$$

čia $f(x)$ ir $g(x)$ yra kurie nors reiškiniai su kintamuoju dydžiu x.

Prisiminkime, kad *nelygybės su vienu nežinomuoju sprendiniu* vadinama tokia nežinomojo reikšmė, kuriai esant gaunama teisinga skaitinė nelygybė. O nelygybės sprendinių visuma vadinama jos *sprendinių aibe.*

Nelygybių su vienu nežinomuoju sistemos *sprendiniu* vadinamas toks realusis skaičius, kuris tenkina kiekvieną sistemos nelygybę. Nelygybių sistemos sprendinių aibę sudaro visi šios sistemos sprendiniai. Apskritai nelygybių sistemos sprendinių aibę galima apibūdinti kaip šią sistemą sudarančių nelygybių *sprendinių aibių sankirtą*.

Išspręsti nelygybių sistemą reiškia rasti visus jos sprendinius arba įrodyti, kad ši sistema neturi sprendinių.

Aišku, sprendžiant nelygybių sistemą pakanka atskirai išspręsti kiekvieną nelygybę ir tik tada aiškintis, kokia yra šių nelygybių sprendinių aibių sankirta (sistemos sprendinių aibė). Vis dėlto kartais pavyksta (įgijus tam tikros patirties) nelygybių sistemos sprendimo procesą sutrumpinti.

Norėtume atkreipti mokinių dėmesį ir į tai, kad atliekant pateikiamą aštuntąją užduotį turėtų pakakti gimnazijoje įgyjamų matematikos žinių. O kad būtų drąsiau pradėti, kartu išnagrinėkime kelias nelygybių sistemas.

1 pavyzdys. Išspręskime nelygybių sistemą

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(x-1) < 2, \\ \dfrac{x}{x-3} + \dfrac{x-5}{x} < \dfrac{2x}{3-x}. \end{cases}$$

Sprendimas. Apžvelgę abi nelygybes, iš karto galime pasakyti, kad būtinai $x-1>0$, $x-3 \neq 0$ ir $x \neq 0$. Vadinasi, turės būti $x>1$ ir $x \neq 3$.

Aišku, kad pirma nelygybė yra ekvivalenti nelygybei $\log_{\sqrt{2}}(x-1) < \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^2$, t. y. nelygybei $\log_{\sqrt{2}}(x-1) < \log_{\sqrt{2}} 2$. Bet (nežiūrint į tai, kad $\sqrt{2} > 1$) ji nėra ekvivalenti nelygybei $x-1<2$. Įsidėmėkime, kad nelygybė $\log_{\sqrt{2}}(x-1) < \log_{\sqrt{2}} 2$ yra ekvivalenti nelygybių $x-1>0$ ir $x-1<2$ sistemai $\begin{cases} x-1>0, \\ x-1<2, \end{cases}$ kuri dažnai užrašoma dviguba nelygybe

$$0 < x-1 < 2.$$

Išsprendę ją, gauname pirmos nelygybės sprendinių aibę – intervalą (1; 3).

Antra sistemos nelygybė

$$\frac{x}{x-3} + \frac{x-5}{x} < \frac{2x}{3-x}$$

taip pat gana lengvai išsprendžiama. Bet geriau įsižiūrėję suprasime, kad esant sąlygai $1<x<3$ galioja nelygybės $\frac{x}{x-3}<0$, $\frac{x-5}{x}<0$ ir $\frac{2x}{3-x}>0$ (taigi nelygybės $\frac{x}{x-3}+\frac{x-5}{x}<0$ ir $\frac{2x}{3-x}>0$), reiškiančios, kad jei $x \in (1;3)$, tai (1) nelygybė galioja.

Kadangi kiekvienas pirmos nelygybės sprendinys yra ir antros nelygybės sprendinys, tai aišku, kad antros nelygybės galima net nespręsti. Nelygybių sistemos sprendinių aibė yra intervalas (1; 3).

Ats.: (1; 3).

2 pavyzdys. Raskime funkcijos

$$y = \sqrt{\cos 2x} + \sqrt[3]{\cos 3x} + \sqrt[4]{\cos 4x}$$

apibrėžimo sritį.

Sprendimas. Iš pirmo žvilgsnio šis uždavinys priklauso lyg ir kitai temai. Bet nori to ar nenori, privalai išspręsti trigonometrinių nelygybių $\cos 2x \ge 0$ ir $\cos 4x \ge 0$ sistemą

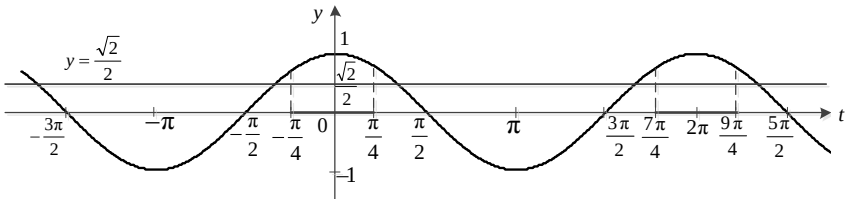
$$\begin{cases} \cos 2x \ge 0, \\ \cos 4x \ge 0. \end{cases}$$

Taikydami formulę $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, gausime:

$$\begin{cases}\cos 2x \ge 0,\\ \cos 4x \ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos 2x \ge 0,\\ 2\cos^2 2x \ge 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos 2x \ge 0,\\ \cos^2 2x \ge \dfrac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos 2x \ge 0,\\ \cos 2x \le -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ arba } \cos 2x \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \Rightarrow \cos 2x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pastarąją nelygybę nesunku išspręsti nubrėžus funkcijos $y = \cos t$, $t = 2x$, grafiką (žr. 1 pav.) ir tiesę $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



1 pav.

Lygties $\cos t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sprendiniai yra $t = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, o nelygybės $\cos t \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sprendiniai sudaro intervalų $\left[-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi; \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$, sąjungą.

Dvigubą nelygybę

$$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \le 2x \le \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

padaliję iš 2, gausime dvigubą nelygybę

$$-\frac{\pi}{8} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{8} + k\pi.$$

Vadinasi, nelygybės $\cos 2x \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sprendinių aibė yra intervalų $\left[-\dfrac{\pi}{8} + k\pi; \dfrac{\pi}{8} + k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$, sąjunga.

Kartu ši aibė yra funkcijos $y = \sqrt{\cos 2x} + \sqrt[3]{\cos 3x} + \sqrt[4]{\cos 4x}$

apibrėžimo sritis.

Ats.: intervalų $\left[-\frac{\pi}{8}+k\pi; \frac{\pi}{8}+k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$, sąjunga.

3 pavyzdys. Išspręskime nelygybių sistemą

$$\sqrt{x^2-9x+20} \le \sqrt{x-1} \le \sqrt{x^2-13}.$$

Sprendimas. Sąlygoje užrašyta dviguba nelygybė reiškia, kad turi galioti ir nelygybė $\sqrt{x^2-9x+20} \le \sqrt{x-1}$, ir nelygybė $\sqrt{x-1} \le \sqrt{x^2-13}$. Vadinasi, įprastiniu būdu ją galima užrašyti taip:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-9x+20} \le \sqrt{x-1}, \\ \sqrt{x-1} \le \sqrt{x^2-13}. \end{cases} \qquad (3)$$

Kadangi $\sqrt{x^2-9x+20} \ge 0$, $\sqrt{x-1} \ge 0$ ir $\sqrt{x^2-13} \ge 0$, tai pirma (3) sistemos nelygybė yra ekvivalenti dvigubai nelygybei

$$0 \le x^2-9x+20 \le x-1,$$

o antra – dvigubai nelygybei

$$0 \le x-1 \le x^2-13.$$

Vadinasi, (3) nelygybių sistema yra ekvivalenti nelygybių sistemai

$$\begin{cases} x^2-9x+20 \ge 0, \\ x^2-9x+20 \le x-1, \\ x-1 \le x^2-13. \end{cases}$$

Šią trijų nelygybių su vienu nežinomuoju sistemą spręskime taip:

$$\begin{cases} x^2-9x+20 \ge 0, \\ x^2-9x+20 \le x-1, \\ x-1 \le x^2-13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-4)(x-5) \ge 0, \\ x^2-10x+21 \le 0, \\ x^2-x-12 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 4 \text{ arba } x \ge 5, \\ (x-3)(x-7) \le 0, \\ (x+3)(x-4) \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \le 4 \text{ arba } x \ge 5, \\ 3 \le x \le 7, \\ x \le -3 \text{ arba } x \ge 4 \end{cases} \Rightarrow x = 4 \text{ arba } 5 \le x \le 7.$$

Gavome (3) sistemos sprendinių aibę, kuri kartu yra ir (2) sistemos sprendinių aibė.

Ats.: $x = 4$ arba $x \in [5; 7]$.

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Raskite mažiausią sveikąjį skaičių x, tenkinantį nelygybių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{3x-2}{4} + 2\dfrac{1}{2} > \dfrac{2x-1}{3} - \dfrac{3x+2}{6}, \\ \dfrac{2x-5}{3} - \dfrac{3x-1}{2} < \dfrac{3-x}{5} - \dfrac{2x-1}{4}. \end{cases}$$

2. Išspręskite nelygybių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{x+5}{x^2-2} > 1, \\ \dfrac{3-9x}{x^2-2} > 2. \end{cases}$$

3. Išspręskite nelygybių sistemą

$$\frac{5x-7}{x-5} < 4 - \frac{x}{5-x} + \frac{3x}{x^2-25} < 4.$$

4. Išspręskite nelygybių sistemą

$$\begin{cases} |x^2 + 5x| < 6, \\ |x+1| \le 1. \end{cases}$$

5. Išspręskite nelygybių sistemą

$$\begin{cases} 0,2^{\cos x} \le 1, \\ \dfrac{x-1}{2-x} + \dfrac{1}{2} > 0. \end{cases}$$

6. Raskite funkcijos $y=\sqrt{9-\left(\frac{4x-22}{x-5}\right)^2}$ apibrėžimo sritį.

7. Išspręskite nelygybių sistemą

$$\begin{cases}\sqrt{4x-7}<x,\\ \sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}>4.\end{cases}$$

8. Išspręskite nelygybių sistemą

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+4}{x^2-16x+64}>0,\\ \lg\sqrt{x+7}>\lg\sqrt{x-5}-2\lg 2.\end{cases}$$

9. Išspręskite nelygybių sistemą

$$\begin{cases}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\dfrac{8}{9}\right)^{-x}>\dfrac{27}{64},\\ 2^{x^2-6x-3,5}<8\sqrt{2}.\end{cases}$$

10. Išspręskite nelygybių sistemą

$$\begin{cases}(x-1)\lg 2+\lg(2^{x+1}+1)<\lg(7\cdot 2^x+12),\\ \log_x(x+2)>2.\end{cases}$$

BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

Antanas Apynis, Eugenijus Stankus, Edmundas Mazėtis

1. Skaičius A sudaro 64 % skaičiaus B, o skaičius B yra 150 % didesnis už skaičių C. Keliais procentais skaičius C yra mažesnis už skaičių A?

2. Išspręskite lygtį

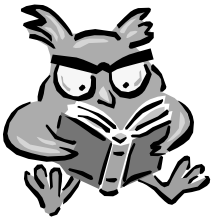
$$x^3 + 2x^2 + 4x + 3 = 0.$$

3. Išspręskite lygtį

$$3\sin x + \cos^2 x + 3 = 0.$$

4. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a, o dvisienio kampo tarp piramidės šoninės sienos ir pagrindo plokš–tumos didumas lygus α. Raskite piramidės tūrį.

Užduočių sprendimai



STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tegu x yra saldainių, kuriuos dalijosi mergaitės, skaičius. Agnės pasiimtų saldainių skaičių pažymėkime a, Rūtos – b, o Živilės – c. Pagal sąlygą

$$a = 0{,}2x + 12,$$
$$b = 0{,}25(x - (0{,}2x + 12)) + 15 = 0{,}25(0{,}8x - 12) + 15 =$$
$$= 0{,}2x - 3 + 15 = 0{,}2x + 12,$$
$$c = 0{,}3(x - (0{,}2x + 12) - (0{,}2x + 12)) + 21 = 0{,}3(0{,}6x - 24) + 21 =$$
$$= 0{,}18x - 7{,}2 + 21 = 0{,}18x + 13{,}8.$$

Turi galioti lygybė

$$x = (0{,}2x + 12) + (0{,}2x + 12) + (0{,}18x + 13{,}8).$$

Iš jos gauname:

$$x = 0{,}58x + 37{,}8,$$
$$0{,}42x = 37{,}8,$$
$$x = \frac{37{,}8}{0{,}42} = 90.$$

Vadinasi,

$$a = 0{,}2 \cdot 90 + 12 = 30,$$
$$b = a = 30,$$
$$c = 0{,}18 \cdot 90 + 13{,}8 = 16{,}2 + 13{,}8 = 30.$$

Ats.: visos trys gavo po lygiai.

2. Tegu x yra planuotas pagaminti per vieną darbo dieną detalių skaičius. Tada $\frac{8000}{x}$ – planuotas darbo dienų skaičius. Pagal sąlygą,

$$\frac{8000}{x} - \frac{8000}{x + 50} = 8.$$

Atlikę veiksmus, gauname kvadratinę lygtį

$$x^2 + 50x - 50000 = 0,$$

kurios sprendiniai yra 200 ir –250.

Aišku, kad $x = 200$.

Vadinasi, ieškomas darbo dienos užduoties viršijimo procentų skaičius yra

$$\frac{50}{200}\cdot 100 = 25.$$

Ats.: 25 %.

3. Tegu $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ yra bet kuris triženklis skaičius (čia $a \in \{1; 2; 3; \ldots; 9\}$, $b, c \in \{0; 1; 2; 3; \ldots; 9\}$. Tada

$$\frac{\overline{abc}}{a+b+c} = \frac{100a+10b+c}{a+b+c} = \frac{(99a+9b)+(a+b+c)}{a+b+c} = \frac{9(11a+b)}{a+b+c} + 1 \le$$

$$\le \frac{9(11a+b)}{a+b} + 1 = \frac{9(10a+(a+b))}{a+b} + 1 = \left(\frac{90a}{a+b} + 9\right) + 1 =$$

$$= \frac{90a}{a+b} + 10 \le \frac{90a}{a} + 10 = 90 + 10 = 100.$$

Aišku,kad visos lygybės galioja tik kai $b = c = 0$. Gauname 9 triženklius skaičius (100, 200, …, 900), kurių santykis su skaitmenų suma lygus 100. Visų kitų triženklių skaičių santykis su skaitmenų suma yra mažesnis už 100.

Ats.: 100.

4. Tegu $\overline{xyzuv}$ yra ieškomas penkiaženklis skaičius. Pagal sąlygą,

$$x > y + z + u + v,$$

$$y > z + u + v,$$

$$z > u + v,$$

$$u > v.$$

Vadinasi, negali būti $v \ge 1$ (atveju $v = 1$ gautume, kad $u \ge 2$, $z \ge 4$, $y \ge 8$ ir $x \ge 16$). Taigi $v = 0$. Galimi skaičiai tokie: 84210, 94210, 95210.

Ats.: 84210, 94210, 95210.

5. Tegu x ir y yra ieškomi skaičiai. Pagal sąlygą, $x + y = xy = x^2 - y^2$.

Iš lygybės $x + y = x^2 - y^2$ gauname:

$$x+y=(x+y)(x-y)\Rightarrow(x+y)(1-x+y)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=-x \text{ arba } y=x-1.$$

Dabar iš lygybės $x+y=xy$ gauname:

1) $\begin{cases} y=-x, \\ x+(-x)=-x^2 \end{cases} \Rightarrow x=0,\ y=0;$

2) $\begin{cases} y=x-1, \\ x+x-1=x(x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-1, \\ x^2-3x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-1, \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ y=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ arba } x=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ats.: (0; 0), $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

6. Kadangi

$$x^4-5x^2+4=(x^4-4x^2)-(x^2-4)=x^2(x^2-4)-(x^2-4)=$$
$$=(x^2-4)(x^2-1)=(x-2)(x+2)(x-1)(x+1),$$

toliau nagrinėkime ekvivalenčią nelygybę

$$(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)<0. \qquad (1)$$

Ją spręskime taikydami intervalų metodą.

Jei $x<-2$, tai $x+2>0$, $x+1<0$, $x-1<0$, $x-2<0$ ir todėl $(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)>0$. Taigi šiuo atveju (1) nelygybė sprendinių neturi.

Jei $-2<x<-1$, tai $x+2>0$, $x+1<0$, $x-1<0$, $x-2<0$ ir todėl $(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)<0$. Taigi (1) nelygybę tenkina kiekvienas interval (1; 2) taškas.

Jei $-1<x<1$, (1) nelygybė sprendinių neturi.

Jei $1<x<2$, (1) gauname, kad $(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)<0$. Taigi visi interval (1; 2) taškai yra (1) nelygybės sprendiniai.

Jei $x>2$, gauname, kad $(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)>0$.

Ats.: $(-2;-1)\cup(1;2)$.

7. Kadangi $x \neq 0$ ir $y \neq 0$, pirmą lygtį padauginkime iš $3xy$, o antrą lygtį – iš $6xy$. Gausime lygčių sistemą

$$\begin{cases} 24x + 18y = 11xy, \\ 24x + 30y = 29xy. \end{cases}$$

Iš antros lygties atėmę pirmą lygtį, gausime:

$$12y = 18xy,$$
$$6y(2-3x) = 0,$$
$$2-3x = 0,$$
$$x = \frac{2}{3}.$$

Tada $24 \cdot \frac{2}{3} + 18y = 11 \cdot \frac{2}{3} \cdot y \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$.

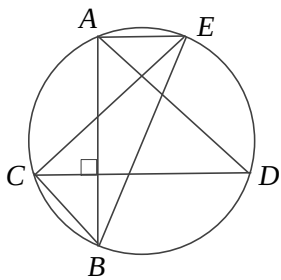
Ats.: $\left(\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}\right)$.

8. Pagal Vijeto teoremą, $x_1 + x_2 = 27$ ir $x_1 \cdot x_2 = 6m + 144$. Iš lygčių $2x_1 - x_2 = 9$ ir $x_1 + x_2 = 27$ išplaukia, kad $x_1 = 12$ ir $x_2 = 15$. Tada iš lygties $x_1 \cdot x_2 = 6m + 144$ gauname:

$$6m + 144 = 12 \cdot 15 \Rightarrow 6m = 36 \Rightarrow m = 6.$$

Ats.: $m = 6$.

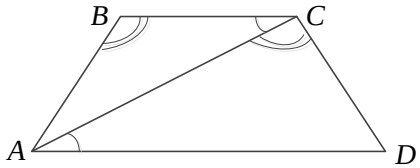
9. Nubrėžkime apskritimo stygą $AE \perp AB$ (1 pav.), tuomet $AE \parallel CD$. Kadangi apskritime lankai tarp lygiagrečių stygų yra lygūs, tai lankai AC ir ED yra lygūs, t. y. lygūs ir lankai CAE ir AED. Iš čia seka, kad $CE = AD = 6$. Kadangi įbrėžtinis kampas BAE yra statusis, tai atkarpa BE yra apskritimo skersmuo, todėl $\angle ECB = 90°$ ir $BE = \sqrt{CE^2 + CB^2} = 10$.



1 pav.

Ats.: $R = 5$.

10. Sakykime, kad trapecijos *ABCD* kraštinė $AD = 12$ yra jos didesnysis pagrindas (2 pav.), įstrižainė $AC = 6$ dalija trapeciją į du panašiuosius trikampius. Kadangi $\angle CAD = \angle ACB$, tai trikampio *ABC* kampas *ABC* gali būti lygus arba kampui *ADC*, arba kampui *ACD*. Pirmuoju atveju keturkampis *ABCD* yra ne trapecija, o lygiagretainis, taiga $\angle ABC = \angle ACD$, todėl iš trikampių *ABC* ir *DCA* panašumo turime santykį $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AD}$, t. y. $BC = \frac{AC^2}{AD} = 3$.



2 pav.

Ats.: 3.

PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Sakykime po pirmojo šūvio I būrys iššovė x kartų. II būrys – y kartų, o III būrys –z kartų.

Tuomet I būrys šaudė $5x$ sekundžių (s), II būrys – $6y$ (s), o III būrys – $7z$ (s).

Toliau – pagal sąlygą:

$$\begin{aligned} 6y &= 5x + 240 \qquad (240\text{ s} = 4\text{ min.}); \\ 6y &= 7z - 180 \qquad (180\text{ s} = 3\text{ min.}). \end{aligned} \qquad (1)$$

Iš čia iš plaukia: $5x + 240 = 7z - 180 \Rightarrow z = \frac{5x}{7} + 60.$

Kadangi $z \in \mathbf{N}$, tai $x = 7t$, $t \in \mathbf{N}$. Tuomet $z = 5t + 60$. Įrašę į (1) lygybę, gauname:

$$6y = 7(60 + 5t) - 180 \Rightarrow 6y - 35t = 240 \Rightarrow y = \frac{35t}{6} + 40.$$

Tam, kad y būtų sveikasis, turi būti $t = 6t_1$; ($t_1 \in \mathbf{N}$). Tuomet

$$x = 42t_1,\ y = 35t_1 + 40,\ z = 30t_1 + 60. \qquad (2)$$

Kadangi $t_1 \geq 1$ ir viso šaudymo trukmė mažesnė nei 60 min. (3600 s), o III būrys šaudė ilgiausiai, tai:

$$7(60+30t_1) < 1800 \Rightarrow t_1 < 15\frac{1}{7}.$$

Vadinasi, $1 \leq t_1 \leq 15$. Įrašę $t_1 = 1, 2, 3, \ldots, 15$ į (2) formulę, gausime atitinkamas (pirmo, antro ir trečio būrių) šūvių galimus skaičius:

(42; 75; 90), (84; 110; 120), (126; 145; 150), ..., (630; 565; 510).

2. Turime apskaičiuoti geometrinės progresijos, kurios $a_1 = 1$, $q = 3$, $n = 16$, narių sumą: $S_{16} = \dfrac{a_1(q^{16}-1)}{q-1} = \dfrac{3^{16}-1}{2} = 21523360$. Taigi kalvis už darbą pareikalavo 215233 frankų ir 60 centimų.

3. Skolos išmokas kas mėnesį sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas $d = 50$, paskutinis narys $a_n = 1500$. Progresijos skaičių n rasime iš lygčių sistemos:

$$\begin{cases} \dfrac{a_1 \cdot n + 1500 \cdot n}{2} = 19950, \\ a_1 + (n-1) \cdot 50 = 1500. \end{cases}$$

Išsprendę ją ir gauname ieškomuosius dydžius (teks išspręsti kvadratinę lygtį: $n^2 - 61n + 798 = 0 \Rightarrow$ $n_1 = 42$ – netinka, $n_2 = 19$) :

$a_1 = 600$ lt (pirmojo mėnesio įnašas), $n = 19$ (mėnesių skaičius).

4. Tarkime, kad pirmasis žmogus per valandą nueina x km, o antrasis – y km.

Tuomet pirmą kartą jie eidami susitiko po 4 valandų, o atstumas tarp Leipalingio ir Lazdijų yra 36 km. Taigi

$$4x + 4y = 36 \Rightarrow x + y = 9.$$

Antrąjį kartą pirmasis išėjo 1 val. 12 min. ($1\frac{1}{5}$ h) anksčiau negu antrasis ir jie tada susitiko po 3 val. 20 min. ($3\frac{1}{3}$ h). Taigi

$$\left(1\frac{1}{5}+3\frac{1}{3}\right)x+3\frac{1}{3}y=36 \Rightarrow \frac{68}{15}x+\frac{10}{3}y=36 \Rightarrow 34x+25y=270.$$

Išsprendę lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y=9, \\ 34x+25y=270 \end{cases}$$

randame pirmojo ir antrojo žmogaus greičius (km/h):

$$x=5, \quad y=4.$$

5. Tarkime, kad pirmojoje mokykloje mokosi x berniukų ir y mergaičių, vadinasi

$$x+y=54.$$

Antrojoje mokykloje mokosi $x+2$ berniukai ir $y+4$ mergaitės.

Iš pirmosios mokyklos išstojo $\frac{1}{15}x$ berniukų ir $\frac{1}{5}y$ mergaičių, o antrąją mokyklą paliko $\frac{1}{8}(x+2)$ berniukai ir $\frac{1}{7}(y+4)$ mergaitės.

Pagal sąlygą:

$$\frac{1}{8}(x+2)+\frac{1}{7}(y+4)-\left(\frac{1}{15}x+\frac{1}{8}y\right)=3 \Rightarrow \frac{7}{120}x+\frac{1}{56}y=\frac{61}{28}.$$

Išsprendę lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y=54, \\ \frac{1}{120}x+\frac{1}{56}y=\frac{61}{28} \end{cases}$$

gauname $x=30, \quad y=24.$ Tai pirmosios mokyklos berniukų ir mergaičių skaičius.

Nesunkiai randame ir antrosios mokyklos berniukų bei mergaičių skaičių: 32 ir 28.

6. Naudosimės sudėtinių procentų formule: $A=a\cdot q^t$. (Čia A – gautas kapitalas, a – pradinis kapitalas, $q=1+\frac{p}{100}$; čia p yra procentai (palūkanų norma), t – apyvartos laikas, išreikštas metais. Vadinasi,

mes turime $a = 0{,}01$ (1 ct = 0,01 lt). $q = 1 + 0{,}04 = 1{,}04$, $t = 1936$. Tuomet $A = 0{,}01 \cdot (1{,}04)^{1936}$. Skaičiavimų palengvinimui logaritmuojame:

$$\lg A = \lg 0{,}01 + \lg 1{,}04^{1936} = \lg 0{,}01 + 1936 \cdot \lg 1{,}04.$$

Tuomet suradę, kad $\lg 0{,}01 = -2$, $\lg 1{,}04 \approx 0{,}01703$, gauname:

$$\lg A \approx -2 + 1936 \cdot 0{,}01703 = -2 + 32{,}97008 = 30{,}9700.$$

Antilogaritmavę surandame $A \approx 10^{30}$ (litų). Tada dar pasitelkę papildomus duomenis, nesunkiai apskaičiuosime grynojo aukso atitiktį (gr), o norėdami palyginti šį aukso luitą su Žeme, turėsime rasti jų tūrius.

7. Pažymėkime vežimo nuvažiuotą kelią x metrų. Tuomet priešakinis ratas nuvažiuodamas šį kelią apsisuka $\frac{x}{3}$ kartų, o užpakalinis ratas apsisukta $\frac{x}{4}$ kartų. Pagal sąlygą

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 5.$$

Išsprendę lygtį gauname $x = 60$ (metrų).

8. Pažymėkime vieno traukinio greitį x $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, o kito traukinio – y $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Tuomet pagal sąlygą sudarome lygčių sistemą

$$\begin{cases} 5x - 5y = 160, \\ 2x + 2y = 160. \end{cases}$$

Ją išsprendę turime $x = 56$; $y = 24$, t. y., vieno traukinio greitis yra 56 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, o kito – 24 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

9. Tegu x – jaunesniojo brolio išspręstų uždavinių skaičius. Pagal sąlygą:

$$15x - (16 - x) \cdot 10 = 65 \Rightarrow 25x = 225 \Rightarrow x = 9.$$

Taigi broliukas išsprendė 9 uždavinius.

10. Atvykusių keleivių skaičius yra

$$380900 + 96470 = 477370.$$

Tuomet nesunkiai randame bendras išvykusių ir atvykusių keleivių skaičius lygus

$$380900 + 477370 = 858270.$$

Be to, vidutiniškai kas šeštas keleivis yra išlydėtas ar sutiktas vieno asmens. Taigi tai prisideda dar $858270 : 6 = 143045$ asmenų. Vadinasi, 1926 m. Kauno geležinkelio stotį aplankė $858270 + 143045 = 1001315.$ žmonių. Tada pastarąjį skaičių padaliję iš dienų skaičiaus metuose (365), turime apytikrį vienos dienos žmonių skaičių ≈ 2743.

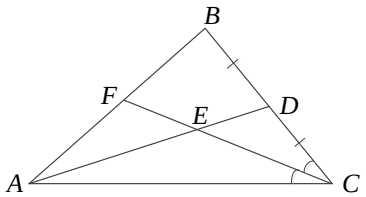
ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Pagal trikampio pusiaukraštinės ilgio formulę (2) rasime pusiaukraštinės *AD* ilgį

$$AD = \frac{1}{2}\sqrt{2AC^2 + 2AB^2 - BC^2} = 15.$$

Sakykime, kad pusiaukampinė *CF* kerta pusiaukraštinę *AD* taške *E* (1pav.), tai pagal pusiaukampinės savybę turime lygybę

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AC}{CD} = \frac{18}{6} = 3.$$

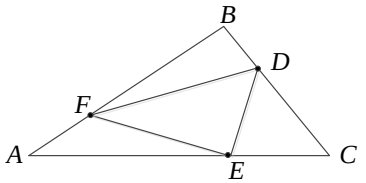


1 pav.

Iš čia išplaukia, kad $AE = \frac{3}{4}AD = \frac{45}{4}$, o $ED = \frac{15}{4}$.

Ats.: $\frac{45}{4}$ ir $\frac{15}{4}$.

2. Sakykime, kad trikampio ABC plotas lygus *S*, pagal trikampio ploto formulę $S = \frac{1}{2}BA \cdot BC \sin\angle B$ (2 pav.).



2 pav.

Pagal tą pačią formulę randame trikampio *BFD* plotą

$$S_1 = \frac{1}{2} BF \cdot BD \sin\angle B = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} BA \cdot \frac{1}{4} BC \sin\angle B =$$

$$= \frac{3}{32} BA \cdot BC \sin\angle B = \frac{3}{16} S.$$

Analogiškai randame trikampių *CDE* ir *AEF* plotus

$$S_2 = \frac{1}{2} CD \cdot CE \sin\angle C = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} CA \cdot \frac{1}{4} CA \sin\angle C = \frac{3}{16} S \text{ ir}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} AE \cdot AF \sin\angle A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} AC \cdot \frac{1}{4} AB \sin\angle A = \frac{3}{16} S.$$

Taigi trikampio *DEF* plotas $Q = S - S_1 - S_2 - S_3 = \frac{7}{16} S,$ todėl ieškomasis santykis lygus $S : Q = S : \frac{7}{16} S = \frac{16}{7}.$

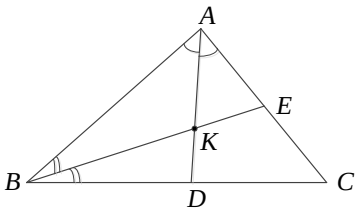
Ats.: 16:7.

3. Visų pirma pagal Herono formulę randame trikampio *ABC* plotą *S:* .

$$p = \frac{1}{2}(15 + 12 + 18) = \frac{45}{2},$$

$$S = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)} = \sqrt{\frac{45}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{21}{2} \cdot \frac{9}{2}} = \frac{135\sqrt{7}}{4}$$

Pagal pusiaukampinių savybę (3 pav.) $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$, t. y., $BD = \frac{5}{9} BC = 10$, $CD = 8$, o trikampio *ABD* plotas lygus $\frac{5}{9} S.$



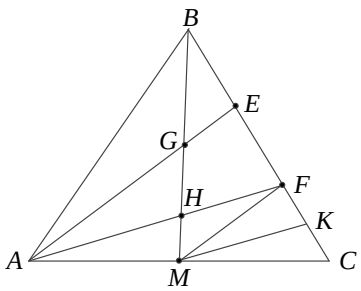
3 pav.

Kadangi trikampių *ABC* ir *ABD* aukštinė, nubrėžta iš viršūnės *A*, yra bendra, tai jų plotų santykis $S_{ABD} : S_{ABC} = BD : BC = 5 : 9.$ Atkarpa *BK* yra trikampio *ABD* pusiaukampinė, taigi $\frac{AK}{KD} = \frac{AB}{BD} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}.$ Iš čia seka, kad trikampio *BKD* plotas lygus $S_{BKD} = \frac{2}{5} S_{ABD} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{9} S = \frac{2}{9} S.$

Tuomet $S_{ABK} = \frac{5}{9}S - \frac{2}{9}S = \frac{1}{3}S.$ Kadangi pagal pusiaukampinės savybę $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6},$ tai trikampių *ABE* ir *BEC* plotams turime $S_{ABE} = \frac{5}{11}S,$ $S_{BCE} = \frac{6}{11}S,$ o trikampio *AEK* plotas lygus $S_{AEK} = S_{ABE} - S_{ABK} = \frac{4}{33}S.$ Beliko surasti keturkampio *CEKD* plotą: $S_{CEKD} = S_{BEC} - S_{BKD} = \frac{32}{99}S.$ Galiausiai įrašome trikampio *ABC* ploto reikšmę ir gauname atsakymą.

Ats.: $S_{BKD} = \frac{15}{2}\sqrt{7},$ $S_{ABK} = \frac{45}{4}\sqrt{7},$ $S_{AKE} = \frac{45}{11}\sqrt{7},$ $S_{CEKD} = \frac{120}{11}\sqrt{7}.$

4. Sakykime, kad taškas *F* yra tarp taškų *E* ir *C* (4 pav.). Akivaizdu, kad atkarpa *MF* yra trikampio *AEC* vidurinė linija, taigi $MF \parallel AE$ ir pagal Talio teoremą $\frac{AG}{GM} = \frac{BE}{EF} = 1.$ Sakykime, kad atkarpoje *FC* yra taškas *K*, kad $MK \parallel AF,$ tai atkarpa *MK* yra trikampio *AFC* vidurinė linija, t. y., $FK = KC = \frac{1}{2}BC.$



4 pav.

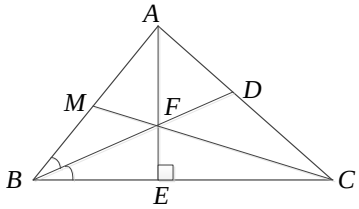
Pagal Talio teoremą turime $\frac{BH}{HM} = \frac{BF}{FK} = \frac{2}{3}BC : \frac{1}{6}BC = 4.$ Taigi

$$BG = \frac{1}{2}BM, \quad HM = \frac{1}{5}BM, \quad GH = CM - HM = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)BM = \frac{3}{10}BM$$

ir $BG : GH : HM = \frac{1}{2} : \frac{3}{10} : \frac{1}{5} = 5:3:2.$

Ats.: $BG : GH : HM = 5:3:2.$

5. Sakykime, kad tiesė *CF* kraštinę *AB* kerta taške *M* (5 pav.). Žymėkime $BE = x$, tuomet $EC = 18 - x$ ir iš Pitagoro teoremos trikampiams *ABE* ir *AEC* turime lygybes $AE^2 = AB^2 - BE^2 = AC^2 - EC^2$. Taigi gavome lygtį $144 - x^2 = 225 - (18 - x)^2$. Išsprendę šią lygtį randame, kad $x = \frac{27}{4}$, Taigi $BE = \frac{27}{4}$, $EC = \frac{45}{4}$. Kadangi trikampio *ABC* čevianos *AE*, *BD* ir *CM* susikerta viename taške, tai pagal Čevos teoremą teisinga lygybė $\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CD}{DA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1$. Pagal pusiaukampinės savybę $\frac{CD}{DA} = \frac{CB}{AB} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$.

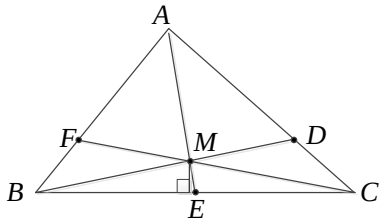


5 pav.

Tuomet $\frac{AM}{MB} = \frac{EC}{BE} \cdot \frac{DA}{CD} = \frac{45}{27} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$. Todėl $AM = \frac{120}{19}$, $MB = 12 - \frac{120}{19} = \frac{108}{19}$.

Ats.: $\frac{120}{19}$; $\frac{108}{19}$.

6. Kadangi trikampių *AEM* ir *CEM* aukštinė, nubrėžta iš viršūnės *M*, yra bendra (6 pav.), tai jų plotų santykis lygus kraštinių *AE* ir *EC* santykiui, t. y., $AE : EC = 24 : 36 = 2 : 3$. Pagal Čevos teoremą $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BE}{EA} = 1$, t. y., $\frac{BE}{EA} = \frac{EC}{AE} \cdot \frac{DB}{CD} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} = 3$, t. y., $S_{BFM} = 3S_{AMF}$. Trikampių *ABC*, *MDC* ir *AFM* plotus žymėkime *S*, *x* ir *y*, tuomet $S_{BFM} = 3y$, $S_{BMD} = 3x$. Kadangi trikampio *ADC* plotas lygus $\frac{1}{3}S$, o trikampio *ABD* plotas lygus $\frac{2}{3}S$, tai turime lygčių sistemą

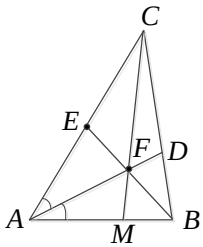


6 pav.

$24+36+x=\frac{1}{3}S,$ $y+3y+2x=\frac{2}{3}S.$ Iš čia randame, kad $x=\frac{1}{3}S-60=\frac{1}{3}S-2y,$ todėl $y=30,$ o $S=360.$

Ats.: 360.

7. Sakykime, kad atkarpos *AD* ir *BE* susikerta taške *F*, o tiesė *CF* kerta kraštinę *AB* taške *M* (7 pav.). Pagal trikampio pusiaukampinės savybę $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$ Pagal Čevos teoremą $\frac{BM}{MA}\cdot\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CD}{DB}=1.$ Kadangi taškas *E* yra kraštinės *AC* vidurio taškas, tai $\frac{AE}{EC}=1,$ todėl $\frac{BM}{MA}=\frac{DB}{CD}=\frac{2}{3}.$ Iš čia išplaukia, kad $BM=\frac{2}{5}BA=\frac{8}{5},$ o $MA=\frac{3}{5}BA=\frac{12}{5}.$



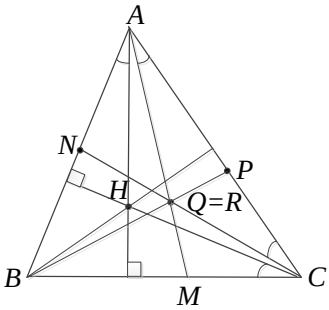
7 pav.

Ats.: $\frac{8}{5}$ ir $\frac{12}{5}.$

8. Sakykime, kad kraštinėje *BC* yra toks taškas *M* toks, kad atkarpa *AM* yra jungtinė aukštinei *AH* (8 pav.). Tuomet

$$\angle CAM=\angle BAH=90^\circ-\angle B.$$

Kita vertus, jei kraštinėje *AB* yra toks taškas *N*, kad atkarpa *CN* yra jungtinė aukštinei *CH*, tai $\angle ACN=\angle BCH=$ $=90^\circ-\angle B=\angle CAM.$ Jei tiesės *AM* ir *CN* susikerta taške *Q*, kuris yra jungtinis taškui *H*, tai $AQ=CQ,$ t. y., taškas *Q* yra kraštinės *AC* vidurio statmenyje. Analogiškai, jei čeviana *BP* yra jungtinė aukštinei *BH*, tai atkarpų *BP* ir *AM* sankirtos taškas *R*, kuris yra jungtinis taškui *H*, yra atkarpos *AB*



8 pav.

vidurio statmenyje. Taškai R ir Q sutampa, nes jie jungtiniai taškui H, o trikampio kraštinių vidurio statmenys susikerta viename taške – apibrėžto apie trikampį apskritimo centre.

Ats.: apibrėžto apie trikampį apskritimo centras.

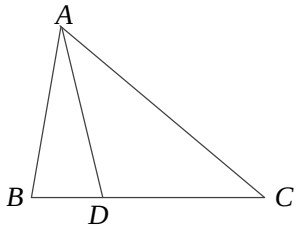
9. Sakykime, kad atkarpa AD yra trikampio ABC simediana (9 pav.). Pagal simedianos savybę

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{400}{900}=\frac{4}{9}.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$BD=\frac{4}{13}BC=8,\ \ DC=BC-BD=18.$$

Pagal Stiuarto formulę turime



9 pav.

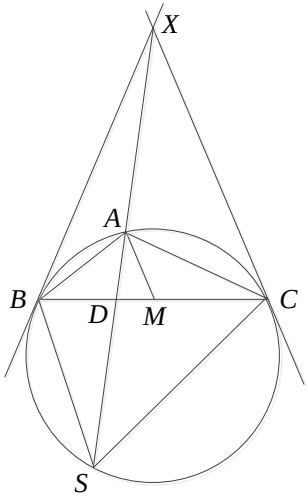
$$AD=\sqrt{\frac{1}{BC}\left(AB^2\cdot DC+AC^2\cdot BD-BC\cdot BD\cdot DC\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{26}\left(400\cdot 18+900\cdot 8+26\cdot 8\cdot 18\right)}=4\sqrt{\frac{333}{13}}.$$

Ats.: $\dfrac{12\sqrt{481}}{13}$.

10. Sakykime, kad tiesė AX trikampio kraštinę BC kerta taške D, o taškas M yra kraštinės BC vidurys (10 pav.). Tuomet atkarpa AD yra trikampio ABC simediana, taigi $\angle BAS=\angle MAC$. Įbrėžtiniai kampai ASB ir ACB yra lygūs, nes remiasi į tą patį lanką AB. Taigi trikampiai ABS ir AMC yra panašieji, todėl $\dfrac{AB}{BS}=\dfrac{AM}{MC}$. Iš čia gauname, kad $BS=\dfrac{AB\cdot MC}{AM}$. Pagal (2) formulę surandame pusiaukraštinės AM ilgį

$$AM=\frac{1}{2}\sqrt{2AC^2+2AB^2-BC^2}=\sqrt{65},$$



10 pav.

todėl $BS = \frac{12 \cdot 13}{\sqrt{65}} = \frac{12}{5}\sqrt{65}$. Analogiškai pagal simedianos apibrėžimą $\angle BAM = \angle CAS$, o pagal įbrėžtinių kampų savybę $\angle ASC = \angle ABC$, todėl trikampiai ACS ir AMB yra panašieji, todėl $\frac{AC}{CS} = \frac{AM}{MB}$, t. y., $CS = \frac{AC \cdot MB}{AM} = \frac{18 \cdot 13}{\sqrt{65}} = \frac{18}{5}\sqrt{65}$.

Ats.: $BS = \frac{12}{5}\sqrt{65}$, $CS = \frac{18}{5}\sqrt{65}$.

TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Turime

$$7142128354 \bmod 7 = 4, \quad 4249566372 \bmod 7 = 2,$$
$$1111111 \bmod 11 = 1, \quad 222222222 \bmod 11 = 2,$$
$$33333333333 \bmod 11 = 3, \quad 12634256789 \bmod 9 = 8.$$

a) $x \equiv 4^2 \cdot 2^3 \pmod 7$ ir $x \bmod 7 = 128 \bmod 7 = 2$ Kadangi 2 yra kvadratinė liekana moduliu 7 (žr. 4 pavyzdį), tai ir x yra kvadratinė liekana moduliu 7.

b) $x \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \pmod{11}$ ir $x \bmod 11 = 6 \bmod 11 = 6$. Kadangi 6 yra kvadratinė neliekana moduliu 11 (žr. 7 pavyzdį), tai ir x yra kvadratinė neliekana moduliu 11.

c) $x \equiv 8^{11} \pmod 9$, bet kadangi $(-1) \bmod 9 = 8$, tai 8^{11} dalijasi iš 9 su ta pačia liekana, kaip ir $(-1)^{11} = -1$. Todėl $x \bmod 9 = (-1) \bmod 9 = 8$. Kadangi 8 yra kvadratinė neliekana moduliu 9 (kvadratinės liekanos intervale [0; 8] yra 0, 1, 4, 7, gaunamos kaip skaičių $0^2, \ldots, 8^2$ liekanos moduliu 9), tai ir x yra kvadratinė neliekana moduliu 9.

Ats.: a) 2; taip, yra; b) 6; ne, nėra; c) 8; ne, nėra.

2. Kvadratinės liekanos yra 0 ir skaičių $1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{13-1}{2}\right)^2$ liekanos moduliu 13, lygios 1, 4, 9, 3, 12, 10, o likę skaičiai 2, 5, 6, 7, 8, 11 yra kvadratinės neliekanos.

Kadangi $5^4 \bmod 13 = 8^4 \bmod 13 = 1$, tai 5 ir 8 nėra primityviosios šaknys moduliu 13. (Galima patikrinti, kad 2, 6, 7, 11 yra primityviosios šaknys.)

Ats.: kv. liekanos: 0, 1, 4, 9, 3, 12, 10; kv. neliekanos: 2, 5, 6, 7, 8, 11; 5 arba 8.

3. Kvadratinės liekanos yra 0 ir skaičių $1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{31-1}{2}\right)^2$ liekanos moduliu 31, lygios 1, 4, 9, 16, 25, 5, 18, 2, 19, 7, 28, 20, 14, 10, 8.

Jei lygtis b) arba lygtis c) turėtų sveikąjį sprendinį, tai $9377 \bmod 31 = 15$ arba $(-59) \bmod 31 = 3$ būtų kvadratinės liekanos moduliu 31. Tačiau jų gautame kvadratinių liekanų sąraše nėra. Vadinasi, šios dvi lygtys sprendinių neturi.

Kadangi $70 \bmod 31 = 8$ yra kvadratinė liekana, kurią gavome iš skaičiaus $\left(\frac{31-1}{2}\right)^2 = 15^2$, tai lygtyje a) galime imti $x = 15$ (kita galimybė yra $x = 31 - 15 = 16$). Tada $y = 5$.

Kadangi $(-641) \bmod 31 = 10$ yra kvadratinė liekana, kurią gavome iš skaičiaus 14^2, tai lygtyje d) galime imti $x = 14$ (kita galimybė yra $x = 31 - 14 = 17$). Tada $y = 27$.

Ats.: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 5, 18, 2, 19, 7, 28, 20, 14, 10, 8; a) (15, 5) arba (16, 6); b) ir c) sprendinių nėra; d) (14, 27) arba (17, 30).

3. a) $\left(\frac{71}{1009}\right)=\left(\frac{1009}{71}\right)\cdot(-1)^{\frac{1009-1}{2}\cdot\frac{71-1}{2}}=\left(\frac{15}{71}\right)=\left(\frac{3}{71}\right)\cdot\left(\frac{5}{71}\right)=$

$$=\left(\frac{71}{3}\right)\cdot(-1)^{\frac{71-1}{2}\cdot\frac{3-1}{2}}\times\left(\frac{71}{5}\right)\cdot(-1)^{\frac{71-1}{2}\cdot\frac{5-1}{2}}=-\left(\frac{-1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)=1.$$

b) $\left(\frac{96}{173}\right)=\left(\frac{3}{173}\right)\cdot\left(\frac{2}{173}\right)^5=\left(\frac{173}{3}\right)\cdot(-1)^{\frac{173-1}{2}\cdot\frac{3-1}{2}}\cdot\left(\frac{2}{173}\right)=$

$$=\left(\frac{-1}{3}\right)\cdot(-1)^{\frac{173^2-1}{8}}=(-1)\cdot(-1)=1.$$

c) $\left(\frac{-1030}{97}\right)=\left(\frac{37}{97}\right)=\left(\frac{97}{37}\right)\cdot(-1)^{\frac{97-1}{2}\cdot\frac{37-1}{2}}=\left(\frac{23}{37}\right)=$

$$=\left(\frac{37}{23}\right)\cdot(-1)^{\frac{37-1}{2}\cdot\frac{23-1}{2}}=\left(\frac{14}{23}\right)=\left(\frac{2}{23}\right)\cdot\left(\frac{7}{23}\right)=$$

$$=(-1)^{\frac{23^2-1}{8}}\cdot\left(\frac{23}{7}\right)\cdot(-1)^{\frac{23-1}{2}\cdot\frac{7-1}{2}}=-\left(\frac{2}{7}\right)=$$

$$=-(-1)^{\frac{7^2-1}{8}}=-1.$$

Ats.:a) ir b) taip, yra; c) ne, nėra.

4. Jei $z=3x^2+10x+6,$

tai $z=3x^2+10x+6,$

$$=(3x)^2+2\cdot3x\cdot5+5^2-5^2+18=(3x+5)^2-7.$$

Jei z dalijasi iš 67, tai $(3x+5)^2=67y+7$, kur skaičius y sveikasis, ir $\left(\frac{7}{67}\right)=1.$ Tačiau

$$\left(\frac{7}{67}\right)=\left(\frac{7}{67}\right)\cdot(-1)^{\frac{67-1}{2}\cdot\frac{7-1}{2}}=-\left(\frac{4}{7}\right)=-\left(\frac{2}{7}\right)^2=-1.$$

Vadinasi, $3x^2+10x+6$ nesidalija iš 67.

6. Kadangi

$$\left(\frac{73}{499}\right)=\left(\frac{499}{73}\right)\cdot(-1)^{\frac{499-1}{2}\cdot\frac{73-1}{2}}=\left(\frac{61}{73}\right)=\left(\frac{73}{61}\right)\cdot(-1)^{\frac{73-1}{2}\cdot\frac{61-1}{2}}=$$

$$=\left(\frac{12}{61}\right)=\left(\frac{3}{61}\right)\cdot\left(\frac{2}{61}\right)^2=\left(\frac{3}{61}\right)=\left(\frac{61}{3}\right)\cdot(-1)^{\frac{61-1}{2}\cdot\frac{3-1}{2}}=\left(\frac{1}{3}\right)=1$$

ir 499 dalijasi iš 4 su liekana 3, tai tinka $x=73^{125}\cdot \bmod 499$. Turime $73^5 \bmod 499=45$, todėl $x=45^{25} \bmod 499$. Turime $45^5 \bmod 499=420$, todėl $x=420^5 \bmod 499=155$. Tinka ir $x=499-155=344$.

Ats.: 155 arba 344.

7. Jei $z=x^2-13x+41$ dalijasi iš 1471 tada ir tik tada, kai iš 1471 dalijasi

$$4z=4x^2-4\cdot 13x+164=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 13+13^2-13^2+164=$$

$$=(2x-13)^2-5.$$

Kadangi $\left(\frac{5}{1471}\right)=\left(\frac{1471}{5}\right)\cdot(-1)^{\frac{1471-1}{2}\cdot\frac{5-1}{2}}=\left(\frac{1}{5}\right)=1$, tai egzistuoja toks sveikasis y, kuriam y^2-5 dalijasi iš 1471. Jei šis y lyginis, tai vietoj jo galime imti nelyginį skaičių $y_1=y+1471$. Bet kuriuo atveju arba $x=\frac{y+13}{2}$, arba $x=\frac{y_1+13}{2}$ tenkina uždavinio sąlygą. Beje, 1471 dalijasi iš 4 su liekana 3, todėl galime imti $y=5^{368}$ ir $x=\frac{5^{368}+13}{2}$.

8. Akivaizdu, kad $p\neq 2$ ir $p\neq 3$. Pažymėkime

$$p=52k-1=13\cdot 4k-1.$$

Jei $x^2+2x+118=(x+1)^2+117$ dalijasi iš p, tai -117 yra kvadratinė liekana moduliu p. Tačiau

$$\left(\frac{-117}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)\cdot\left(\frac{3}{p}\right)^2\cdot\left(\frac{13}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}\cdot 1\cdot\left(\frac{p}{13}\right)\cdot(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{13-1}{2}}=$$

$$=\left(\frac{13\cdot 4k-1}{13}\right)\cdot(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot 7}=\left(\frac{-1}{13}\right)\cdot(-1)^{(26k-1)\cdot 7}=1\cdot(-1)=-1.$$

Vadinasi, $x^2+2x+118$ nesidalija iš p.

9. Turime $9576=2^3\cdot 3^2\cdot 7\cdot 19$. Pastebėkime, kad 127, 1201 ir 2017 nesidalija iš 2, 3, 7 ir 19, todėl šiems skaičiams galima taikyti kvadratinės liekanos kriterijų.

Kadangi 9576 dalijasi iš 8, o $127-1$ nesidalija iš 8, tai 127 yra kvadratinė neliekana.

Kadangi $1201-1$ dalijasi iš 8, $\left(\frac{1201}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)=1$, $\left(\frac{1201}{7}\right)=\left(\frac{4}{7}\right)=1$, $\left(\frac{1201}{19}\right)=\left(\frac{4}{19}\right)=\left(\frac{2}{19}\right)^2=1$, tai 1201 yra kvadratinė liekana.

Kadangi $\left(\frac{2017}{19}\right)=\left(\frac{3}{19}\right)=\left(\frac{19}{3}\right)\cdot(-1)^{\frac{19-1}{2}\cdot\frac{3-1}{2}}=-\left(\frac{1}{3}\right)=-1$, tai 2017 yra kvadratinė neliekana.

Ats.: kvadratinė liekana moduliu 9576 yra tik 1201.

10. Perrinkus pirminius skaičius iki 100, galima rasti, kad n dalijasi iš $p=83$, ir tada $q=n:p=211.$. Kadangi p ir q dalijasi iš 4 su liekana 3, tai galime imti $x_1=13818^{21}\bmod 83=40^{21}\bmod 83$ ir $x_2=13818^{53}\bmod 211=103^{531}\bmod 211$.

Turime $40^7\bmod 83=51$, todėl $x_1=51^3\bmod 83=17$.

Turime $103^7 \bmod 211 = 21$ ir $103^4 \bmod 211 = 105$, todėl $x_2 = 21^7 \cdot 105 \bmod 211 = 37$.

Sekoje 37, 37 +211, 37 + 2·211, ... ieškokime nario, kuris dalytųsi iš 83 su liekana 17. Jau $37 + 18 \cdot 211 = 3835$ tinka. Skaičiuotuvu nesunku patikrinti, kad $x = 3835$ galėtų būti užšifruotasis skaičius.

Tada tinka ir $x = 17513 - 3835 = 13678$.

Kad rastume dar bent vieną x reikšmę imkime $x_1 = 83 - 17 = 66$. Vėl sekoje 37, 37 +211, 37 + 2·211, ... ieškokime nario, kuris dalytųsi iš 83 su liekana 66. Tinka $37 + 132 \cdot 211 = = 6789$.

Taip randame dar dvi reikšmes $x = 6789$ ir $x = 17513 - - 6789 = 10724$.

Ats.: $p = 83$, $q = 211$, $x = 3835, 6789, 10724$ arba 13678.

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Įsitikinsime, kad Jonas visada laimi. Tam jam pakaktų savo pirmuoju ėjimu išbraukti 2 skaičius paliekant juostelėje 2018 – 2 = = 2016 skaičių. Kadangi 2016 dalijasi iš 3 (jis dalijasi net ir iš 9), todėl likusius skaičius bet kaip suskirstant skaičių trejetais Jonui toliau pakaktų laikytis tokios laiminčiosios strategijos: jeigu Petras savo atsakomuoju ėjimu išbraukia vieną skaičių, tai po jo Jonas išbraukia du skaičius ir, atvirkščiai, jeigu Petras išbraukia vieną, tai tada Jonas išbraukia du skaičius. Taip po vieno jų abiejų ėjimo (neskaitant paties pirmojo Jono ėjimo) iš juostelės „išnyksta“ visada lygiai trys skaičiai.

Taip juostelėje neišvengiamai rastųsi

2016, 2013, 2010,....., 9, 6, 3

skaičiai, o eilė eiti būtų Petrui. Jeigu jis išbrauks vieną skaičių, tai tada Jonas išbrauks paskutinius du ir

laimės, o jeigu Petras išbrauks du paskutinio trejeto skaičius, tai tada Jonas išbrauks patį paskutinį ir taip pat laimės. Vadinasi, jis laimi „visais“ atvejais, kitaip sakant, jis turi laiminčiąją strategiją.

Ats. Jonas visada laimi, jeigu savo pirmuoju ėjimu palieka juostelėje iš 3 besidalijantį skaičių kiekį ir vėliau visą laiką rūpinasi, kad taip ir toliau būtų po kiekvieno jo ėjimo.

2. Žaidimo pradžioje juostelėje esantis skaičių kiekis dalijasi iš 11, nes 1001 yra $7 \times 11 \times 13$. Todėl dabar kad ir ką Jonas išbrauktų, savo atsakomuoju ėjimu Petras gali papildyti jų abiejų vienu bendru ėjimu išbrauktų skaičių kiekį iki 11. Taip po pirmojo jų abiejų ėjimo (ir lygiai taip ir toliau) dabar jau Petras visada gali išlaikyti tokią padėtį, kad bendras dar likusių neišbrauktų skaičių kiekis yra visada dalus iš 11.

Todėl Petras visada gali garantuoti, kad po kiekvieno jo ėjimo juostelėje esančių dar neišbrauktų skaičių kiekis mažės vis po 11 ir bus

990, 979, 968, ..., 880, ..., 110, 99, 88, ...11.

Dabar kad ir kiek skaičių beišbrauktų Jonas, Petras turės teisę išbraukti visus likusius, o tai reiškia, kad taip pat ir patį paskutinį skaičių ir taip laimėti visą žaidimą.

Ats. Petras laimi laikydamasis tokios strategijos, kad po kiekvieno jo ėjimo juostelėje likusių dar neišbrauktų skaičių kiekis sumažėja po 11 ir visada išlieka dalus iš 11.

3. Įsitikinsime, kad dabar žaidimą visada laimi Beatričė.

Tikrai, savo pirmuoju ėjimu Aistė gali eiti į gretimą pagal kraštinę langelį esantį toje pačioje eilutėje, arba tame pačiame stulpelyje.

Pirmuoju atveju apatinėje eilutėje lieka 8 „nelankyti“ langeliai, o likusioje po devyniose eilutėse – po 10 nelankytų langelių. Juos visus lengva suskirstyti į 49 bendrą kraštinę turinčių langelių poras ir toliau jau samprotaujame visiškai panašiai, kaip kad buvo pasakyta mūsų užduoties 2-jame pavyzdyje.

Antruoju atveju, kai Aistė lieka pirmajame stulpelyje, tai jame yra dar 8 nelankyti langeliai, o likusiose 9 – po 10 nelankytų

langelių, kuriuos vėl panašiai galima suskirstyti į 49 bendrą kraštinę turinčių langelių poras. Toliau viskas vėl kaip buvo pasakyta antrajame pavyzdyje.

Ats. Beatričė laimi laikydamasi strategijos, kad po bet kurio (iš dviejų galimų) Aistės ėjimo ji likusius nelankytus 100 – 2 = 98 langelius suskirsto į 49 bendrą kraštinę turinčias langelių poras. Ji laikosi strategijos, kad kiekvienu ėjimu Aistei įžengus į „naują“ porą, Beatričė eina į gretimą tos pačios poros langelį. Kadangi porų skaičius po kiekvieno jų bendro ėjimo sumažėja, tai kada nors visa tai baigsis. Kadangi Beatričė užsitikrino tokią padėtį, jog jeigu paeiti gali Aistė, tai paeiti gali taip pat ir Beatričė, tai ėjimai baigsis būtent Aistei ir baigsis tada, kai baigsis „neįžengtos“ poros.

4. Įsitikinsime, kad nė vienas iš jų laimėti negali, nesvarbu, ko jie griebtųsi.

Iš tikrųjų, ką jie darys, jie savo pasirinkimais suformuos skaičių, kuriame po vieną kartą pasitaikys visi 10 skaitmenų.

Tokio 10-ženklio skaičiaus skaitmenų suma bus lygi visų dešimties skaitmenų sumai, kuri, kaip žinia, yra lygi

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Kadangi 45 dalijasi iš 9, tai, remiantis dalumo iš 9 požymiu, iš 9 privalės dalintis ir pats jų sudarytasis skaičius, todėl nei Jonas, nei Justas žaidimo nelaimės.

Šiuo atveju galima sakyti, kad žaidimas niekada neturės jokios kuriam nors iš jų palankios pabaigos.

Ats. Nei Jonas, nei Justas negali laimėti, nes nė vienas jų sudarytas skaičius niekada neturės nei liekanos 1, nei liekanos 2 lygios dalybos iš 9 liekanos, nes jis visada dalinsis iš 9.

5. Įsitikinsime, kad Aistė visada gali laimėti žaidimą.

Tikrai, sakykime, kad Aistė savo pirmuoju ėjimu ima kortelę 3. Tada savo atsakomuoju ėjimu Aušra arba ima kortelę 4, arba jos neliečia. Jeigu Aušra neima kortelės 4, tai ją savo antruoju ėjimu paims Aistė ir išdėlios iš 17 besidalijantį skaičių 34.

Todėl Aušra priversta imti kortelę 4.

Tada savo antruoju ėjimu Aistė ima kortelę 1. Tada jeigu Aušra neims kortelės 5, tai ją savo trečiuoju ėjimu paims Aistė ir išdės skaičių 51.

Taip Aušra priversta imti kortelę 5. Tada Aistė, kuri jau turi korteles 1 ir 3, paims dar ir kortelę 6 ir išdėlios skaičių 136, kuris dalijasi iš 17, nes $136 = 17 \times 8$

Taip matome, kad Aistė visada laimi.

Ats. Aistė laimi žaidimą, sakysime, savo pirmuoju ėjimu imdama kortelę 3.

6. Įrodysime, kad žaidimą gali laimėti Robinzonas. Tam jam pakaktų savo pirmuoju ėjimu nudažyti abu trečiojo stulpelio langelius (nudažytus langelius žymėsime simboliu D). Tai padaręs Robinzonas padalina juostelę

$$2 \times 5$$

į dvi „nesusisiekiančias“ dalis, kurias pavadinkime kairiąja ir dešiniąja pusėmis.

		D		
		D		

Jeigu dabar jau nudažytą trečiąjį stulpelį pavadintume dar ir lentelės „simetrijos stulpeliu“, tai tolesnė Robinzono strategija darosi labai paprasta. Jeigu Penktadieniui pavyksta ką nors nudažyti vienoje kurioje nors pusėje, tai Robinsonas tą patį simetriškai (trečiojo stulpelio atžvilgiu) atkartoja kitoje pusėje.

Langeliai greitai baigsis ir baigsis jie Penktadieniui, nes jeigu ėjimą vienoje kurioje nors pusėje gali atlikti Penktadienis, tai kitoje pusėje simetriškai trečiojo stulpelio atžvilgiu jį gali atlikti ir Robinzonas.

O langelių sulig kiekvienu ėjimu juk mažėja.

Todėl žaidimą neišvengiamai laimės Robinzonas.

Ats. Žaidimą laimi Robinzonas savo ėjimu nudažydamas abu trečiojo stulpelio langelius ir taip perskiria likusius 8 nenudažytus langelius į dvi „nesusiekiančias“ puses tuo priversdamas Penktadienį dažyti griežtai vienoje kurioje nors pusėje ir tada pats simetriškai to trečiojo stulpelio atžvilgiu atkartodamas jo „darbus“ kitoje pusėje.

7.

Įrodysime, kad nors kiekvienu savo ėjimu Karlsonas pasiima 4 kartus daugiau šokolado negu Mažylis, vis dėl to „po visam“ daugiau šokolado bus gavęs Mažylis.

Kad tuo įsitikintume, pažymėkime simboliu **X** keturias vienetines šokolado dalis taip, kaip tai parodyta brėžinyje žemiau.

	X		**X**	
	X		**X**	

Įsitikinkime, kad yra teisingas toks faktas: kad ir kaip laužtų plytelę Karlsonas jis visada išlauš vieną vienintelę šokolado **X** dalelę. Todėl jeigu vienetinių **X** dalelių nebėra, tai laužti toliau Karlsonas jau nebegali.

Tai paaiškina, kokios strategijos gali laikytis Mažylis – jis savo ėjimais turi naikinti vienetines **X** pažymėtas šokolado dalis.

Pirmuoju ėjimu Karlsonas pasiima 4 vienetines dalis ir taip neišvengiamai „panaikina“ vieną **X** šokolado dalelę. Tada bet kokią kitą **X** vienetinę dalį išlaužia Mažylis. Jei Karlsonas dar gali išlaužti eilines 4 šokolado daleles, tai jis panaikina dar vieną, jau trečią **X** šokolado dalelę, o Mažylis po jo – ir ketvirtą, jau paskutinę vienetinę **X** dalelę.

Tai reiškia, jog toliau laužti Karlsonas nebegalės ir tada visas likęs šokoladas, susidedantis iš

$$25 - 4 - 1 - 4 - 1 = 15$$

dalelių, atitenka Mažyliui, kuris, kaip matome, gauna mažiausiai

$$15 + 2 = 17$$

šokolado dalelių tuo tarpu, kai Karlsonas liks su daugiausiai 8 vienetinėmis dalimis.

Ats. Mažylis gauna didesnę šokolado plytelės dalį.

8. Savo pirmuoju ėjimu išmintingoji Albina paima iš pirmosios krūvelės tiek brangakmenių, kad abiejose krūvelėse jų būtų po 13, arba savo pirmuoju ėjimu Albina pasiima 2005 akmenukus. Toliau jai galvoti jau reikės „kiek mažiau“, nes ji pagalvojo „prieš tai“ ir jai visiškai pakaks kartoti tai, ką darys profesorius Gaudencijus.

Tai reiškia, kad išmintingoji Albina ims lygiai tiek brangakmenių, kiek jų ką tik (tik iš kitos krūvelės) paima Gaudencijus.

Kitaip sakant, išmintingoji Albina, savo įžanginiu pirmuoju ėjimu sulyginusi brangakmenių abiejose krūvelėse, tą patį daro ir toliau. Tai yra, ji kiekvienu savo ėjimu „išlygina“ krūveles. Todėl jei po Gaudencijaus ėjimo ant stalo vis dar yra 2 netuščios akmenukų krūvelės, tai dvi krūvelės (tik dabar abi su po tiek akmenukų) bus ir po atsakomojo Albinos ėjimo.

O jeigu Gaudencijus vieną kurią krūvelę „užbaigs imti“ – o anksčiau ar vėliau jis bus priverstas tai padaryti, tada savo atsakomuoju ėjimu kitą krūvelę „užbaigs imti“ ir išmintingoji Albina – tuo pačiu laimėdama visą žaidimą.

Ats. Išmintingoji Albina savo pradiniu ėjimu sulygina brangakmenių skaičių abiejose krūvelėse ir toliau laikosi strategijos – kiek akmenukų Gaudencijus ima iš vienos kurios nors krūvelės, tai tiek pat ji ima iš kitos. Taip kiekvienu ėjimu ji išlaiko vienodą akmenukų skaičių abiejose krūvelėse ir tai užtikrina jai pergalę arba paskutinio akmenuko pasiėmimą.

9. Žaidimą visada laimi Rimas. Tam jam pakaktų pirmu ėjimu paimti nuo stalo vieną vienintelę monetą paliekant lentoje

$$2019 - 1 = 2018$$

monetų.

Pastebėkime, kad dabar, kad ir kokį lyginį monetų skaičių nuo 2 iki 100 imtinai imtų Nerimas, Rimas savo atsakomuoju ėjimu visada gali paimti tiek monetų, kad jų per abu jie vienu ėjimu būtų paėmę „griežtai“ 101.

Taigi po savo ėjimo Rimas visada gali palikti ant stalo

2018, 1917, 1816, 1715, 1614, 1513, 1412, 1311, 1210, 1109, 1008, 907, 806, 705, 604, 503, 402, 301, 200, 99 monetas.

Dabar, kai ant stalo yra 99 monetos, jų visų Nerimas savo ėjimu nuimti negali, nes 99 yra nelyginis skaičius. Todėl po bet kurio Nerimo atsakymo Rimui liks dar mažesnis ir jau būtinai nelyginis monetų skaičius, kurias tada visas jis ir baigs imti tuo pačiu laimėdamas ir visą žaidimą.

Ats. Rimas visada laimi nuimdamas savo pirmuoju ėjimu vieną monetą ir toliau laikydamas strategijos, kad tolesniais ėjimais jie per abu per vieną bendrą ėjimą nuimtų visada griežtai po 101 monetą, kol ant stalo teliks mažiau kaip 100, arba, kaip kad mūsų atveju, 99 monetos.. Ši padėtis lyginį monetų skaičių tegalinčiam nuimti Nerimui yra pragaištinga, nes visų jų nuimti jis negali, nes 99 yra nelyginis skaičius. Todėl Nerimas ima kažkokį nelyginį monetų skaičių, palikdamas ant stalo dar labiau mažesnį, bet jau lyginį monetų skaičių, kurias visas sekančiu savo ėjimus ir nušluoja laimėtojas Rimas.

10. Pažymėkime simboliu X kai kuriuos šachmatų lentos langelius, sudarančius savotišką „rėtį“.

	X		X		X		X
	X		X		X		X
	X		X		X		X
	X		X		X		X
F							

Įrodysime, kad Greta visada gali laimėti.

Tam jai pakaktų savo pirmuoju ėjimu perkelti mįslingą figūrą F į patį dešiniausią apatinį X langelį ir toliau laikytis tokios strategijos – kokia kryptimi eitų Deividas, tai ta pačia kryptimi tęsia ėjimą ir Greta.

Taigi, jeigu Deividas eitų aukštyn, tai aukštyn po jo eitų ir Greta, jeigu dešinėn eitų Deividas, tai to jo dešinėn eitų ir Greta.

Jeigu įstrižaine aukštyn-dešinėn eitų Deividas, tai įstrižaine aukštyn-dešinėn eitų ir Greta.

Žodžiu, Gretos strategija ne tik kad atkartoja, bet kartu, galima būtų sakyti, kad ir pratęsia Deivido strategiją.

Taigi po kiekvieno tokio atsakomojo ėjimo Gretos mįslinga figūra išlieka „rėtyje“, kurį sudaro visi **X** langeliai.

Taip Greta pirmoji ir neišvengiamai įeis į dešinįjį viršutinį lentos **X** langelį tuo laimėdama visą žaidimą.

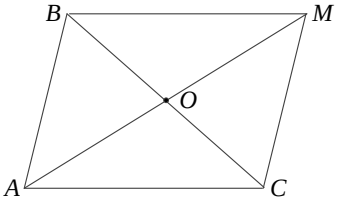
Šioje vietoje mes patartume susižymėti visus laiminčius ir pralaiminčius langelius.

Ats. Greta kiekvienu savo ėjimu eina į artimiausią pasiekiamą **X** langelį ir toliau savo ėjimais pratęsia Deivido ėjimų kryptį ir taip „neišvengiamai“ laimi.

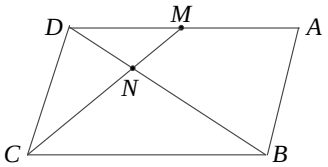
PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Sakykime, kad taškos O yra kraštinės BC vidurio taškas (1 pav.). Kadangi keturkampio $ABMC$ įstrižainės AM ir BC susikerta taške O ir jame dalijamos pusiau, tai šis keturkampis yra lygiagretainis. Lygiagretainio įstrižainių kvadratų suma lygi kraštinių kvadratų sumai, todėl $AM^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$. Iš čia seka, kad $AM^2 + 16^2 = 2(12^2 + 15^2)$. Taigi $AM = \sqrt{842}$.

Ats.: $\sqrt{842}$.



1 pav.



2 pav.

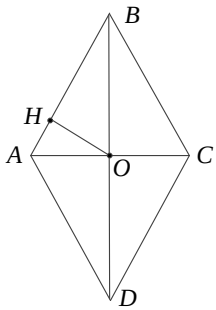
2. Sakykime, kad tiesės CM ir BD kertasi taške N (2 pav.). Kadangi atkarpa CN yra trikampio CBD pusiaukampinė, tai pagal pusiaukampinės savybę $BN : ND = CB : CD$. Kadangi tiesės AD ir BCyra

lygiagrečios, tai $\angle CMD = \angle BCM = \angle DCM$, taigi trikampis *CDM* yra lygiašonis (*CD*=*DM*). Kadangi taškas *M* yra atkarpos *AD* vidurio taškas, tai $BC = AD = 2CD$, taigi ieškomasis santykis $BN : ND = 2:1$.

Ats.: 2:1.

2. Sakykime, kad rombo *ABCD* įstrižainės susikerta taške *O* įstrižainė $AC = 10$, o atstumas nuo taško *O* iki kraštinės *AB* lygus $OH = 3$ (3 pav.). Akivaizdu, kad

$$AO = \frac{1}{2}AC = 5, \quad AH = \sqrt{AO^2 - OH^2} = 4.$$



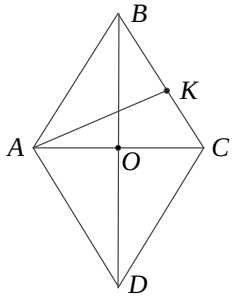
3 pav.

Iš stačiųjų trikampių *AOB* ir *AHO* panašumo turime, kad $AH : AO = AO : AB$, t. y., $AB = \frac{AO^2}{AH} = \frac{25}{4}$. Rombo plotas *S* 4 kartus didesnis už trikampio *AOB* plotą, taigi $S = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OH = \frac{75}{2}$.

Ats.: $\frac{75}{2}$.

3. Kadangi rombo įstrižainė yra jo pusiaukampinė, tai $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BAD = 2\varphi$. Kadangi atkarpa *AK* yra trikampio *ABC* pusiaukampinė, tai pagal pusiaukampinės savybę turime, kad $BK : KC = AB : AC$. Žymėkime $AB = a$, tuomet $CK = a - b$, iš trikampio *AOB* randame, kad

$$B : AC = AB : 2AO = \frac{1}{2\cos 2\varphi}.$$



4 pav.

Taigi $\frac{b}{a-b} = \frac{1}{2\cos 2\varphi}$. Iš čia surandame, kad $a = b(1 + 2\cos 2\varphi)$.

Tuomet rombo plotas

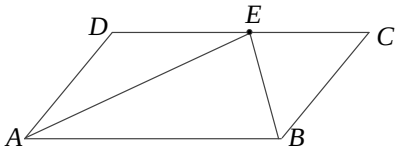
$$S-2\cdot\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD=a^2\sin 4\varphi=b^2(1+\cos 2\varphi)^2\sin 4\varphi.$$

Ats.: $S=b^2(1+\cos 2\varphi)^2\sin 4\varphi.$

Pastaba: pasirinkus kitą sprendimo būdą, atsakymas gali būti užrašytas ir kita forma: $S=\dfrac{b^2\sin^2 3\varphi}{\sin^2\varphi}\sin 4\varphi.$

4. Kadangi tiesės *AB* ir *CD* lygiagrečios (5 pav.), tai

$$\angle AED=\angle EAB=\frac{1}{2}\angle A.$$



5 pav.

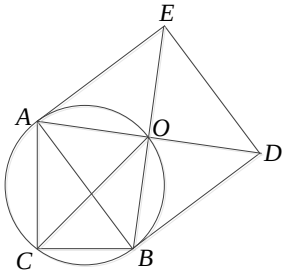
Analogiškai

$\angle CEB=\angle EBA=\dfrac{1}{2}\angle B.$ Kadangi $\angle A+\angle B=180^\circ$, tai

$\angle AEB=180^\circ-\angle EAB-\angle EBA=$

$=180^\circ-\dfrac{1}{2}(\angle A+\angle B)=90^\circ$, taigi trikampis *AEB* yra statusis. Todėl $AB=\sqrt{AE^2+EB^2}=10.$ Kadangi $AB=$ $=2AD$ (įrodyta 5 pavyzdyje), tai $AD=5.$

Ats.: $AB=10,\ AD=5.$

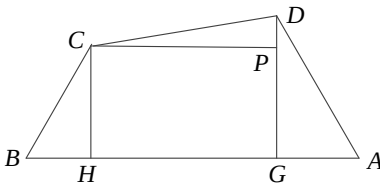


6 pav.

6. Sakykime, kad taške *O* susikerta kvadrato *ABDE* įstrižainės (6 pav.). Kadangi $\angle ACB+\angle AOB=180^\circ$, tai keturkampis *ACBO* yra įbrėžtas į apskritimą. Kadangi atkarpos *AO* ir *BO* yra statmenos ir lygios, tai pagal 9 pavyzdžio rezultatą iš čia išplaukia, kad tiesėje *CO* yra kampo *C* pusiaukampinė. Kadangi tiesė *CO* eina per kvadrato įstrižainių sankirtos tašką, tai kaip įrodyta 1 pavyzdyje, ji dalija jo plotą pusiau. Taigi, $AB=10,$ kvadrato plotas lygus 100, dalių, į kurias kvadratą dalija tiesė *CO*, plotai lygūs 50

*Ats.:*50 ir 50.

7. Sakykime, kad *ABCD* duotasis keturkampis. Iš viršūnių *C* ir *D* nuleiskime statmenis *CH* ir *DG* į kraštinę *AB*. Iš stačiųjų trikampių *ADG* ir *CBH* turime



7 pav.

$$DG = AD\sin 60^\circ = 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3},$$

$$AG = AD\cos 60^\circ = 5,$$

$$BH = BC\cos 60^\circ = 4,$$

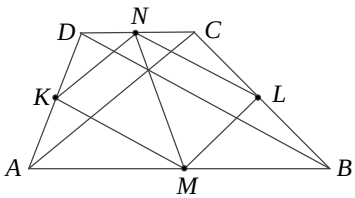
$$CH = BC\sin 60^\circ = 4\sqrt{3}.$$

Iš taško *C* nuleidžiame statmenį *CP* į tiesę *DG*, kadangi $DG > CH$, tai taškas *P* yra atkarpoje *DG* (7 pav.). Keturkampis *GHCP* yra stačiakampis, todėl $GP = HC = 4\sqrt{3}$, tuomet $DP = DG - GP = \sqrt{3}$.

Iš stačiojo trikampio *CDP* turime $CP = \sqrt{CD^2 - DP^2} =$ $= \sqrt{144-3} = \sqrt{141}$. Kadangi $CH = CP$, o , $AB = AG + GH = HB$, tai $AB = 5 + \sqrt{141} + 4 = 9 + \sqrt{141}$.

Ats.: $9 + \sqrt{141}$.

8. Sakykime, kad taškai *K* ir *L* yra trapecijos *ABCD* šoninių kraštinių *AD* ir *BC* vidurio taškai (8 pav.). Kadangi atkarpos *NL* ir *ML* yra trikampių *BCD* ir *ABC* vidurinės linijos, tai



8 pav.

$$NL = \frac{1}{2}BD = 4,\ \ ML = \frac{1}{2}AC = 3.$$

Taikydami Herono formulę randame trikampio *MNL* plotą. Kadangi jo pusperimetris $p = \frac{1}{2}(4+4+3) = \frac{11}{2}$, tai

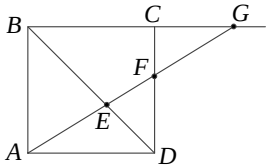
$$S_{MNL}\sqrt{\frac{11}{2}\cdot\left(\frac{11}{2}-4\right)\cdot\left(\frac{11}{2}-4\right)\cdot\left(\frac{11}{2}-3\right)} = \frac{3}{4}\sqrt{55}.$$

Kadangi šis plotas lygus pusei lygiagretainio *MLNK* ploto, o lygiagretainio *MLNK* plotas, kaip įrodyta 7 pavyzdyje, lygus

pusei trapecijos $ABCD$ ploto S, tai iš čia gauname, kad $S = 4S_{MNL} = 3\sqrt{55}$.

Ats.: $3\sqrt{55}$.

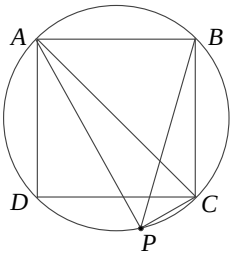
9. Iš trikampių AEB ir FED panašumo (9 pav.) turime lygybę $\frac{AE}{EF} = \frac{BE}{ED}$, o iš trikampių AED ir GEB panašumo – lygybę $\frac{BE}{DE} = \frac{EG}{AE}$. Iš šių lygybių išplaukia, kad $\frac{AE}{EF} = \frac{EG}{AE}$, t. y. $EG = \frac{AE^2}{EF} = \frac{25}{3}$. Taigi $FG = GE - EF = \frac{16}{3}$.



9 pav.

Ats.: $FG = \frac{16}{3}$.

10. Įbrėžtam į apskritimą keturkampiui $ABCP$ taikome Ptolemėjo teoremą ir gauname, kad $BP \cdot AC = AP \cdot BC + AB \cdot CP$. Kadangi kvadrato įstrižainė $AC = \sqrt{2}AB$, tai suprastinę iš kvadrato kraštinės AB turime $\sqrt{2}BP = AP + CP$. Taigi $BP = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.



10 pav.

Ats.: $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. a) Apibrėžkime Būlio funkciją $f(a, b, c) = (a \vee b) \to ((\neg b) \wedge c)$. Apskaičiavę nustatome, kad $f(0, 0, 0)$, $f(0, 0, 1)$, $f(1, 0, 1)$ reikšmės lygios 1, o likusios $f(0, 1, 0)$, $f(0, 1, 1)$, $f(1, 0, 0)$, $f(1, 1, 0)$, $f(1, 1, 1)$ reikšmės lygios 0. Vadinasi, A, B, C loginės

reikšmės gali būti tokios: 0, 0, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 1, t. y. arba visi trys teiginiai klaidingi, arba teisingas tik *C*, arba teisingi tik *A* ir *C*.

Dalys b) ir c) sprendžiamos analogiškai.

Ats.: a) $(a, b, c) = (0, 0, 0), (0, 0, 1)$, arba $(1, 0, 1)$, t. y. arba visi trys teiginiai klaidingi, arba teisingas tik *C*, arba teisingi tik *A* ir *C*; b) $(a, b, c) = (0, 1, 0)$, arba $(1, 1, 1)$, t. y. arba visi trys teiginiai teisingi, arba teisingas tik *B*; c) $(a, b, c) = (0, 0, 1)$, t. y. teisingas tik teiginys *C*.

2. Apibrėžkime Būlio funkcijas

$$f_1(a, b, c) = (a \to b) \wedge c,$$
$$f_2(a, b, c) = (a \vee b) \wedge ((\neg a) \vee c),$$
$$f_3(a, b, c) = ((\neg a) \wedge b) \vee (a \wedge c),$$
$$f_4(a, b, c) = a \cdot b \cdot c \oplus c \cdot a \oplus c.$$

Apskaičiavę f_2 visas reikšmes, randame, kad $f_2(a, b, c) = 1$ tada ir tik tada, kai $(a, b, c) = (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)$, arba $(1, 1, 1)$. Taip pat $f_3(a, b, c) = 1$ tada ir tik tada, kai $(a, b, c) = (0, 1, 0), (0, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ arba $(1, 1, 1)$. Vadinasi, visada $f_2(a, b, c) = f_3(a, b, c)$, o teiginiai *V* ir *W* ekvivalentūs. Kad teiginiai *U* ir *X* ekvivalentūs, galima įrodyti analogiškai. Bet galima ir pasinaudoti 1 pavyzdyje įrodyta tapatybe $x \to y = x \cdot y \oplus x \oplus 1$. Tada

$$f_1(a, b, c) = (a \to b) \wedge c = (a \cdot b \oplus a \oplus 1) \cdot c = a \cdot b \cdot c \oplus c \cdot a \oplus c =$$
$$= f_4(a, b, c).$$

Jokie kiti du teiginiai nėra ekvivalentūs, nes

$$f_2(0, 1, 0) = f_3(0, 1, 0) = 1, \text{ bet } f_1(0, 1, 0) = f_4(0, 1, 0) = 0.$$

Ats.: ekvivalentūs yra teiginiai *U* ir *X* bei *V* ir *W*.

3. a) Aušros teiginys yra $P \to S$, o Beno teiginys yra $(\neg S) \leftrightarrow A$. Tada Česiaus teiginys yra

$$C = ((P \to S) \wedge ((\neg S) \leftrightarrow A)) \to (A \to (\neg P)).$$

Pažymėkime

$$f(s, p, a) = ((p \to s) \wedge ((\neg s) \leftrightarrow a)) \to (a \to (\neg p)).$$

Tada visiems 8 galimiems rinkiniams (s, p, a) turime $f(s, p, a) = 1$. Todėl teiginys C yra tapačiai teisingas.

b) Dabar Beno teiginys yra $(\neg S) \to A$. Analogiškai gauname $f(s, p, a) = ((p \to s) \wedge ((\neg s) \to a)) \to (a \to (\neg p))$.

Kadangi dabar $f(1, 1, 1) = 0$, tai Česiaus teiginys nėra tapačiai teisingas.

Ats.: a) taip, teiginys tapačiai teisingas; b) ne, teiginys nėra tapačiai teisingas.

5. Teisėjų išvadas galima atitinkamai užrašyti:
$X = ((K \to B) \wedge (\neg K) \to (\neg B)$, $Y = ((K \to B) \wedge (\neg B) \to (\neg K)$ ir $Z = ((K \to B) \wedge B) \to K$. Kadangi $((k \to b) \wedge (\neg k)) \to (\neg b) = 0$, kai $k = b = 0$, ir $((k \to b) \wedge b) \to k = 0$, kai $k = 0$, $b = 1$, tai teiginiai X ir Z nėra tapačiai teisingi. Kadangi $((k \to b) \wedge (\neg b) \to (\neg k) = 1$ visoms 4 poroms (k, b), tai teiginys Y tapačiai teisingas. Vadinasi, logiškai pagrįsta yra tik teisėjo Y išvada.

Ats.: logiškai pagrįsta yra tik teisėjo Y išvada.

5. a) Teiginių A, B, C logines reikšmes pažymėkime a, b, c. Tada $f(a, b, c) = 1$, kai lygiai vienas iš teiginių A, B, C teisingas, t. y. kai lygiai viena iš reikšmių a, b, c lygi 1. Todėl $f(1, 0, 0) = f(0, 1, 0) = f(0, 0, 1) = 1$, o likusios penkios f reikšmės lygios 0. Tada $f(1, 1, 1) = 0$, bet $1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$. Vadinasi, $f(a, b, c)$ nesutampa su $a \oplus b \oplus c$, o teiginys $f(A, B, C)$ nėra ekvivalentus $A \oplus B \oplus C$.

b) Jau žinome, kad $f(a, b, c) = 1$, kai $(a, b, c) = (1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Šiuos trejetus atitinka „sandaugos“ $a \cdot (\neg b) \cdot (\neg c)$, $(\neg a) \cdot b \cdot (\neg c)$, $(\neg a) \cdot (\neg b) \cdot c$. Todėl

$$f(a, b, c) = a \cdot (\neg b) \cdot (\neg c) \oplus (\neg a) \cdot b \cdot (\neg c) \oplus (\neg a) \cdot (\neg b) \cdot c =$$
$$= a \cdot (b \oplus 1) \cdot (c \oplus 1) \oplus (a \oplus 1) \cdot b \cdot (c \oplus 1) \oplus (a \oplus 1) \cdot (b \oplus 1) \cdot c =$$
$$= a \cdot b \cdot c \oplus a \cdot b \oplus a \cdot c \oplus a \oplus a \cdot b \cdot c \oplus b \cdot c \oplus a \cdot b \oplus b \oplus a \cdot b \cdot c \oplus$$
$$\oplus a \cdot c \oplus b \cdot c \oplus c = a \cdot b \cdot c \oplus a \oplus b \oplus c$$

ir $f(A, B, C) = A \cdot B \cdot C \oplus A \oplus B \oplus C$.

Ats.: a) $f(1,0,0)=f(0,1,0)=f(0,0,1)=1,$
$f(0,0,0)=f(0,1,1)=f(1,0,1)=f(1,1,0)=f(1,1,1)=0;$
b) $f(a,b,c)=a\cdot b\cdot c\oplus a\oplus b\oplus c;\quad A\cdot B\cdot C\oplus A\oplus B\oplus C.$

6. Kadangi visada $\neg x=x\to 0,$ o iš 3 pavyzdžio žinome, kad visas Būlio funkcijas galima išreikšti per operacijas $\wedge$ ir $\neg$, tai visas Būlio funkcijas galima išreikšti per operacijas $\wedge$, $\to$, 0, ir šių operacijų sistema yra pilnoji.

Jei $x=1,$ tai kad ir ką bedarytume su x ir konstanta 1, jungdami juos konjunkcijomis ir implikacijomis, atsakymo 0 negausime (nes $1\cdot 1=1$ ir $1\to 1=1$). Todėl funkcija $f(x)=\neg x$ neišreiškiama per operacijas $\wedge$, $\to$, 1, ir šių operacijų sistema nėra pilnoji.

Funkciją $f(x)=\neg x$ galima išreikšti per operacijas $\oplus$, 1: $f(x)=x\oplus 1.$ Tačiau šių operacijų sistema nėra pilnoji dėl kitų priežasčių. Naudodami tik simbolius *x*, *y*, $\oplus$, 1 (ir skliaustus, šiuo atveju neturinčius jokios reikšmės), tegalime gauti „sumas“ $x\oplus x\oplus\ldots\oplus x\oplus y\oplus y\oplus\ldots\oplus y\oplus 1\oplus 1\oplus\ldots\oplus 1,$ turinčias bet kiek „dėmenų“ (kurių tvarka nesvarbi), o jas prastindami tegalime gauti vieną iš funkcijų 0, 1, *x*, *y*, $x\oplus 1$, $y\oplus 1$, $x\oplus y$, $x\oplus y\oplus 1$, iš kurių nė viena nesutampa su funkcija $x\cdot y$.

Pastaba. Kadangi visada $\neg x=x\to 0$ ir $x\cdot y=\neg(x\to(\neg y))=(x\to(y\to 0))\to 0,$ tai net atmetus $\wedge$, sistema $\to$, 0 lieka pilnoji.

7. a) Jei teiginiai *A* ir *B* abu teisingi, t. y. $a=b=1,$ tai $a\uparrow b=0,$ o visais kitais atvejais $a\uparrow b=1.$ Todėl $0\uparrow 0=0\uparrow 1=1\uparrow 0=1,$ $1\uparrow 1=0.$.

b) Teiginių „Netiesa, kad *A* ir *B*“ $=\neg(A\wedge B)$ bei „Netiesa, kad *A*, arba netiesa, kad *B*“ $=(\neg A)\vee(\neg B)$ sutampa su $A\uparrow B$ prasme. Todėl $a\uparrow b=(\neg a)\vee(\neg b)=\neg(a\cdot b)=a\cdot b\oplus 1.$ Paskutinė išraiška ir yra ANF.

c) Kadangi visada $a \uparrow a = a \cdot a \oplus 1 = a \oplus 1 = \neg a$ ir $\neg(a \uparrow b) = (a \uparrow b) \oplus 1 = a \cdot b \oplus 1 \oplus 1 = a \wedge b$, o visas Būlio funkcijas galima išreikšti per operacijas $\wedge$ ir $\neg$, tai visas Būlio funkcijas galima išreikšti per Šeferio operaciją, ir sistema $\uparrow$ yra pilnoji.

8. Ant pirmųjų durų užrašytas teiginys $C = A \leftrightarrow (A \vee B)$, o ant antrųjų – $D = ((\neg C) \vee (A \leftrightarrow B)) \rightarrow (\neg B)$. Tada paryškintas teiginys yra „Arba C, arba D“

$$= C \oplus D = (A \leftrightarrow (A \vee B)) \oplus (((\neg(A \leftrightarrow (A \vee B))) \vee (A \leftrightarrow B)) \rightarrow (\neg B)).$$

Atitinkama Būlio funkcija

$$f(a, b) = (a \leftrightarrow (a \vee b)) \oplus (((\neg(a \leftrightarrow (a \vee b))) \vee (a \leftrightarrow b)) \rightarrow (\neg b))$$

lygi 0, kai $(a, b) = (0, 0)$, $(0, 1)$ arba $(1, 0)$, bet $f(1, 1) = 1$. Vadinasi, $a = b = 1$, t. y. abiejuose kambariuose yra po liūtą ir nė vieno iš jų geriau neatidaryti.

Ats.: abiejuose kambariuose yra liūtai.

9. Pažymėkime teiginius $A =$ „Adomas sudaužė vazą“, $D =$ „Domas sudaužė vazą“, $R =$ „Rimas sudaužė vazą“. Kadangi tiesą pasakė lyginis skaičius berniukų, tai jų keturių teiginių loginių reikšmių suma lyginė, t. y. sujungus jas griežtomis disjunkcijomis, turi išeiti reikšmė 0. Tų 4 teiginių reikšmės iš eilės yra $u = d \oplus r$,

$$v = (\neg d) \cdot (\neg r) = (d \oplus 1) \cdot (r \oplus 1) = d \cdot r \oplus d \oplus r \oplus 1,$$

$$\begin{aligned} w = (\neg u) \rightarrow a &= (d \oplus r \oplus 1) \rightarrow a \\ &= (d \oplus r \oplus 1) \cdot a \oplus (d \oplus r \oplus 1) \oplus 1 \\ &= d \cdot a \oplus r \cdot a \oplus a \oplus d \oplus r, \end{aligned}$$

ir

$$x = a \leftrightarrow \big(a \cdot (\neg d)\big) = a \oplus \big(a \cdot (d \oplus 1)\big) \oplus 1 = a \oplus a \cdot d \oplus a \oplus 1 = a \cdot d \oplus 1$$

. Todėl

$$
\begin{aligned}
0 = u \oplus v \oplus w \oplus x \\
&= d \oplus r \oplus d \cdot r \oplus d \oplus r \oplus 1 \oplus d \cdot a \oplus r \cdot a \\
&\oplus a \oplus d \oplus r \oplus a \cdot d \oplus 1 \\
&= d \cdot r \oplus r \cdot a \oplus a \oplus d \oplus r \\
&= r \cdot (a \oplus d \oplus 1) \oplus a \oplus d \oplus 1 \oplus 1 \\
&= (r \oplus 1) \cdot (a \oplus d \oplus 1) \oplus 1 \\
&= \neg\big((\neg r) \cdot (a \leftrightarrow d)\big).
\end{aligned}
$$

Tada $(\neg r) \cdot (a \leftrightarrow d) = 1$. Vadinasi, $\neg r = a \leftrightarrow d = 1$ ir $r = 0$. Be to, arba $a = d = 0$, arba $a = d = 1$. Pirmuoju atveju išeitų, kad nė vienas iš brolių nesudaužė vazos, bet tai prieštarauja sąlygai. Todėl $a = d = 1$. Gauname, kad vazą sudaužė Adomas ir Domas, bet ne Rimas.

Ats.: vazą sudaužė Adomas ir Domas.

10. a) Kadangi visada

$\big(a \wedge (a \to b)\big) \to b = \big(a \cdot (a \cdot b \oplus a \oplus 1)\big) \to b = (a \cdot a \cdot b \oplus a \cdot a \oplus a) \to b = (a \cdot b \oplus a \oplus a) \to b = (a \cdot b) \to b = a \cdot b \cdot b \oplus a \cdot b \oplus 1 = a \cdot b \oplus a \cdot b \oplus 1 = 1$

, tai teiginys U tapačiai teisingas. Sudėtingesniam teiginiui V verčiau tiesiog patikrinkime, kad $f(c,d,e) = 1$, kai $f(c,d,e) = \big((c \to d) \wedge (d \to e)\big) \to (c \to e)$ ir $(c,d,e) = (0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$.

b) Buitinė kalba dažnai būna netiksli. Pavyzdžiui, joje praleidžiami žodžiai, kurie turimi omenyje ir kuriuos pašnekovas gali numanyti iš konteksto. Pirmosios išvados atveju 1) ir 2) galima perrašyti taip: 1) K neklysta sakydamas savo antrąjį pokalbio sakinį; 2) jei K neklysta dėl to, kad sniego žmogus egzistuoja, tai jis egzistuoja. Taigi formulėje $\big(A \wedge (A \to B)\big) \to B$ dvi raidės A žymi skirtingus teiginius. Teisingas pažymėjimas būtų $U = \big(A_1 \wedge (A_2 \to B)\big) \to B$, o toks teiginys jau nėra tapačiai

teisingas. Tad K išvada iš tikrųjų nėra logiškai pagrįsta. Analogiškai reiktų žymėti

$$V = \big((C \to D) \wedge (D \to E_1)\big) \to (C \to E_2),$$

kur teiginių E_1 = „K mano teisingai, laikydamas L žmogumi“ ir E_2 = „K mano teisingai, laikydamas L sniego žmogumi“ prasmė nėra tokia pati, nors jie abu sutrumpinami iki žodžių junginio „K mano teisingai“.

SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. $$dy = d\left(\sqrt{1+x^2}\right) = \left(\sqrt{1+x^2}\right)' \cdot dx = \frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1+x^2\right)' dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2xdx = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ats.: $\dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. $$\int (x\sqrt{x} - \frac{1}{x^2})\,dx = \int (x^{\frac{3}{2}} - x^{-2})dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{1}{x} + C.$$

Ats.: $\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x} + C$.

3. Pažymėkime $t = 2 - 3x$. Tuomet

$$dt = d(2-3x) = -3dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{3}dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{2-3x}dx = -\frac{1}{3}\int \sqrt{t}dt = -\frac{1}{3} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9}t\sqrt{t} + C =$$

$$=-\frac{2}{9}(2-3x)\sqrt{2-3x}+C.$$

Ats.: $-\frac{2}{9}(2-3x)\sqrt{2-3x}+C$.

5. Pertvarkykime lygtį išreikšdami y':

$x^2y'+x+1=0 \Rightarrow y'=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$. Integruodami gauname, kad $y=-\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x^2} \Rightarrow -\ln|x|+\frac{1}{x}+C$. Vadinasi, diferencialinės lygtie bendrasis sprendinys yra $y=-\ln|x|+\frac{1}{x}+C$. Iš bendrojo sprendinio, įrašę $x=1$, $y=2$, apskaičiuojame $C=1$. Taigi atskirasis sprendinys, tenkinantį sąlygą $y(1)=2$, yra $y=-\ln|x|+\frac{1}{x}+1$.

Ats.: $y=-\ln|x|+\frac{1}{x}+C$, $y=-\ln|x|+\frac{1}{x}+1$.

6. Pertvarkykime lygtį išreikšdami y'':

$\sqrt{x}\cdot y''-\sqrt{2x^2-x}=0 \Rightarrow y''=\sqrt{2x-1}$. Du kartus suintegravę funkciją $f(x)=\sqrt{2x-1}$, gausime duotosios diferencialinės lygties bendrąjį sprendinį. Po pirmojo integravimo turėsime:

$$y'=\int\sqrt{2x-1}\,dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C_1=\frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}+C_1$$

(integruojant pritaikytas kintamojo keitimas $t=2x-1$). Suintegravę dar kartą gausime:

$$y=\frac{1}{3}\int((2x-1)^{\frac{3}{2}}+C_1)\,dx=\frac{1}{3}\int(2x-1)^{\frac{3}{2}}dx+\frac{C_1}{3}x+C_2=$$

$$=\frac{1}{15}(2x-1)^{\frac{5}{2}}+C_1x+C_2.$$

Čia C_1 ir C_2 yra laisvosios konstantos. Atkreipkime dėmesį į „laisvą“ elgesį su laisvąja konstanta $\frac{C_1}{3}$ –vietoje jos įrašėme tiesiog C_1.

Ats.: $y=\frac{1}{15}(2x-1)^{\frac{5}{2}}+C_1x+C_2$.

6. Atskirkime kintamuosius, t. y. lygtį padauginkime iš $\frac{dx}{(y+2)(x-2)}$, $y\neq -2, x\neq 2$. Gauname lygtį $\frac{dy}{y+2}=\frac{dx}{x-2}$ su atskirtaisiais kintamaisiais, kurią suintegravę turėsime:

$$\int\frac{dy}{y+2}=\int\frac{dx}{x-2}+C\Rightarrow \ln|x-2|+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|y+2|=e^{C_1}\cdot|x-2|\Rightarrow y+2=\pm e^{C_1}(x-2).$$

Pažymėkime $C=\pm e^{C_1}$. Patikrinę, kad pastovioji funkcija $y=-2$ tenkina duotąją diferencialinę lygtį $(x-2)y'=y+2$, laikykime, kad konstanta C gali įgyti ir nulinę reikšmę. Taip pat dabar galime atsisakyti ir reikalavimo $x\neq 2$. Tuomet:

$$y+2=\pm e^{C_1}(x-2)\Rightarrow y+2=C(x-2)\Rightarrow y=C(x-2)-2.$$

Ats.: $y=C(x-2)-2$.

7. Pertvarkykime lygtį: $x+3y^2y'=1\Rightarrow 3y^2y'=1-x$. Padauginę gautąją lygtį iš dx, turėsime lygtį su atskirtaisiais kintamaisiais, kurią integruodami gauname:

$$3y^2dy=(1-x)dx\Rightarrow 3\int y^2dy=\int(1-x)dx+C\Rightarrow y^3=-\frac{(1-x)^2}{2}+C\Rightarrow$$

$$y^3=x-\frac{x^2}{2}+C-\frac{1}{2}\Rightarrow y^3=x-\frac{x^2}{2}+C\Rightarrow y=\sqrt[3]{x-\frac{x^2}{2}+C}.$$

Atkreipiame dėmesį, kad vietoje laisvosios konstantos $C-\frac{1}{2}$ parašėme tiesiog laisvąją konstantą C. Toliau į gautąjį bendrąjį sprendinį įrašę $x=1$, $y=1$ ir apskaičiavę $C=\frac{1}{2}$, gauname duotosios lygties atskirąjį sprendinį $y=\sqrt[3]{x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}}$, kuris tenkina sąlygą $y(1)=1$.

Ats.: $y=\sqrt[3]{x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}}$.

8. Pirmiau išspręskime atitinkamą tiesinę homogeninę diferencialinę lygtį $y'+y=0$. Tai lygtis su atskiriamaisiais kintamaisiais – kintamuosius atskirsime padauginę lygtį iš daugiklio $\frac{dx}{y}$, $y\neq 0$.

Gauname: $\frac{dy}{y}=-dx \Rightarrow \ln|y|=-x+C_1 \Rightarrow y=Ce^{-x}$, $C=\pm e^{C_1}$; C – laisvoji konstanta (su galima nuline reikšme).

Dabar konstantos varijavimo metodu rasime duotosios nehomogeninės lygties $y'+y=e^{-x}$ bendrąjį sprendinį. Tegu $C=C(x)$. Ieškosime tokios funkcijos $C=C(x)$, su kuria $y=C(x)e^{-x}$ tenkintų duotąją nehomogeninę lygtį:

$$(C(x)e^{-x})'+C(x)e^{-x}=e^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(x)e^{-x}-C(x)e^{-x}+C(x)e^{-x}=e^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(x)=1 \Rightarrow C(x)=\int dx+A \Rightarrow C(x)=x+A$$

Vadinasi, duotosios nehomogeninės lygties bendrasis sprendinys yra $y=(x+A)e^{-x}$, A – laisvoji konstanta.

Ats.: $y=(x+A)e^{-x}$, A – laisvoji konstanta.

9. Sprendžiame atitinkamą homogeninę lygtį:

$$y' - \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow y' - \frac{y}{x} = 0 \,|\cdot \frac{dx}{y} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + C_1 \Rightarrow y = Cx,$$

C – laisvoji konstanta.

Tegu $C = C(x)$. Ieškosime tokios funkcijos $C = C(x)$, su kuria $y = C(x)\cdot x$ tenkintų duotąją nehomogeninę lygtį:

$$(C(x)x)' - \frac{C(x)x}{x} = x^2 \Rightarrow x + C(x) - C(x) = x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(x) = x \Rightarrow C(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + A;$$

A – laisvoji konstanta. Tuomet nehomogeninės lygties bendrasis sprendinys yra $y = \left(\frac{x^2}{2} + A\right)x = \frac{x^3}{2} + Ax$. Atskirajam sprendiniui rasti čia įrašykime $x = -1$, $y = 0$. Gauname: $0 = -\frac{1}{2} - A \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$. Taigi ieškomas atskirasis sprendinys yra $y = \frac{x^3}{2} - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(x^3 - x)$.

Ats.: $y = \frac{1}{2}(x^3 - x)$.

10. Sprendžiame tiesinę homogeninę lygtį (kai $x \neq 0$, $y \neq 0$):

$$x^2 y' - 2y = 0 \,|\cdot \frac{dx}{x^2 y} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x^2} + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -\frac{2}{x} + C_1 \Rightarrow y = Ce^{-\frac{2}{x}},$$

C – laisvoji konstanta. Tarkime, $C = C(x)$. Funkciją $y = C(x)e^{-\frac{2}{x}}$ įrašome į duotąją nehomogeninę diferencialinę lygtį:

$$x^2\left(C(x)e^{-\frac{2}{x}}\right)' - 2C(x)e^{-\frac{2}{x}} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2\left(C'(x)e^{-\frac{2}{x}} + \frac{2}{x^2}C(x)e^{-\frac{2}{x}}\right) - 2C(x)e^{-\frac{2}{x}} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2C'(x)e^{-\frac{2}{x}} = 1 \Rightarrow C'(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{2}{x}} \Rightarrow C(x) = \int \frac{1}{x^2}e^{\frac{2}{x}}dx + A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(x) = -\frac{1}{2}\int e^{\frac{2}{x}}d\left(\frac{2}{x}\right) + A \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{2}{x}} + A;$$

A – laisvoji konstanta. Tuomet duotosios nehomogeninės lygties bendrasis sprendinys toks:

$$y = \left(-\frac{1}{2}e^{\frac{2}{x}} + A\right)e^{-\frac{2}{x}} = -\frac{1}{2} + Ae^{-\frac{2}{x}}.$$

Ieškodami atskirojo sprendinio įrašykime $x = 2$, $y = 0$. Gauname:

$$0 = -\frac{1}{2} + A\,e^{-1} \Rightarrow A = \frac{e}{2}.$$

Tuomet atskirasis sprendinys yra

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{e}{2}\cdot e^{-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}\left(e^{1-\frac{2}{x}} - 1\right).$$

Ats.: $y = -\frac{1}{2} + Ae^{-\frac{2}{x}}$, A – laisvoji konstanta;

$y = \frac{1}{2}\left(e^{1-\frac{2}{x}} - 1\right)$.

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Pirmą nelygybę padauginę iš 12, o antrą – iš 60, gausime ekvivalenčią nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} 3(3x-2)+30>4(2x-1)-2(3x+2), \\ 20(2x-5)-30(3x-1)<12(3-x)-15(2x-1). \end{cases}$$

Toliau:

$$\begin{cases} 9x-6+30>8x-4-6x-4, \\ 40x-100-90x+30<36-12x-30x+15; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x+24>2x-8, \\ -50x-70<-42x+51; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x>-32, \\ -8x<121 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{32}{7}, \\ x>-\dfrac{121}{8} \end{cases} \Rightarrow x>-\frac{32}{7}=-4\frac{4}{7}.$$

Uždavinio sąlygą tenkinantis skaičius yra –4.

Ats.: –4.

2. Natūralu nagrinėti du atvejus:

1) $x^2-2>0$ ir 2) $x^2-2<0$.

Pirmu atveju gausime

$$\begin{cases} x^2-2>0, \\ x+5>x^2-2, \\ 3-9x>2(x^2-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-\sqrt{2} \text{ arba } x>\sqrt{2}, \\ x^2-x-7<0, \\ 2x^2+9x-7<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}; \\ x<\dfrac{1-\sqrt{29}}{2} \text{ arba } x>1\dfrac{-9+\sqrt{29}}{2}; \\ x<\dfrac{-9-\sqrt{137}}{4} \text{ arba } x>\dfrac{-9+\sqrt{137}}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

Antru atveju gausime:

$$\begin{cases} x^2-2>0, \\ x+5<x^2-2, \\ 3-9x>2(x^2-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}, \\ x^2-x-7>0, \\ 2x^2+9x-7>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}; \\ x<\dfrac{1-\sqrt{29}}{2} \text{ arba } x>1\dfrac{-9+\sqrt{29}}{2}; \\ x<\dfrac{-9-\sqrt{137}}{4} \text{ arba } x>\dfrac{-9+\sqrt{137}}{4} \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$$

Ats.: $\dfrac{1-\sqrt{29}}{2}<x<-\sqrt{2}$.

3. Iš pradžių prie visų sistemą sudarančių reiškinių pridėkime skaičių –4. Gausime ekvi–valenčią nelygybių sistemą

$$\frac{5x-7}{x-5}-4<-\frac{x}{5-x}+\frac{3x}{x^2-25}<0,$$

o iš jos – sistemą

$$\frac{x+13}{x-5}<\frac{x}{x-5}+\frac{3x}{x^2-25}<0.$$

Šią nelygybių sistemą užrašykime įprastu pavidalu

$$\begin{cases} \dfrac{x+13}{x-5}<\dfrac{x}{x-5}+\dfrac{3x}{x^2-25}, \\ \dfrac{x}{x-5}+\dfrac{3x}{x^2-25}<0 \end{cases}$$

ir spręskime taip:

$$\begin{cases} \dfrac{x+13}{x-5}-\dfrac{x}{x-5}-\dfrac{3x}{x^2-25}<0, \\ x\cdot\left(\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{3}{x^2-25}\right)<0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{5(2x+13)}{x^2-25} < 0, \\ \dfrac{x(x+8)}{x^2-25} < 0. \end{cases}$$

Jei $x^2-25<0$, t. y. $x \in (-5; 5)$, tai

$$\begin{cases} 2x+13>0, \\ x(x+8)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-6{,}5, \\ x<-8 \text{ arba } x>0 \end{cases} \Rightarrow x>0.$$

Jei $x^2-25>0$, t. y. $x<-5$ arba $x>5$, tai

$$\begin{cases} 2x+13<0, \\ x(x+8)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-6{,}5, \\ -8<x<0 \end{cases} \Rightarrow -8<x<-6{,}5.$$

Taigi pirmu atveju gauname sprendinių intervalą (0; 5), o antru – sprendinių intervalą (–8; –6,5). Šių intervalų sąjunga $(-8; -6{,}5) \cup (0; 5)$ yra nelygybių sistemos sprendinių aibė.

Ats.: $(-8; -6{,}5) \cup (0; 5)$.

4. Antra nelygybė ekvivalenti dvigubai nelygybei $-1 \le x+1 \le 1$, o ši – dvigubai nelygybei $-1-1 \le (x+1)-1 \le 1-1$, t. y. nelygybei $-2 \le x \le 0$. Pirma sistemos nelygybė ekvivalenti dvigubai nelygybei $-6 < x^2+5x < 6$. Kadangi $x^2+5x = x(x+5) \le 0$, kai $x \in [-2; 0]$, tai sistemoje šią dvigubą nelygybę galima pakeisti nelygybe $x^2+5x > -6$. Taigi pradinė nelygybių sistema yra ekvivalenti nelygybių sistemai

$$\begin{cases} x^2+5x>-6, \\ -2 \le x \le 0. \end{cases}$$

Spręsdami ją gausime:

$$\begin{cases} x^2+5x+6>0, \\ -2 \le x \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+2)(x+3)>0, \\ -2 \le x \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-3 \text{ arba } x>-2, \\ -2 \le x \le 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \le x \le 0.$$

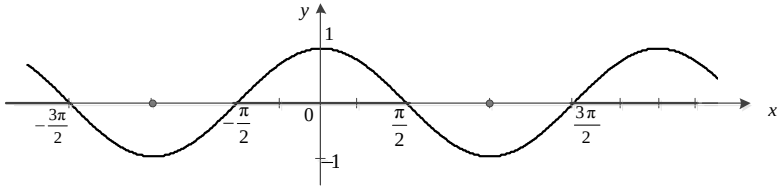
Nelygybių sistemos sprendinių aibė yra intervalas (–2; 0].

Ats.: (–2; 0].

5. Pirma sistemos nelygybė yra ekvivalenti nelygybei

$$0{,}2^{\cos x} \le 0{,}2^{0},$$

o ši – nelygybei $\cos x \ge 0$. Pastarosios nelygybės sprendinių aibę nesunku užrašyti remiantis funkcijos $y = \cos x$ grafiku (žr. pav.)



Ji yra intervalų $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$, sąjunga.

Spręsdami antrą nelygybę gauname:

$$\frac{x-1}{2-x}+\frac{1}{2}>0 \Rightarrow \frac{x}{2(2-x)}>0 \Rightarrow x \in (0;\,2).$$

Abiejų nelygybių sprendinių aibių sankirta (bendroji dalis) yra intervalas $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$. Šis intervalas ir yra nelygybių sistemos sprendinių aibė.

Ats.: $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.

6. Nelygybė

$$9-\left(\frac{4x-22}{x-5}\right)^2 \ge 0$$

yra ekvivalenti nelygybių sistemai

$$\begin{cases} \dfrac{4x-22}{x-5} \le 3, \\ \dfrac{4x-22}{x-5} \ge -3. \end{cases}$$

Atsižvelgę į tai, kad $\frac{4x-22}{x-5}=\frac{4(x-5)-2}{x-5}=4-\frac{2}{x-5}$, gauname ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x-5} \geq 1, \\ \dfrac{2}{x-5} \leq 7. \end{cases}$$

Iš pirmos nelygybės aišku, kad negali būti $x-5<0$. Todėl ši nelygybių sistema ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} x-5>0, \\ 2 \geq x-5, \\ 2 \leq 7(x-5). \end{cases}$$

Iš nelygybių $x>5$, $x \leq 7$ ir $x \geq \dfrac{37}{7}$ gauname, kad funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritis yra uždaras intervalas $\left[\dfrac{37}{7}; 7\right]$.

Ats.: $\left[\dfrac{37}{7}; 7\right]$.

7. Iš nelygybių $4x-7 \geq 0$, $x+5 \geq 0$ ir $5-x \geq 0$ gauname, kad būtinai $x \in [1{,}75; 5]$.

Aišku, kad pradinė nelygybių sistema yra ekvivalenti nelygybių sistemai

$$\begin{cases} 4x-7<x^2, \\ (\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x})^2>16. \end{cases}$$

Spręsdami ją gauname:

$$\begin{cases} x^2-4x+7>0, \\ x+5+2\sqrt{25-x^2}+5-x>16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2+3>0, \\ \sqrt{25-x^2}>3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{25-x^2}>3 \Rightarrow 25-x^2>9 \Rightarrow x^2<16 \Rightarrow -4<x<4.$$

Taigi nelygybių sistemos sprendinių aibė yra intervalas [1,75; 4).

Ats.: [1,75; 4).

8. Kadangi $x^2-16x+64=(x-8)^2$, tai pirmos nelygybės sprendinių aibė yra $(-\infty;8)\bigcup(8;+\infty)$

Iš nelygybių $x+7>0$ ir $x-5>0$ gauname, kad turi būti $x>5$.

Spręsdami antrą nelygybę gauname:

$$\frac{1}{2}\lg(x+7)>\frac{1}{2}\lg(x-5)-2\lg 2,$$

$$\lg(x+7)>\lg\frac{x-5}{16},$$

$$x+7>\frac{x-5}{16},$$

$$15x>-117,$$

$$x>-7{,}8.$$

Kadangi $x>5$ ir $x\neq 8$, tai $x\in(5;8)\bigcup(8;+\infty)$.

Ats.: $(5;8)\bigcup(8;+\infty)$.

9. Kadangi

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{-x}=\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^x=\left(\frac{3}{4}\right)^x,\ \frac{27}{64}=\left(\frac{3}{4}\right)^3 \text{ ir } 8\sqrt{2}=2^{3,5},$$

tai nelygybių sistema yra ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases}\left(\frac{3}{4}\right)^x>\left(\frac{3}{4}\right)^3,\cdot\\ 2^{x^2-6x-3,5}<2^{3,5}.\end{cases}$$

Spręsdami šią sistemą gauname:

$$\begin{cases}x<3,\cdot\\ x^2-6x-3{,}5<3{,}5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<3,\cdot\\ x^2-6x-7<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<3,\cdot\\ -1<x<7\end{cases}\Rightarrow -1<x<3.$$

Taigi nelygybių sistemos sprendinių aibė yra intervalas (–1; 3).

Ats.: (–1; 3).

10. Iš pradžių išspręskime pirmą nelygybę. Gausime:

$$\lg 2^{x-1} + \lg(2^{x+1}+1) < \lg(7\cdot 2^x + 12),$$

$$\lg\ 2^{x-1}\cdot(2^{x+1}+1)\ < \lg(7\cdot 2^x + 12),$$

$$2^{x-1}\cdot(2^{x+1}+1) < 7\cdot 2^x + 12,$$

$$2^{2x} + 2^{x-1} - 7\cdot 2^x - 12 < 0,$$

$$(2^x)^2 - 6{,}5\cdot 2^x - 12 < 0.$$

Pažymėję $t = 2^x$, gausime kvadratinę nelygybę $t^2 - 6{,}5t - 12 < 0.$

Kvadratinio trinario $t^2 - 6{,}5t - 12$ diskriminantas yra $D = 90{,}25 = (9{,}5)^2$, todėl jo šaknys yra $t_1 = \dfrac{6{,}5-9{,}5}{2} = -1{,}5$ ir $t_2 = \dfrac{6{,}5+9{,}5}{2} = 8.$

Vadinasi, nelygybės $t^2 - 6{,}5t - 12 < 0$ sprendinių aibė yra intervalas (–1,5; 8).

Kadangi $t = 2^x > 0$, tai (1) nelygybės sprendiniams rasti tereikia išspręsti nelygybę $2^x < 8$. Aišku, kad $x < 3$.

Taigi pirmos nelygybės sprendinių aibė yra begalinis intervalas $(-\infty; 3)$.

Nagrinėdami antrą sistemos nelygybę iš karto atkreipkime dėmesį į tai, kad turi būti $x > 0$ ir $x \neq 1$.

Kadangi $2 = 2\cdot 1 = 2\cdot \log_x x = \log_x x^2$, tai antra nelygybė ekvivalenti nelygybei

$$\log_x(x+2) > \log_x x^2. \qquad (2)$$

Spręsdami ją nagrinėkime du atvejus: 1) $0 < x < 1$ ir 2) $x > 1$.

Pirmu atveju gausime:

$x + 2 < x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow x < -1$ arba $x > 2$.

Antru atveju gausime:

$x + 2 > x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow x < -1 < x < 2.$

Suderinę gautus atsakymus su sąlygomis $0 < x < 1$ (pirmu atveju) ir $x > 1$ (antru atveju) gausime, kad (2) nelygybės sprendinių aibė yra intervalas (1; 2). Šis intervalas yra intervalo $(-\infty; 3)$ dalis (poaibis), todėl yra nelygybių sistemos sprendinių aibė.

Ats.: (1; 2).

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

1	2	3	4
18 arklių ir 12 avių	$\frac{60}{13}$	$y = \frac{1}{x^2 - x + 1}$	1 ir 2