LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Jaunajam matematikui

21

2018–2020 metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Užduotys

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla (LJMM) **skelbia klausytojų priėmimą 2018–2020 mokslo metams.**

Mokykla yra dvimetė. Į ją priimami vienuoliktos klasės, o rekomendavus matematikos mokytojui, ir žemesnių klasių mokiniai, išsprendę stojamąją užduotį. Iš viso numatoma išnagrinėti aštuonias temas: keturias šiais mokslo metais, o likusias keturias – kitais. Mokslą planuojame užbaigti 2020 metų balandžio mėnesį baigiamuoju uždavinių sprendimo konkursu Vilniaus universitete. Sėkmingai įvykdę visą programą, mokiniai gauna Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos baigimo pažymėjimus.

Mokestis už visą mokymosi LJMM laiką yra 10 Eurų (jį moka tik priimtieji į LJMM). Metodinė medžiaga ir užduotys skelbiamos LJMM interneto svetainės http://uosis.mif.vu.lt/ljmm/ puslapiuose.

Stojamosios užduoties sprendimus prašome rašyti į ploną sąsiuvinį. Ant **sąsiuvinio viršelio** ir ant **atskiro lapelio** spausdintomis raidėmis užrašykite savo **vardą, pavardę**, **mokyklą ir klasę**, kurioje mokotės, bei **namų adresą**.

Kartu su sprendimais **prašome atsiųsti tuščią voką su užrašytu savo adresu ir priklijuotu pašto ženklu**. Tada mes pranešime, ar Jūs įstojote į LJMM, o įstojusius informuosime apie mokesčio mokėjimo tvarką ir patį mokymąsi. Įstojusieji tame pačiame laiške ras suteiktą informacinės sistemos „Mano LJMM“ vartotojo vardą ir slaptažodį, su kuriais galės matyti kiekvienos savo užduoties sprendimų įvertinimus.

Stojamosios užduoties sprendimus išsiųskite **iki 2018 m. spalio 20 dienos** šiuo adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematikos metodikos centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius.

Mokinių atsiųsti darbai negrąžinami.

LJMM 2018–2020 mokslo metų programa: procentai tekstiniuose uždaviniuose; daugianarių dalyba su liekana; plokščiųjų figūrų plotai; trigonometrijos uždaviniai; įbrėžtiniai ir apibrėžtiniai daugiakampiai; rodiklinė funkcija ir jos taikymas; progresijos; lošimai, loterijos, laimėjimų tikimybės.

STOJAMOJI UŽDUOTIS

1. Knygynas gavo fizikos ir matematikos vadovėlių. Pardavus 50 % matematikos ir 20 % fizikos vadovėlių, iš viso 390 knygų, matematikos vadovėlių liko 3 kartus daugiau negu fizikos. Kiek matematikos ir kiek fizikos vadovėlių gavo knygynas?

2. Išspręskite lygtį $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12.$

3. Lentoje yra parašyti keli skaičiai. Lygiai du iš jų dalijasi iš 2 ir lygiai trisdešimt trys iš jų dalijasi iš 33. Tegu M yra didžiausias iš jų. Kokia galėtų būti mažiausia M reikšmė?

4. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} x=6\sqrt{x+y}, \\ y=2\sqrt{x+y}. \end{cases}$

5. Raskite lygčių sistemos $\begin{cases} xy+z=2017, \\ x+yz=2018 \end{cases}$ sveikuosius sprendinius.

6. Raskite visas sveikųjų skaičių x ir y poras $(x;\, y)$, kurioms esant galioja lygybė

$$x^3+3x^2y-4y^3=100.$$

7. Sugalvotas teigiamas sveikasis skaičius. Prie jo iš dešinės pusės prirašomas skaitmuo 5 ir iš gauto naujo skaičiaus atimamas sugalvoto skaičiaus kvadratas. Skirtumas padalijamas iš sugalvoto skaičiaus ir gaunamas skaičius, vienetu didesnis už sugalvotą skaičių. Koks skaičius sugalvotas?

8. Kvadrato $ABCD$ kraštinėse AD ir DC pažymėti taškai M ir N (M – kraštinėje AD, N – kraštinėje DC) taip, kad $\angle BMA=\angle NMD=60^\circ$. Raskite kampo MBN didumą.

9. Trapecijos $ABCD$ šoninės kraštinės CD ilgis lygus 10, o šoninės kraštinės AB vidurio taškas nuo tiesės CD nutolęs atstumu, lygiu 6. Raskite trapecijos plotą.

10. Taškas H yra smailiojo trikampio ABC aukštinių susikirtimo taškas, o taškas O – apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo centras. Raskite kampą OAB, jei $\angle AHB=110^\circ$.

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

I tema. PROCENTAI TEKSTINIUOSE UŽDAVINIUOSE
(2018–2020)

Teorinę medžiagą parengė bei pirmąją užduotį sudarė dr. Antanas Apynis ir
Palaimintojo Teofiliaus Matulionio gimnazijos matematikos mokytoja ekspertė Regina Rudalevičienė

1. Paprasčiausi procentų uždaviniai

Procentas suprantamas kaip šimtoji skaičiaus (dydžio reikšmės) dalis. Nesudėtinga skaičiaus procentus ir skaičių iš jo procentų rasti vienu veiksmu: skaičiaus procentus – dauginant iš procentus atitinkančios trupmenos, skaičių iš jo procentų – dalijant iš procentus atitinkančios trupmenos. Pavyzdžiui, ieškant 35 % skaičiaus 40, sprendžiama taip: 35 % atitinka 0,35 skaičiaus 40, todėl 35 % yra 40·0,35=14. Ieškant viso skaičiaus, žinant kelis jo procentus, procentai išreiškiami trupmena, po to kelis procentus atitinkantis skaičius dalijamas iš gautosios trupmenos. Pavyzdžiui, ieškodami skaičiaus, kurio 32 % lygu 15, skaičiuojame taip: 15 : 0,32 = 46,875.

Dviejų skaičių a ir b procentinis santykis $\frac{a}{b}\cdot 100$ % parodo, kurią skaičiaus a dalį (procentais) sudaro skaičius b. Pavyzdžiui, skaičių 3 ir 5 procentinis santykis yra $\frac{3}{5}\cdot 100$ % = 60 %. Tai reiškia, kad skaičius 3 atitinka 60 % skaičiaus 5, arba kad skaičius 3 yra 40 % mažesnis už skaičių 5. **S**kaičių 5 ir 3 procentinis santykis lygus $\frac{5}{3}\cdot 100\ \% = 166\frac{2}{3}$ %. Tai reiškia, kad skaičius 5 atitinka $166\frac{2}{3}$ % skaičiaus 3, arba kad skaičius 5 yra $66\frac{2}{3}$ % didesnis už skaičių 3.

1 pavyzdys. Mokykloje 45 % visų mokinių – berniukai. Mergaičių yra 52 daugiau negu berniukų. Kiek mokykloje mokinių?

Sprendimas. Tarkime, kad mokykloje yra x mokinių. Tada $0{,}45x$ yra berniukų skaičius, o $0{,}55x$ – mergaičių skaičius. Kadangi $0{,}55x – 0{,}45x =52$, tai $x=520$. Mokykloje yra 520 mokinių.

Ats.: 520.

2 pavyzdys. Rašiklis ir sąsiuvinis kainuoja 2,4 euro. Rašiklis 40 % pigesnis už sąsiuvinį. Kiek kainuoja sąsiuvinis ir kiek rašiklis?

Sprendimas. Tarkime, kad sąsiuvinio kaina x eurų. Tuomet rašiklio kaina yra $x – 0{,}4x = 0{,}6x$ eurų. Kadangi rašiklis ir sąsiuvinis kainuoja 2,4 euro, tai $x + 0{,}6x = 2{,}4$, $x = 1{,}5$. Sąsiuvinis kainuoja 1,5 euro, o pieštukas – 0,6·1,5 = 0,9 euro.

Ats.: 1,5 euro ir 0,9 euro.

3 pavyzdys. Rašiklis ir sąsiuvinis kainuoja 2,4 euro. Sąsiuvinis 40 % brangesnis už rašiklį. Kiek kainuoja sąsiuvinis ir kiek rašiklis?

Sprendimas. Tarkime, kad rašiklio kaina x eurų. Tuomet sąsiuvinio kaina yra $x + 0{,}4x = 1{,}4x$ eurų. Kadangi rašiklis ir sąsiuvinis kainuoja 2,4 euro, tai $x + 1{,}4x = 2{,}4$, $x = 1$. Rašiklis kainuoja 1 eurą, o sąsiuvinis – 1,4·1 = 1,4 euro.

Ats.: 1,4 euro ir 1 eurą.

4 pavyzdys. Už 5 kg produkto *A* ir 10 kg produkto *B* sumokėta 14 eurų. Jei produktas *A* būtų 15 % brangesnis, o produktas *B* – 25 % pigesnis, už tą pirkinį reikėtų sumokėti 12,9 euro. Kokia yra kiekvieno produkto 1 kg kaina?

Sprendimas. Tegu x yra produkto *A*, o y – produkto *B* kaina (eurais už 1 kg). Tada 15 % brangesnio produkto *A* kaina būtų $1{,}15x$, o 25 % pigesnio produkto *B* kaina – $0{,}75y$.

Pagal uždavinio sąlygą, $5x + 10y = 14$ ir $5\cdot 1{,}15x + 10\cdot 0{,}75y = 12{,}9$. Taigi kainoms x ir y rasti reikia išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} 5x+10y=14, \\ 5\cdot 1{,}15x+10\cdot 0{,}75y=12{,}9. \end{cases}$$

Ją galima spręsti taip:

$$\begin{cases} y=1{,}4-0{,}5x, \\ 5{,}75x+7{,}5(1{,}4-0{,}5x)=12{,}9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1{,}4-0{,}5x, \\ 2x+10{,}5=12{,}9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1{,}4-0{,}5x, \\ x=1{,}2 \end{cases} \Rightarrow x=1{,}2,\ \ y=0{,}8.$$

Taigi produkto *A* 1 kg kaina yra 1,2 euro, o produkto *B* 1 kg kaina yra 0,8 euro.

Ats.: 1,2 euro, 0,8 euro.

5 pavyzdys. Batai pabrango nuo 80 eurų iki 100 eurų. Keliais procentais pabrango batai?

Sprendimas. Batai pabrango 100 – 80 = 20 eurų. Kadangi kalbama apie pabrangimą, tai kainų skirtumą reikia palyginti su pradine kaina. Procentinis santykis lygus $\frac{20}{80}\cdot 100$ % = 25%. Dydis, kuriuo pabrango batai, atitinka 25 % pradinės kainos. Vadinasi, batai pabrango 25%.

Ats.: 25 %.

6 pavyzdys. Batai atpigo nuo 100 eurų iki 80 eurų. Keliais procentais atpigo batai?

Sprendimas. Batai atpigo 100 – 80 = 20 eurų. Šį skirtumą reikia palyginti su 100 eurų: $\frac{20}{100}\cdot 100$ % = 20 %. Batai atpigo 20 %.

Ats.: 20 %.

2. Mišinių ir lydinių uždaviniai.

Sprendžiant uždavinius apie skysčių mišinius sutinkama tirpalo koncentracijos sąvoka. Tirpalo koncentracija dažniausiai išreiškiama procentais. Norint rasti tirpalo koncentraciją, reikia apskaičiuoti grynos medžiagos masės ir tirpalo masės procentinį santykį (grynos medžiagos masę padalyti iš viso tirpalo masės ir padauginti iš 100 %).

7 pavyzdys. Į stiklinę, kurioje yra 30 g gėlo vandens, įdėta 10 g druskos. Kiek procentų druskos yra tirpale (kokia druskos koncentracija tirpale)?

Sprendimas. $\frac{10}{30+10}\cdot 100$ % = 25 %.

Ats.: 25 %.

8 pavyzdys. 6 kg tirpalo, turinčio 35 % vandens, sumaišyti su 4 kg tirpalo, kuriame yra 30 % vandens. Kiek procentų vandens yra gautame tirpale? Kokia gauto tirpalo koncentracija?

Sprendimas. Pirmame tirpale yra 6·0,35 = 2,1 (kg), o antrame – 4·0,3 = 1,2 (kg) vandens. Gauto tirpalo masė lygi 6 + 4 = 10 (kg), o vandens jame masė – 2,1 + 1,2 = 3,3 (kg). Todėl vandens masė sudaro 33 procentus gauto tirpalo masės. Vadinasi, gauto tirpalo koncentracija yra 67 % , nes grynosios medžiagos gautame tirpale yra 100 – 33 = 67 procentai.

Ats.: 33 %; 67 %.

9 pavyzdys. Inde yra 8 kg 54 % rūgšties tirpalo. Kiek kilogramų vandens į jį reikia įpilti, norint gauti tirpalą, kuriame būtų 45 % rūgšties?

Sprendimas. Tarkime, kad į indą reikia įpilti x kg vandens. Tuomet gauto tirpalo masė lygi (8 + x) kg.

Pradiniame tirpale yra 8 · 0,54 = 4,32 (kg) rūgšties. Įpylus į tirpalą vandens, rūgšties masė nepasikeičia, bet ji jau sudaro 45 % gauto tirpalo masės. Tirpalo, kurio 45 % atitinka 4,32 kg, masė lygi: 4,32 : 0,45 = 9,6 (kg).

Vadinasi, 8 + x = 9,6. Iš čia x = 1,6. Į indą reikia įpilti 1,6 kg vandens.

Ats.: 1,6 kg.

10 pavyzdys. Pirmas lydinys sveria 8 kg ir jame yra 20 % alavo. Jis sulydytas su 12 kg antro lydinio. Gautas trečias lydinys turi 23 % alavo. Kiek procentų alavo buvo antrame lydinyje?

Pirmame lydinyje yra 8 · 0,2 = 1,6 (kg) alavo. Sulydžius abu lydinius gauta 20 kg lydinio, kuriame yra 20 · 0,23 = 4,6 (kg) alavo. Vadinasi, antrame lydinyje yra 4,6 – 1,6 = 3 (kg) alavo. Ši alavo masė sudaro $\frac{3}{12}\cdot 100$ % $= 25$ % antro lydinio masės.

Ats.: 25 %.

11 pavyzdys. Du lydinius sudaro cinkas, varis ir alavas. Pirmame lydinyje yra 40 % alavo, o antrame – 26 % vario. Cinko kiekis procentais abiejuose lydiniuose yra vienodas. Sulydžius 150 kg pirmo lydinio su 250 kg antro lydinio, gautas naujas lydinys, kuriame yra 30 % cinko. Kiek alavo yra naujajame lydinyje?

Sprendimas. Tegu p yra procentinis cinko kiekis pirmame ir antrame lydinyje. Apskaičiuokime alavo kiekį (kilogramais), esantį 150 kg pirmo lydinio ir 250 kg antro lydinio. Gausime

$$150 \cdot 0{,}4 = 60 \text{ ir } 250 - (250 \cdot 0{,}26 + 250 \cdot 0{,}01p).$$

Skaičių p galima rasti iš lygties

$$150 \cdot 0{,}01p + 250 \cdot 0{,}01p = 400 \cdot 0{,}3.$$

Išsprendę gausime, kad p = 30 (procentų).

Dabar jau galima tęsti alavo kiekio skaičiavimą naujajame lydinyje:

$$60 + (250 - (250 \cdot 0{,}26 + 250 \cdot 0{,}3)) = 60 + 110 = 170 \text{ (kg)}.$$

Ats.: 170 kg.

3. Įvairūs uždaviniai.

12 pavyzdys. Šachmatų meistras vienu metu žaidė daug partijų. Per pirmą valandą jis laimėjo 10 % visų partijų ir 8 partijas sužaidė lygiomis. Per kitas dvi valandas jis laimėjo 10 % likusių žaisti partijų, 2 partijas pralaimėjo ir paskutines 7 partijas sužaidė lygiomis. Kelias partijas iš viso per tas 3 valandas sužaidė šachmatų meistras?

Sprendimas. Tegu n yra ieškomas sužaistų partijų skaičius. Tada $0{,}1n+8$ yra per pirmą valandą sužaistų partijų skaičius, o $0{,}1(0{,}9n-8)+2+7=0{,}09n+8{,}2$ – per kitas dvi valandas sužaistų partijų skaičius. Aišku, kad

$$(0{,}1n+8)+(0{,}09n+8{,}2)=n.$$

Iš šios lygties gauname, kad $n = 20$.

Ats.: 20.

13 pavyzdys. Keliais procentais reikia pailginti skritulio spindulį, kad skritulio plotas padidėtų 96 procentais?

Sprendimas. Tegu R yra skritulio spindulio ilgis, o x – ieškomas procentų skaičius. Tada pailginto spindulio ilgis yra $R + R \cdot 0{,}01x = (1 + 0{,}01x)R,$ o skritulio ploto pokytis apskaičiuojamas taip:

$$\pi((1+0{,}01x)R)^2 - \pi R^2 = \pi R^2((1+0{,}01x)^2 - 1) = \pi R^2(0{,}02x + 0{,}0001x^2).$$

Pagal uždavinio sąlygą,

$$\frac{\pi R^2(0{,}02x+0{,}0001x^2)}{\pi R^2} = 0{,}96.$$

Iš čia gauname:

$$0{,}02x + 0{,}0001x^2 = 0{,}96,$$
$$0{,}0001x^2 + 0{,}02x - 0{,}96 = 0,$$
$$x^2 + 200x - 9600 = 0.$$

Ši kvadratinė lygtis turi du sprendinius – skaičius 40 ir –240. Aišku, kad tinka tik 40.

Taigi skritulio spindulį reikia pailginti 40%, kad skritulio plotas padidėtų 96 %.

Ats.: 40 %.

14 pavyzdys. Pirmos gamyklos per parą pagaminamų automobilių skaičius neviršijo 950. Antros gamyklos per parą pagaminamų automobilių skaičius iš pradžių sudarė 95 % pirmos gamyklos per parą pagaminamų automobilių skaičiaus. Įrengus papildomą gamybos liniją antroje gamykloje per parą pagaminamų automobilių skaičius padidėjo 23 procentais pirmoje gamykloje per parą pagaminamų automobilių skaičiaus ir pasidarė didesnis už 1000. Kiek automobilių per parą pagamindavo kiekviena gamykla iki antros gamyklos rekonstrukcijos? Žinoma, kad kiekvienos gamyklos per parą pagaminamų automobilių skaičius yra sveikasis.

Sprendimas. Tarkime, kad x yra pirmoje gamykloje per parą pagaminamų automobilių skaičius. Tada antroje gamykloje iki rekonstrukcijos per parą pagaminamų automobilių skaičius yra $0{,}95x$, o po rekonstrukcijos – $0{,}95x+0{,}23x$ automobilių. Pagal uždavinio sąlygą sudarome nelygybių sistemą

$$\begin{cases} x \le 950, \\ 0{,}95x + 0{,}23x > 1000. \end{cases}$$

Išsprendę ją gauname, kad $847\frac{27}{59} < x \le 950$. Kadangi skaičiai $0{,}95x = \frac{95x}{100}$ ir $0{,}23x = \frac{23x}{100}$ turi būti sveikieji, tai x turi dalytis iš 100. Vadinasi, $x = 900$. Taigi pirma gamykla per parą gamino 900 automobilių, o antra gamykla iki rekonstrukcijos per parą gamino $0{,}95 \cdot 900 = 855$ automobilius.

Ats.: 900 ir 855.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Teigiamų skaičių *A* ir *B* procentinis santykis lygus 80 %. Raskite $A + B$, jei $A \cdot B = 180$.

2. Prekių kainos buvo mažinamos tris kartus atitinkamai 10 %, 20 %, 25 %. Keliais procentais atpigo prekės?

3. Vienoje fermoje karvių 12,5 % mažiau negu kitoje, bet išmilžis iš vienos karvės 8 % didesnis. Kurioje fermoje pieno primelžiama mažiau ir keliais procentais?

4. Iš 5 % riebumo pieno pagaminus varškę, kurios riebumas 15,5 %, lieka 0,5 % riebumo išrūgų. Kiek kg varškės gaunama iš 1000 kg pieno?

5. Pirmame lydinyje vario yra 6 kg, o antrame – 12 kg. Sulydžius juos būtų gaunamas lydinys, turintis 36 % vario. Kiek procentų vario yra pirmame lydinyje ir kiek antrame lydinyje, jei šių procentų santykis yra 1 : 3 ?

6. Dviejuose bankuose metų pabaigoje kiekvienai sąskaitai buvo priskaičiuojamos palūkanos: pirmame banke – 60 % sąskaitoje buvusios sumos, antrame – 40 % sąskaitoje buvusios sumos. Metų pradžioje žmogus dalį turėtų pinigų padėjo į pirmą banką, o likusią dalį – į antrą banką, prieš tai apskaičiavęs, kad po dvejų metų abiejuose bankuose laikomų pinigų kiekis padvigubės. Kurią turėtų pinigų dalį žmogus padėjo į pirmą banką?

7. Dviejų produktų kaina iš pradžių buvo vienoda. Pirmo produkto kaina buvo mažinama du kartus po 15 %, o antro produkto kaina buvo sumažinta x %. Raskite tokią x reikšmę, kad ir po aprašyto kainų sumažinimo abu produktai vėl kainuotų vienodai.

8. Uoste yra dvi krovikų brigados, kraunančios prekes iš laivo. Jei šios brigados dirbtų atskirai, tai prie pirmos brigados sugaišto laiko pridėję antros brigados sugaištą laiką, gautume 12 valandų, o abiejų brigadų darbo trukmės skirtumas sudarytų 45 % laiko, per kurį abi brigados, dirbdamos kartu, iškrautų laivą. Apskaičiuokite, per kiek laiko kiekviena brigada, dirbdama atskirai, iškrautų visą laivą.

9. Stotyje *A* traukinys užtruko 1 h 42 min, todėl gavęs signalą važiavo į punktą *B* tokiu grafiku: kelio atkarpoje, sudarančioje 90 % viso kelio, jis važiavo 20 % didesniu greičiu, o likusioje kelio atkarpoje – 25 % didesniu greičiu negu turėjo važiuoti pagal tvarkaraštį. Į punktą *B* traukinys atvyko laiku. Kiek laiko šis traukinys turi važiuoti tarp *A* ir *B* pagal tvarkaraštį?

10. Stebint dviejų kristalų augimą nustatyta, kad pirmojo kristalo masė per pirmus 3 mėnesius padidėjo tiek pat, kiek antrojo per pirmus 7 mėnesius. Po 12 mėnesių paaiškėjo, kad pirmojo kristalo masė padidėjo 4 %, o antrojo – 5 %. Raskite pirmojo ir antrojo kristalo pradinių masių santykį.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2018 m. gruodžio 20 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematikos metodikos centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: http://uosis.mif.vu.lt/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA

L I E T U V O S   J A U N Ų J Ų   M A T E M A T I K Ų   M O K Y K L A

2 tema. DAUGIANARIŲ DALYBA SU LIEKANA

(2018–2020)

Teorinę medžiagą parengė bei 2 užduotį sudarė Vilniaus universiteto daktaras
Aivaras Novikas

Veiksmai su daugianariais, dalyba kampu

Reiškinys ax^k, kur realusis skaičius $a \neq 0$ ir sveikasis skaičius $k \geq 0$ yra duotos konstantos, o raidė x žymi kintamą skaitinį dydį, vadinamas *vienanariu*. Skaičius k vadinamas vienanario *laipsniu*, o raidė x – vienanario *kintamuoju*. To paties kintamojo x, bet skirtingo laipsnio vienanarių suma $p(x)$ vadinama kintamojo x *daugianariu* (arba polinomu). Leidžiama, kad sumoje būtų tik vienas dėmuo (vienanaris taip pat yra daugianaris) arba nulis dėmenų (tokia „tuščia" suma $p(x)$ formaliai laikoma lygia 0). Jei daugianaris $p(x)$ nenulinis, tai didžiausias iš sudedamų vienanarių laipsnių vadinamas daugianario *laipsniu* ir žymimas $\deg p(x)$. Labiausiai įprasta surašyti dėmenis vienanarių laipsnių mažėjimo tvarka – čia tik tokius daugianarius ir nagrinėsime. Tada n-tojo laipsnio daugianaris (čia n – neneigiamas sveikasis skaičius) turi pavidalą

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \text{ kur } a_n \neq 0$$

ir kur laikoma, kad dėmenys $a_k x^k$, kuriems $a_k = 0$, yra praleidžiami. Tokį nenulinį daugianarį vienareikšmiškai apibūdina jo laipsnis n ir skaičiai a_0, a_1, ..., a_n, vadinami daugianario *koeficientais*. Dėmenys (nenuliniai) a_0, $a_1 x$, ..., $a_n x^n$ vadinami daugianario *nariais*, $a_n x^n$ – *vyriausiuoju nariu*.

Daugianaryje $p(x)$ vietoj x galima imti bet kokį konkretų realųjį skaičių x_0 ir apskaičiuoti gauto skaitinio reiškinio konkrečią reikšmę, žymimą $p(x_0)$. Realaus kintamojo x funkciją $y = p(x)$, kurios kiekviena (realioji) reikšmė $y_0 = p(x_0)$ gaunama tokiu būdu, taip pat įprasta vadinti daugianariu, o pačią reikšmę $p(x_0)$ – daugianario $p(x)$, iš kurio ši funkcija gauta, *reikšme taške* x_0. Jei $p(x_0) = 0$, tai skaičius x_0 vadinamas daugianario $p(x)$ *šaknimi*.

Nesunku atspėti, kaip apibrėžiamos daugianarių (kaip formalių reiškinių) sudėtis, atimtis ir daugyba. Rezultatas yra naujas daugianaris, gaunamas atlikus su dviem pradiniais reiškiniais įprastus prastinimo veiksmus. Pavyzdžiui, jei $p(x) = 2x^2 - 3$ ir $q(x) = -4x^3 + x^2 - x$, tai

$$p(x) + q(x) = -4x^3 + 3x^2 - x - 3, \qquad p(x) - q(x) = 4x^3 + x^2 + x - 3,$$
$$p(x) \cdot q(x) = -8x^5 + 2x^4 + 10x^3 - 3x^2 + 3x.$$

Bendru atveju jei $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ ir $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$, kur $n \geq m$ ir a_n, $b_m \neq 0$, tai

$$p(x) + q(x) = q(x) + p(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0),$$

kur b_{m+1}, b_{m+2}, ..., $b_n = 0$, o dėmenys $(a_k + b_k)x^k$, kuriems $a_k + b_k = 0$, praleidžiami. Taip pat

$$p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x) = a_n b_m x^{n+m} + (a_{n-1} b_m + a_n b_{m-1})x^{n+m-1} + \cdots + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + a_0 b_0.$$

Čia koeficientas prie x^k, kai $k = 0, 1, \ldots, n+m$, yra lygus sumai visų tokių sandaugų $a_i b_j$, kur a_i ir b_j yra $p(x)$ bei $q(x)$ koeficientai ir $i + j = k$. Žinoma, bet kokiam daugianariui $p(x)$ yra teisingos lygybės $p(x) + 0 = 0 + p(x) = p(x)$ ir $0 \cdot p(x) = p(x) \cdot 0 = 0$. Bet kokių daugianarių skirtumą dabar galima apibrėžti per sumą ir sandaugą: $p(x) - q(x) = p(x) + u(x) \cdot q(x)$, kur $u(x) = -1$.

Nesunku suvokti, kad nenuliniams daugianariams $p(x)$ ir $q(x)$ teisinga:

1) egzistuoja $\deg\big(p(x) \cdot q(x)\big) = \deg p(x) + \deg q(x)$;

2) jei $\deg p(x) \neq \deg q(x)$, tai $\deg\big(p(x) \pm q(x)\big)$ egzistuoja ir lygus didesniajam iš skaičių $\deg p(x)$, $\deg q(x)$;

3) jei $\deg p(x) = \deg q(x)$ ir $p(x) \pm q(x) \neq 0$, tai $\deg\big(p(x) \pm q(x)\big)$ neviršija skaičiaus $\deg p(x)$ (vis tiek gali būti jam lygus, bet nebūtinai).

Žinoma, daugianarių natūraliai apibrėžtų tiek sumos, tiek skirtumo, tiek sandaugos reikšmė bet kuriame taške x_0 lygi pradinių dviejų daugianarių atitinkamų reikšmių taške x_0 sumai, skirtumui ar sandaugai, t. y. jei, pavyzdžiui, $a(x) - b(x) = c(x)$ (daugianarių skirtumas), tai $a(2) - b(2) = c(2)$ (skaičių skirtumas).

Apibrėžiant daugianarių dalybą, mums pravers toks teiginys.

Teiginys. Tarkime, yra duoti du daugianariai $a(x)$ ir $b(x) \neq 0$. Tada egzistuoja lygiai viena daugianarių pora $\big(q(x), r(x)\big)$, kuriai $a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$ ir kuriai arba $r(x) = 0$, arba $\deg r(x) < \deg b(x)$.

Įrodymas. Reikia įrodyti du dalykus: kad yra **bent** viena tokia pora $\big(q(x), r(x)\big)$ ir kad tokia pora yra **tik** viena.

Tarkime, kad $b(x) = b_n x^n + \cdots$, kur $n = \deg b(x)$. Apibrėžkime daugianarius $q_0(x) = 0$ ir $r_0(x) = a(x) - b(x) \cdot q_0(x) = a(x)$. Iš eilės bandykime konstruoti daugianarius $q_1(x)$, $q_2(x)$, ... ir $r_1(x) = a(x) - b(x) \cdot q_1(x)$, $r_2(x) = a(x) - b(x) \cdot q_2(x)$, ... Tam su kiekviena gauta pora $\big(q_k(x), r_k(x)\big)$, pradedant nuo $k = 0$, atlikime tokius veiksmus. Jei $r_k(x) = 0$ arba $\deg\big(r_k(x)\big) < n$, tai jau turime tinkamą porą $\big(q(x), r(x)\big) = \big(q_k(x), r_k(x)\big)$, todėl procesą nutraukime. Jei ne, tai $r_k(x) = a_m x^m + \cdots$, kur $a_m \neq 0$ ir $m = \deg r_k(x) \geq n$. Konstruokime tolimesnę porą $\big(q_{k+1}(x), r_{k+1}(x)\big)$, imdami daugianarius

$$q_{k+1}(x) = q_k(x) + \frac{a_m}{b_n}x^{m-n}, \qquad r_{k+1}(x) = a(x) - b(x)\cdot q_{k+1}(x) = r_k(x) - \frac{a_m}{b_n}x^{m-n}\cdot b(x).$$

Tiek $r_k(x)$, tiek $\frac{a_m}{b_n}x^{m-n}\cdot b(x)$ vyriausiasis narys yra tas pats: $a_m x^m = \frac{a_m}{b_n}x^{m-n}\cdot b_n x^n$. (T. y., iš esmės $\frac{a_m}{b_n}x^{m-n}$ yra $r_k(x)$ ir $b(x)$ vyriausiųjų narių santykis.) Todėl skaičiuojant $r_{k+1}(x)$ nariai $a_m x^m$ susiprastina, ir jei $r_{k+1}(x) \neq 0$, tai $\deg r_{k+1}(x) < m = \deg r_k(x)$. Taigi jei, kartojant veiksmus, pora $\big(q(x), r(x)\big) = \big(q_k(x), r_k(x)\big)$ vis netiks, tai didėjant k skaičius $\deg r_k(x)$ vis mažės. Laipsnis baigtinis ir negali mažėti be galo, tad ir procesas be galo nesitęs: su kuriuo nors $k = 0, 1, \ldots$ pagaliau gausime tinkamą porą $\big(q(x), r(x)\big) = \big(q_k(x), r_k(x)\big)$. Vadinasi, bent viena pora $\big(q(x), r(x)\big)$, tenkinanti teiginio sąlygas, egzistuoja.

Tarkime, kad tokia pora nėra vienintelė. Tada yra dvi skirtingos poros $\big(q(x), r(x)\big)$ ir $\big(Q(x), R(x)\big)$, tenkinančios duotas sąlygas. Tada $a(x) = b(x)\cdot q(x) + r(x) = b(x)\cdot Q(x) + R(x)$ ir

$$b(x)\cdot\big(q(x) - Q(x)\big) = R(x) - r(x).$$

Jei $q(x) - Q(x) = 0$, tai $r(x) - R(x) = 0$, $q(x) = Q(x)$ ir $r(x) = R(x)$, t. y. poros nėra skirtingos. Todėl $q(x) - Q(x) \neq 0$ ir yra apibrėžtas laipsnis

$$\deg\big(R(x) - r(x)\big) = \deg b(x) + \deg\big(q(x) - Q(x)\big) \geq \deg b(x).$$

Tačiau taip negali būti, nes daugianarių $R(x)$ ir $r(x)$, kurių kiekvienas yra arba nulinis, arba mažensio už $\deg b(x)$ laipsnio, skirtumas pats bus arba nulinis, arba mažesnio už $\deg b(x)$ laipsnio. Vadinasi, tinkama pora $\big(q(x), r(x)\big)$ yra tik viena.

Įrodyta.

Tokios vienintelės daugianarių poros $\big(q(x), r(x)\big)$ radimas ir yra daugianario $a(x)$ *dalyba su liekana* iš daugianario $b(x)$. Daugianariai $a(x)$, $b(x)$, $q(x)$, $r(x)$ atitinkamai vadinami tos dalybos *daliniu*, *dalikliu*, *dalmeniu*, *liekana*. Ši dalybos samprata analogiška sveikųjų skaičių dalybai su liekana. Anoje dalyboje, kai dalijame a iš b, randame tokį sveikąjį skaičių (dalmenį) q, kad $a \approx b\cdot q$ arba, tiksliau pasakius, vienintelį tokį q, kuriam skaičius $r = a - b\cdot q$ (liekana) yra arba nulis, arba pakankamai mažas teigiamas skaičius – mažesnis už daliklį b. Dalydami $a(x)$ iš $b(x)$, randame tokį vienintelį $q(x)$, kad liekana $r(x) = a(x) - b(x)\cdot q(x)$ būtų pakankamai „maža“, kad ji būtų arba apskritai nulinė, arba pakankamai mažo laipsnio – mažesnio nei daliklio laipsnis $\deg b(x)$.

Analogiškai kaip ir su sveikaisiais skaičiais, jei $r(x) = 0$, tai sakoma, kad $a(x)$ dalijasi iš $b(x)$ *be liekanos* arba tiesiog kad $a(x)$ *dalijasi iš* $b(x)$. Taigi daugianaris $a(x)$ dalijasi iš daugianario $b(x) \neq 0$, jei egzistuoja toks daugianaris $q(x)$, kad $a(x) = b(x)\cdot q(x)$. Tada žymima $q(x) = a(x) : b(x)$ arba $q(x) = a(x)/b(x)$.

Pavyzdžiui, $x^3 + 8 = (x+2)\cdot(x^2 - 2x + 4)$, todėl daugianaris $x^3 + 8$ dalijasi iš daugianario $x + 2$ ir $(x^3 + 8) : (x + 2) = x^2 - 2x + 4$. Tačiau iš daugianario $x + 3$ jis *nesidalija* (tiksliau: nesidalija be liekanos). Kaip tai įrodyti? Jei dalytųsi, tai su kokiu nors daugianariu $q(x)$ būtų teisinga lygybė $x^3 + 8 = (x + 3)\cdot q(x)$. Kiekvienai x reikšmei x_0 turi sutapti kairėje ir dešinėje lygybės pusėse esančių reiškinių reikšmės. Bet kai $x_0 = -3$, tai $x_0^3 + 8 = -19$, o $(x_0 + 3)\cdot q(x_0) = 0$.

Kita vertus, $a(x) = x^3 + 8$ galima padalyti iš $b(x) = x + 3$ su liekana. Tam tinka teiginio įrodymo pirmos dalies idėja, kuri ir parodo universalų būdą bet kuriai daugianarių dalybai atlikti. Imkime $q_0(x) = 0$ ir $r_0(x) = a(x) - b(x)\cdot q_0(x) = a(x) = x^3 + 8$. Ši pora dar netinka, nes $\deg r_0(x) = 3 > 1 = \deg b(x)$. Todėl turime sudaryti porą $q_1(x) = q_0(x) + \frac{a_m}{b_n}x^{m-n}$ ir $r_1(x) = r_0(x) - \frac{a_m}{b_n}x^{m-n}\cdot b(x)$. Vienanaris $\frac{a_m}{b_n}x^{m-n}$ yra ne kas kita, kaip $r_0(x)$ vyriausiojo nario x^3 ir $b(x)$ vyriausiojo nario x santykis x^2. Tada $q_1(x) = x^2$ ir $r_1(x) = x^3 + 8 - x^2(x + 3) = x^3 + 8 - x^3 - 3x^2 = -3x^2 + 8$. Šį veiksmą įprasta užrašyti kaip daugianarių dalybą kampu:

$$\begin{array}{r|l} -\;x^3 + 8 & x + 3 \\ \cline{2-2} x^3 + 3x^2 & x^2 \\ \hline -3x^2 + 8 & \end{array}$$

$r_1(x)$ laipsnis vis dar per didelis, todėl turime imti $r_1(x)$ ir $b(x)$ vyriausiųjų narių santykį $-3x^2 : x = -3x$ ir rasti $q_2(x) = q_1(x) - 3x = x^2 - 3x$ bei $r_2(x) = r_1(x) - (-3x)\cdot b(x) = -3x^2 + 8 - (-3x)\cdot(x + 3) = 9x + 8$. Ši pora vėl netinka, tad imame $r_2(x)$ ir $b(x)$ vyriausiųjų narių santykį $9x : x = 9$. Tada $q_3(x) = q_2(x) + 9$ ir $r_3(x) = r_2(x) - 9b(x)$. Šiuos veiksmus vėlgi užrašykime, kaip dalybą kampu:

$$
\begin{array}{l|l}
\_\ x^3+8 & x+3 \\
\quad x^3+3x^2 & \overline{x^2-3x+9} \\
\hline
\_\ -3x^2+8 & \\
\quad -3x^2-9x & \\
\hline
\quad \_\ 9x+8 & \\
\qquad 9x+27 & \\
\hline
\qquad -19 &
\end{array}
$$

Kadangi $r_3(x) = -19$ ir $\deg r_3(x) = 0 < \deg b(x)$, tai gavome atsakymą: dalmuo yra $q(x) = q_3(x) =$ $= x^2 - 3x + 9$, o liekana lygi $r(x) = r_3(x) = -19$. Pakartokime dalybos kampu veiksmų tvarką: užrašome duotus daugianarius $a(x) = x^3 + 8 = r_0(x)$ ir $b(x) = x + 3$. Pagal jų vyriausiuosius narius randame pirmąjį dalmens narį $x^3 : x = x^2$. Jį rašome po $b(x)$ ir iš jo dauginame $b(x)$. Sandaugą $x^3 + 3x^2$stulpeliu atimame iš $r_0(x)$ ir randame $r_1(x)$. Pagal $r_1(x)$ ir $b(x)$ vyriausius narius nustatome antrąjį $q(x)$ narį $-3x^2 : x = -3x$ ir jį pridedame prie $q_1(x)$, t. y. prirašome prie to, kas parašyta po $b(x)$. Iš jo dauginame $b(x)$ ir sandaugą atimame iš $r_1(x)$, taip gaudami $r_2(x) = 9x + 8$. Tada po $b(x)$ prirašome narį $9x : x = 9$ ir iš $r_2(x)$ atimame $9b(x) =$ $= 9x + 27$. Taip gauname $r_3(x) = -19$ ir sustojame, nes pagaliau gavome $r_k(x)$, kurio laipsnis mažesnis už $b(x)$ laipsnį. Šis paskutinis gautas $r_k(x)$ yra liekana, o $q_k(x)$, parašytas po $b(x)$, yra dalmuo. Gautasis rezultatas reiškia, kad $x^3 + 8 = (x + 3) \cdot (x^2 - 3x + 9) - 19$ arba kad reiškinį $\frac{x^3+8}{x+3}$ galima suprastinti iki $x^2 - 3x + 9 - \frac{19}{x+3}$.

Pamėginkite savarankiškai $a(x) = 6x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 + 1$ iš $b(x) = 3x^2 - 2x + 2$ padalyti su liekana, iš karto naudodami dalybos kampu žymėjimus. Pateikiame galutinį rezultatą, kurį turėtumėte gauti:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrr|l}
\_\ 6x^5 & - & x^4 & + & 2x^3 & - & x^2 & & & + & 1 & 3x^2-2x+2 \\
6x^5 & - & 4x^4 & + & 4x^3 & & & & & & & \overline{2x^3+x^2-1} \\
\hline
& \_ & 3x^4 & - & 2x^3 & - & x^2 & & & + & 1 & \\
& & 3x^4 & - & 2x^3 & + & 2x^2 & & & & & \\
\hline
& & & & \_ & - & 3x^2 & & & + & 1 & \\
& & & & & - & 3x^2 & + & 2x & - & 2 & \\
\hline
& & & & & & & - & 2x & + & 3 &
\end{array}
$$

Čia tarpą tarp $-x^2$ ir $+1$ viršuje palikome, kad stulpeliu atimdami daugianarius visur galėtume atitinkamus koeficientus (kuriuos atimame vieną iš kito) rašyti tiksliai vieną po kitu. Dalybos metu iš eilės randame ir užrašome: $6x^5 : (3x^2) = 2x^3$, $r_1(x) = r_0(x) - 2x^3 \cdot b(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 1$, $3x^4 : (3x^2) = x^2$, $r_2(x) = r_1(x) - x^2 \cdot b(x) = -3x^2 + 1$, $-3x^2 : (3x^2) = -1$ ir $r_3(x) = r_2(x) - (-1) \cdot b(x) = -2x + 3$. Kadangi $\deg r_3(x) = 1 < 2 = \deg b(x)$, tai dalybą nutraukiame: $r_3(x)$ yra liekana, o iš visų trijų rastų ir vienas prie kito pridėtų santykių sudarytas daugianaris $q(x) = 2x^3 + x^2 - 1$ yra dalmuo.

Bendru atveju pastebėkime, kad jei $q(x) = 0$, tai $\deg a(x) = \deg r(x) < \deg b(x)$. Jei $q(x) \neq 0$, tai egzistuoja $\deg\big(b(x) \cdot q(x)\big) \geq \deg b(x) > \deg r(x)$ ir todėl $\deg a(x) = \deg\big(b(x) \cdot q(x) + r(x)\big) =$ $= \deg\big(b(x) \cdot q(x)\big) \geq \deg b(x)$ bei $\deg q(x) = \deg a(x) - \deg b(x)$.

Hornerio schema

Kai turime daliklį $b(x) = x - c$, kur c yra duotas realusis skaičius (t. y. kai $b(x)$ yra pirmo laipsnio daugianaris, kurio vyriausias koeficientas lygus 1), tai dalybą su liekana galima atlikti kitu, gana efektyviu būdu, vadinamu *Hornerio schema*. Tarkime, $a(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, kur $n =$ $= \deg a(x) \geq 1 = \deg b(x)$. Tada egzistuoja $\deg q(x) = n - 1$ ir galime pažymėti $q(x) = q_{n-1} x^{n-1} +$ $+ q_{n-2} x^{n-2} + \cdots + q_1 x + q_0$. Be to, šiuo atveju $r(x) = 0$ arba $\deg r(x) = 0$, t. y. $r(x) = d_0$, kur d_0 yra realusis skaičius. Turime, kad $a(x) = (x - c) \cdot q(x) + d_0$ ir $x \cdot q(x) + d_0 = a(x) + c \cdot q(x)$. Pastarosios lygybės kairėje pusėje turime daugianarį su koeficientais q_{n-1}, q_{n-2}, ..., q_0, d_0, o dešinėje – su koeficientais a_n, $a_{n-1} + c q_{n-1}$, $a_{n-2} + c q_{n-2}$, ..., $a_0 + c q_0$. Daugianariai su tokiais koeficientais lygūs, todėl $q(x)$ koeficientus galima rasti iš eilės vieną po kito pagal formules: $q_{n-1} = a_n$, $q_{n-2} = a_{n-1} + c q_{n-1}$, ir t. t. Vyriausiasis $q(x)$ koeficientas sutampa su vyriausiuoju $a(x)$ koeficientu, o kiekvienas kitas koeficientas randamas, padauginus ankstesnį iš c ir pridėjus sandaugą prie vis tolimesnio $a(x)$ koeficiento. Paskutinis surastas skaičius bus liekana $d_0 = a_0 + c q_0$.

1 pavyzdys. Šiuo būdu padalykime $a(x) = 3x^5 - x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 5x + 2$ iš $x - c = x - 5$. Skaičiai, su kuriais atliekami veiksmai, rašomi į dviejų eilučių lentelę:

	3	-1	3	4	-5	2
5	3	$5 \cdot 3 - 1 = 14$	$5 \cdot 14 + 3 = 73$	$5 \cdot 73 + 4 = 369$	$5 \cdot 369 - 5 = 1840$	$1840 \cdot 5 + 2 = 9202$

Viršutinėje eilutėje iš eilės surašomi $a(x)$ koeficientai, o antroje eilutėje kairėje įrašomas c. Tada antroje eilutėje iš kairės į dešinę rašomi skaičiai q_{n-1}, q_{n-2}, ..., q_0, d_0. Pirmasis iš jų lygus tiesiai virš jo esančiam a_n, o kiekvienas tolimesnis langelis užpildomas, gretimo iš kairės langelio skaičių dauginant iš c ir sandaugą pridedant prie skaičiaus viršuje. Gautoji lentelė rodo, kad $a(x) = (x - 5) \cdot q(x) + d_0$, kur $q(x) = 3x^4 +$

$+14x^3 + 73x^2 + 369x + 1840$ ir $d_0 = 9202$.

Mūsų jau atlikta $x^3 + 8$ dalyba iš $x + 3 = x - (-3)$ atrodytų taip:

	1	0	0	8
-3	1	-3	9	-19

Antroje eilutėje mintinai atlikti iš eilės tokie veiksmai: $(-3) \cdot 1 + 0 = -3$, $(-3) \cdot (-3) + 0 = 9$, $(-3) \cdot 1 + {}$ $+0 = -3$, $9 \cdot (-3) + 8 = -19$. Į $x^3 + 8$ du koeficientus, lygius 0, atsižvelgti buvo būtina.

2 pavyzdys. Nustatykime didžiausią natūralųjį n, kuriam $a(x) = x^6 + 15x^5 + 57x^4 + 61x^3 - 42x^2 -$ $-84x - 8$ dalijasi iš $(x + 2)^n$. Dalykime iš $x + 2$ pagal Hornerio schemą:

	1	15	57	61	-42	-84	-8
-2	1	13	31	-1	-40	-4	0
-2	1	11	9	-19	-2	0	
-2	1	9	-9	-1	0		
-2	1	7	-23	45			

Čia antroji eilutė reiškia, kad $a(x) = (x + 2) \cdot q_1(x)$, kur $q_1(x) = x^5 + 13x^4 + 31x^3 - x^2 - 40x - 4$. Toliau $q_1(x)$ dalijame iš $x + 2$, o kad būtų trumpiau, rašome rezultatą į tą pačią lentelę (antrąją eilutę laikome viršutine, o trečiąją – apatine). Tada $q_1(x) = (x + 2) \cdot q_2(x)$, kur $q_2(x) = x^4 + 11x^3 + 9x^2 -$ $-19x - 2$, ir $a(x) = (x + 2)^2 \cdot q_2(x)$. Trečioji ir ketvirtoji eilutės rodo $q_2(x)$ dalybą iš $x + 2$, pagal kurią $a(x) = (x + 2)^3 \cdot q_3(x)$, kur $q_3(x) = x^3 + 9x^2 - 9x - 1$. Remiantis dviem paskutinėmis eilutėmis, $q_3(x)$ dalijasi iš $x + 2$ su liekana $45 \neq 0$. Jei $a(x)$ dalytųsi iš $(x + 2)^4$ (ar iš dar didesnio $x + 2$ laipsnio), tai $a(x) =$ $= (x + 2)^4 \cdot q_4(x) = (x + 2)^3 \cdot \big((x + 2) \cdot q_4(x)\big)$ su kokiu nors daugianariu $q_4(x)$. Bet tokiu atveju $(x + 2) \cdot q_4(x) = a(x) : (x + 2)^3 = q_3(x)$, nors $q_3(x)$ iš $x + 2$ nesidalija (be liekanos). Vadinasi, didžiausia galima reikšmė yra $n = 3$.

Bezu teorema

Iš lygybės $a(x) = (x - c) \cdot q(x) + d_0$ išplaukia, kad $a(c) = 0 + d_0 = d_0$.

Išvada. Daugianario $a(x)$ dalybos iš $x - c$ liekana lygi $a(x)$ reikšmei taške c. Jei $a(x) \neq 0$, tai $a(x)$ dalijasi iš $x - c$ (be liekanos) tada ir tik tada, kai skaičius c yra $a(x)$ šaknis.

Ši išvada dar vadinama *Bezu teorema*, prancūzų XVIII a. matematiko Etjeno Bezu garbei. 1 pavyzdyje $a(x) = 3x^5 - x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 5x + 2$ padaliję iš $x - 5$ gavome, kad $a(5) = 9202$. Taip Hornerio schema gali būti naudojama daugianario reikšmei greičiau suskaičiuoti. 2 pavyzdyje gavome $q_3(x) =$ $= a(x) : (x + 2)^3 = x^3 + 9x^2 - 9x - 1$. Iš koeficientų nesunku atspėti, kad $q_3(1) = 0$. Todėl $q_3(x)$ dalijasi iš $x - 1$. Tad turimoje lentelėje paskutinę eilutę galime pakeisti:

-2	1	9	-9	-1	0
1	1	10	1	0	

Vadinasi, $a(x) = (x + 2)^2 \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 10x + 1)$. Tuo remdamiesi galime rasti visas $a(x)$ šaknis, t. y. pilnai išspręsti lygtį $x^6 + 15x^5 + 57x^4 + 61x^3 - 42x^2 - 84x - 8 = 0$. Turime lygtį

$$(x + 2)^2 \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 10x + 1) = 0.$$

Ši lygybė teisinga tada ir tik tada, kai $x + 2 = 0$, $x - 1 = 0$ arba $x^2 + 10x + 1 = 0$. Vadinasi, sprendiniai yra $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ ir $x_{3,4} = -5 \pm 2\sqrt{6}$.

Tarkime, duoti daugianaris $p(x) \neq 0$ ir jo šaknis c. Tada $p(x)$ dalijasi iš $x - c$. Didžiausias natūralusis n, kuriam $p(x)$ dalijasi iš $(x - c)^n$, vadinamas šaknies c *kartotinumu*. 2 pavyzdyje nustatėme, kad -2 yra duotojo daugianario šaknis, kurios kartotinumas yra 3.

Euklido algoritmas

Tarkime, turime nenulinius daugianarius $a(x)$ ir $b(x)$, kuriems $\deg a(x) \geq \deg b(x)$, o mums rūpi nustatyti, iš kokio daugianario jie abu gali vienu metu dalytis. Toks daugianaris vadinamas $a(x)$ ir $b(x)$ *bendru dalikliu*. Padalykime juos vieną iš kito. Iš lygybės $a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$ išplaukia, kad $a(x)$ ir $b(x)$ dalijasi iš kokio nors bendro daugianario tada ir tik tada, kai iš jo dalijasi $b(x)$ ir $r(x)$. Todėl vietoj $a(x)$ ir $b(x)$ galima nagrinėti $b(x)$ ir $r(x)$ – ieškomas atsakymas nuo to nepakinta. Jei $r(x) \neq 0$, tai su naująja daugianarių pora galime vėl atlikti tą patį: padalyti $b(x)$ iš $r(x)$ su liekana ir gauti naują daugianarių porą (tai bus $r(x)$ ir naujoji gauta liekana), kuriai atsakymas vėl yra tas pats. Šio veiksmo kartojimas ir vis naujos daugianarių poros radimas vadinamas *Euklido algoritmu*. Kaskart po daugianarių dalybos dalinį ir daliklį pakeičia daliklis ir liekana. Kadangi liekanos laipsnis mažesnis nei daliklio, tai daugianarių laipsniai visą laiką mažės ir procesas bus baigtinis: anksčiau ar vėliau gausime nulinę liekaną. T. y. gausime porą $R(x) \neq 0$ ir 0. Kadangi 0 dalijasi iš bet kokio nenulinio daugianario, tai $R(x)$ ir 0, o tada ir $a(x)$ bei $b(x)$ bendras daliklis yra bet kuris daugianaris, iš kurio dalijasi $R(x)$. Jei mums rūpėtų $a(x)$ ir $b(x)$ *didžiausias bendras daliklis* (DBD), t. y. toks jų bendras daliklis, kurio **laipsnis maksimalus**, tai matome, kad tas maksimalus laipsnis yra $\deg R(x)$ ir jis pasiekiamas, jei kaip bendrą daliklį imsime patį $R(x)$. Šis DBD radimo būdas vadinamas senovės graikų matematiko Euklido (IV-III a. pr. Kr.) garbei, nes jis aprašė panašų būdą dviejų natūraliųjų skaičių didžiausiam bendram dalikliui rasti.

3 pavyzdys. Taikydami Euklido algoritmą, raskime $a(x) = x^4 + 2x^3 - 3$ ir $b(x) = x^3 + 4x - 5$ didžiausią bendrą daliklį. Dalydami $a(x)$ iš $b(x)$ kampu, randame dalmenį $x + 2$ ir liekaną $r(x) = -4x^2 - -3x + 7$. Tada naujoji pora yra $b(x)$ ir $r(x)$. Ieškomas atsakymas nepasikeis, jei bet kurį poros daugianarį padauginsime iš bet kokio nenulinio skaičiaus. Todėl, kad būtų patogiau skaičiuoti, imkime naują porą $4b(x) = 4x^3 + 16x - 20$ ir $(-1) \cdot r(x) = 4x^2 + 3x - 7$. Padalinę šiuos daugianarius vieną iš kito, gauname dalmenį $x - \frac{3}{4}$ ir liekaną $\frac{101}{4}x - \frac{101}{4}$. Taip pereiname prie poros $4x^2 + 3x - 7$ ir $\frac{101}{4}(x-1)$. Pastarąjį daugianarį vėl patogumo dėlei padauginame iš skaičiaus, gaudami porą $4x^2 + 3x - 7$ ir $x - 1$. Padalinę šiuos daugianarius vieną iš kito, gauname liekaną 0. Pereiname prie poros $x - 1$ ir 0. Vadinasi, $a(x)$ ir $b(x)$ didžiausias bendras daliklis yra $R(x) = x - 1$. (Pastebėkime, kad būtų tikęs ir atsakymas $\frac{101}{4}x - \frac{101}{4}$, jei to daugianario nebūtume pakeitę kitu, t. y. didžiausias bendras daliklis nėra apibrėžtas vienareikšmiškai. Jei tinka $R(x)$, tai tinka ir $2R(x)$, ir $-5R(x)$, ir $\frac{101}{4}R(x)$.)

4 pavyzdys. Įrodykime, kad lygtys $6x^5 + x^4 - x^3 + 3x^2 - 7x + 2 = 0$ ir $2x^5 + x^4 - x^2 - 3x + 2 = 0$ turi bendrą sprendinį, ir raskime jį. Kitaip tariant, turime įrodyti, kad daugianariai $a(x) = 6x^5 + x^4 - x^3 + +3x^2 - 7x + 2$ ir $b(x) = 2x^5 + x^4 - x^2 - 3x + 2$ turi bendrą šaknį c, t. y. turi bendrą daliklį $x - c$. Tam raskime šių daugianarių didžiausią bendrą daliklį. Taikydami Euklido algoritmą, vietoj $a(x)$ ir $b(x)$ pirmiausiai gauname $b(x)$ ir $R_0(x) = r(x) = -2x^4 - x^3 + 6x^2 + 2x - 4$, tada $R_0(x)$ ir $R_1(x) = 6x^3 + +x^2 - 7x + 2$, tada (dėl patogumo) $-3R_0(x)$ ir $R_1(x)$, tada $R_1(x)$ ir $R_2(x) = -\frac{34}{3}x^2 - \frac{17}{3}x + \frac{34}{3}$, tada (dėl patogumo) $R_1(x)$ ir $-\frac{3}{17}R_2(x) = 2x^2 + x - 2$, tada $-\frac{3}{17}R_2(x)$ ir $R_3(x) = 0$. Taigi gavome $a(x)$ ir $b(x)$ didžiausią bendrą daliklį $R(x) = 2x^2 + x - 2$. Jo šaknys yra $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$. Daugianariai $a(x)$ ir $b(x)$ dalijasi iš $R(x)$, kur $R(x_1) = 0$. Tada $a(x_1) = R(x_1) \cdot ... = 0$ ir $b(x_1) = R(x_1) \cdot ... = 0$. Vadinasi, pradinės lygtys turi bendrą sprendinį x_1 (ir, analogiškai, x_2).

Šiame ir kituose pavyzdžiuose praleistus veiksmus rekomenduojame pamėginti atlikti savarankiškai.

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Raskite $a(x) + b(x)$, $a(x) - b(x)$, $a(x) \cdot b(x)$ ir kampu padalykite $a(x)$ iš $b(x)$ (nurodykite dalmenį ir liekaną), kai
$$a(x) = 2x^6 - 3x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 3, \qquad b(x) = x^3 + 2x^2 - x + 4.$$

2. a) Padalykite kampu $a(x)$ iš $b(x)$ ir nurodykite dalmenį bei liekaną, kai
$$a(x) = 3x^8 + 4x^6 - 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x + 1, \qquad b(x) = x^2 + 2x + 2.$$
b) Koks bus a) dalies atsakymas, jei vietoj $b(x)$ imsime $b_1(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1$? Atsakymą gaukite ne dalydami kampu, bet remdamiesi a) dalies rezultatais.

3. Padalykite $a(x)$ iš $b(x)$ ir kampu, ir pagal Hornerio schemą, nurodykite dalmenį bei liekaną, kai
$$a(x) = 2x^3 + x^2 - x + 4, \qquad b(x) = x + 6.$$

4. Duotas daugianaris $a(x) = 2x^{10} + 3x^8 + 4x^7 - 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 1$. Pagal Hornerio schemą: a) padalykite $a(x)$ iš $b(x) = x - 1$, nurodykite dalmenį ir liekaną; b) apskaičiuokite $a(-3)$.

5. Pagal Hornerio schemą sudarydami **vieną** kelių eilučių lentelę, raskite
$$a(x) = 3x^8 + 14x^7 + 27x^6 + 31x^5 + 30x^4 + 28x^3 + 19x^2 + 7x + 1$$
šaknies $c = -1$ kartotinumą.

6. Daugianaris $a(x) = x^9 - x^8 + 2x^7 + x^6 + 3x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ užrašytas pavidalu
$$a(x) = (x-4) \cdot (x+3) \cdot q(x) + a_1 \cdot (x-4) + a_0,$$
kur $q(x)$ yra daugianaris, o a_1 ir a_0 – konstantos.
a) Pagal Hornerio schemą raskite daugianarį $q_1(x) = (x+3) \cdot q(x) + a_1$ (kaip dalmenį) ir a_0 (kaip liekaną). b) Papildydami a) dalies Hornerio schemos lentelę dar viena eilute, raskite $q(x)$ ir a_1.
Nurodymas. a) dalyje reikia dalyti $a(x)$ iš $x - 4$, o b) dalyje – dalyti antrąja lentelės eilute jau pažymėtą $q_1(x)$ iš $x + 3$.

7. Daugianaris $a(x) = 2x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 + x^3 - x^2 + 5x + 2$ užrašytas pavidalu

$$a(x) = a_7(x-2)^7 + a_6(x-2)^6 + \cdots + a_2(x-2)^2 + a_1(x-2) + a_0,$$

t. y. išreikštas ne x, bet $y = x - 2$ laipsniais.

a) Pagal Hornerio schemą padalykite $a(x)$ iš $x - 2$ ir taip raskite $q_1(x) = a_7(x-2)^6 + a_6(x-2)^5 + + \cdots + a_2(x-2) + a_1$ (kaip dalmenį) ir a_0 (kaip liekaną). b) Papildydami a) dalies Hornerio schemos lentelę dar viena eilute (dalydami $q_1(x)$ iš $x - 2$), raskite $q_2(x) = a_7(x-2)^5 + a_6(x-2)^4 + \cdots + +a_3(x-2) + a_2$ ir a_1. c) Tęsdami šį procesą (kiekvieną naują dalmenį dalydami iš $x - 2$ ir prie lentelės prirašydami po eilutę), iš eilės raskite a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7.

Pastaba. Šiuo būdu išsprendžiamas toks uždavinys: randami $a(y + c)$ koeficientai prie y laipsnių, kai duoti $a(x)$ ir c (čia $c = 2$).

8. Išspręskite lygtį $x^6 - 7x^5 + 7x^4 + 42x^3 - 81x^2 - 27x + 81 = 0$ (t. y. raskite jos visus realiuosius sprendinius), jei žinoma, kad daugianaris kairėje lygybės pusėje turi šaknį 3, kurios kartotinumas didesnis už 1.

Nurodymas. Remkitės tuo, kaip radome visas $a(x)$ iš 2 pavyzdžio šaknis (kaip ir tame sprendime, vieną šaknį gali tekti atspėti!).

9. Taikydami Euklido algoritmą, raskite daugianarių

$$a(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1, \qquad b(x) = x^4 - 7x^2 + 1$$

didžiausią bendrą daliklį ir du tokius realiuosius skaičius c, kad $a(c) = b(c) = 0$.

10. Taikydami Euklido algoritmą, įrodykite, kad lygčių sistema

$$\begin{cases} 2x^4 + x^3 - x^2 - 3x - 2 = 0, \\ x^4 - x^3 - 3x^2 - 4x - 2 = 0 \end{cases}$$

neturi realiųjų sprendinių, ir tada raskite visus realiuosius x, tenkinančius lygiai vieną iš dviejų lygčių.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2019 m. vasario 10 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematikos ir informatikos metodikos katedra, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: www.mif.vu.lt/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA

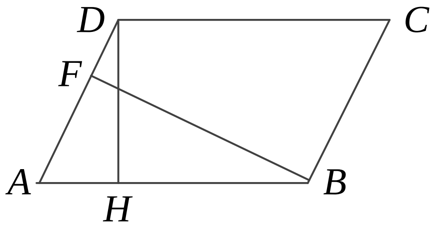
3. PLOKŠČIŲJŲ FIGŪRŲ PLOTAI

(2018–2020)

Teorinę medžiagą parengė ir trečiąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Edmundas Mazėtis

Matematikos pamokose sužinojote, kaip skaičiuojami paprasčiausių geometrinių figūrų plotai. Atlikdami šią užduotį, susipažinsite su kai kuriomis geometrinių figūrų plotų savybėmis, su plotų taikymu uždavinių sprendimui.

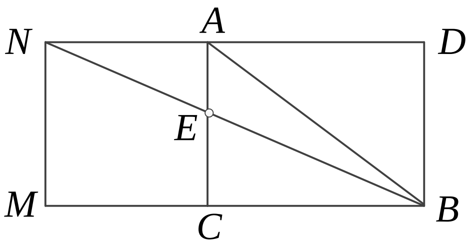
Priminsime, kad lygiagretainio plotas lygus jo kraštinės ir į ją nubrėžtos aukštinės sandaugai: jei atkarpa DH yra iš lygiagretainio $ABCD$ viršūnės D į kraštinę AB (1 pav.) nubrėžta aukštinė, tai šio lygiagretainio plotas $S = AB \cdot DH$. Kadangi iš stačiojo trikampio ADH seka, kad $DH = AD\sin\angle A$, tai lygiagretainio plotas lygus jo gretimų kraštinių ir kampo tarp jų sinuso sandaugai: $S = AB \cdot AD\sin\angle A$. Nubrėžkime lygiagretainio $ABCD$ aukštinę BF iš viršūnės B į kraštinę AD, tuomet $S = AD \cdot BF$. Iš lygybės $AB \cdot DH = AD \cdot BF$ išplaukia, kad $\frac{AB}{AD} = \frac{BF}{DH}$, t. y. lygiagretainio kraštinių ilgiai yra atvirkščiai proporcingi į jas nuleistų aukštinių ilgiams. Kadangi trikampio ABC plotas lygus pusei lygiagretainio $ABCD$ ploto, tai trikampio plotas lygus jo kraštinės ir į ją nubrėžtos trikampio aukštinės sandaugos pusei, o taip pat trikampio plotas lygus dviejų jo kraštinių sandaugos pusei, padaugintai iš tų kraštinių sudaromo kampo sinuso. Atskiru atveju stačiojo trikampio plotas lygus jo statinių sandaugos pusei.



1 pav.

1 pavyzdys. Stačiojo trikampio ABC statinių ilgiai $AC = 3, BC = 4$. Trikampio išorėje nubrėžtas kvadratas $ACMN$. Tiesės AC ir BN kertasi taške E. Rasime trikampio ABE plotą.

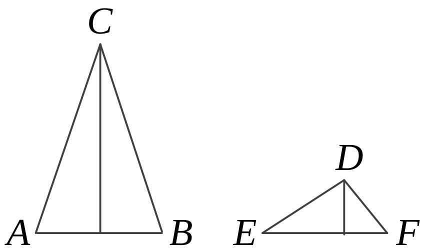
Sprendimas. Sakykime, kad taškas D yra toks, kad keturkampis $ACBD$ yra stačiakampis (2 pav.). Tuomet taškai N, A ir D yra vienoje tiesėje, $AD = 4$, $BD = 3$, $NA = 3$, $ND = NA + AD = 7$. Kadangi tiesės BD ir AE yra lygiagrečios, tai trikampiai NDB ir NAE yra panašieji, todėl $DB\colon AE = ND\colon NA$. Iš čia randame, kad $AE = \frac{9}{7}$. Taigi stačiojo trikampio NAE plotas lygus $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{9}{7} = \frac{27}{14}$, stačiojo trikampio ADB plotas lygus $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$, o stačiojo trikampio NDB plotas lygus $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3 = \frac{21}{2}$. Ieškomojo trikampio ABE plotą rasime iš trikampio NDB ploto atėmę trikampių ADB ir NAE plotus. Taigi ieškomasis plotas lygus $\frac{21}{2} - 6 - \frac{27}{14} = \frac{18}{7}$.



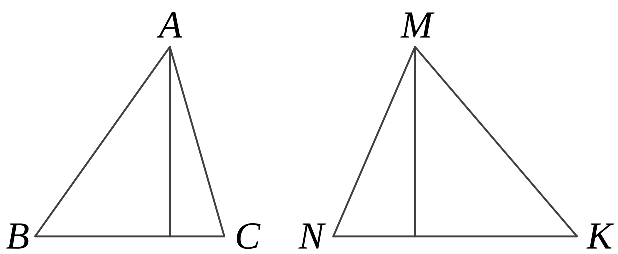
2 pav.

2. Dažnai uždavinių sprendimui padeda šios akivaizdžios trikampių plotų savybės:

1) Jei trikampių ABC ir EFD kraštinės AB ir EF yra lygios (3 pav.), tai šių trikampių plotų santykis lygus iš viršūnių C ir D nubrėžtų aukštinių santykiui.



3 pav.

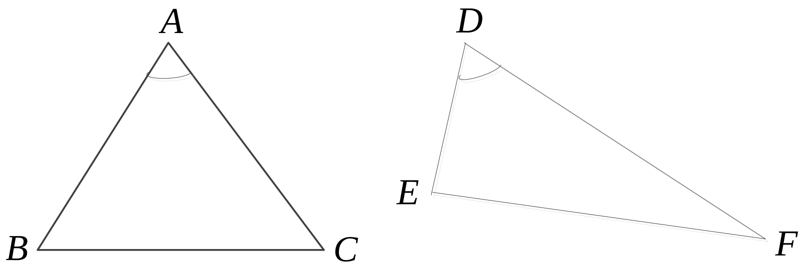


4 pav.

2) Jei trikampių ABC ir MNK aukštinės, nubrėžtos iš viršūnių A ir M yra lygios (4 pav.), tai šių trikampių plotų santykis lygus kraštinių BC ir NK santykiui.

3) Trikampio ABC kraštinėje BC esantis taškas M dalija trikampį į du trikampius ABM ir ACM, kurių plotų santykis lygus atkarpų BM ir CM santykiui. Atskiru atveju trikampio pusiaukraštinė dalija jį į du vienodo ploto trikampius.

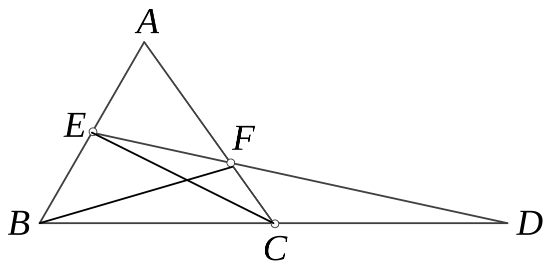
4) Jei trikampių ABC ir DEF kampai A ir D yra lygūs (5 pav.), tai trikampių ABC ir DEF plotų santykis lygus jų kraštinių sandaugų $AB \cdot AC$ ir $DE \cdot DF$ santykiui: $\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{AB \cdot AC}{DE \cdot DF}$.



5 pav.

5) Panašiųjų trikampių plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui. Tai reiškia, kad panašiųjų trikampių plotų santykis lygus bet kurių atitinkamų tų trikampių atkarpų santykio kvadratui.

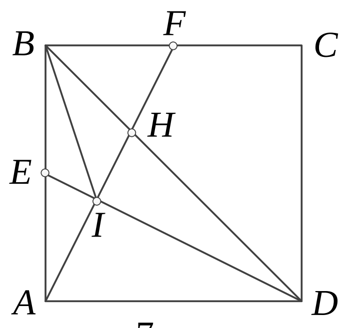
2 pavyzdys. Trikampio ABC plotas lygus 180. Kraštinės BC tęsinyje už taško C atidėta atkarpa $CD = BC,$ taškas E yra atkarpos AB vidurio taškas, tiesė DE kerta kraštinę AC taške F. Rasime keturkampio $BEFC$ plotą.



6 pav.

Sprendimas. Nubrėžkime atkarpas EC, BF ir pažymėkime trikampių AEF ir EFC plotus atitinkamai x ir y (6 pav.). Kadangi taškas E yra kraštinės AB vidurio taškas, tai pagal trikampio plotų 3 savybę trikampių BEC ir AEC plotai yra lygūs, taigi trikampio EBC plotas lygus $x + y$. Kadangi taškas C yra atkarpos BD vidurio taškas, tai trikampių EBC ir CED plotai yra lygūs. Iš čia gauname, kad trikampio CED plotas lygus $x + y$, o tai reiškia, kad trikampio FCD ir lygiapločio su juo trikampio BFC plotas lygus x. Kadangi taškas E yra atkarpos AB vidurio taškas, tai trikampių AEF ir BEF plotai lygūs x. Taigi trikampio ABC plotas lygus $3x,$ todėl $3x = 180, x = 60$. Keturkampio $BEFC$ plotas lygus $2x = 120$.

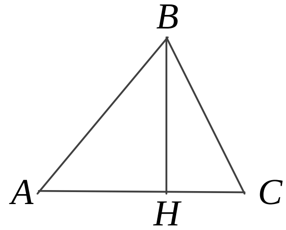
3 pavyzdys. Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgis lygus 2, taškai E ir F yra kraštinių AB ir BC vidurio taškai, atkarpa AF kerta atkarpas ED ir BD taškuose I ir H (7 pav.). Rasime keturkampio $BEIH$ plotą.



7 pav.

Sprendimas. Nubrėžkime atkarpą BI ir pažymėkime trikampių IEB ir IHB plotus atitinkamai x ir y. Kadangi taškas E yra kraštinės AB vidurio taškas, tai pagal 3 savybę trikampių AIE ir IEB plotai lygūs x. Iš trikampių ADH ir FBH panašumo išplaukia, kad $DH: HB = AD: FH = 2$, todėl pagal 3 savybę trikampio DIH plotas lygus $2y$. Dėl to, kad taškas E yra atkarpos AB vidurio taškas, trikampių ADE ir BDE plotai lygūs. Kadangi trikampio EDB plotas lygus $x + y + 2y = x + 3y$, o trikampio AEI plotas lygus x, tai trikampio AID plotas lygus $3y,$ o trikampio ADH plotas lygus $5y$. Kadangi $\angle HBG = \angle ADH$, tai pagal 4 savybę $S_{BHF}: S_{ADH} = (BH: HD) \cdot (BF: DA) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, taigi trikampio BHF plotas lygus $\frac{1}{4} \cdot 5y = \frac{5}{4}y$. Trikampių AED ir ABF plotai lygūs ketvirtadaliui kvadrato ploto, todėl turime tokias lygybes: $x + 3y = 1,\ 2x + y + \frac{5}{4}y = 1$. Iš čia išplaukia, kad $x = \frac{1}{5},\ \ y = \frac{4}{15}$. Todėl ieškomasis plotas $x + y = \frac{7}{15}$.

Sakykime, kad trikampio ABC kraštinių ilgiai $BC = a,\ AC = b,\ AB = c,\ p = \frac{1}{2}(a + b + c) -$ jo pusperimetris, aukštinės AH ilgis lygus h, o

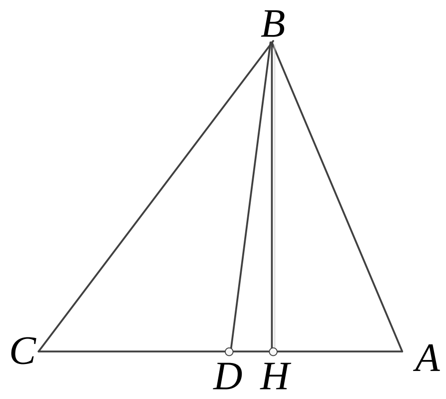


8 pav.

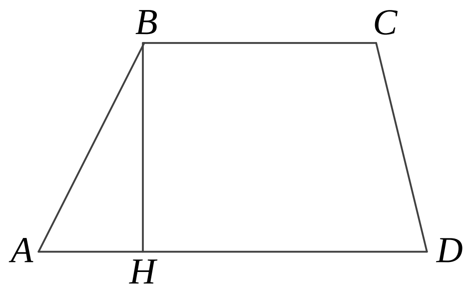
atkarpos BH ilgis yra x (8 pav.). Taikydami Pitagoro teoremą trikampiams ABH ir ACH, turime lygybes $h^2 = c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2$, iš kurių gauname, kad $x = \frac{1}{2a}(a^2 + c^2 - b^2)$, o $h^2 = c^2 - \frac{1}{4a^2}(a^2 + c^2 - b^2)^2 = \frac{1}{4a^2}(4c^2a^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2) = \frac{1}{4a^2}(2ac - a^2 - c^2 + b^2)(2ac + a^2 + c^2 - b^2) = \frac{1}{4a^2}(b^2 - (a-c)^2)((a+c)^2 - b^2)) = \frac{1}{4a^2}(b + a - c)(b - a + c)(a + c - b)(a + c + b) = \frac{4}{a^2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} = \frac{4}{a^2}(p-c)(p-a)(p-b)p$. Iš čia trikampio ABC plotas $S = \frac{1}{2}ah = \; = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.Tai Herono formulė trikampio plotui apskaičiuoti (Heronas Aleksandrietis – I a. graikų matematikas).

4 pavyzdys. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $BC = 15, AC = 14, AB = 13$. Iš viršūnės B nubrėžtos aukštinė ir pusiaukampinė. Rasime tarp jų esančio trikampio plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad atkarpos BH ir BD yra trikampio ABC aukštinė ir pusiaukampinė (9 pav.). Pagal Herono formulę skaičiuojame trikampio ABC plotą: $p = \frac{1}{2}(15 + 14 + 13) = 21$, $p - a = 21 - 15 = 6$, $p - b = 21 - 14 = 7$, $p - c = 21 - 13 = 8$, $S = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 84$. Tuomet aukštinės BH ilgis $BH = \frac{2S}{AC} = 12$, o atkarpos AH ilgis $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = 5$. Kadangi trikampio pusiaukampinė dalija kraštinę į dalis AD ir DC, kurių ilgiai proporcingi kraštinių AB ir CB ilgiams, tai, žymėdami $AD = x$, turime lygybę $x : (14 - x) = 13 : 15$. Išsprendę šią lygtį gauname, kad $x = AD = 6{,}5$. Todėl $DH = AD - AH = 1{,}5$ ir ieškomasis trikampio ADH plotas lygus $\frac{1}{2}BH \cdot HD = 9$.

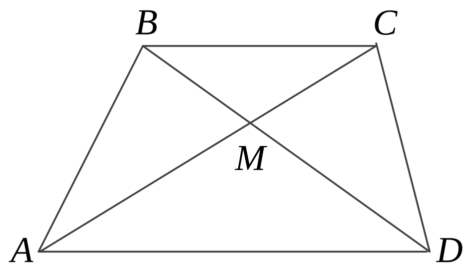

9 pav.

Sakykime, kad keturkampis $ABCD$ yra trapecija, kurios pagrindai yra AD ir BC, o aukštinė – atkarpa BH. (10 pav.). Trapecijos plotas lygus pagrindų sumos ir aukštinės sandaugos pusei: $S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH$. Kadangi trapecijos vidurinė linija, jungianti jos šoninių kraštinių vidurio taškus, yra lygi trapecijos pagrindų sumos pusei, tai trapecijos plotas lygus jos vidurinės linijos ir aukštinės sandaugai.


10 pav.

5 pavyzdys. Jei trapecijos $ABCD$, $AD \parallel BC$ įstrižainės AC ir BD susikerta taške M (11 pav.), tai trikampių ABM ir CDM plotai yra lygūs. Įrodysime tai.

Įrodymas. Iš tikrųjų, trikampių ABD ir ACD plotai yra lygūs, nes jų kraštinė AD yra bendra, o į ją nubrėžtos aukštinės yra lygios. Iš lygybės $S_{ABD} = S_{ACD}$ abiejų pusių atėmę trikampio ADM plotą, gauname lygybę $S_{ABM} = S_{CDM}$.


11 pav.

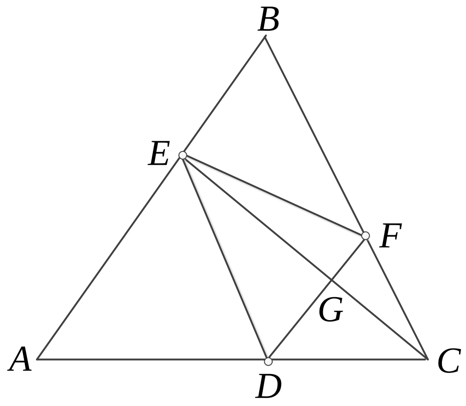
Pastebėkime, kad teisingas ir atvirkštinis teiginys: jei atkarpos AC ir BD susikerta taške M taip, kad trikampių ABM ir CDM plotai yra lygūs, tai tiesės AD ir BC yra lygiagrečios. Tikrai, iš minėtų trikampių plotų lygybės išplaukia, kad $\frac{1}{2}MA \cdot MB sin\angle AMB = \frac{1}{2}MD \cdot MC sin\angle DMC$. Kadangi $\angle AMB = \angle DMC$, tai $MA \cdot MB = MC \cdot MD$, t. y. $\frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC}$. Kadangi $\angle AMD = \angle CMB$ ir $\frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC}$, tai trikampiai AMD ir CMB yra panašieji, todėl $\angle MAD = \angle MCB$. Iš čia ir išplaukia, kad tiesės AD ir BC yra lygiagrečios.

6 pavyzdys. Trikampio ABC plotas lygus 50. Kraštinėse AC, AB, BC atitinkamai pažymėti taškai D, E, F taip, kad $AD = 9, DC = 6$. Tiesės CE ir DF susikerta taške G. Rasime trikampio BCE plotą (12 pav.), jei trikampių CDG ir EFG plotai yra lygūs.

Sprendimas. Kadangi trikampių CDG ir EFG plotai yra lygūs, tai pagal 5 pavyzdžio rezultatą tiesės FC ir ED yra lygiagrečios. Iš čia išplaukia, kad trikampiai AED ir ABC yra panašieji, todėl pagal 5 plotų savybę

$$\frac{S_{AED}}{S_{ABC}} = \frac{AD^2}{AC^2} = \frac{9^2}{(9+6)^2} = \frac{9}{25},$$

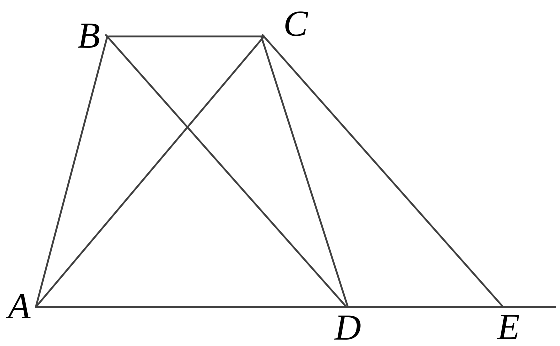
todėl $S_{AED} = \frac{9}{25} \cdot 50 = 18$. Trikampių ECD ir AED aukštinės iš viršūnės E yra lygios, todėl jų plotų santykis lygus kraštinių CD ir DA santykiui (2 savybė). Iš čia gauname, kad $S_{ECD} = \frac{CD}{DA} S_{AED} = 12$. Trikampio ACE plotas lygus trikampių AED ir DEC plotų sumai, t. y. šis plotas lygus 30. Trikampio BCE plotą gauname iš trikampio ABC ploto atėmę trikampio ACE plotą, todėl ieškomasis plotas lygus 20.



12 pav.

7 pavyzdys. Trapecijos pagrindai lygūs 3 ir 6, o įstrižainės – 7 ir 8. Rasime trapecijos plotą.

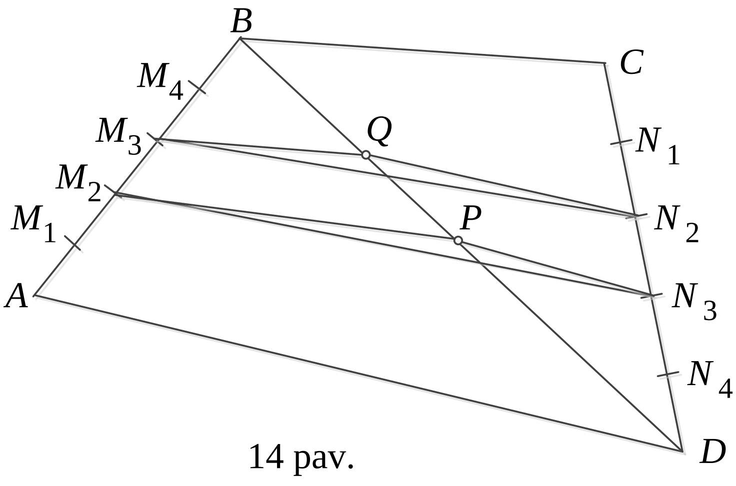
Sprendimas. Sakykime, kad trapecijos $ABCD$ pagrindai $AD = 6, BC = 3$, įstrižainės $AC = 7, BD = 8$. Per viršūnę C nubrėžkime lygiagrečią su įstrižaine BD tiesę, kuri tiesę AD kerta taške E (13 pav.). Kadangi tiesės BD ir CE yra lygiagrečios, tai keturkampis $BCED$ yra lygiagretainis, taigi $DE = BC$, o $AE = AD + BC = 9$. Trikampio ACE kraštinė AE lygi trapecijos pagrindų sumai, o į ją nubrėžta aukštinė lygi trapecijos aukštinei, todėl šio trikampio plotas lygus trapecijos $ABCD$ plotui. Trikampio ACE plotui skaičiuoti taikome Herono formulę: $p = \frac{1}{2}(7 + 8 + 9) = 12$, $p - AE = 3$, $p - AC = 5$, $p - ED = p - BD = 4$, $S = \sqrt{12 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4} = 12\sqrt{5}$.



13 pav.

8 pavyzdys. Žemės sklypas yra keturkampio, kuriame nėra lygiagrečių kraštinių, formos. Ūkininkas dvi priešingas sklypo kraštines padalijo į penkias lygias dalis ir tiesių atkarpomis sujungė dvi poras vidurinių dalijimo taškų. Gautąją juostą jis nusprendė skirti bulvėms. Rasime, kurią dalį sklypo ploto jis paskyrė bulvėms.

Sprendimas. Sakykime, kad $ABCD$ – duotasis keturkampis žemės sklypas, taškais M_1, M_2, M_3, M_4 kraštinė AB padalijama į 5 lygias dalis, o taškais N_1, N_2, N_3, N_4 – kraštinė CD padalijama į 5 lygias dalimis (14 pav.). Rasime, kurią dalį viso keturkampio ploto sudaro keturkampio $M_2M_3N_2N_3$ plotas. Tuo tikslu nubrėžkime keturkampio $ABCD$ įstrižainę BD ir pažymėkime joje taškus P ir Q taip, kad $BQ = \frac{2}{5}BD$, BP$= \frac{3}{5}BD$. Pagal 4 plotų savybę trikampių BM_3Q ir BAD plotų santykis lygus $\frac{BM_3 \cdot BQ}{BA \cdot BD} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$, o trikampių BM_2P ir BAD plotų santykis lygus $\frac{BM_2 \cdot BP}{BA \cdot BD} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$. Iš čia gauname, kad keturkampio M_2M_3QP plotas yra lygus $\frac{9}{25} - \frac{4}{25} = \frac{1}{5}$ trikampio ABD ploto. Analogiškai įrodome, kad keturkampio N_2N_3PQ plotas lygus $\frac{1}{5}$ trikampio BCD ploto. Todėl šešiakampio $M_3QN_2N_3PM_2$ plotas lygus $\frac{1}{5}$ keturkampio $ABCD$ ploto. Pagal Talio teoremą tiesės M_3Q ir M_2P yra lygiagrečios, o tiesės N_2Q ir N_3P irgi lygiagrečios, tai $\angle M_3QN_2 =$



14 pav.

$\angle M_2PN_3$, todėl vėl pagal 4 plotų savybę trikampių M_3QN_2 ir M_2PN_3 plotų santykis lygus $\frac{QM_3 \cdot QN_2}{PM_2 \cdot PN_3} = \left(\frac{2}{5}AD \cdot \frac{3}{5}BC\right) : \left(\frac{3}{5}AD \cdot \frac{2}{5}BC\right) = 1$, taigi trikampių M_3QN_2 ir M_2PN_3 plotai yra lygūs. Iš čia išplaukia, kad keturkampio $M_2M_3N_2N_3$ plotas lygus šešiakampio $M_3QN_2N_3PM_2$ plotui, t. y. jis lygus penktadaliui keturkampio $ABCD$ ploto.

TREČIOJI UŽDUOTIS.

1. Stačiojo trikampio ABC statinių ilgiai $AC = 15, BC = 20$. Trikampio kraštinėse AB, AC ir CB pažymėti taškai F, E ir D, be to $AE = 3, CD = 4$, $BF = 5$. Raskite trikampio DEF plotą.

2. Lygiakraščio trikampio ABC kraštinės ilgis lygus 2, kraštinės BC tęsinyje už taško C atidėta atkarpa $CD = BC$, taškas E yra kraštinės AC vidurio taškas. Raskite trikampio CDE plotą.

3. Taškas E yra simetriškas trikampio ABC viršūnei C viršūnės A atžvilgiu, taškas D yra simetriškas taškui B taško C atžvilgiu, o taškas F yra simetriškas taškui A viršūnės B atžvilgiu. Raskite trikampio DEF plotą, jei trikampio ABC plotas lygus 6.

4. Taškas D yra trikampio ABC kraštinės BC vidurio taškas, taškas E yra pusiaukraštinės AD vidurio taškas, taškas F yra atkarpos BE vidurio taškas, o taškas G yra atkarpos CF vidurio taškas. Raskite trikampio EFG plotą, jei trikampio ABC plotas lygus S.

5. Trikampio ABC kraštinės BC ilgis lygus 20, o pusiaukraštinių BD ir CE ilgiai atitinkamai lygūs 18 ir 24. Rasime trikampio plotą.

6. Trikampio kraštinių ilgiai lygūs 13, 14 ir 15. Į ilgiausią kraštinę nubrėžtos aukštinė ir pusiaukraštinė. Raskite tarp jų esančio trikampio plotą.

7. Taškai M, N, P, R yra lygiagretainio $ABCD$ kraštinių AB, BC, CD, DA vidurio taškai, taškas S yra atkarpos PR vidurio taškas. Raskite trikampio MNS plotą, jei lygiagretainio $ABCD$ plotas lygus 24..

8. Trapecijos pagrindų ilgiai lygūs 44 ir 16, o šoninių kraštinių ilgiai 17 ir 25. Raskite trapecijos plotą.

9. Trikampio ABC plotas lygus 10. Taškai D, E, F yra atitinkamai kraštinėse AB, BC, AC, be to, $AD = 2, BD = 3$. Raskite trikampio ABE plotą, jei jis yra lygus keturkampio $DBEF$ plotui.

10. Taškai P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 dalija trikampio ABC kraštinę AB į 6 lygias dalis $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4P_5 = P_5B$, o taškai Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 irgi dalija kraštinę BC į 6 lygias dalis $BQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4Q_5 = Q_5C$. Raskite keturkampio $P_5Q_2Q_4P_1$ plotą, jei trikampio ABC plotas lygus 96.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2019 m. balandžio 20 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematikos metodikos centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: www.mif.vu.lt/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

4 tema. TRIGONOMETRIJOS UŽDAVINIAI
(2018–2020)

Teorinę medžiagą parengė bei ketvirtąją užduotį sudarė dr. Antanas Apynis ir Palaimintojo Teofiliaus Matulionio gimnazijos matematikos mokytoja ekspertė Regina Rudalevičienė

1. Dar kelios trigonometrijos formulės (formulės, kurių nėra vidurinio ugdymo matematikos bendrojoje programoje)

Daugelį trigonometrijos formulių nesunku įsiminti, o kai kurias ir išvesti. Svarbiausia iš jų, žinoma, yra $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ (čia α yra bet kuris laipsniais arba radianais išreikštas kampo didumas (paprastai sakoma – kampas)). Sunkiau išvedama (bet taip pat lengvai įsimenama) formulė

$$sin(\alpha + \beta) = sin\,\alpha\, cos\,\beta + cos\,\alpha\, sin\,\beta. \qquad (1)$$

Argumentą β pakeitus argumentu $-\beta$, iš jos gaunama formulė

$$sin(\alpha - \beta) = sin\,\alpha\, cos\,\beta - cos\,\alpha\, sin\,\beta. \qquad (2)$$

Kadangi $cos(\alpha + \beta) = sin\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)$, tai iš (2) formulės išplaukia, jog

$$cos(\alpha + \beta) = cos\,\alpha\, cos\,\beta - sin\,\alpha\, sin\,\beta, \qquad (3)$$

o iš jos (argumentą β pakeitus argumentu $-\beta$) – formulė

$$cos(\alpha - \beta) = cos\,\alpha\, cos\,\beta + sin\,\alpha\, sin\,\beta. \qquad (4)$$

Matome, kad gerai įsiminti pakanka tik vieną kitą trigonometrijos formulę, o visas kitas galima ir pačiam išsivesti.

Šį kartą jaunųjų matematikų dėmesį norėtume atkreipti į kelias formules, kurių nėra vidurinio ugdymo matematikos bendrojoje programoje:

$$sin\,\alpha + sin\,\beta = 2\,sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (5)$$

$$sin\,\alpha - sin\,\beta = 2\,sin\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2}; \qquad (6)$$

$$cos\,\alpha + cos\,\beta = 2\,cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (7)$$

$$cos\,\alpha - cos\,\beta = -2\,sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (8)$$

$$tg\,\alpha \pm tg\,\beta = \frac{sin(\alpha\pm\beta)}{cos\,\alpha\, cos\,\beta}; \qquad (9)$$

$$ctg\,\alpha \pm ctg\,\beta = \frac{sin(\beta\pm\alpha)}{sin\,\alpha\, sin\,\beta}. \qquad (10)$$

Iš pradžių atidžiai įsižiūrėkime į (5) lygybę ir pamatysime, kad

$$\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} = \alpha$$

ir

$$\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}=\beta.$$

Todėl

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$

$$=\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Dabar jau tikrai aišku, kad (5) lygybė yra tapatybė, nes ji galioja esant bet kuriai α ir bet kuriai β reikšmei. Kitaip sakant, (5) lygybę galima vadinti formule.

Analogiškai galima įrodyti (siūlytume kiekvienam jaunajam matematikui tai atlikti savarankiškai), kad (6), (7) ir (8) formulės taip pat yra teisingos. Aišku, nagrinėjant (7) ir (8) lygybes reikės taikyti (3) ir (4) formules.

Sugrįžkime prie gerai žinomų (1)-(4) formulių. Jei sudėtume (1) ir (2), gautume formulę

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta, \qquad (11)$$

o jei iš (1) atimtume (2), gautume formulę

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta. \qquad (12)$$

Beje, iš (11) ir (12) formulių galima išvesti ir dar nematytą formulę

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)). \qquad (13)$$

Tereikia (11) ir (12) lygybėse esančius reiškinius padalyti iš 2. Čia atkreipkime dėmesį į tai, kad iš (12) gautume, jog

$$\sin\beta\cos\alpha=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)).$$

Bet $\sin(\alpha-\beta)=\sin\big(-(\beta-\alpha)\big)=-\sin(\beta-\alpha)$, todėl formulė

$\sin\beta\cos\alpha=\frac{1}{2}(\sin(\beta+\alpha)+\sin(\beta-\alpha))$ reiškia tą patį, ką ir (13) formulė.

Kitaip sakant, iš (11) ir (12) formulių gauname tik vieną (13) formulę.

Dar įsitikinkime, kad (9) ir (10) formulės taip pat yra teisingos. Pradėkime nuo formulės

$$tg\,\alpha+tg\,\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \qquad (14)$$

1 būdas. Pertvarkydami kairėje lygybės ženklo pusėje esantį reiškinį gausime:

$$tg\,\alpha+tg\,\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

2 būdas. Taikydami (1) formulę pertvarkykime (14) lygybės dešinę pusę ir gausime:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=tg\,\alpha+tg\,\beta.$$

Analogiškai galima gauti ir kitas (9) ir (10) formulėmis užrašytas lygybes.

Išnagrinėkime dar kelis uždavinius.

1 pavyzdys. Įrodykime, kad esant bet kuriems α ir β galioja lygybė

$$cos\,\alpha \cdot cos\,\beta = \frac{1}{2}(cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha - \beta)). \qquad (15)$$

Sprendimas. Sudėję (3) ir (4) formules gausime lygybę

$cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha - \beta) = 2\,cos\,\alpha\,cos\,\beta$,

o ją padaliję iš 2 – (15) formulę.

2 pavyzdys. Įrodykime, kad esant bet kuriam kampui α (matuojamam laipsniais ar radianais) galioja lygybė $sin\,\alpha + cos\,\alpha = \sqrt{2}\,cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$. (16)

Sprendimas. Žinome, kad $cos\,\alpha = sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Todėl, taikydami (5) formulę, gausime:

$$sin\,\alpha + cos\,\alpha = sin\,\alpha + sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\,sin\frac{\alpha+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{2}cos\frac{\alpha-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{2} = 2\,sin\frac{\pi}{4}cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

Tą pačią (16) formulę galima gauti ir taip:

$$sin\,\alpha + cos\,\alpha = cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\alpha = 2\,cos\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\alpha}{2}cos\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\alpha}{2} = 2\,cos\frac{\pi}{4}cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sqrt{2}\,cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right).$$

Aišku, čia taikėme (7) formulę ir rėmėmės tuo, kad kosinusas yra lyginė funkcija ($cos(-x) = cos\,x$).

Pastaba. Kadangi (15) lygybė galioja esant bet kuriems kampams α ir β, o (16) lygybė – bet kuriam kampui α, tai abi lygybės yra tapatybės, taigi ir formulės.

3 pavyzdys. Sumą $3\,sin\,x + 4\,cos\,x$ išreikškime kurio nors argumento sinuso reikšme.

Sprendimas. Nagrinėjamą sumą padauginkime ir padalykime iš skaičiaus

$\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Gausime lygybę

$3\,sin\,x + 4\,cos\,x = 5\left(\frac{3}{5}sin\,x + \frac{4}{5}cos\,x\right)$.

Kadangi $\frac{3}{5} \in [-1; 1]$, $\frac{4}{5} \in [-1; 1]$ ir $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, tai, remdamiesi formule

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, galime padaryti išvadą, kad yra toks kampas (argumentas) α, jog

$\frac{3}{5} = cos\,\alpha$ ir $\frac{4}{5} = sin\,\alpha$.

Vadinasi, $\frac{3}{5}sin\,x + \frac{4}{5}cos\,x = cos\,\alpha\,sin\,x + sin\,\alpha\,cos\,x = sin(x+\alpha)$. Todėl

$3\,sin\,x + 4\,sin\,x = 5\,sin(x+\alpha)$.

Argumentui α rasti reikėtų išspręsti lygčių $sin\,\alpha = \frac{4}{5}$ ir $cos\,\alpha = \frac{3}{5}$ sistemą

$$\begin{cases} sin\,\alpha = \frac{4}{5}, \\ cos\,\alpha = \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Padaliję pirmą lygtį iš antros, gautume lygtį $tg\ \alpha = \frac{4}{3}$, kurios sprendiniai užrašomi formule

$\alpha = arctg\ \frac{4}{3} + \pi k, k \in Z.$

Ats.: $3\,sin\,x + 4\,cos\,x = 5\,sin(x + \alpha),\ \alpha = arctg\ \frac{4}{3} + \pi k, k \in Z.$

4 pavyzdys. Sumą $5sin\,x + 7cos\,x$ išreikškime kurio nors argumento kosinuso reikšme.

Sprendimas. Nagrinėjamą sumą padauginkime ir padalykime iš skaičiaus

$\sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$. Gausime:

$$5sin\,x + 7cos\,x = \sqrt{74}\left(\frac{5}{\sqrt{74}} sin\,x + \frac{7}{\sqrt{74}} cos\,x\right) = \sqrt{74}(sin\,\alpha\, sin\,x + cos\,\alpha\, cos\,x) = \sqrt{74}\, cos(x - \alpha);$$

čia α yra lygčių $sin\,\alpha = \frac{5}{\sqrt{74}}$ ir $cos\,\alpha = \frac{7}{\sqrt{74}}$ sistemos sprendinys, priklausantis aibei, kuri užrašoma formule

$\alpha = arctg\ \frac{5}{7} + \pi k, k \in Z.$

Ats.: $5sin\,x + 7cos\,x = \sqrt{74}\, cos(x - \alpha), \alpha = arctg\ \frac{5}{7} + \pi k, k \in Z.$

2. Trigonometrinių lygčių sprendimas

Sprendžiant trigonometrinę lygtį pavidalo $f(x) = 0$ reiškinys $f(x)$ (esant reikalui) iš pradžių pertvarkomas taikant žinomas algebros taisykles bei trigonometrijos formules (tapatybes) taip, kad teliktų išspręsti vieną ar kelias paprasčiausias trigonometrines lygtis, kurių bendrasis pavidalas yra:

$sin\,x = a, a \in [-1; 1];$

$cos\,x = a,\ a \in [-1; 1];$

$tg\ x = a, a \in (-\infty;\ +\infty);$

$ctg\ x = a, a \in (-\infty;\ +\infty).$

Aišku, tuo trigonometrinės lygties sprendimas ne visada pasibaigia. Gana dažnai reikia gerokai pasukti galvą, kad glaustai ir teisingai užrašytum sprendžiamos trigonometrinės lygties sprendinių aibę.

Kad būtų suprantamiau, kartu išnagrinėkime kelias trigonometrines lygtis ir jų sprendimus.

5 pavyzdys. Išspręskime trigonometrinę lygtį

$$sin(2x) + cos(2x) = 0. \tag{17}$$

Sprendimas. Aišku, kad negali būti nei $sin(2x) = 0$, nei $cos(2x) = 0$ (nes visada

$sin^2(2x) + cos^2(2x) = 1$). Todėl padalinę (17) lygtį tiek iš $sin(2x)$, tiek iš $cos(2x)$ gautume ekvivalenčią (turinčią tą pačią sprendinių aibę) lygtį.

Iš pradžių (17) lygtį padalykime iš $cos(2x)$. Gausime:

$tg\ (2x) + 1\ = 0,$

$tg\ (2x) = -1,$

$2x = arctg\ (-1) + \pi k, k \in Z,$

$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z,$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in Z. \quad (18)$$

Dalydami (17) lygtį iš $sin(2x)$, gautume:

$1 + ctg(2x) = 0,$

$ctg\ (2x) = -1,$

$2x = arcctg\ (-1) + \pi k, k \in Z,$

$2x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z,$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in Z. \quad (19)$$

Gavome dvejopai užrašytą ((18) ir (19) formulėmis) (17) lygties sprendinių aibę.

Dabar pabandykime į nagrinėjamą (17) lygtį pažvelgti kitaip. Taikydami, pavyzdžiui, (16) formulę, gautume, kad $sin(2x) + cos(2x) = \sqrt{2} \cdot cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, todėl (17) lygtį galėtume pakeisti ekvivalenčia lygtimi $\sqrt{2} \cdot cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$. Na, o tolesnis sprendimas visai paprastas:

$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z,$

$2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z,$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in Z. \quad (20)$$

Matome, kad gauta sprendinių aibės (20) formulė sutampa su (19) formule (sprendėme skirtingai, o gavome vienodai!).

Remdamiesi dvigubo argumento sinuso ir kosinuso formulėmis (beje, jos išvedamos iš (1) ir (3) formulių), gautume, kad $sin(2x) + cos(2x) = 2\,sin\,x\,cos\,x + cos^2x - sin^2x$. Todėl (17) lygtį galėtume pakeisti ekvivalenčia lygtimi $2\,sin\,x\,cos\,x + cos^2x - sin^2x = 0$, o šią lygtį (dalydami ją iš $cos^2x, cos\,x \neq 0$) – ekvivalenčia lygtimi $2\ tg\ x + 1 - tg^2x = 0$.

Šiuo atveju turėtume išspręsti dydžio $tg\ x$ atžvilgiu kvadratinę lygtį $tg^2x - 2tg\ x - 1 = 0$. Gautume:

$(tg\ x - 1)^2 - 2 = 0,$

$(tg\ x - 1)^2 = 2,$

$tg\ x - 1 = \pm\sqrt{2},$

$tg\ x = 1 \pm \sqrt{2}.$

Taigi $tg\ x = 1 - \sqrt{2}$ arba $tg\ x = 1 + \sqrt{2}$. Pirmos lygties sprendiniai užrašomi formule

$$x = arctg\left(1 - \sqrt{2}\right) + \pi k, k \in Z, \tag{21}$$

o antros lygties – formule

$$x = arctg\left(1 + \sqrt{2}\right) + \pi l, l \in Z. \tag{22}$$

Aišku, kad pagal abi formules ((21) ir (22)) gaunami skirtingi sprendiniai, todėl užrašant (17) lygties sprendinių aibę reikia įtraukti į ją ir pagal vieną, ir pagal kitą formulę gaunamus sprendinius. Taigi atsakymas būtų toks:

$x = arctg\left(1 - \sqrt{2}\right) + \pi k, k \in Z$; arba $x = arctg\left(1 + \sqrt{2}\right) + \pi l, l \in Z.$

Nesunku suprasti, kad galima sugalvoti ir daugiau būdų (17) lygčiai išspręsti.

6 pavyzdys. Išspręskime trigonometrinę lygtį

$$sin\,x + cos\,x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}. \tag{23}$$

Sprendimas. Šią lygtį išspręskime ne vienu, o keliais būdais, kad aiškiau pamatytume, jog ta pati jos sprendinių aibė gali būti užrašoma skirtingai.

1 būdas. Taikydami (16) formulę, gauname ekvivalenčią lygtį $\sqrt{2}\,cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, o iš jos – lygtį $cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. Toliau:

$x - \frac{\pi}{4} = \pm\, arccos\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + 2\pi k, k \in Z,$

$x = \frac{\pi}{4} \pm arccos\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + 2\pi k, k \in Z.$

Ats.: $x = \frac{\pi}{4} \pm arccos\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + 2\pi k, k \in Z.$ (24)

2 būdas. Reiškinį $sin\,x + cos\,x$ pertvarkykime taip:

$$sin\,x + cos\,x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}sin\,x + \frac{1}{\sqrt{2}}cos\,x\right) = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4}sin\,x + sin\frac{\pi}{4}cos\,x\right) = \sqrt{2}\,sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Įrašę į (23), gausime ekvivalenčią lygtį $\sqrt{2}\,sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Lygties $sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ sprendinius galima rasti taip:

$x + \frac{\pi}{4} = (-1)^k\, arcsin\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \pi k, k \in Z,$

$x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \, arcsin \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \pi k, k \in Z.$

Ats.: $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \, arcsin \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \pi k, k \in Z.$ (25)

3 būdas. Kadangi $\frac{1+\sqrt{3}}{2} > 1$, negali būti nei $sin\, x = 0$, nei $cos\, x = 0$, todėl reiškinį $sin\, x + cos\, x$ galima pertvarkyti taip:

$sin\, x + cos\, x = \frac{sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)+cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{2\, sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}+cos^2\frac{x}{2}-sin^2\frac{x}{2}}{sin^2\frac{x}{2}+cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\, tg\frac{x}{2}+1-tg^2\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2}+1}$ (čia ir skaitiklį, ir vardiklį padalijome iš $cos^2\frac{x}{2}$).

Taigi galima tvirtinti, kad (23) lygtis yra ekvivalenti lygčiai

$$\frac{2\, tg\frac{x}{2}+1-tg^2\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2}+1} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Atlikę veiksmus, gausime šią kvadratinę (dydžio $tg\,\frac{x}{2}$ atžvilgiu) lygtį:

$$\frac{3+\sqrt{3}}{2} tg^2\frac{x}{2} - 2\, tg\,\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} = 0.$$

Jos diskriminantas yra

$$D = 4 - 4\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2} = 4 - 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}-1\right)^2,$$

todėl

$$tg\,\frac{x}{2} = \frac{2-\left(\sqrt{3}-1\right)}{3+\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

arba

$$tg\,\frac{x}{2} = \frac{2+\left(\sqrt{3}-1\right)}{3+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Belieka išspręsti lygtis $tg\,\frac{x}{2} = 2-\sqrt{3}$ bei $tg\,\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ir jų sprendinius sujungti į vieną aibę. Gausime:

1) $tg\frac{x}{2} = 2-\sqrt{3} \Rightarrow \frac{x}{2} = arctg\left(2-\sqrt{3}\right) + \pi k, k \in Z \Rightarrow x = 2arctg\left(2-\sqrt{3}\right) + 2\pi k, k \in Z;$

2) $tg\,\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{x}{2} = arctg\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi l, l \in Z \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + \pi l, l \in Z \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in Z.$

Ats.: $x = 2arctg\left(2-\sqrt{3}\right) + 2\pi k, k \in Z;\, arba\, x = \frac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in Z.$ (26)

Atkreipkime dėmesį į tai, kad visus tris kartus gavome tą pačią (23) trigonometrinės lygties sprendinių aibę, bet ji užrašyta trimis skirtingais būdais – (24), (25) ir (26) formulėmis.

7 pavyzdys. Išspręskime lygtį $cos\, x - \sqrt{3}\, sin\, x = cos(3x)$ (27)

Sprendimas. Užrašę lygtį pavidalu $cos\, x - \sqrt{3}\, sin\, x - cos(3x) = 0$, jos kairėje pusėje esantį reiškinį pertvarkykime taip:

$cos\,x - \sqrt{3}\,sin\,x - cos(3x) = (cos\,x - cos(3x)) - \sqrt{3}\,sin\,x = -2\,sin\frac{x+3x}{2}\,sin\frac{x-3x}{2} - \sqrt{3}\,sin\,x =$

$= 2\,sin(2x)\,sin\,x - \sqrt{3}\,sin\,x = sin\,x\big(2\,sin(2x) - \sqrt{3}\big).$

Taigi (27) lygtis ekvivalenti lygčiai

$sin\,x \cdot \big(2\,sin(2x) - \sqrt{3}\big) = 0,$ (28)

o pastarąją lygtį galima išskaidyti į dvi lygtis:

$sin\,x = 0$ ir $2\,sin(2x) - \sqrt{3} = 0.$

Pirmos lygties sprendiniai užrašomi formule $x = \pi k, k \in Z.$

Antrą lygtį spręskime taip:

$$sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x = (-1)^l\,arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi l = (-1)^l \cdot \frac{\pi}{3} + \pi l, l \in Z \Rightarrow x = (-1)^l \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \cdot l, l \in Z.$$

Belieka gautus sprendinius sujungti į vieną aibę.

Ats.: $x = \pi k, k \in Z$; arba $x = (-1)^l \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \cdot l, l \in Z.$

8 pavyzdys. Išspręskime lygtį $cos^2(2x) + cos^2(3x) = 1.$ (29)

Sprendimas. Dešinėje pusėje esantį vienetą pakeiskime reiškiniu $sin^2(2x) + cos^2(2x)$, o lygtį pertvarkykime taip:

$cos^2(2x) + cos^2(3x) = sin^2(2x) + cos^2(2x),$

$cos^2(3x) - sin^2(2x) = 0,$

$(cos(3x) + sin(2x))(cos(3x) - sin(2x)) = 0,$

$\left(sin\,\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + sin(2x)\right)\left(sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) - sin(2x)\right) = 0,$

$2\,sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5x}{2}\right) \cdot 2\,cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5x}{2}\right) = 0,$

$\left(2\,sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\,cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right) \cdot \left(2\,sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5x}{2}\right)\,cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5x}{2}\right)\right) = 0,$

$sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0,$

$cos\,x \cdot cos(5x) = 0.$

Lygties $cos\,x = 0$ sprendiniai yra $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$

Spręsdami lygtį $cos(5x) = 0$, gauname:

$5x = \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in Z,$

$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}l, l \in Z.$

Atidžiai įsižiūrėję į abi sprendinių formules, suprastume, kad kiekvienas sprendinys

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, gaunamas pagal formulę $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} \cdot l$, kai $l = 2 + 5k, k \in Z.$ Vadinasi, lygties $\cos x = 0$ sprendinių aibė yra lygties $\cos(5x) = 0$ sprendinių aibės poaibis. Todėl (29) lygties sprendiniai užrašomi viena formule

$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} l, l \in Z.$

Ats.: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} l, l \in Z.$

Pastaba. Aiškinantis, ar lygties $\cos x = 0$ sprendiniai $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z,$ sudaro lygties $\cos(5x) = 0$ sprendinių $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} l, l \in Z,$ aibės poaibį, pakanka išsiaiškinti, ar pasirinkus bet kurį skaičių $k, k \in Z$, yra toks sveikasis skaičius *l*, kuriam esant galioja lygybė $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} l = \frac{\pi}{2} + \pi k.$ Gautume, kad $l = 2 + 5k$ ir $l \in Z.$

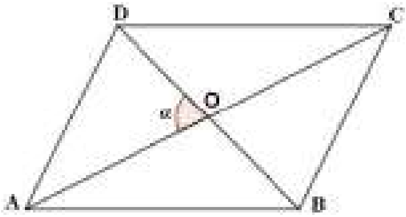
3. Geometrijos uždaviniai, sprendžiami taikant trigonometrijos formules

Yra daug geometrijos uždavinių, kuriuos sprendžiant atsiranda trigonometrinių reiškinių ir tuomet dažnai prireikia tai vienos, tai kitos formulės. Tuo labiau, kad matematikai paprastai siekia gautam atsakymui suteikti ne bet kokį, o tik „gražų“ pavidalą.

9 pavyzdys. Apskaičiuokime lygiagretainio *ABCD* plotą, jei $AB = a, BC = b,$ o smailusis kampas tarp įstrižainių *AC* ir *BD* lygus *α*.

Sprendimas. Tarkime, kad $\angle AOD = \alpha$ (žr. 1 pav.). Tada $\angle COD = \pi – \alpha.$

Tegu $x = AO = OC, y = BO = OD,$ o *S* – lygiagretainio *ABCD* plotas.



1 pav.

Jeigu žinotume *x* ir *y*, tuomet lygiagretainio plotą galėtume skaičiuoti taip:

$$S = 2(S_{AOD} + S_{COD}) = 2\left(\frac{1}{2} xy \sin\alpha + \frac{1}{2} xy \sin(\pi – \alpha)\right) = xy \sin\alpha + xy \sin\alpha = 2xy \sin\alpha. \quad (30)$$

Dydžių x ir y reikšmių ieškokime iš trikampių *AOD* ir *COD*, taikydami kosinusų teoremą. Gausime dvi lygybes $b^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos\alpha$ ir $a^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos(\pi – \alpha)$ su ieškomais dydžiais *x* ir *y*.

Iš antros atėmę pirmą, gausime lygybę $a^2 - b^2 = -2xy \cos(\pi – \alpha) + 2xy \cos\alpha$ sandaugai *xy* rasti.

Kadangi $\cos(\pi – \alpha) = – \cos\alpha$, tai $a^2 - b^2 = 4\, xy \cos\alpha,$

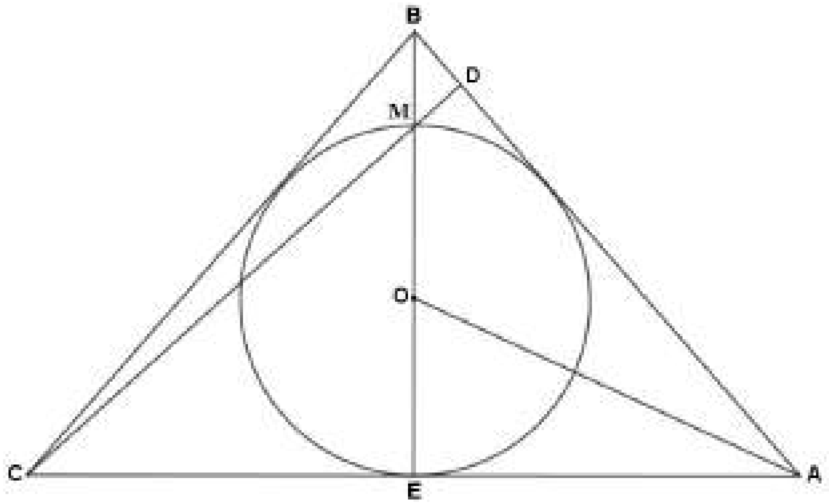
todėl $xy = \frac{a^2-b^2}{4\cos\alpha}$. Įrašę šią išraišką į (30), gausime, kad ieškomas lygiagretainio *ABCD* plotas yra

$S = 2 \cdot \frac{a^2-b^2}{4\cos\alpha} \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)\, tg\, \alpha.$

Ats.: $\frac{1}{2}(a^2 - b^2)\, tg\, \alpha.$

10 pavyzdys. Apskaičiuokime lygiašonio trikampio kampus, jei jo aukštinių susikirtimo taškas yra apskritime, įbrėžtame į šį trikampį.

Sprendimas. Tarkime, kad lygiašonio trikampio *ABC* (*AB*=*BC*) aukštinės susikerta taške *M*, o šis taškas priklauso įbrėžtam į Δ*ABC* apskritimui, kurio centras yra *O*. Tegu *r* yra apskritimo spindulys, o α – kampo *BAC* didumas.



2 pav.

Kampui α rasti taikykime atkarpos *CM* ilgio dvejopo skaičiavimo būdą.

Taikydami Pitagoro teoremą, iš stačiojo trikampio *CME* gauname, kad

$CM = \sqrt{CE^2 + EM^2}.$

Kita vertus, iš to paties trikampio gauname, jog

$CM = \frac{ME}{\cos\alpha},$

nes iš sąlygos $CD \perp AB$ išplaukia, kad $\Delta MDB \backsim \Delta AEB$ ir todėl ∠*CME*=∠*BMD*=∠*BAE*=*α*.

Atkarpa *ME* yra apskritimo skersmuo, todėl $CM = \frac{2r}{\cos\alpha}$.

Iš stačiojo trikampio *AEO* gauname, kad $AE = EO \cdot ctg\, \angle EAO = r\, ctg\, \frac{\alpha}{2}$.

Kadangi $CE = AE$, tai

$CM = \sqrt{CE^2 + EM^2} = \sqrt{r^2 \cdot ctg^2 \frac{\alpha}{2} + 4r^2} = r\sqrt{ctg^2 \frac{\alpha}{2} + 4}.$

Sugretinę abu *CM* skaičiavimo rezultatus, gauname lygybę

$$\frac{2r}{\cos\alpha} = r\sqrt{ctg^2\frac{\alpha}{2} + 4},$$

iš kurios išplaukia lygybė

$$\frac{2}{\cos\alpha} = \sqrt{ctg^2\frac{\alpha}{2} + 4}. \qquad (31)$$

Ieškomo dydžio α atžvilgiu ji yra trigonometrinė lygtis. Sprendžiant šią lygtį nėra reikalo ieškoti visų sprendinių aibės, nes (pagal uždavinio prasmę) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Kadangi

$$ctg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha},$$

gauname lygtį $\frac{2}{\cos\alpha} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} + 4}$.

Pažymėkime $t = \cos\alpha$ ir toliau spręskime taip:

$$\frac{2}{t} = \sqrt{\frac{1+t}{1-t} + 4},$$

$$\frac{4}{t^2} = \frac{1+t}{1-t} + 4,$$

$$\frac{4}{t^2} - 4 = \frac{1+t}{1-t},$$

$$\frac{4(1-t^2)}{t^2} = \frac{1+t}{1-t},$$

$$\frac{4(1-t^2)}{t^2} - \frac{1+t}{1-t} = 0,$$

$$(1+t)\left(\frac{4(1-t)}{t^2} - \frac{1}{1-t}\right) = 0.$$

Kadangi $1 + t \neq 0$, tai

$$\frac{4(1-t)}{t^2} - \frac{1}{1-t} = 0,$$

$$4(1-t)^2 - t^2 = 0,$$

$$3t^2 - 8t + 4 = 0.$$

Ši lygtis turi du sprendinius: $t = 2$ ir $t = \frac{2}{3}$. Pirmas netinka, todėl belieka užrašyti lygties $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ vienintelį sprendinį, priklausantį intervalui $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Jis yra $\alpha = \arccos\frac{2}{3}$.

Taigi trikampio *ABC* kampai prie pagrindo lygūs $\arccos\frac{2}{3}$, o šoninių kraštinių sudaromas kampas lygus $\pi - 2\arccos\frac{2}{3}$.

Ats.: $\arccos\frac{2}{3}$, $\arccos\frac{2}{3}$ ir $\pi - 2\arccos\frac{2}{3}$.

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Skirtumą $\frac{2}{sin(4\alpha)} - ctg(2\alpha)$ išreikškite kurio nors argumento tangentu.

2. Nustatykite, ar sandaugos $tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1 - sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$ reikšmė priklauso nuo α.

3. Apskaičiuokite $cos^2(\alpha + \beta) + cos^2(\alpha - \beta) - \cos(2\alpha) \cdot cos(2\beta)$.

4. Įrodykite, kad reiškinio $sin\,47° + sin\,61° - sin\,11° - sin\,25°$ reikšmė lygi $cos\,7°$.

5. Apskaičiuokite $16\,sin\frac{\alpha}{2} \cdot sin\frac{3\alpha}{2}$, jeigu $cos\,\alpha = \frac{3}{4}$.

6. Išspręskite lygtį $cos(3x) - sin\,x = \sqrt{3} \cdot (cos\,x - sin(3x))$.

7. Išspręskite lygtį $sin\,x \cdot cos(2x) + cos\,x \cdot cos(4x) = sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) \cdot sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$.

8. Išspręskite lygtį $sin\,x \cdot sin(3x) + sin(4x) \cdot sin(8x) = 0$.

9. Apie lygiakraštį trikampį apibrėžto apskritimo spindulys lygus *R*. Per apskritimo centrą nubrėžta tiesė. Trikampio viršūnių atstumų d_1, d_2 ir d_3 iki šios tiesės kvadratų sumą išreikškite apskritimo spinduliu *R*.

10. Trikampio *ABC* kraštinių *BC*, *CA* ir *AB* ilgiai yra atitinkamai *a*, *b* ir *c*. Nustatykite, kokiu kampu susikerta jo pusiaukraštinės AA_1 ir BB_1, jei $a^2 + b^2 = 5c^2$.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2019 m. birželio 7 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematikos metodikos centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: *http://uosis.mif.vu.lt/ljmm/*

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

5. ĮBRĖŽTINIAI IR APIBRĖŽTINIAI DAUGIAKAMPIAI

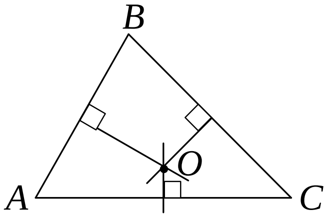
(2018–2020)

Teorinę medžiagą parengė ir penktąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Edmundas Mazėtis

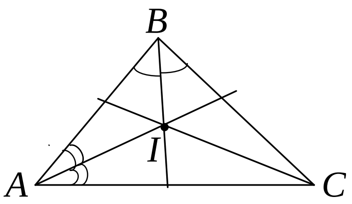
Daugiakampis $A_1A_2 \dots A_n$ yra įbrėžtas į apskritimą ω , jei visos jo viršūnės $A_1, A_{2,}, \dots, A_n$yra apskritimo ω taškai, o jo kraštinės $A_1A_2,\ A_2A_3,\ \dots,\ A_{n-1}A_n,\ A_nA_1$ yra to apskritimo stygos. Tuomet apskritimas ω yra vadinamas apibrėžtu apie daugiakampį $A_1A_2 \dots A_n$ apskritimu.

Daugiakampis $A_1A_2 \dots A_n$ yra vadinamas apibrėžtu apie apskritimą ω, jei jo visos kraštinės $A_1A_2,\ A_2A_3,\ \dots,\ A_{n-1}A_n,\ A_nA_1$ yra apskritimo ω liestinėse. Tuomet apskritimas ω yra vadinamas įbrėžtu į daugiakampį $A_1A_2 \dots A_n$ apskritimu.

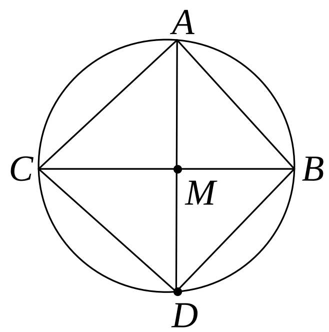
Kaip žinoma, apie kiekvieną trikampį galima apibrėžti vienintelį apskritimą, kurio centras O yra trikampio kraštinių vidurio statmenų susikirtimo taškas (1 pav.). Į kiekvieną trikampį galima įbrėžti irgi tik vieną apskritimą, kurio centras I yra trikampio pusiaukampinių susikirtimo taškas (2 pav.).



1 pav.



2 pav.



3 pav.

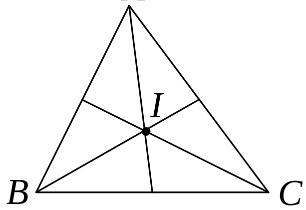
1 pavyzdys. Trikampio ABC pusiaukraštinės, nubrėžtos iš viršūnės A, tęsinys kerta apibrėžtą apie trikampį apskritimą taške D taip, kad $AC = CD = 1$. Rasime kraštinės BC ilgį.

Sprendimas. Sakykime, kad taškas M yra trikampio kraštinės BC vidurio taškas (3 pav.). Kadangi $AC = CD$, tai trikampis ACD lygiašonis, lankai AC ir CD yra lygūs, tai pagal įbrėžtinių kampų, besiremiančių į tą patį lanką ir į lygius lankus savybes gauname, kad $\angle DAC = \angle ADC = \angle ABC = \angle DBC$, o $\angle ADB = \angle ACB$. Iš čia išplaukia, kad trikampiai ABM ir CDM yra panašieji, todėl $\frac{BM}{AB} = \frac{MD}{DC}$ t. y. $MD = \frac{BM \cdot DC}{AB}$. Trikampiai BDM ir ACM taip pat panašieji, todėl $\frac{BD}{DM} = \frac{AC}{MC}$ t. y. $MD = \frac{BD \cdot MC}{AC}$. Kadangi $BM = MC$, o $AC = CD = 1$, tai sulyginę gautąsias atkarpos MD išraiškas, turime lygybę $AB \cdot BD = 1$. Kadangi trikampiai ABC ir MBD irgi panašieji, tai $\frac{BC}{BD} = \frac{AB}{MB}$, todėl $BC \cdot MB = AB \cdot BD = 1$. Bet $MB = \frac{1}{2}BC$, todėl $BC \cdot \frac{1}{2}BC = 1$, $BC^2 = 2$, taigi $BC = \sqrt{2}$.

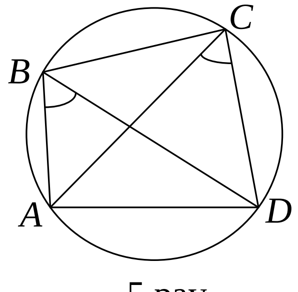
2 pavyzdys. Trikampio ABC kampo A didumas lygus α, taškas I yra įbrėžto į trikampį apskritimo centras (4 pav.). Rasime kampo BIC didumą.

Sprendimas. Kadangi tiesės BI ir CI yra trikampio kampų pusiaukampinės, tai $\angle BIC = 180^0 - \angle IBC - \angle BCI = 180^0 - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C = 180^0 - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 180^0 - \frac{1}{2}(180^0 - \angle A) = 90^0 + \frac{1}{2}\angle A = 90^0 + \frac{1}{2}\alpha$.

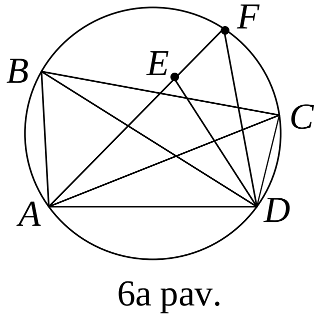
Skirtingai nuo trikampių, ne apie kiekvieną keturkampį apibrėžiamas apskritimas ir ne į kiekvieną keturkampį įbrėžiamas apskritimas. Nustatysime keletą sąlygų, kurios yra būtinos ir pakankamos, kad apie keturkampį būtų galima apibrėžti apskritimą ir į keturkampį būtų galima įbrėžti apskritimą. Šioje užduotyje



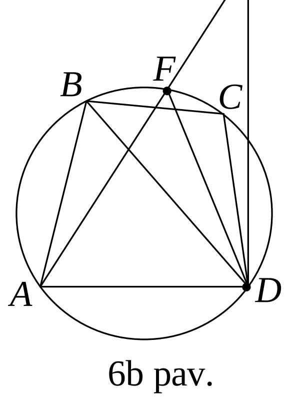
4 pav.



5 pav.



6a pav.



6b pav.

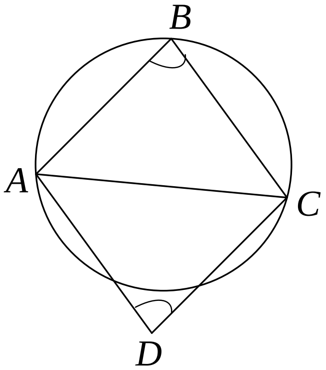
nagrinėsime tik iškiliuosius daugiakampius. Tai tokie daugiakampiai, kurių visi taškai yra vienoje tiesės, kurioje yra bet kuri to daugiakampio kraštinė, pusėje.

Sakykime, kad keturkampis $ABCD$ yra įbrėžtas į apskritimą ω (5 pav.). Kadangi įbrėžtiniai kampai ABD ir ACD remiasi į tą patį lanką AD, o jų viršūnės B ir C yra toje pačioje tiesės AD pusėje, tai $\angle ABD = \angle ACD$. Sakykime, kad taškas E nėra apskritime ω, o tiesė AE šį apskritimą kerta taške F. Pagal įbrėžtinių kampų savybę $\angle AFD = \angle ABD$. Jei taškas E yra apskritimo ω viduje (6 a pav.), tai kampas AED yra trikampio EFD priekampis, todėl pagal priekampio savybę $\angle AED > \angle AFD$, t. y. $\angle AED > \angle ABD$. Jei taškas E yra apskritimo ω išorėje (6 b pav.), tai kampas AFD yra trikampio DEF priekampis, todėl $\angle AED < \angle AFD$, t. y. $\angle AED < \angle ABD$. Taigi jei taškas E nėra apskritimo ω taškas, tai $\angle AED \neq \angle ABD$. Įrodėme tokią teoremą:

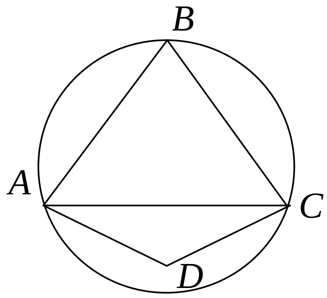
1 teorema. Keturkampis $ABCD$ yra įbrėžtas į apskritimą tada ir tik tada, kai jo viršūnės B ir C yra vienoje tiesės AD pusėje ir teisinga lygybė $\angle ABD = \angle ACD$.

Taikant šią teoremą reikia atkreipti dėmesį, kad viršūnės B ir C turi būti vienoje tiesės AD pusėje. Jei taip nėra (7 pav.), tai nors sąlyga $\angle ABC = \angle ADC$ yra teisinga, bet taškai A, B, C, D nėra viename apskritime.

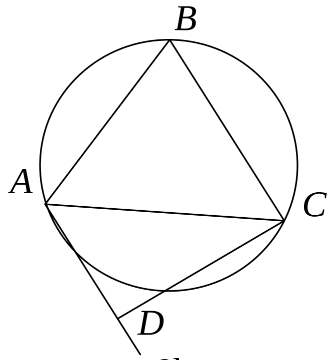
Sakykime, kad keturkampis $ABCD$ yra įbrėžtas į apskritimą ω, tuomet jo priešingi kampai ABC ir ADC remiasi į du lankus, kurie sudaro visą apskritimą. Pagal įbrėžtinių kampų savybę tų kampų suma lygi 180^0. Jei nubrėžiame apskritimą ω per taškus A, B ir C, bet šis apskritimas neina per tašką D, tai kaip ir įrodydami 1 teoremą pastebime, kad $\angle ABC + \angle ADC > 180^0$, kai taškas D yra apskritimo ω viduje (8 a pav.) ir $\angle ABC + \angle ADC < 180^0$, kai taškas D yra apskritimo ω išorėje (8 b pav.). Taigi teisinga tokia teorema:



7 pav.



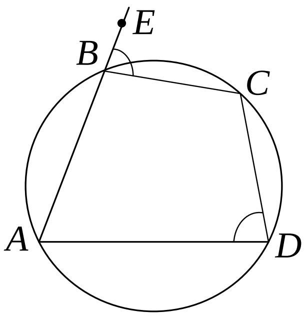
8a pav.



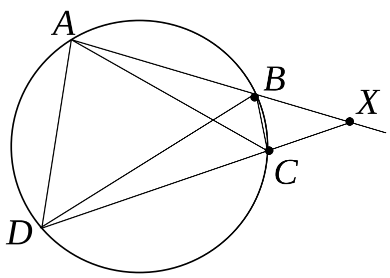
8b pav.

2 teorema. Keturkampis yra įbrėžtas į apskritimą tada ir tik tada, kai jo priešingųjų kampų suma lygi 180^0.

Iš šios teoremos išplaukia tokia išvada: keturkampis $ABCD$ yra įbrėžtas į apskritimą tada ir tik tada, kai jo kraštinės AB tęsinyje už taško B pažymėtam bet kuriam taškui E yra teisinga lygybė $\angle ADC = \angle EBC$ (9 pav.).



9 pav.



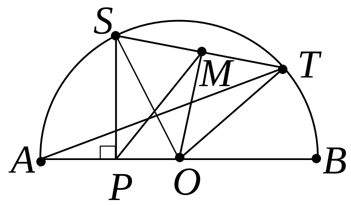
10 pav.

Tarkime, kad įbrėžto į apskritimą keturkampio $ABCD$ kraštinių AB ir CD tęsiniai susikerta taške X (10 pav.). Kadangi įbrėžtiniai kampai ABD ir ACD lygūs, tai lygūs ir jų gretutiniai kampai XBD ir XCA. Iš trikampių XAC ir XDB panašumo gauname lygybę $\frac{AX}{CX} = \frac{XD}{BX}$, iš kurios išplaukia, kad $AX \cdot BX = CX \cdot DX$. Atvirkščiai, jei teisinga ši lygybė, tai teisinga ir lygybė $\frac{AX}{CX} = \frac{XD}{BX}$, iš kurios išplaukia trikampių XAC ir XDB panašumas, kampų XBD ir XCA lygybė ir jiems gretutinių kampų ABD ir ACD lygybė. Kadangi taškai B ir C yra vienoje tiesės AD pusėje, tai iš šios lygybės išplaukia, kad keturkampis $ABCD$ yra įbrėžtas į apskritimą. Taigi įrodėme dar vieną požymį, teigiantį, kad keturkampis įbrėžtas į apskritimą:

3 teorema. Keturkampis $ABCD$, kurio priešingos kraštinės AB ir CD susikerta taške X, yra įbrėžtas į apskritimą tada ir tik tada, kai teisinga lygybė $AX \cdot BX = CX \cdot DX$.

3 pavyzdys. Atkarpa AB yra pusapskritimio skersmuo, nubrėžta pusapskritimio styga ST, kad $\angle SAT = \alpha$. Taškas M yra stygos ST vidurio taškas, o taškas P yra taško S ortogonalioji projekcija tiesėje AB. Rasime kampą SPM.

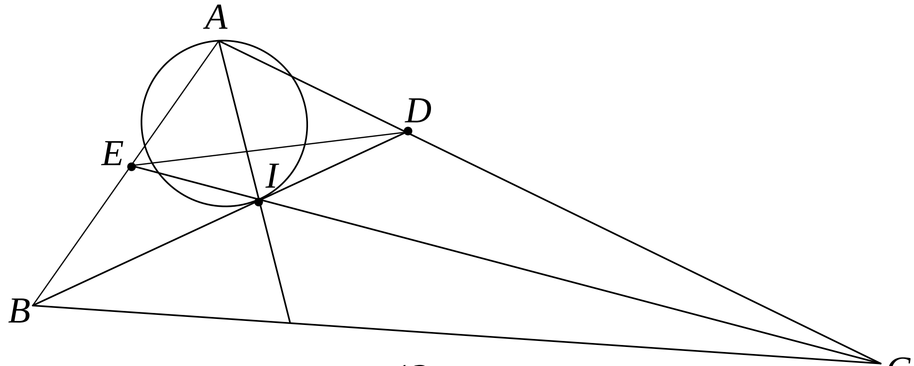
Sprendimas. Sakykime, kad taškas O yra atkarpos AB vidurio taškas (11 pav.). Kadangi skersmuo, einantis per stygos vidurio tašką, yra statmenas tai stygai, tai $OM \perp ST$. Keturkampio $OPSM$ du priešingieji kampai yra statieji, todėl pagal 2 teoremą šis keturkampis yra įbrėžtas į apskritimą. Kampai SPM ir SOM yra įbrėžtiniai ir remiasi į tą patį lanką SM, todėl šie kampai lygūs. Iš lygiašonio trikampio SOT ir iš ryšio tarp į tą patį lanką besiremiančių centrinio ir įbrėžtinio kampų gauname, kad $\angle SOT = 2\angle SOM = 2\angle SPM$, taigi $\angle SPM = \angle SOM = \frac{1}{2}\angle SOT = \angle SAT = \alpha$.



11 pav.

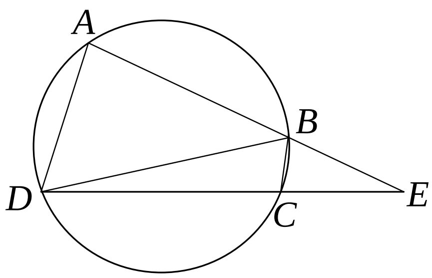
4 pavyzdys. Trikampio ABC $\angle A = 60^0$, kampų B ir C pusiaukampinės BD ir CE kertasi taške I. Įrodysime, kad $ID = IE$.

Sprendimas. Kadangi tiesė AI irgi yra trikampio ABC pusiaukampinė, tai $\angle EAI = \angle DAI = 30^0$. Kadangi tiesės IB ir IC yra trikampio kampų pusiaukampinės (12 pav.), tai pagal 2 pavyzdžio rezultatą $\angle BIC = \angle DIE = 90^0 + \frac{1}{2}\angle A = 120^0$. Kadangi $\angle EAD + \angle EID = 180^0$, tai Iš čia išplaukia, kad keturkampis $AEID$ yra įbrėžtas į apskritimą, todėl $\angle IDE = \angle IAE = 30^0$, $\angle IED = \angle IAD = 30^0$. Taigi $\angle IDE = \angle IED$, todėl trikampis IED lygiašonis t. y. $ID = IE$.



12 pav.

5 pavyzdys. Keturkampis $ABCD$ įbrėžtas į apskritimą, kraštinės AB tęsinys už taško B ir kraštinės CD tęsinys už taško C susikerta taške E (13 pav.). Žinoma, kad $AB = 2, CD = 5, BD = 2\sqrt{6}$, $BE:EC = 4:3$. Rasime kampą BAD.

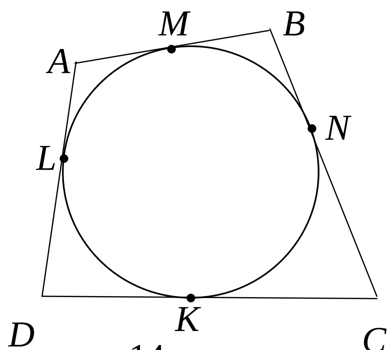


13 pav.

Sprendimas. Žymėkime $BE = 4x$, $CE = 3x$ ir pritaikykime 3 teoremos lygybę $EB \cdot EA = EC \cdot ED$. Gauname lygtį $4x(x+2) = 3x(x+5)$, kurios sprendinys yra $x = 1$. Tuomet $EB = 4, EC = 3, EA = 6, ED = 8$. Trikampiui EBD pritaikome kosinusų teoremą ir randame, kad $\cos\angle BED = \frac{EB^2+ED^2-BD^2}{2 \cdot EB \cdot ED} = \frac{7}{8}$. Trikampiui EAD taikydami kosinusų teoremą gauname, kad $AD^2 = AE^2 + ED^2 - 2 \cdot AE \cdot ED\cos\angle AED = 16$, taigi $AD = 4$. Galiausiai iš trikampio ABD surandame ieškomojo kampo kosinusą $cos\angle BAD = \frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2 \cdot AB \cdot AD} = -\frac{1}{4}$. Kadangi kampo kosinusas yra neigiamas, tai kampas BAD yra bukasis, taigi $\angle BAD = \pi - \arccos\frac{1}{4}$.

Įrodysime teoremą, kuri nustato sąlygas, kad į keturkampį būtų galima įbrėžti apskritimą.

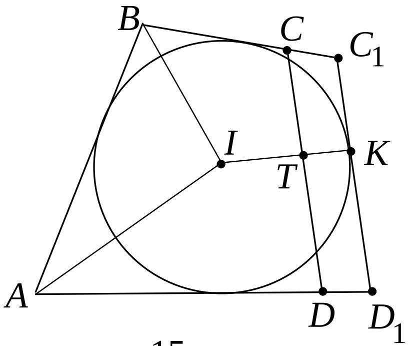
4 teorema. Į keturkampį $ABCD$ yra įbrėžiamas apskritimas tada ir tik tada, kai jo priešingų kraštinių ilgių sumos yra lygios t. y. kai teisinga lygybė $AB + CD = BC + AD$.



14 pav.

Įrodymas. Sakykime, kad į keturkampį $ABCD$ yra įbrėžtas apskritimas, kuris jo kraštines AB, BC, CD, DA liečia taškuose M, N, K, L (14 pav.). Pagal apskritimo liestinių, nubrėžtų iš vieno taško savybes yra teisingos lygybės $AM = AL$, $BM = BN$, $CN = CK$, $DK = DL$. Todėl $AB + CD = (AM + MB) + (CK + KD) = (AL + BN) + (CN + DL) = (AL + LD) + (BN + NC) = AD + BC$.

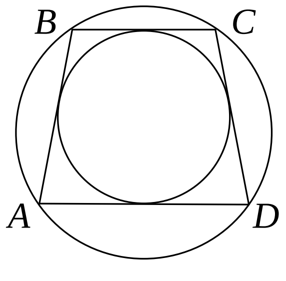
Atvirkščiai, tarkime, kad keturkampiui $ABCD$ yra teisinga lygybė $AB + CD = AD + BC$. Sakykime, kad keturkampio $ABCD$ kampų A ir B pusiaukampinės kertasi taške I (15 pav.), taigi šis taškas yra vienodu atstumu r nutolęs nuo tiesių AB, AD ir BC. Nubrėžiame apskritimą, kurio centras taškas I, o spindulys lygus r. Šis apskritimas liečia tieses AB, BC ir AD. Sakykime, kad jis tiesę CD kerta dviejuose taškuose. Nuleiskime iš taško I statmenį IT tiesei CD ir jame atidedame atkarpą $IK = r$. Per tašką K nubrėžiame tiesę, lygiagrečią su tiese CD, kuri kerta tiesę BC taške C_1, o tiesę AD taške D_1. Kadangi $AK = r$ o tiesės IK ir C_1D_1 yra statmenos, tai tiesė C_1D_1 yra apskritimo liestinė, taigi keturkampis ABC_1D_1 yra įbrėžtas į apskritimą. Tuomet teisinga lygybė $AB + C_1D_1 = BC_1 + AD_1$. Iš jos išplaukia, kad $AB + C_1D_1 = BC + CC_1 + AD + DD_1$. Pridėkime prie abiejų šios lygybės pusių atkarpą CD, tuomet $AB + CD + C_1D_1 = BC + CD + CC_1 + AD + DD_1$. Kadangi yra teisinga lygybė $AB + CD = AD + BC$, tai iš čia gauname, kad $C_1D_1 = CD + CC_1 + DD_1$. Bet ši lygybė neteisinga, nes keturkampio C_1D_1DC viena kraštinė negali būti lygi kitų kraštinių sumai. Taigi šis atvejis negalimas. Analogiškai nustatome, kad negalimas ir atvejis, kai apskritimas su tiese CD neturi bendrų taškų (atlikite tai savarankiškai). Todėl lieka vienas atvejis, kai apskritimas tiesę CD liečia, taigi keturkampis $ABCD$ yra įbrėžtas į apskritimą. Teorema įrodyta.



15 pav.

6 pavyzdys. Nustatysime sąlygas, kada į trapeciją galima įbrėžti apskritimą ir apie ją apibrėžti apskritimą.

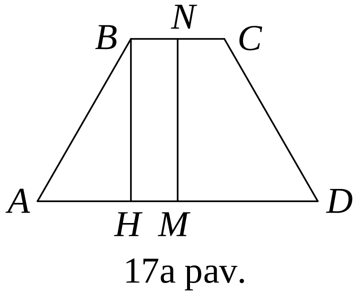
Sprendimas. Sakykime, kad atkarpos AD ir BC yra į apskritimą įbrėžtos trapecijos $ABCD$ pagrindai (16 pav.). Tuomet lankai AB ir CD yra lygūs, nes apskritimo lankai tarp lygiagrečių stygų yra lygūs. Iš čia išplaukia, kad ir stygos AB ir CD yra lygios, taigi trapecija yra lygiašonė. Jei į šią trapeciją įbrėžiamas apskritimas, tai teisinga lygybė $AB + CD = AD + BC$, t. y. $2AB = AD + BC$, $AB = \frac{1}{2}(AD + BC)$, Bet trapecijos pagrindų sumos pusė lygi jos vidurinei linijai. Taigi apie trapeciją galima apibrėžti apskritimą ir į ją galima įbrėžti apskritimą tada ir tik tada, kai trapecija lygiašonė o jos šoninė kraštinė lygi vidurinei linijai.



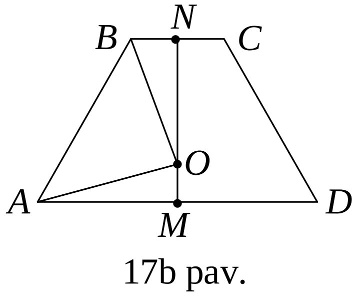
16 pav.

7 pavyzdys. Trapecijos pagrindai lygūs 2 ir 6, apie ją galima apibrėžti apskritimą ir į ją galima įbrėžti apskritimą. Nustatysime, ar apibrėžto apskritimo centras yra trapecijos viduje, trapecijos pagrinde, ar trapecijos išorėje.

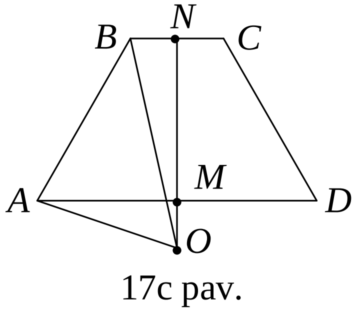
Sprendimas. Sakykime, kad $ABCD$ – duotoji trapecija, $AD = 6, BC = 2$ – jos pagrindai (17 a pav.). Kadangi apie trapeciją galima apibrėžti apskritimą, tai ji lygiašonė, o kadangi į ją galima įbrėžti apskritimą, tai jos šoninė kraštinė lygi vidurinei linijai, taigi $AB = CD = \frac{1}{2}(AD + BC) = 4$. Kadangi trapecija lygiašonė, tai apibrėžto apie ją apskritimo centras ir įbrėžto į ją apskritimo centras yra tiesėje MN, jungiančioje trapecijos pagrindų vidurio taškus. Iš viršūnės B nuleidžiame statmenį $BH \perp AD$, tuomet $AH = \frac{1}{2}(AD - BC) = 2$. Iš stačiojo trikampio ABH surandame $BH = MN = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Jei apibrėžto apie trapeciją



17a pav.



17b pav.

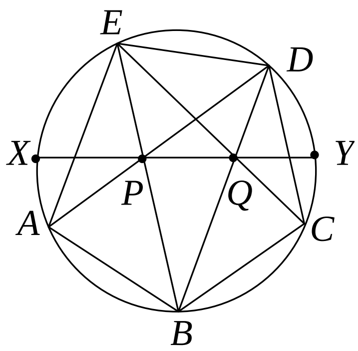


17c pav.

apskritimo spindulys R, o jo centras – taškas O, tai priklausomai nuo taško O padėties galimi trys atvejai: 1) taškas O yra trapecijos viduje (17 b pav.), tuomet $OM + ON = MN$, 2) taškas O yra pagrindo AD vidurio taškas, tuomet $R = 5$, 3) taškas O yra trapecijos išorėje (17 c pav.), tuomet $ON - OM = MN$. Žymėkime $ON = x$, tuomet $OM = 2\sqrt{3} - x$ pirmuoju atveju ir $OM = x - 2\sqrt{3}$ trečiuoju atveju. Taigi abiem atvejais $OM = |x - 2\sqrt{3}|$. Iš stačiųjų trikampių AOM ir BON randame $OA^2 = AM^2 + OM^2 = 9 + |x - 2\sqrt{3}|^2$, $OB^2 = BN^2 + ON^2 = 1 + x^2$. Kadangi $OA = OB$, tai turime lygtį $9 + |x - 2\sqrt{3}|^2 = 1 + x^2$, kurią išsprendę gauname $x = \frac{5}{\sqrt{3}}$. Kadangi $\frac{5}{\sqrt{3}} < 2\sqrt{3}$ (patikrinkite savarankiškai), tai atkarpos ON ilgis yra mažesnis, negu trapecijos aukštinės MN ilgis. Taigi apibrėžto apskritimo centras yra trapecijos viduje.

Jei daugiakampis turi daugiau nei keturias kraštines, nėra tokių paprastų požymių, padedančių nustatyti, ar į daugiakampį galima įbrėžti apskritimą, ar apie daugiakampį galima apibrėžti apskritimą.

8 pavyzdys. Penkiakampis $ABCDE$ yra įbrėžtas į apskritimą (18 pav.), jo kraštinės AB ir BC yra lygios, tiesės AD ir EB susikerta taške P, tiesės BD ir EC – taške Q. Tiesė PQ kerta apskritimą taškuose X ir Y. Įrodysime, kad atkarpos BX ir BY yra lygios.



18 pav.

Sprendimas. Kadangi atkarpos AB ir BC yra lygios, tai lankai AB ir BC irgi lygūs, todėl $\angle ADB = \angle BEC$, o tai reiškia, kad $\angle PDQ = \angle PEQ$. Iš čia išplaukia, kad keturkampis $EDQP$ yra įbrėžtas į apskritimą, todėl $\angle PQE = \angle PDE = \angle ADE = \angle ACE$, taigi tiesės AC ir PQ yra lygiagrečios. Kadangi apskritimo lankai tarp lygiagrečių tiesių yra lygūs, tai iš čia išplaukia lankų AX ir CY lygybė, o tai reiškia, kad lygūs lankai BX ir BY, todėl ir stygos BX ir BY yra lygios.

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Stačiojo trikampio vienas smailusis kampas lygus 60^0, įbrėžto į trikampį apskritimo centras nuo šio kampo viršūnės nutolęs atstumu lygiu 10. Raskite trikampio kraštinių ilgius.
2. Trikampio ABC pusiaukraštinės, nubrėžtos iš viršūnės A, tęsinys kerta apibrėžtą apie šį trikampį apskritimą taške D taip, kad $AC = CD$. Raskite kraštinės AC ilgį, jei $BC = 2$.
3. Trikampyje ABC $\angle A = 60^0$, $\angle B = 50^0$, taškas I yra įbrėžto apskritimo centras, o taškas H yra jo aukštinių susikirtimo taškas (ortocentras). Raskite kampą AHI.
4. Keturkampis $ABCD$ įbrėžtas į apskritimą, kraštinės AB tęsinys už taško B ir kraštinės CD tęsinys už taško C susikerta taške E. Žinoma, kad $EC = 6$, $CD = 2$, $AC = 6\sqrt{3}$, $AB : BE = 2 : 1$. Raskite keturkampio $ABCD$ perimetrą.
5. Keturkampis $ABCD$ yra įbrėžtas į apskritimą, jo įstrižainės susikerta taške E, įstrižainė BD, kurios ilgis lygus 25, yra kampo ABC pusiaukampinė, atkarpos CD ilgis lygus 15. Raskite į kokio ilgio atkarpas taškas E dalija įstrižainę BD.
6. Lygiašonės trapecijos mažesnysis pagrindas lygus1, į trapeciją įbrėžtas apskritimas, kurio spindulys lygus 1. Raskite trapecijos plotą.
7. Apskritimo spindulys lygus 1, apie jį apibrėžta lygiašonė trapecija, kurios vienas pagrindas du kartus ilgesnis už kitą. Raskite trapecijos vidurinės linijos ilgį.
8. Trapecijos pagrindai lygūs 2 ir 10, apie ją galima apibrėžti apskritimą ir į ją galima įbrėžti apskritimą. Nustatykite, ar apibrėžto apskritimo centras yra trapecijos viduje, trapecijos pagrinde, ar trapecijos išorėje.
9. Penkiakampis $ABCDE$ yra įbrėžtas į apskritimą, jo kraštinės AB ir BC yra lygios, tiesės AD ir EB susikerta taške P, tiesės BD ir EC – taške Q. Raskite kampą EPQ, jei $\angle ACE = 40^0$, $\angle ADB = 54^0$.
10. Penkiakampis $ABCDE$ yra įbrėžtas į apskritimą, jo kraštinės AB ir AE yra lygios, kraštinės BC ir CD taip pat lygios, kampas ABE lygus 45^0, kampas EBD lygus 30^0, o $AB = \sqrt{2}$. Raskite penkiakampio plotą.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2019 m. spalio 25 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematikos ir informatikos metodikos katedra, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: http://uosis.mif.vu.lt/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA

L I E T U V O S   J A U N Ų J Ų   M A T E M A T I K Ų   M O K Y K L A

6 tema. RODIKLINĖ FUNKCIJA IR JOS TAIKYMAS

(2018–2020)

Teorinę medžiagą parengė bei šeštąją užduotį sudarė mokyt. ekspertė Marytė Skakauskienė
ir prof. Eugenijus Stankus

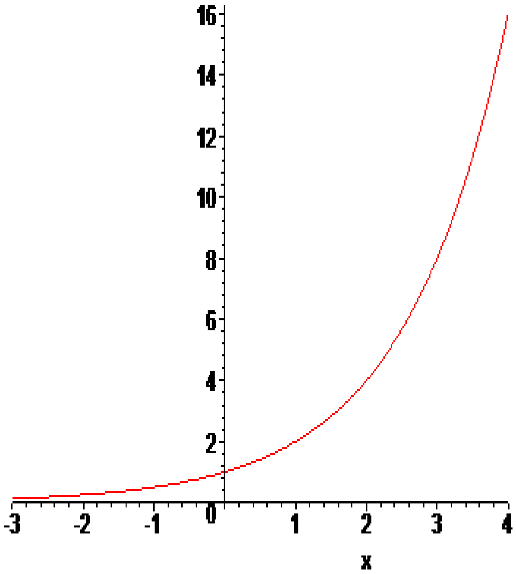
Funkcija, kurią galima išreikšti formule $y = a^x$, $x \in (-\infty; +\infty)$, kai $a > 0$, $a \neq 1$, vadinama *rodikline funkcija*.

Ji – viena iš vadinamųjų greitai augančių funkcijų. Tai iliustruoja ir 1 pav. pateiktas funkcijos $y = 2^x$ grafiko eskizas. Ši rodiklinės funkcijos savybė leidžia ją taikyti modeliuojant kai kuriuos greito augimo reiškinius, tokius kaip gripo ar kitų užkrečiamų ligų epidemijų plitimą, radioaktyvių medžiagų skilimo procesus ir kt. Rodiklinė funkcija naudojama ir finansų matematikoje, pavyzdžiui, išreiškiant *ribinę palūkanų normą*: pagal formulę

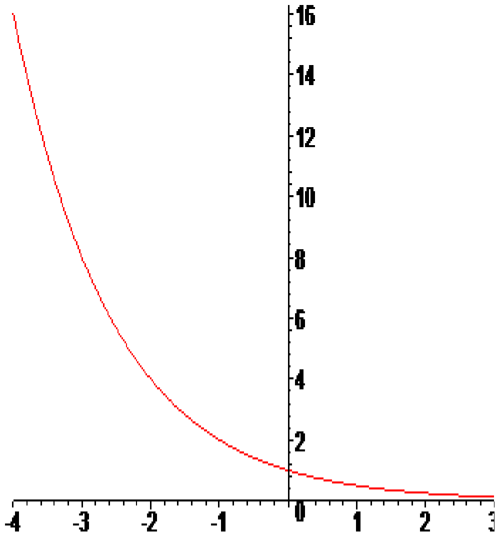
$$P^* = B_0 \cdot (e^p - 1) \tag{1}$$

apskaičiuojamos indėlininko metinės palūkanos; čia B_0 yra pradinis indėlininko kapitalas, p – banko metinė palūkanų norma, išreikšta šimtosiomis vieneto dalimis, $e \approx 2{,}71828$. Šią formulę galima apibūdinti kaip pačią teisingiausią indėlininko požiūriu palūkanų apskaičiavimo formulę. Pagal ją metinės palūkanos priskaičiuojamos ne du, tris, keturis ir t.t. kartus per metus, bet *nenutrūkstamai* – kiekvienu laiko momentu – juk ir bankas indėlininko kapitalu naudojasi kiekvienu laiko momentu.

Gali kilti klausimas, kodėl modeliuojant minėtus reiškinius netaikoma tiesinė funkcija $y = ax + b$ – juk ji žymiai paprastesnė. Atsakymas paprastas – remiantis šia funkcija gaunami rezultatai tolimi nuo realybės – tiek prognozuojant gripo epidemijos plitimą, tiek ir kitais minėtais atvejais. Žinoma, tiesiniai modeliai taip pat plačiai taikomi, tačiau kitokio pobūdžio reiškiniams tirti, pavyzdžiui, kai norime apskaičiuoti kūno, judančio pastoviu greičiu, per tam tikrą laiko intervalą nueitą kelią.



1 pav.



2 pav.

Grįždami prie rodiklinės funkcijos, prisiminkime, kad:

- rodiklinės funkcijos reikšmių sritis – teigiamų realiųjų skaičių aibė;

• kai $a>1$, rodiklinė funkcija yra didėjančioji (žr. 1 pav., $a=2$); kai $0<a<1$, – mažėjančioji (žr. 2 pav., $a=\frac{1}{2}$) realiųjų skaičių tiesėje.

Vienos iš populiaresnių mokyklinės matematikos temų yra rodiklinės lygtys bei rodiklinės nelygybės.

Rodikline lygtimi vadinama lygtis, turinti pavidalą

$$a^{f(x)}=a^{g(x)},\ a>0,\ a\neq 1, \tag{2}$$

arba lygtis, pertvarkoma į tokią.

Iš rodiklinės funkcijos savybių išplaukia, kad

$$a^{f(x)}=a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x). \tag{3}$$

Taigi pagrindinis raktas sprendžiant rodiklines lygtis yra jų pertvarkymas į (2) pavidalo lygtį. Panagrinėsime kelis pavyzdžius.

1 pavyzdys. Išspręskime lygtį $\sqrt{(5+2\sqrt{6})^x}+\sqrt{(5-2\sqrt{6})^x}=10$.

Sprendimas. Abi lygties puses pakėlę kvadratu gauname ekvivalenčią lygtį (nes abi lygties pusės yra teigiami reiškiniai):

$$\sqrt{(5+2\sqrt{6})^x}+\sqrt{(5-2\sqrt{6})^x}=10 \Leftrightarrow (5+2\sqrt{6})^x+2\cdot\sqrt{((5+2\sqrt{6})\cdot(5-2\sqrt{6}))^x}+(5-2\sqrt{6})^x=100 \Leftrightarrow$$

$$(5+2\sqrt{6})^x+2+(5-2\sqrt{6})^x=100.$$

Atkreipkime dėmesį, kad

$$(5-2\sqrt{6})^x=\frac{(5-2\sqrt{6})^x\cdot(5+2\sqrt{6})^x}{(5+2\sqrt{6})^x}=\frac{1}{(5+2\sqrt{6})^x}. \tag{4}$$

Tuomet turėsime:

$$(5+2\sqrt{6})^x+2+(5-2\sqrt{6})^x=100 \Leftrightarrow (5+2\sqrt{6})^x+\frac{1}{(5+2\sqrt{6})^x}=98.$$

Pažymėję

$$t=(5+2\sqrt{6})^x, \tag{5}$$

gauname lygtį:

$$t+\frac{1}{t}=98 \Leftrightarrow t^2-98t+1=0 \Rightarrow t_{1,2}=49\pm\sqrt{2400}=49\pm 20\sqrt{6}=(5\pm 2\sqrt{6})^2.$$

Įrašę šias reikšmes į (5) formulę, turime (2) pavidalo lygtį

$$(5+2\sqrt{6})^x=(5+2\sqrt{6})^2 \text{ arba } (5+2\sqrt{6})^x=(5-2\sqrt{6})^2.$$

Pagal (3) iš pirmosios išplaukia, kad $x_1=2$, o iš antrosios, turėdami omenyje (4) lygybę, gauname $x_2=-2$.

Ats.: 2, –2.

2 pavyzdys. Išspręskime lygtį $9^x-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{7}{2}}-3^{2x-1}$.

Sprendimas.

$$9^x-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{7}{2}}-3^{2x-1} \Leftrightarrow 3^{2x}+3^{2x-1}=2^{x+\frac{7}{2}}+2^{x+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 3^{2x-1}(3+1)=2^{x+\frac{1}{2}}(8+1) \Leftrightarrow 4\cdot 3^{2x-1}=9\cdot 2^{x+\frac{1}{2}}.$$

Pastarosios lygties abi puses padaliję iš reiškinio $9\cdot 2^{x+\frac{1}{2}}$, gauname lygtį $\frac{4\cdot 3^{2x-1}}{9\cdot 2^{x+\frac{1}{2}}}=1$, kurią pertvarkome taip: $\frac{3^{2x-3}}{2^{x-\frac{3}{2}}}=1\Leftrightarrow\left(\frac{9}{2}\right)^{x-\frac{3}{2}}=1$. Iš čia $x-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

Ats.: $\frac{3}{2}$.

Rodikline nelygybe vadinama nelygybė, turinti vieną iš pavidalų

$$a^{f(x)}<a^{g(x)},\quad a^{f(x)}\le a^{g(x)},\quad a^{f(x)}>a^{g(x)},\quad a^{f(x)}\ge a^{g(x)},\ a>0,\ a\ne 1, \qquad (6)$$

arba nelygybė, pertvarkoma į tokią.

Iš rodiklinės funkcijos savybių išplaukia, kad

$$\left.\begin{aligned} a^{f(x)}<a^{g(x)} &\Leftrightarrow f(x)<g(x),\\ a^{f(x)}\le a^{g(x)} &\Leftrightarrow f(x)\le g(x),\\ a^{f(x)}>a^{g(x)} &\Leftrightarrow f(x)>g(x),\\ a^{f(x)}\ge a^{g(x)} &\Leftrightarrow f(x)\ge g(x); \end{aligned}\right.\ \text{(kai } a>1) \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} a^{f(x)}<a^{g(x)} &\Leftrightarrow f(x)>g(x),\\ a^{f(x)}\le a^{g(x)} &\Leftrightarrow f(x)\ge g(x),\\ a^{f(x)}>a^{g(x)} &\Leftrightarrow f(x)<g(x),\\ a^{f(x)}\ge a^{g(x)} &\Leftrightarrow f(x)\le g(x). \end{aligned}\right.\ \text{(kai } 0<a<1) \qquad (8)$$

3 pavyzdys. Tegu $f(x)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x-2}{\left(\frac{1}{2}\right)^x+3}$ ir $a\ge 1$.

Įrodykime, kad su $x\in(-\infty;+\infty)$ galioja nelygybė $f(x)<a$.

Įrodymas. $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x-2}{\left(\frac{1}{2}\right)^x+3}<a\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^x-2<a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+3a$, nes $\left(\frac{1}{2}\right)^x+3>0$.

Pertvarkome gautąją nelygybę taip: $\left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot(1-a)<3a+2$.

Kai $a=1$, ši nelygybė su visomis realiosiomis *x* reikšmėmis galioja ($0<5$).

Kai $a>1$, pastaroji nelygybė ekvivalenti nelygybei $\left(\frac{1}{2}\right)^x>\frac{3a+2}{1-a}$, kuri teisinga su visomis realiosiomis *x* reikšmėmis, nes $\frac{3a+2}{1-a}<0$.

Taigi su $x\in(-\infty;+\infty)$ nelygybė $f(x)<a$ galioja.

4 pavyzdys. Banko metinė palūkanų norma yra 2,5%. Apskaičiuokime kiek per metus priaugs 2500 eurų indėlis, padėtas į banko sąskaitą, skaičiuojant pagal ribinių palūkanų formulę.

Sprendimas. Taikysime (1) formulę su $p=0{,}025$ ir $B_0=2500$. Gausime

$$P^{*} = B_0 \cdot (e^{p} - 1) \approx 2500 \cdot (2{,}71828^{0{,}025} - 1) \approx 2500 \cdot 0{,}02532 = 63{,}30\,.$$

Ats. 63,30 eurų.

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Raskite funkcijos $f(x) = \sqrt{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 1\right) \cdot \sqrt{1-x}}$ apibrėžimo sritį.

2. Nustatykite funkcijos $f(x) = 2^{4\sin x + 3\cos x}$ reikšmių sritį.

3. Kokia yra didžiausia funkcijos $f(x) = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{x^2 - 2x}$ reikšmė?

4. Išspręskite lygtį $\dfrac{3^{\sqrt{-12x}} + 3}{4} = 3^{\sqrt{-3x}}$.

5. Išspręskite nelygybę $\dfrac{2^{1-x} - 2^{x} + 1}{2^{x} - 1} \le 0$.

6. Išspręskite nelygybę $\dfrac{4^{x}}{4^{x} - 3^{x}} < 4$.

7. Turime tirpalą, kuriame nuosėdos sudaro 20% viso kiekio. Kiekvienas filtras sugeria 80% nuosėdų. Kiek mažiausiai reikia filtrų, kad perfiltravus tirpalą gautume tirpalą, turintį ne daugiau kaip 0,01% nuosėdų. (Žinoma, kad $\lg 2 \approx 0{,}30$).

8. Mieste 131071 gyventojas. Vienas gyventojas 9 val. ryto pasakė naujieną dviem savo pažįstamiems. Po pusvalandžio šie du gyventojai perdavė šią naujieną kiekvienas kitiems dviem savo pažįstamiems, dar nežinojusiems jos. Pastarieji keturi vėl po pusvalandžio perpasakojo naujieną kiekvienas dviem savo pažįstamiems ir t. t. Tokiu būdu kas pusvalandį naujieną sužinodavo vis kiti nežinojusieji naujienos miesto gyventojai. Kelintą valandą naujieną sužinojo visi miesto gyventojai?

9. Radioaktyvioji anglis kartais naudojama organinių liekanų (tokių kaip kaulai, medžio anglis, sėklos) amžiui nustatyti. Ši radioaktyvioji anglis skyla pagal dėsnį $y(t) = y_0 \cdot 2^{kt}$; čia $y(t)$ – anglies kiekis laiko momentu t (metai), y_0 – radioaktyviosios anglies kiekis pradiniu laiko momentu.

1) Radioaktyviosios anglies skilimo pusamžis (laikas, per kurį suskyla pusė pradinio radioaktyviosios anglies kiekio y_0) yra 5700 metų. Apskaičiuokite konstantos k reikšmę.

2) Kiek procentų radioaktyviosios anglies liks medžio anglyje po 1500 metų?

10. Į banko, kurio metinė palūkanų norma 1,3%, sąskaitą padėtas 3000 eurų indėlis. Apskaičiuokite kokia pinigų suma bus sąskaitoje po dvejų metų, kai palūkanos prie indėlio priskaičiuojamos nenutrūkstamai.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2019 m. gruodžio 10 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematikos metodikos centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: www.mif.vu.lt/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

7 tema. PROGRESIJOS

(2018–2020)

**Teorinę medžiagą parengė bei 7-ąją užduotį sudarė dr. Antanas Apynis ir
Palaimintojo Teofiliaus Matulionio gimnazijos matematikos mokytoja ekspertė Regina Rudalevičienė**

1. Aritmetinė progresija

Skaičių seka (a_n), kurios kiekvienas narys, pradedant antru, yra lygus prieš jį einančiam nariui, sudėtam su tuo pačiu skaičiumi (žymima d), vadinama *aritmetine progresija*. Skaičius d vadinamas aritmetinės progresijos *skirtumu*.

Aritmetinės progresijos (a_n) pirmųjų n narių *suma* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ žymima S_n.

Sprendžiant uždavinius su aritmetine progresija (a_n) dažniausiai naudojamos šios formulės:

$a_n = a_1 + (n-1)d,\ n = 1, 2, \ldots;$

$a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},\ n = 2, 3, \ldots;$

$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1+d(n-1)}{2} \cdot n.$

Aritmetinė progresija (a_n) yra didėjanti seka, jei $d > 0$; ji yra mažėjanti seka, jei $d < 0$. Jei $d = 0$, tai aritmetinė progresija yra pastovi seka.

Išnagrinėkime kelis uždavinius.

1 pavyzdys. Skaičių sekos (a_n) pirmųjų n narių suma skaičiuojama pagal formulę $S_n = 2n^2 + 3n$. Įrodykime, kad ši seka yra aritmetinė progresija.

Įrodymas. Raskime sekos n-tąjį narį a_n:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2n^2 + 3n) - \left(2(n-1)^2 + 3(n-1)\right) = (2n^2 + 3n) - (2n^2 - n - 1) = 4n + 1.$$

Patikrinkime, ar bet kurių dviejų gretimų sekos narių skirtumas yra tas pats skaičius:

$$a_n - a_{n-1} = (4n+1) - (4(n-1)+1) = (4n+1) - (4n-3) = 4.$$

Matome, kad $a_n = a_{n-1} + 4$, kai $n = 2, 3, \ldots$. Vadinasi, seka (a_n) yra aritmetinė progresija.

2 pavyzdys. Aritmetinė progresija turi 12 narių, kurių suma lygi 354. Progresijos narių su lyginiais numeriais sumos ir narių su nelyginiais numeriais sumos santykis yra $32:27$. Raskime progresijos skirtumą d.

Sprendimas. Pagal sąlygą,

(a_n) – aritmetinė progresija,

$S_{12} = 354$,

$\frac{a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}}{a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}} = \frac{32}{27}.$

Sumą S_{12}, progresijos narius a_2, a_3, ..., a_{12} išreikškime pirmuoju nariu a_1 ir skirtumu d ir išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{2a_1 + 11d}{2} \cdot 12 = 354, \\ \dfrac{(a_1+d)+(a_1+3d)+(a_1+5d)+(a_1+7d)+(a_1+9d)+(a_1+11d)}{a_1+(a_1+2d)+(a_1+4d)+(a_1+6d)+(a_1+8d)+(a_1+10d)} = \dfrac{32}{27}. \end{cases}$$

Atlikę veiksmus, gausime lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2a_1 + 11d = 59, \\ \frac{a_1+6d}{a_1+5d} = \frac{32}{27}, \end{cases}$$

o iš jos – aritmetinės progresijos skirtumą $d = 5$.

Ats.: 5.

3 pavyzdys. Įrodykime, kad jei skaičiai a_1, a_2, a_3, ..., a_n ($a_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3, ..., n$) sudaro aritmetinę progresiją, tai $\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \frac{1}{a_3 \cdot a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{n-1}{a_1 \cdot a_n}$. (1)

Įrodymas. Tegu d ($d \neq 0$) yra aritmetinės progresijos a_1, a_2, a_3, ..., a_n skirtumas. Tada

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} = \frac{1}{a_2 - a_1}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right),$$

$$\frac{1}{a_2 \cdot a_3} = \frac{1}{a_3 - a_2}\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right),$$

$$\frac{1}{a_3 \cdot a_4} = \frac{1}{a_4 - a_3}\left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4}\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4}\right),$$

....

$$\frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{1}{a_n - a_{n-1}}\left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right).$$

Toliau:

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \frac{1}{a_3 \cdot a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} =$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4}\right) + \cdots + \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right) =$$

$$= \frac{1}{d}\left(\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{a_n - a_1}{d a_1 a_n} = \frac{(a_1 + d(n-1)) - a_1}{d a_1 a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

Taigi (1) lygybė tikrai galioja, jei $d \neq 0$ ir tarp progresijos a_1, a_2, a_3, ..., a_n narių nėra lygių nuliui skaičių. Beje, ši lygybė galioja ir kraštutiniu atveju, kai $d = 0$ (tada ji yra akivaizdi).

4 pavyzdys. Tarp miestelių A ir B yra 26 km. Iš miestelio A išvažiavo dviratininkas, kurio greitis pirmą valandą buvo 25 $\frac{km}{h}$, o kiekvieną kitą valandą po 3 $\frac{km}{h}$ didesnis. Tuo pačiu laiku ta pačia kryptimi iš miestelio B išvažiavo antras dviratininkas, kurio greitis pirmą valandą buvo 20 $\frac{km}{h}$, o kiekvieną kitą valandą po 2 $\frac{km}{h}$ didesnis. Po kelių valandų pirmas dviratininkas pasivys antrą?

Sprendimas. Pažymėkime n laiką (val.), per kurį pirmas dviratininkas pasivys antrą dviratininką, a_n ir b_n – atitinkamai pirmo ir antro dviratininko per n-tąją kelionės valandą nuvažiuotą atstumą (km), $n = 1, 2, \dots$.

Aišku, kad skaičių seka (a_n) yra aritmetinė progresija, kurios pirmas narys 25, o skirtumas lygus 3. Skaičių seka (b_n) taip pat yra aritmetinė progresija, jos pirmas narys 20, o skirtumas lygus 2.

Taikydami aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumos formulę rasime pirmo ir antro dviratininko nuvažiuotą atstumą per n valandų.

Per n valandų pirmas dviratininkas nuvažiavo $\frac{2\cdot 25+(n-1)\cdot 3}{2}\cdot n = \frac{47n+3n^2}{2}$ kilometrų, o antras – $\frac{2\cdot 20+(n-1)\cdot 2}{2}\cdot n = 19n + n^2$ kilometrų.

Remdamiesi uždavinio sąlyga, sudarome lygtį

$$\frac{47n+3n^2}{2} = 26 + (19n + n^2).$$

Ji ekvivalenti kvadratinei lygčiai $n^2 + 9n - 52 = 0$ ir turi du sprendinius – skaičius -13 ir 4. Pagal sąlygą $n = 1, 2, \dots$, aišku, kad tinka tik $n = 4$.

Taigi pirmas dviratininkas pasivys antrą po 4 valandų.

Ats.: po 4 val.

2. Geometrinė progresija

Skaičių seka (b_n), kurios pirmas narys b_1 nelygus nuliui, o kiekvienas narys b_n, pradedant antru, yra lygus prieš jį esančiam nariui, padaugintam iš to paties nelygaus nuliui skaičiaus q, vadinama *geometrine progresija*. Skaičius q vadinamas geometrinės progresijos *vardikliu*.

Geometrinės progresijos (b_n) pirmųjų n narių *suma* $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ žymima S_n.

Geometrinei progresijai (b_n) yra teisingos formulės:

$$b_n = b_1 q^{n-1},\ n = 1, 2, \dots;$$

$$b_n^2 = b_{n-1}\cdot b_{n+1},\ n = 2, 3, \dots;$$

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1} = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}.$$

Geometrinė progresija (b_n) yra didėjanti seka, jei $q > 1$; ji yra mažėjanti seka, jei $0 < q < 1$. Jei $q = 1$, tai geometrinė progresija yra pastovi seka.

Begalinės geometrinės progresijos (b_n), kurios vardiklis q tenkina sąlygą $|q| < 1$, *sumą* S galima apskaičiuoti pagal formulę $S = \frac{b_1}{1-q}$.

5 pavyzdys. Įrodykime, kad skaičių seka (b_n), jei $b_n = 2\cdot 3^n$, yra geometrinė progresija.

Įrodymas. Apskaičiuokime sekos (b_n) bet kurių dviejų gretimų narių santykį $\frac{b_n}{b_{n-1}}$:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{2\cdot 3^n}{2\cdot 3^{n-1}} = 3^{n-(n-1)} = 3.$$

Kadangi santykis yra pastovus (jis lygus 3), tai seka (b_n) yra geometrinė progresija, kurios pirmas narys b_1 yra 6, o vardiklis q lygus 3.

6 pavyzdys. Įrodykime, kad jei teigiami realieji skaičiai a, b ir c sudaro geometrinę progresiją, tai galioja lygybė

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^{-3}+b^{-3}+c^{-3}} = a^2b^2c^2. \qquad (2)$$

Įrodymas. Tegu q $(q \neq 1)$ yra geometrinės progresijos vardiklis. Tada $b = aq$, $c = aq^2$, todėl

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + a^3q^3 + a^3q^6 = a^3(1 + q^3 + q^6),$$

$$a^{-3} + b^{-3} + c^{-3} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^3q^3} + \frac{1}{a^3q^6} = \frac{q^6+q^3+1}{a^3q^6},$$

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^{-3}+b^{-3}+c^{-3}} = \frac{a^3(1+q^3+q^6)}{\frac{q^6+q^3+1}{a^3q^6}} = a^6q^6.$$

Kadangi

$a^6q^6 = a^2\cdot(a^2q^2)\cdot(a^2q^4) = a^2\cdot(aq)^2\cdot(aq^2)^2 = a^2b^2c^2$, tai darome išvadą, jog (2) lygybė tikrai galioja, jei $q \neq 1$. Atveju $q = 1$ šios lygybės galiojimas akivaizdus.

7 pavyzdys. Begalinės mažėjančios geometrinės progresijos suma lygi 12, o jos narių kvadratų suma lygi 48. Raskime pirmų dešimties šios progresijos narių sumą.

Sprendimas. Tegu b_1, b_2, b_3, ... yra begalinė mažėjanti geometrinė progresija, kurios suma lygi 12. Aišku, kad jos vardiklis q turi būti intervalui $(0;1)$ priklausantis skaičius, o pirmas narys b_1– teigiamas skaičius.

Remdamiesi begalinės mažėjančios geometrinės progresijos sumos formule, gauname, kad

$$\frac{b_1}{1-q} = 12. \qquad (3)$$

Nesunku suprasti, kad begalinė seka b_1^2, b_2^2, b_3^2, ... taip pat yra begalinė mažėjanti geometrinė progresija, kurios pirmas narys yra b_1^2, o vardiklis q^2.

Pagal sąlygą,

$$\frac{b_1^2}{1-q^2} = 48. \qquad (4)$$

Išspręskime (3) ir (4) lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = 12, \\ \frac{b_1^2}{1-q^2} = 48. \end{cases}$$

Iš pirmos lygties išplaukia, kad $b_1 = 12(1-q)$. Tada iš antros lygties gauname:

$$\frac{\left(12(1-q)\right)^2}{1-q^2} = 48,$$

$$\frac{144(1-q)^2}{(1-q)(1+q)} = 48,$$

$\frac{3(1-q)}{1+q} = 1,$

$3(1-q) = 1 + q.$

O pastaroji lygtis turi vienintelį sprendinį $q = \frac{1}{2}$. Todėl gauname vienintelę pirmo nario b_1 reikšmę $b_1 = 6$ ir ieškomą sumą S_{10}:

$$S_{10} = \frac{b_1(1-q^{10})}{1-q} = \frac{6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3069}{256}.$$

Ats.: $\frac{3069}{256}$.

3. Uždaviniai, sprendžiami taikant aritmetinės ir geometrinės progresijos formules

Yra daug uždavinių, kuriuos sprendžiant prireikia ir aritmetinės, ir geometrinės progresijos formulių. Išnagrinėkime kelis pavyzdžius.

8 pavyzdys. Trys skaičiai, kurių suma 60, sudaro aritmetinę progresiją. Pridėjus prie pirmo jų 2,2, prie antro 4, o prie trečio 7, gaunami skaičiai, sudarantys didėjančią geometrinę progresiją. Raskime tuos tris pradinius skaičius.

Sprendimas. Tegu a_1, a_2 ir a_3 yra ieškomi trys skaičiai, kurių seka a_1, a_2, a_3 yra aritmetinė progresija. Šios progresijos skirtumą pažymėkime d. Pagal sąlygą,

$a_1 + a_2 + a_3 = 60.$

Iš čia (kadangi $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$) gauname, jog

$3a_1 + 3d = 60.$

Vadinasi, $a_1 + d = 20$. O tai reiškia, kad $a_2 = 20$, $a_1 = 20 - d$ ir $a_3 = 20 + d$.

Pagal kitą sąlygos dalį skaičiai

$(20 - d) + 2{,}2 = 22{,}2 - d$, $20 + 4 = 24$ ir $(20 + d) + 7 = 27 + d$ sudaro didėjančią geometrinę progresiją $22{,}2 - d$, 24, $27 + d$.

Pagal geometrinės progresijos apibrėžimą,

$\frac{24}{22{,}2-d} = \frac{27+d}{24}$. Iš čia:

$(22{,}2 - d)(27 + d) = 576,$

$-d^2 - 4{,}8d + 599{,}4 = 576,$

$d^2 + 4{,}8d - 23{,}4 = 0.$

Gautos kvadratinės lygties sprendiniai yra $-7{,}8$ ir 3.

Kadangi geometrinė progresija $22{,}2 - d$, 24, $27 + d$ turi būti didėjanti, tai tinka tik $d = 3$. Vadinasi, $a_1 = 17$, $a_2 = 20$, $a_3 = 23$.

Ats.: 17, 20 ir 23.

9 pavyzdys. Raskime 4 skaičių seką, kurios trys pirmieji nariai sudaro geometrinę progresiją, o trys paskutiniai – aritmetinę progresiją; be to, kraštinių sekos narių suma lygi 14, o vidurinių narių suma lygi 12.

Sprendimas. Tegu x_1, x_2, x_3, x_4 yra ieškoma 4 skaičių seka. Pagal sąlygą, seka x_1, x_2, x_3 yra geometrinė progresija, seka x_2, x_3, x_4 yra aritmetinė progresija, $x_1 + x_4 = 14$ ir $x_2 + x_3 = 12$.

Remdamiesi geometrinės progresijos apibrėžimu, gauname lygybę

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2},$$

o remdamiesi aritmetinės progresijos apibrėžimu – lygybę

$$x_3 - x_2 = x_4 - x_3.$$

Skaičiams x_1, x_2, x_3 ir x_4 rasti išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2}, \\ x_3 - x_2 = x_4 - x_3, \\ x_1 + x_4 = 14, \\ x_2 + x_3 = 12. \end{cases} \tag{5}$$

Iš pradžių spręskime antros, trečios ir ketvirtos lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_3 - x_2 = x_4 - x_3, \\ x_1 + x_4 = 14, \\ x_2 + x_3 = 12, \end{cases}$$

siekdami nežinomuosius x_1, x_2, x_3 išreikšti dydžiu x_4. Spręskime taip:

$$\begin{cases} 2x_3 - x_2 = x_4, \\ x_1 = 14 - x_4, \\ x_2 = 12 - x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_3 - (12 - x_3) = x_4, \\ x_1 = 14 - x_4, \\ x_2 = 12 - x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_3 = 12 + x_4, \\ x_1 = 14 - x_4, \\ x_2 = 12 - x_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_3 = 4 + \frac{1}{3}x_4, \\ x_1 = 14 - x_4, \\ x_2 = 12 - \left(4 + \frac{1}{3}x_4\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 14 - x_4, \\ x_2 = 8 - \frac{1}{3}x_4, \\ x_3 = 4 + \frac{1}{3}x_4. \end{cases} \tag{6}$$

Šias išraiškas įrašykime į (5) sistemos pirmą lygtį ir gausime:

$$\left(8 - \frac{1}{3}x_4\right)^2 = (14 - x_4)\left(4 + \frac{1}{3}x_4\right),$$

$$64 - \frac{16}{3}x_4 + \frac{1}{9}x_4^2 = 56 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_4^2,$$

$$\frac{4}{9}x_4^2 - 6x_4 + 8 = 0,$$

$$2x_4^2 - 27x_4 + 36 = 0.$$

Pastaroji kvadratinė lygtis turi du sprendinius: $\frac{3}{2}$ ir 12.

Jei $x_4 = \frac{3}{2}$, tai $x_1 = \frac{25}{2}$, $x_2 = \frac{15}{2}$, $x_3 = \frac{9}{2}$; jei $x_4 = 12$, tai $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 8$.

Taigi yra dvi 4 skaičių sekos, kurios tenkina visas uždavinio sąlygas: $\frac{25}{2}, \frac{15}{2}, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}$ ir 2, 4, 8, 12.

Ats.: $\frac{25}{2}, \frac{15}{2}, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}$; 2, 4, 8, 12.

10 pavyzdys. Raskime tokius 4 skaičius, sudarančius geometrinę progresiją, kad pridėjus prie jų atitinkamai 1, 1, 4 ir 13 būtų gaunami 4 skaičiai, sudarantys aritmetinę progresiją.

Sprendimas. Tegu a, b, c ir d yra ieškomi 4 skaičiai, o q yra geometrinės progresijos vardiklis. Tada $b = aq$, $c = aq^2$ ir $d = aq^3$.

Pagal sąlygą, skaičių seka

$a + 1, aq + 1, aq^2 + 4, aq^3 + 13$

yra aritmetinė progresija. Vadinasi, turi būti

$(aq + 1) - (a + 1) = (aq^2 + 4) - (aq + 1)$ ir $(aq^2 + 4) - (aq + 1) = (aq^3 + 13) - (aq^2 + 4)$.

Atlikę veiksmus, gauname dviejų lygčių sistemą

$$\begin{cases} aq^2 - 2aq + a + 3 = 0, \\ aq^3 - 2aq^2 + aq + 6 = 0. \end{cases}$$

Ją spręskime taip:

$$\begin{cases} a(q^2 - 2q + 1) + 3 = 0, \\ aq(q^2 - 2q + 1) + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(q - 1)^2 + 3 = 0, \\ aq(q - 1)^2 + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(q - 1)^2 = -3, \\ q \cdot (-3) + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \ q = 2 \text{ ir } a = -3.$$

Vadinasi, $a = -3$, $b = -6$, $c = -12$, $d = -24$.

Ats.: $-3, -6, -12, -24$.

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1. Aritmetinės progresijos pirmųjų n narių suma apskaičiuojama pagal formulę $S_n = 2n^2 - 27n$. Raskite mažiausiąjį n, kuriam esant, $a_n > 0$.

2. Aritmetinės progresijos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ pirmųjų 7 narių suma lygi 2555. Raskite geometrinės progresijos $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ketvirtą narį b_4, jei $b_1 = a_1 = 1$ ir $b_7 = a_7$.

3. Dvi aritmetinės progresijos 17, 21, ... ir 16, 21, ... turi vienodų narių. Raskite pirmų 100 skaičių, kurie yra abiejų progresijų nariai, sumą.

4. Skaičiai a, b, c, d sudaro geometrinę progresiją. Raskite $(a - c)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2 - -(a - d)^2$.

5. Trys skaičiai sudaro geometrinę progresiją. Iš trečio nario atėmus 64, gaunama aritmetinė progresija. Po to iš antro nario atėmus 8, gaunama nauja geometrinė progresija. Kokie yra tie trys skaičiai?

6. Uždaviniai buvo sprendžiami vienas po kito. Kiekvienam uždaviniui, pradedant antruoju, išspręsti prireikdavo po tiek pat kartų mažiau laiko negu prieš tai spręstam. Kiek uždavinių buvo išspręsta, jei visų uždavinių, išskyrus pirmąjį, sprendimas užtruko 63,5 minutės; visų uždavinių, išskyrus paskutinį, sprendimas – 127 minutes, o visų uždavinių, išskyrus pirmuosius du, sprendimas užtruko 31,5 minutės?

7. Į apskritimą, kurio spindulys R, įbrėžtas taisyklingas trikampis; į trikampį įbrėžtas apskritimas; į apskritimą vėl įbrėžtas taisyklingasis trikampis ir t. t. Raskite apskritimų ilgių sumą ir skritulių plotų sumą.

8. Geometrinės progresijos $b_1, b_2, b_3, \ldots$ pirmas narys lygus 1. Kuriai šios progresijos vardiklio reikšmei esant reiškinio $4b_2 + 5b_3$ reikšmė yra mažiausia?

9. Aritmetinės progresijos skirtumas nelygus nuliui. Seka, kurią sudaro šios progresijos pirmo ir antro, antro ir trečio bei trečio ir pirmo nario sandauga, yra geometrinė progresija. Raskite jos vardiklį.

10. Raskite triženklį skaičių, jei jo skaitmenys sudaro geometrinę progresiją, o triženklio skaičiaus, 400 vienetų mažesnio už ieškomą skaičių, skaitmenys sudaro aritmetinę progresiją.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2020 m. sausio 27 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematikos metodikos centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: *http://uosis.mif.vu.lt/ljmm/*

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

8 tema. Lošimai, laimėjimai, tikimybės ...

(2018-2020)

Teorinę medžiagą bei 8-ą užduotį parengė dr. Vilius Stakėnas

Įvykiai

Jeigu neturime tvarkaraščio, nežinome, kada atvažiuos autobusas. Tačiau tvarkaraštį galime gauti! Tada galime pasakyti, ar, pavyzdžiui, reiks autobuso laukti daugiau kaip dešimt minučių, ar ne. Tikimybių teorijos čia nereikia, reikia tvarkaraščio!

Tikimybių teorija yra apie tokius įvykius, kuriems jokių tvarkaraščių tiesiog nėra. Pavyzdžiui, jeigu mesime iš gana didelio aukščio lošimo kauliuką, negalėsime iš anksto pasakyti, ar atvirs sienelė su šešiomis akutėmis.

Vis dėlto, dažnai galime išvardyti paprasčiausias tokio nenuspėjamo bandymo baigtis. Pavyzdžiui, metus kauliuką, galima teigti, kad atvirs viena, dvi, ..., šešios akutės, arba kauliukas pasimes, ir negalėsime nustatyti, kiek akučių atvirto. Tačiau jeigu pastaroji baigtis neįmanoma, galimos tik šešios baigtys $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$, čia ω_i reiškia, kad atvirto sienelė su i akučių. Taigi su kauliuko metimu susiejame tokią baigčių aibę:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$

Dažniausiai mums rūpi sudėtingesni su bandymu siejami įvykiai. Pavyzdžiui, mums gali rūpėti įvykis $A = \{\text{atvirtusių akučių skaičius yra pirminis}\}$. Galime įsivaizduoti, kad jis sudėtas iš šiam įvykiui palankių baigčių, t.y., $A = \{\omega_2, \omega_3, \omega_5\}$.

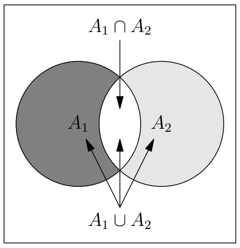
Tokio požiūrio laikomasi visada: apibrėžiamos su bandymu siejamos baigtys, sudaroma baigčių aibė

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\},$$

o kiti įvykiai vaizduojami aibės Ω poaibiais. Žinoma, yra daug bandymų, kurie turi be galo daug baigčių, tačiau palikime juos vėlesniam laikui (kai studijuosite kokiame nors universitete).

Tuščia aibė irgi vaizduoja įvykį, tik jis niekada neįvyksta. Žymėsime jį $\emptyset$. Savo ruožtu, Ω irgi įvykis, kuris visada įvyksta. Tai būtinasis įvykis.

Iš įvykiui A nepalankių baigčių galime sudaryti naują įvykį, kurį žymėsime $\overline{A}$ ir vadinsime priešingu įvykiui A. Akivaizdu, kad įvykiai $A, \overline{A}$ negali kartu įvykti.



Toks požiūris paverčia su bandymu siejamus įvykius poaibiais, o ryšius tarp poaibių galima vaizduoti diagramomis.

Jei A_1, A_2 yra su tuo pačiu bandymu siejami įvykiai (baigčių aibės poaibiai), galime nagrinėti jų sąjungą $A_1 \cup A_2$ ir sankirtą $A_1 \cap A_2$.

Įvykį $A_1 \cup A_2$ sudaro baigtys, palankios A_1 arba A_2 arba abiems įvykiams; žodžiais galima nusakyti $A_1 \cup A_2$ taip: tai įvykis, kuris įvyksta tada ir tik tada, kai įvyksta bent vienas iš įvykių A_1, A_2.

Suprantama, kad galime nagrinėti ir didesnio skaičiaus įvykių sąjungą: $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$ reiškia įvykį, kuris įvyksta tada ir tik tada, kai įvyksta bent vienas iš įvykių $A_1, \ldots, A_n$.

Poaibių sankirta $A_1 \cap A_2$ irgi yra įvykis, kurį sudaro baigtys, palankios abiems įvykiams. Jis įvyksta tada ir tik tada, kai įvyksta abu įvykiai. Jeigu $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, t.y., abu įvykiai kartu įvykti negali, pavadinsime juos nesutaikomais. Žinoma, galime nagrinėti ir didesnio skaičiaus įvykių sankirtas $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m$. Šis įvykis įvyksta tada ir tik tada, kai įvyksta visi įvykiai $A_1, \ldots, A_m$.

Įvykių tikimybės

Geometrijoje apibrėžus figūras: trikampius, keturkampius, daugiakampius, galvojama, kaip juos palyginti pagal didumą. Apibrėžus bandymo baigčių aibę

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

irgi reikia nuspręsti, kaip įvertinti baigčių tikėtinumą. Tą dažnai galime padaryti išnagrinėjus bandymo aplinkybes. Pavyzdžiui, jeigu nėra jokio pagrindo manyti, kad yra išskirtinių baigčių, t.y., linkusių dažniau už kitas pasirodyti atliekant daug vienodų nepriklausomų bandymų, nusprendžiame, kad visos baigtys vienodai galimos ir priskiriame joms vienodus skaičius (tikimybes):

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}.$$

Tada kitų įvykių tikimybes apibrėžiame palankių jiems baigčių tikimybių suma, pavyzdžiui,

$$P(\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}) = P(\omega_2) + P(\omega_4) + P(\omega_6) = \frac{3}{n}.$$

Jeigu susitarsime baigtinės aibės B elementų skaičių žymėti $|B|$, tai įvykio $A \subset \Omega$ tikimybę galėsime apibrėžti taip:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Tai klasikinis tikimybės apibrėžimas. Nesunku įsitikinti, kad bet kokiam įvykiui A teisinga lygybė

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1, \quad \text{arba} \quad P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Dažniausia klaida sprendžiant tikimybių teorijos uždavinius – klasikinio tikimybės apibrėžimo taikymas, kai baigtys nėra vienodai galimos. Tad apibrėžę baigtis gerai pagalvokite, ar jos tikrai pasirodymo požiūriu lygiavertės.

Taikant klasikinį tikimybės apibrėžimą, tenka skaičiuoti baigčių skaičius. Dažniausiai tam pakanka daugybos taisyklės:

jeigu elementų pora sudaroma renkant pirmąjį iš baigtinės aibės A_1, o antrąjį iš baigtinės aibės A_2, tai galima sudaryti

$$|A_1| \cdot |A_2|$$

skirtingų porų.

Aišku, kad taisyklę galima apibendrinti: jeigu elementų eilę sudarome rinkdami po vieną elementą iš aibių $A_1, A_2, \ldots, A_m$, tai galima sudaryti

$$|A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_m|$$

skirtingų eilių. Aibės A_i nebūtinai skirtingos, galime įsivaizduoti, kad keletas jų (ar visos) yra tos pačios aibės „kopijos“.

1 pavyzdys. *Urnoje yra $2n$ rutulių, sužymėtų skaičiais $1, 2, \ldots, 2n$, $n > 3$. Iš urnos vienas po kito traukiami trys rutuliai, po kiekvieno traukimo sugrąžinant rutulį atgal į urną. Kokia tikimybė, kad bent kartą ištrauksime rutulį, pažymėtą lyginiu skaičiumi?*

Sprendimas. Baigtimi tinka pavadinti ištrauktųjų rutulių skaičių eilę $s_1s_2s_3$. Skaičiai gali kartotis, taigi ši eilė – gretinys su pasikartojimais. Naudodamiesi daugybos taisykle rasime

$$|\Omega| = (2n) \cdot (2n) \cdot (2n) = (2n)^3.$$

Įvykiui $A = \{\text{bent vienas skaičius lyginis}\}$ palankių baigčių yra daug ir įvairių. O priešingajam įvykiui $\overline{A}$ palankios tik tos baigtys, kurios vaizduojamos nelyginių skaičių sekomis, taigi

$$|\overline{A}| = n \cdot n \cdot n = n^3, \quad P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{n^3}{(2n)^3} = 1 - \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8}.$$

2 pavyzdys. *Iš tos pačios urnos kaip ankstesniajame pavyzdyje traukiami trys rutuliai, tačiau be grąžinimo. Kokia tikimybė, kad bent kartą ištrauksime rutulį, pažymėtą lyginiu skaičiumi?*

Sprendimas. Sąlygoje nepasakyta, ar rutuliai traukiami vienas po kito ir rikiuojami į eilę, ar ištraukiami visi iš karto. Tarkime, jie rikiuojami. Tada bandymo baigtis bus skirtingų skaičių eilė $s_1s_2s_3$. Tai gretinys be pasikartojimų. Naudodamiesi daugybos taisykle vėl galime skaičiuoti, kiek yra būdų ištraukti pirmąjį, antrąjį, trečiąjį rutulius. Gausime:

$$|\Omega| = (2n) \cdot (2n - 1) \cdot (2n - 2).$$

Savo ruožtu priešingajam įvykiui $\overline{A}$ palankių įvykių skaičius yra

$$|\overline{A}| = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2),$$

taigi

$$P(A) = 1 - \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{(2n) \cdot (2n-1) \cdot (2n-2)} = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{n-2}{2n-1}.$$

Beje, kiek patyrinėję reiškinį galite įsitikinti, kad $P(A) > 7/8$.

O kokį atsakymą gautume tarę, kad visi trys rutuliai traukiami iš karto? Tuomet baigtimi reiktų laikyti trijų skaičių aibę $\{s_1, s_2, s_3\}$, t.y., derinį iš trijų elementų. Tada

$$|\Omega| = C_{2n}^3 = \frac{(2n) \cdot (2n-1) \cdot (2n-2)}{3!}, \quad |\overline{A}| = C_n^3 = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!},$$

ir gautume tą pačią tikimybės reikšmę

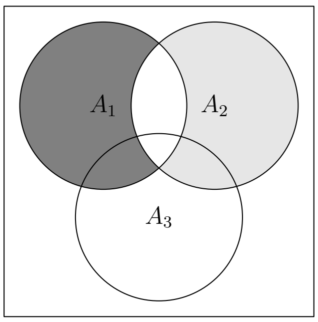
$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_n^3}{C_{2n}^3} = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{n-2}{2n-1}.$$

Derinių skaičių teks skaičiuoti sprendžiant šios užduoties uždavinius. Taigi prisiminkite:

$$C_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Įvykių sąjungos tikimybė

Tarkime, A_1, A_2 yra du su tuo pačiu bandymu susiję atsitiktiniai įvykiai. Pavaizduokime juos diagrama. Norėdami surasti įvykių sąjungos $A_1 \cup A_2$ tikimybės išraišką, galvokime apie įvykius kaip plokštumos figūras, o apie tikimybes kaip apie jų plotus.



Tuomet iš karto galėsime užrašyti

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

O kaip išreikšti trijų įvykių A_1, A_2, A_3 sąjungos tikimybę $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$? Ir vėl pasitelkime diagramą. Jeigu sudėsime įvykių tikimybes, gausime per daug:

$$S_1 = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3), \quad S_1 > P(A_1 \cup A_2 \cup A_3),$$

nes sankirtų $A_i \cap A_j$ tikimybės prisideda du kartus. Sudėkime šias tikimybes:

$$S_2 = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3).$$

Dabar gausime

$$S_1 - S_2 < P(A_1 \cup A_2 \cup A_3),$$

nes skirtume $S_1 - S_2$ sankirtos $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ tikimybė iš viso neįskaičiuota. Taigi, reikia ją pridėti:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = S_1 - S_2 + S_3.$$

O dabar bendra formulė įvykių $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sąjungos tikimybei reikšti:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n-1} S_n,$$

čia S_1 yra visų tikimybių $P(A_i)$ suma (iš viso n dėmenų), S_2 – visų tikimybių $P(A_i \cap A_j)$ suma (iš viso C_n^2 dėmenų), S_m – visų sankirtų po m įvykių tikimybių suma (iš viso C_n^m dėmenų), $1 \leqslant m \leqslant n$.

3 pavyzdys. *Urnoje yra n kamuoliukų, sužymėtų skaičiais nuo 1 iki n. Prieš lošimą žaidėjas užpildo 3×3 gardelės kvadratėlius įrašydamas į juos skirtingus aibės $\{1, 2, \ldots, n\}$ skaičius. Iš urnos vienas po kito atsitiktinai traukiami kamuoliukai ir skelbiami ant jų užrašyti skaičiai. Jeigu kamuoliuko skaičius yra įrašytas gardelės langelyje, žaidėjas jį užbraukia. Jeigu paskelbus šešis skaičius žaidėjo gardelėje bus užbraukta kuri nors eilutė, žaidėjas laimi prizą. Kokia tikimybė laimėti?*

Sprendimas. Pažymėkime A įvykį, kad žaidėjas laimės, A_1, A_2, A_3 – įvykius, kad bus užbrauktos atitinkamai pirmoji, antroji ir trečioji eilutės. Tada įvykis A yra įvykių A_i sąjunga, taigi A tikimybei skaičiuoti galime naudoti sąjungos tikimybės formulę. Pastebėkime, kad trys įvykiai A_i negali kartu įvykti, taigi

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = S_1 - S_2, \\
S_1 &= P(A_1) + \cdots + P(A_6), \\
S_2 &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3).
\end{aligned}$$

Bandymas prasideda, kai žaidėjas užpildo lentelę skaičiais. Pažymėkime pirmosios eilutės skaičius a_{11}, a_{12}, a_{13}, antrosios ir trečiosios atitinkamai a_{21}, a_{22},a_{23} ir a_{31}, a_{32}, a_{33}. Kadangi laimėjimo tikimybė nepriklauso nuo skaičių paskelbimo tvarkos, galime manyti, kad visi šeši skaičiai paskelbiami iš karto. Tada bandymo baigtis yra šešių skaičių iš aibės $\{1, 2, \ldots, n\}$ derinys. Taigi iš viso yra C_n^6 skirtingų baigčių. Kad įvyktų įvykis A_1 turi būti būtinai paskelbti skaičiai a_{11}, a_{12}, a_{13} ir dar trys papildomai. Šiam įvykiui A_1 yra C_{n-3}^3 palankių baigčių,

$$P(A_1) = \frac{C_{n-3}^3}{C_n^6}.$$

Aišku, kad kitų įvykių tikimybės yra tos pačios, taigi

$$S_1 = 3 \cdot \frac{C_{n-3}^3}{C_n^6}.$$

Kad įvyktų įvykis $A_1 \cap A_2$ turi būti paskelbti skaičiai $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$. Taigi šiam įvykiui tėra viena palanki baigtis. Kitoms sankirtoms – taip pat. Todėl

$$S_2 = 3 \cdot \frac{1}{C_n^6},$$

ir

$$P(A) = 3 \cdot \frac{C_{n-3}^3 - 1}{C_n^6}.$$

Sąlyginė tikimybė

Urna su rutuliais yra puikus įrankis studijuojant tikimybių teoriją. Pasitelkime ją dar kartą. Tarkime, urnoje yra du balti ir trys juodi rutuliai. Ketiname traukti du rutulius. Pažymėkime A_1 įvykį, kad pirmas rutulys bus baltas, A_2 – kad bus baltas antrasis. Nors iš karto aišku, kad $P(A_1) = 2/5$, panagrinėkime, kaip šis atsakymas gaunamas „teoriškai“. Kadangi bandymą sudaro du atsitiktinių rutulių traukimai, tai tarę, kad balti rutuliai pažymėti skaičiais $1, 2$, o juodieji – skaičiais $3, 4, 5$ bandymo baigtį galime vaizduoti skirtingų skaičių pora $\langle n_1, n_2 \rangle$. Tokių porų yra $5 \cdot 4$. Įvykiui A_1 palankios tos poros, kuriose $n_1 = 1$ arba $n_1 = 2$. Tokių porų yra $2 \cdot 4$, taigi $P(A_1) = 2 \cdot 4/(5 \cdot 4) = 2/5$. Panašiai skaičiuodami gautume, kad $P(A_2) = 2/5$.

O dabar tarkime, kad bandymas prasidėjo, ir sužinota, kad įvykis A_1 įvyko. Tada iš naujo galime suskaičiuoti įvykio tikimybę, ji lygi $1/4$. Kad atskirtume šią tikimybę, kurią suradome sužinoję, kad įvykis A_1 įvyko, vadinsime ją sąlygine A_2 tikimybe su sąlyga A_1 ir žymėsime $P(A_2|A_1)$. Taigi

$$P(A_2) = \frac{2}{5}, \quad P(A_2|A_1) = \frac{1}{4}.$$

„Teoriškai“ skaičiuodami tikimybę $P(A_2|A_1)$ žinojome, kad galimos tik tos baigtys, kurios palankios A_1, o A_2 palankios tik tos baigtys, kurios sudaro $A_1 \cap A_2$. Taigi

$$P(A_2|A_1) = \frac{|A_1 \cap A_2|}{|A_1|} = \frac{|A_1 \cap A_2|/|\Omega|}{|A_1|/|\Omega|} = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}.$$

Šitaip sąlyginė tikimybė apibrėžiama ir bendruoju atveju.

Tegu A_1, A_2 yra du su tuo pačiu bandymu susieti atsitiktiniai įvykiai, $P(A_1) > 0$. Įvykio A_2 sąlygine tikimybe su sąlyga, kad įvyko A_1, vadinsime skaičių

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}.$$

Padauginę apibrėžimo lygybę iš $P(A_1)$ perrašysime ją taip:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1).$$

Formulė duoda metodą įvykių sankirtos tikimybei skaičiuoti. Ją galime apibendrinti. Tarkime, A_1, A_2, A_3 yra trys su tuo pačiu bandymu susiję įvykiai. Tada

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2)P(A_3|A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2).$$

Bendru atveju, jeigu $A_1, A_2 \ldots, A_n$ yra su tuo pačiu bandymu susiję įvykiai, $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$, tai

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

3 pavyzdys. *Urnoje yra 2 balti ir 3 juodi rutuliai. Iš urnos atsitiktinai vienas po kito traukiami trys rutuliai. Prieš traukiant antrąjį ir trečiąjį rutulius į urną vietoje anksteniame žingsnyje ištrauktojo įdedami 3 tos pačios spalvos rutuliai. Kokia tikimybė, kad visi trys ištrauktieji rutuliai bus balti?*

Sprendimas. Pažymėkime B_1, B_2, B_3 įvykius, kad pirmas, antras, trečias ištrauktieji rutuliai bus balti. Reikia surasti jų sankirtos tikimybę:

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1)P(B_2|B_1)P(B_3|B_1 \cap B_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{9} = \frac{16}{105}.$$

Jei $P(A_2|A_1) = P(A_2)$, t.y. $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, tai įvykiai vadinami nepriklausomais.

Jeigu A_1, A_2, A_3 yra trys su tuo pačiu bandymu susiję įvykiai, tai jie vadinami nepriklausomais, jeigu

$$\begin{aligned} &P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2),\ P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3), \\ &P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3),\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3). \end{aligned}$$

Analogiškai apibrėžiame ir didesnio skaičiaus įvykių nepriklausomumo sąlygą.

4 pavyzdys. *Kad būtų priimtas į šachmatų klubą Tomas turi sužaisti tris partijas su klubo nariais A, B ir nepralaimėti dviejų partijų iš eilės. Įvykių, kad Tomas laimės prieš A, B tikimybės yra $p_A, p_B, 1 > p_A > p_B > 0$. Partijos negali baigtis lygiosiomis, o jų baigtys yra nepriklausomos viena nuo kitos. Tomas gali pasirinkti vieną iš varžovų eilių: ABA arba BAB. Kurio pasirinkimo atveju tikimybė įstoti į klubą yra didesnė?*

Sprendimas. Pažymėkime įvykį, kad Tomas laimės i-tąją partiją L_i, kad pralaimės – N_i, o U – įvykį, kad bus priimtas į klubą. Šiek tiek paprasčiau skaičiuoti priešingo įvykio tikimybę:

$$P(\overline{U}) = P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) + P(N_1 \cap N_2 \cap L_3) + P(L_1 \cap N_2 \cap N_3).$$

Tarkime, Tomas pasirinko varžovų eilę ABA. Tada žymėdami pralaimėjimo tikimybes $q_A = 1 - p_A, q_B = 1 - p_B$, o įvykį, kad Tomas bus priimtas į klubą U_{ABA}, gausime

$$\begin{aligned} P(\overline{U_{ABA}}) &= q_Aq_Bq_A + q_Aq_Bp_A + p_Aq_Bq_A = q_A^2q_B + 2p_Aq_Aq_B \\ &= q_Aq_B(q_A + 2p_A) = q_Aq_B(q_A + p_A + p_A) = q_Aq_B(1 + p_A). \end{aligned}$$

Jeigu Tomas pasirinktų eilę B,A,B, tai įvykio U_{BAB}, kad jis bus priimtas, priešingojo įvykio tikimybė būtų

$$P(\overline{U_{BAB}}) = q_Aq_B(1 + p_B).$$

Kuri iš šių tikimybių didesnė? Panagrinėkime santykį

$$\frac{P(\overline{U_{ABA}})}{P(\overline{U_{BAB}})} = \frac{q_A q_B(1+p_A)}{q_A q_B(1+p_B)} = \frac{1+p_A}{1+p_B}.$$

Kadangi $p_A > p_B$, tai $P(\overline{U_{ABA}}) > P(\overline{U_{BAB}})$, taigi pasirodo, kad Tomui geriau du kartus žaisti su stipresniuoju varžovu B, negu su silpnesniuoju A.

Galima tą patį atsakymą gauti ir kitaip. Tarkime buvo pasirinkta eilė ABA. Jeigu Tomas laimės prieš B, bus tikrai priimtas. Jeigu pralaimės – būtina nei karto nepralaimėti A. Taigi

$$P(U_{ABA}) = P(L_2) + P(L_1 \cap N_2 \cap L_2) = p_B + p_A^2 q_B.$$

Analogiškai

$$P(U_{BAB}) = P(L_2) + P(L_1 \cap N_2 \cap L_2) = p_A + p_B^2 q_A.$$

Dabar galima įrodyti, kad

$$P(U_{BAB}) - P(U_{ABA}) > 0.$$

Pilnosios tikimybės formulė

Jeigu visa baigčių aibė Ω padalyta į dvi nesikertančias dalis H_1, H_2 (du nesutaikomus įvykius), tai šios dalys bet kurį kitą įvykį A irgi dalija į dvi nesutaikomas dalis $A \cap H_1$ ir $A \cap H_2$. Taigi

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2).$$

Pritaikę sankirtų tikimybėms skaičiuoti tikimybių sandaugos formulę, gausime

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2).$$

Tai yra įžymioji *pilnosios tikimybės formulė*. Ją galime apibendrinti taip: jei visa baigčių aibė (būtinais įvykis) išskaidyta į nesikertančias dalis $H_1, H_2, \ldots, H_n$ (nesutaikomus įvykius), kad $P(H_i) > 0$ su visais i, tai bet kokio kito įvykio tikimybei teisinga lygybė

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \cdots + P(H_n)P(A|H_n).$$

4 pavyzdys. *Dviejose urnose yra po 2 baltus ir po 4 juodus rutulius. Iš pirmos urnos du atsitiktinai ištraukti rutuliai perkeliami į antrąją urną. Po to iš jos atsitiktinai traukiamas rutulys. Kokia tikimybė, kad jis bus baltas?*

Sprendimas. Bandymą sudaro du žingsniai: rutulių perkėlimas ir atsitiktinio rutulio traukimas iš antrosios urnos. Pirmasis žingsnis nusako baigčių aibės išskaidymą. Pažymėkime H_0, H_1, H_2, kad tarp perkeltųjų buvo atitinkamai $0, 1, 2$ balti rutuliai. Nesunku suskaičiuoti jų tikimybes:

$$P(H_0) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15}, \quad P(H_1) = \frac{C_2^1 C_4^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}, \quad P(H_2) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}.$$

Tegu B reiškia įvykį, kad iš antrosios urnos buvo ištrauktas baltas rutulys. Kadangi

$$P(B|H_0) = \frac{2}{8}, \quad P(B|H_1) = \frac{3}{8}, \quad P(B|H_2) = \frac{4}{8},$$

tai

$$\begin{aligned} P(B) &= P(H_0)P(B|H_0) + P(H_1)P(B|H_1) + P(H_2)P(B|H_2) \\ &= \frac{6}{15} \cdot \frac{2}{8} + \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{15} \cdot \frac{4}{8} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Šių tikimybių teorijos žinių užteks užduočiai išspręsti. Jeigu norite sužinoti daugiau, atsiverskite:

V.Stakėnas. Tikimybių mokslo pagrindai. Vilniaus universitetas, 2017.

Aštuntoji užduotis

1 uždavinys. *Lošiama metant tris simetriškus šešiasienius kauliukus, kurių sienelės sužymėtos skaičiais* $1, 2, 3, 4, 5, 6$. *Laimėjimas lygus skaičių ant atvirtusių sienelių sumai. Apskaičiuokite tikimybes, kad laimėjimas bus lygus* 9 *ir* 10.

2 uždavinys. *Urnoje yra* 5 *balti ir* 5 *juodi rutuliai, koordinačių plokštumoje pažymėti taškai su sveikaskaitėmis koordinatėmis. Taške* $O(0; 0)$ *stovi kareivėlis. Iš urnos žaidėjas atsitiktinai traukia vieną rutulį: jeigu jis baltas – kareivėlis žengia žingsnį į dešinę, t.y., pereina į tašką* $A(1; 0)$; *jeigu juodas – pereina į tašką* $B(0; 1)$. *Po to iš urnos traukiamas antras, trečias rutulys, kol urna ištuštėja. Po kiekvieno ištraukto rutulio kareivėlis pereina į gretimą dešinįjį pažymėtą tašką, jeigu ištrauktas rutulys baltas, ir į gretimą viršutinįjį, jeigu rutulys juodas. Kokia tikimybė, kad šitaip keliaudamas iš taško* $O(0; 0)$ *į* $N(5; 5)$ *kareivėlis aplankys bent vieną iš taškų* $T_1(2; 2), T_2(3; 2), T_3(2; 3), T_4(3; 3)$*?*

3 uždavinys. *Urna su rutuliais ta pati kaip 2 uždavinyje, tas pats kareivėlis stovi taške* $O(0; 0)$. *Jo kelionės taisyklė – ta pati, tačiau atsitiktinai ištraukus rutulį jis sugrąžinamas į urną. Kokia tikimybė, kad dešimties žingsnių kelionėje kareivėlis nors kartą užsuks į bent vieną bent vieną iš taškų* $T_1(2; 2), T_2(3; 2), T_3(2; 3), T_4(3; 3)$*?*

4 uždavinys. *Urnoje yra* n *rutulių, sužymėtų skaičiais nuo* 1 *iki* $n, n \geqslant 9$. *Prieš lošimą žaidėjas užpildo* 3×3 *gardelės kvadratėlius įrašydamas į juos atsitiktinai parinktus skirtingus aibės* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *skaičius. Iš urnos vienas po kito atsitiktinai traukiami rutuliai ir skelbiami ant jų užrašyti skaičiai. Jeigu rutulio skaičius yra įrašytas gardelės langelyje, žaidėjas jį užbraukia. Jeigu paskelbus penkis skaičius žaidėjo gardelėje bus užbraukta kuri nors eilutė ar* *stulpelis, žaidėjas laimi prizą. Kokia tikimybė laimėti? Kokia būtų tikimybė laimėti, jeigu būtų traukiami šeši skaičiai? Apskaičiuokite šias tikimybes, kai* $n = 10$.

5 uždavinys. *Urnoje yra 3 balti ir 3 juodi rutuliai. Žaidėjai A ir B pakaitomis atsitiktinai be grąžinimo traukia iš urnos po rutulį. Žaidimas pasibaigia, kai antrą kartą ištraukiamas baltas rutulys. Kokia tikimybė, kad laimės A? Kokia būtų A laimėjimo tikimybė, jeigu urnoje būtų 2 balti ir 4 juodi? Jeigu būtų 4 balti ir 2 juodi?*

6 uždavinys. *Yra trys urnos, kiekvienoje jų – šeši dviejų spalvų rutuliai. Pirmoje urnoje yra 3 juodi ir 3 balti rutuliai, antroje – 2 balti ir 4 juodi, trečioje baltų rutulių skaičius nežinomas. Iš pirmos urnos atsitiktinai parinktas rutulys perkeliamas į antrą urną, po to – atsitiktinai parinktas antros urnos rutulys perkeliamas į trečiąją, iš jos – atsitiktinis rutulys grąžinamas į pirmąją urną. Kokia tikimybė, kad pirmoje urnoje vėl bus 3 juodi ir 3 balti rutuliai?*

7 uždavinys. *Kad būtų priimtas į šachmatų klubą Tomas turi sužaisti po vieną partiją su klubo nariais A, B, C ir nepralaimėti dviejų partijų iš eilės. Partijos negali baigtis lygiosiomis. Įvykiai, kad Tomas laimės prieš A, B, C yra nepriklausomi, o jų tikimybės lygios* $p_A, p_B, p_C, 1 > p_A > p_B > p_C > 0$. *Tomas gali pasirinkti vieną iš šešių partijų su varžovais eilę.*

1. Įrodykite, kad tikimybė įstoti į klubą pasirinkus varžovų eilę ABC yra lygi tikimybei įstoti į klubą pasirinkus varžovų eilę CBA.

2. Kokią varžovų eilę turėtų pasirinkti Tomas, kad tikimybė įstoti į klubą būtų didžiausia?

8 uždavinys. *Urnoje yra* $N \geqslant 3$ *rutulių, iš jų* u *balti, kiti juodi. Iš urnos atsitiktinai ištraukiami trys rutuliai, nustatoma daugumos ištrauktųjų rutulių spalva ir visi trys rutuliai perkeliami į antrą urną. Iš jos žaidėjas atsitiktinai traukia vieną rutulį. Jeigu ištraukia daugumos spalvos rutulį – laimi prizą.*

1. Raskite tikimybę P_u, *kad žaidėjas nelaimės.*

2. Panagrinėkite tikimybių santykį P_u/P_{u-1} *ir įrodykite, kad tikimybės* P_u *didėja, kai* u *prabėga intervalo* $[0; (N+1)/2]$ *sveikuosius skaičius, ir mažėja, kai prabėga intervalo* $((N+1)/2; N]$ *skaičius.*

9 uždavinys. *Mesta moneta atvirsta herbu su tikimybe p ir skaičiumi su tikimybe q, $p+q=1$. Moneta metama keturis kartus, vienodų rezultatų eilę pavadinkime bloku, o bloko rezultatų skaičių – jo ilgiu. Pavyzdžiui, jeigu metimų rezultatai yra $HHSH$, tai pirmojo bloko ilgis lygus 2, antrojo – 1. Raskite įvykių*

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\textit{pirmojo bloko ilgis lygus } 1\}, \\ A_2 &= \{\textit{antrojo bloko ilgis lygus } 1\}, \\ B_1 &= \{\textit{pirmojo bloko ilgis lygus } 2\}, \\ B_2 &= \{\textit{antrojo bloko ilgis lygus } 2\} \end{aligned}$$

tikimybes. Kurio iš įvykių A_1, A_2 tikimybė didesnė? Kurio iš įvykių B_1, B_2 tikimybė didesnė?

10 uždavinys. *Ant stalo – penki gaubteliai, po vienu iš jų – moneta. Žaidėjas pasirenka du gaubtelius, bet jų neatidengia. Žaidimo vedėjas siūlo žaidėjui pasirinkti vieną iš žaidimo pabaigos būdų:*

1. Žaidėjas atidengia savo gaubtelius ir pasiima monetą, jeigu ją randa.

2. Žaidimo vedėjas atidengia vieną iš savo dangtelių, po kuriuo nėra monetos, o žaidėjas keičia abu savo dangtelius į vedėjo dangtelius ir juos atidengia.

3. Žaidimo vedėjas atidengia du savo dangtelius, po kuriais nėra monetos, o žaidėjas keičia vieną savo dangtelių į vedėjo dangtelį ir atidengia turimus dangtelius.

Kam lygios tikimybės žaidėjui gauti monetą šiais pasirinkimo atvejais? Kuriuo atveju tikimybė didžiausia?

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki 2020 m. kovo 7 d. mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematikos metodikos centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų interneto svetainės adresas http://www.mif.vu.lt/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS
(2018–2020)

1. Knygynas gavo fizikos ir matematikos vadovėlių. Pardavus 50 % matematikos ir 20 % fizikos vadovėlių, iš viso 390 knygų, matematikos vadovėlių liko 3 kartus daugiau negu fizikos. Kiek matematikos ir kiek fizikos vadovėlių gavo knygynas?

Sprendimas. Tegu x yra matematikos, o y – fizikos vadovėlių skaičius.

Pagal pirmą sąlygos dalį galima sudaryti lygtį $0{,}5x + 0{,}2y = 390$, o pagal antrą sąlygos dalį – lygtį $0{,}5x = 3 \cdot 0{,}8y$.

Dydžių x ir y reikšmėms rasti reikia išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} 0{,}5x + 0{,}2y = 390, \\ 0{,}5x = 2{,}4y. \end{cases}$$

Spręsdami gauname:

$$\begin{cases} 2{,}4y + 0{,}2y = 390, \\ x = 4{,}8y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2{,}6y = 390, \\ x = 4{,}8y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 150, \\ x = 720. \end{cases}$$

Ats.: 720 ir 150.

2. Išspręskite lygtį $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12.$

Sprendimas. Žymime $x^2 + x + 1 = y.$ Tuomet lygtis yra tokia $y(y+1) = 12.$ Šios lygties sprendiniai $y_1 = 3,$ $y_2 = -4.$ Kai $x^2 + x + 1 = 3,$ gauname sprendinius $x_1 = 1,$ $x_2 = -2.$ Kai $x^2 + x + 1 = -4,$ sprendinių nėra.

Ats.: 1 ir –2.

3. Lentoje yra parašyti keli skaičiai. Lygiai du iš jų dalijasi iš 2 ir lygiai trisdešimt trys iš jų dalijasi iš 33. Tegu M yra didžiausias iš jų. Kokia galėtų būti mažiausias M reikšmė?

Sprendimas. Du skaičiaus 33 kartotiniai galėtų būti lyginiai skaičiai (pavyzdžiui, 66 ir 132), o kiti 31 – nelyginiai:

$$33 \cdot 1,\ 33 \cdot 3,\ 33 \cdot 5, \ldots, 33 \cdot 61,$$
$$33 \cdot 61 = 2013.$$

Ats.: 2013.

4. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} x = 6\sqrt{x+y}, \\ y = 2\sqrt{x+y}. \end{cases}$

Sprendimas. Akivaizdu, kad $x = 0,$ $y = 0$ yra sistemos sprendinys. Jei $x \neq 0,$ $y \neq 0,$ tai padaliję pirmąją lygtį iš antrosios, turime, kad $\frac{x}{y} = 3,$ t. y. $x = 3y.$ Įrašę į antrąją lygtį, turime $y = 2\sqrt{3y + y},$ t. y. $y = 4\sqrt{y}.$ Kadangi $y \neq 0,$ tai $\sqrt{y} = 4,$ todėl $y = 16,$ $x = 48.$

Ats.: (0, 0) ir (48, 16).

5. Raskite lygčių sistemos $\begin{cases} xy + z = 2017, \\ x + yz = 2018 \end{cases}$ sveikuosius sprendinius.

Sprendimas. Iš antrosios lygybės atėmę pirmąją, gauname, kad $x + yz - xy - z = 1,$ t. y. $x - z + y(z - x) = 1,$ arba $(z - x)(y - 1) = 1.$ Kadangi $z - x$ ir $y - 1$ yra sveikieji skaičiai, tai ši lygybė yra teisinga tik kai $z - x = 1,$ $y - 1 = 1$ arba kai $z - x = -1,$ $y - 1 = -1.$ Pirmuoju atveju turime $y = 2,$ $z = x + 1,$ todėl iš pirmosios sistemos lygties turime $2x + x + 1 = 2017.$ Iš čia gauname, kad $x = 672,$ $z = 673.$ Antruojo atveju $y = 0,$ todėl $z = 2017,$ $x = 2018.$

Ats.: (672, 2, 673), (2018, 0, 2017).

6. Raskite visas sveikųjų skaičių x ir y poras $(x; y),$ kuriomis esant galioja lygybė

$$x^3 + 3x^2y - 4y^3 = 100.$$

Sprendimas. Kairiąją lygybės pusę galima pertvarkyti taip:

$$x^3+3x^2y-4y^3=(x^3-y^3)+(3x^2y-3y^3)=(x-y)(x^2+xy+y^2)+3y(x^2-y^2)=$$
$$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+3y(x+y))=(x-y)(x^2+4xy+4y^2)=(x-y)(x+2y)^2.$$

Vadinasi, lygybė $x^3+3x^2y-4y^3=100$ yra ekvivalenti lygybei $(x-y)(y-2y)^2=100.$

Galimi 4 atvejai: 1) $(x+2y)^2=1;$ 2) $(x+2y)^2=100;$ 3) $(x+2y)^2=4;$ 4) $(x+2y)^2=25.$

Jei $(x+2y)^2=1,$ tai būtinai $x-y=100$. Tada $x=100+y$ ir $(100+3y)^2=1$. Iš čia gauname:

$$100+3y=\pm 1,$$
$$3y=-100\pm 1,$$
$$y=-33.$$

Taigi $x=67,\ \ y=-33.$

Jei $(x+2y)^2=100$, tai būtinai $x-y=1.$ Spręsdami lygčių sistemą, gauname:

$$\begin{cases}x-y=1,\\(x+2y)^2=100\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1+y,\\(x+3y)^2=100\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1+y,\\x+3y=\pm 10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1+y,\\3y=-1\pm 10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1+y,\\y=3\end{cases}\Rightarrow x=4,\ y=3.$$

Jei $(x+2y)^2=4,$ tai būtinai $x-y=25.$ Tada gauname:

$$\begin{cases}x-y=25,\\(x+2y)^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=25+y,\\(25x+3y)^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=25+y,\\25+3y=\pm 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=25+y,\\3y=-25\pm 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=25+y,\\y=-9\end{cases}\Rightarrow x=16,\ y=-9.$$

Jei $(x+2y)^2=25,$ tai būtinai $x-y=4.$ Šiuo atveju gauname:

$$\begin{cases}x-y=4,\\(x+2y)^2=25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4+y,\\(x+3y)^2=25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4+y,\\4+3y=\pm 5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4+y,\\3y=-4\pm 5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4+y,\\y=-3\end{cases}\Rightarrow x=1,\ y=-3.$$

Ats.: (67; –33), (4; 3), (16; –9), (1; –3).

7. Sugalvotas teigiamas sveikasis skaičius. Prie jo iš dešinės pusės prirašomas skaitmuo 5 ir iš gauto naujo skaičiaus atimamas sugalvoto skaičiaus kvadratas. Skirtumas padalijamas iš sugalvoto skaičiaus ir gaunamas skaičius, vienetu didesnis už sugalvotą skaičių. Koks skaičius sugalvotas?

Sprendimas. Jei a yra sugalvotas skaičius, tai $10a+5$ yra skaičius, gautas prirašius iš dešinės skaitmenį 5. Remdamiesi tolesne sąlygos dalimi, galėtume sudaryti šią lygtį:

$$\frac{(10a+5)-a^2}{a}=a+1.$$

Padauginę iš a, gauname lygtį

$$100+5-a^2=a^2+a,$$

o iš jos – kvadratinę lygtį

$$2a^2-9a-5=0,$$

turinčią du sprendinius: $a_1=5$ ir $a_2=-\dfrac{1}{2}.$

Aišku, kad uždavinio sąlygą atitinka tik skaičius 5. Taigi sugalvotas skaičius 5.

Ats.: 5.

8. Kvadrato *ABCD* kraštinėse *AD* ir *DC* pažymėti taškai *M* ir *N* (*M* – kraštinėje *AD*, *N* – kraštinėje *DC*) taip, kad $\angle BMA=\angle NMD=60^\circ.$ Raskite kampo *MBN* didumą.

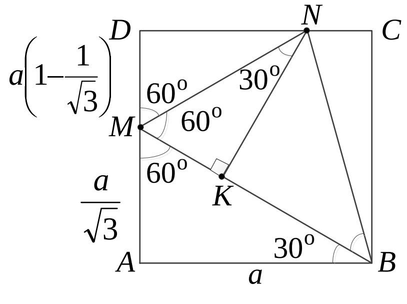
Sprendimas. $MK=MD=a\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right),\quad KN=\dfrac{MK}{\sqrt{3}}=\dfrac{a(\sqrt{3}-1)}{3},$

$BM=2\cdot\dfrac{a}{\sqrt{3}}.$

$$BK=BM-MK=\frac{2a}{\sqrt{3}}-\frac{a(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}=\frac{a(3-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}=\frac{a(\sqrt{3}-1)}{3}.$$

Taigi $BK=KN$. Vadinasi, $\angle MBN=45°.$

Ats.: 45°.



9. Trapecijos *ABCD* šoninės kraštinės *CD* ilgis lygus 10, o šoninės kraštinės *AB* vidurio taškas nuo tiesės *CD* nutolęs atstumu lygiu 6. Raskite trapecijos plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad taškas *M* yra kraštinės *AB* vidurio taškas, $MH \perp CD$, $H \in CD$, taigi $MH = 6$. Įrodysime, kad trikampio *MCD* plotas lygus trapecijos *ABCD* ploto pusei. Tikrai, jei taškas *N* yra kraštinės *CD* vidurio taškas, tai trikampių *MNC* ir *MND* aukštinės, nuleistos atitinkamai iš viršūnių *C* ir *D* į jų bendrą kraštinę *MN*, yra lygios trapecijos aukštinės pusei. Taigi trikampio *MCD* plotas, kuris lygus trikampių *MNC* ir *NMD* plotų sumai, lygus trapecijos vidurinės linijos *MN* ir jos aukštinės sandaugos pusei, t. y., lygus trapecijos *ABCD* ploto pusei. Kadangi trikampio *MCD* plotas lygus kraštinės *CD* ir į ją nubrėžtos aukštinės *MH* sandaugos pusei, tai šio trikampio plotas lygus 30. Taigi trapecijos *ABCD* plotas lygus 60.

Ats.: 60.

10. Taškas *H* yra smailiojo trikampio *ABC* aukštinių susikirtimo taškas, o taškas *O* – apibrėžto apie trikampį *ABC* apskritimo centras. Raskite kampą *OAB*, jei $\angle AHB = 110^\circ$.

Sprendimas. Kadangi taškas *O* yra apibrėžto apie trikampį apskritimo centras, o taškas *C* yra to apskritimo taškas, tai $\angle AOB = 2\angle ACB$, $\angle OAB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOB) = 90^\circ - \angle ACB$. Kita vertus $110^\circ = \angle AHB) = 180^\circ - \angle HAB - \angle HBA = 180^\circ - (90^\circ - \angle ABC) - (90^\circ \angle BAC) = \angle ABC + \angle BAC =$ $= 180^\circ - \angle ACB$, taigi $\angle ACB = 70^\circ$. Iš čia seka, kad $\angle OAB = 20^\circ$.

Ats.: 20°.

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA

L I E T U V O S J A U N Ų J Ų M A T E M A T I K Ų M O K Y K L A

PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

(2018–2020)

1. Teigiamų skaičių A ir B procentinis santykis lygus 80 %. Raskite $A + B$, jei $A \cdot B = 180$.

Sprendimas. Pagal sąlygą, $A = 0{,}8B.$ Todėl

$$AB = 180 \Rightarrow 0{,}8B^2 = 180 \Rightarrow B^2 = 225 \Rightarrow B = 15.$$

Vadinasi, $A + B = 0{,}8 \cdot 15 + 15 = 12 + 15 = 27.$

Ats.: 27.

2. Prekių kainos buvo mažinamos tris kartus atitinkamai 10 %, 20 %, 25 %. Keliais procentais atpigo prekės?

Sprendimas. Pradinę prekės kainą pažymėjus p, kainos mažėjimo seką galima užrašyti taip:

$$p \to 0{,}9p \to 0{,}8 \cdot (0{,}9p) = 0{,}72p \to 0{,}75 \cdot (0{,}72p) = 0{,}54p.$$

Vadinasi, prekė atpigo 46 %.

Ats.: 46 %.

3. Vienoje fermoje karvių 12,5 % mažiau negu kitoje, bet išmilžis iš vienos karvės 8 % didesnis. Kurioje fermoje pieno primelžiama mažiau ir keliais procentais?

Sprendimas. Tegu n yra pirmos fermos karvių skaičius, o l yra iš kiekvienos karvės primelžiamo pieno kiekis (litrais). Tada antros fermos (kurioje karvių yra 12,5 % mažiau) karvių skaičius yra $0{,}875n$, o išmilžis iš kiekvienos karvės – $1{,}08\,l$.

Matome, kad pirmoje fermoje iš viso primelžiama nl litrų pieno, o antroje – $0{,}875n \cdot 1{,}08l = 0{,}945nl$ litrų.

Taigi antroje fermoje primelžiama $(1 - 0{,}945) \cdot 100 = 5{,}5$ procento mažiau pieno negu pirmoje.

Ats.: antroje mažiau; 5,5 %.

4. Iš 5 % riebumo pieno pagaminus varškę, kurios riebumas 15,5 %, lieka 0,5 % riebumo išrūgų. Kiek kg varškės gaunama iš 1000 kg pieno?

Sprendimas. Tegu x yra ieškomas varškės kiekis (kilogramais), gaunamas iš 1000 kg pieno. Tada $1000 - x$ yra išrūgų kiekis (kilogramais).

Pagal sąlygą, varškėje yra $0{,}155x$ kg riebalų, o išrūgose – $0{,}005(1000 - x)$ kg riebalų. Bendras riebalų kiekis piene yra $0{,}05 \cdot 1000 = 50$ (kg). Iš lygties $0{,}155x + 0{,}005(1000 - x) = 50$ gauname, kad $x = 300$ (kg).

Ats.: 300 kg.

5. Pirmame lydinyje vario yra 6 kg, o antrame – 12 kg. Sulydžius juos būtų gaunamas lydinys, turintis 36 % vario. Kiek procentų vario yra pirmame lydinyje ir kiek antrame lydinyje, jei šių procentų santykis yra 1 : 3 ?

Sprendimas. Vario, esančio pirmame lydinyje, procentų skaičių pažymėkime p. Tada $3p$ yra vario, esančio antrame lydinyje, procentų skaičius.

Gauto lydinio masė

$$\frac{6}{0{,}01p} + \frac{12}{0{,}01 \cdot 3p} = \frac{1000}{p} \ \text{(kg).}$$

Gautame lydinyje vario yra $0{,}36 \cdot \frac{1000}{p} = \frac{360}{p}$ (kg), arba $6 + 12 = 18$ (kg). Todėl $\frac{360}{p} = 18, \quad p = 20.$

Pirmame lydinyje yra 20 % vario, antrame – 60 % vario.

Ats.: 20 %, 60 %.

6. Dviejuose bankuose metų pabaigoje kiekvienai sąskaitai buvo priskaičiuojamos palūkanos: pirmame banke – 60 % sąskaitoje buvusios sumos, antrame – 40 % sąskaitoje buvusios sumos. Metų pradžioje žmogus dalį turėtų pinigų padėjo į pirmą banką, o likusią dalį – į antrą banką, prieš tai apskaičiavęs, kad po dvejų metų abiejuose bankuose laikomų pinigų kiekis padvigubės. Kurią turėtų pinigų dalį žmogus padėjo į pirmą banką?

Sprendimas. Tegu žmogaus turėta pinigų suma yra a. Jei į pirmą banką padėtų pinigų suma būtų x, tai po dvejų metų šiame banke žmogus turėtų pinigų sumą $1{,}6x+0{,}6\cdot 1{,}6x=2{,}56x$, o antrame banke – pinigų sumą $1{,}4(a-x)+0{,}4\cdot 1{,}4(a-x)=1{,}96(a-x)$.

Kad po dvejų metų bendras pinigų kiekis būtų dvigubai didesnis, turi galioti lygybė

$$2{,}56x+1{,}96(a-x)=2a.$$

Iš jos gauname, kad $x=\frac{1}{15}a$.

Taigi į pirmą banką žmogus padėjo $\frac{1}{15}$ turėtų pinigų dalį ($6\frac{2}{3}$ %).

Ats.: $\frac{1}{15}$, arba $6\frac{2}{3}$ %.

7. Dviejų produktų kaina iš pradžių buvo vienoda. Pirmo produkto kaina buvo mažinama du kartus po 15 %, o antro produkto kaina buvo sumažinta x %. Raskite tokią x reikšmę, kad ir po aprašyto kainų sumažinimo abu produktai vėl kainuotų vienodai.

Sprendimas. Pradinę produktų kainą pažymėkime p. Pirmo produkto kaina po pirmo sumažinimo 15 % buvo $0{,}85p$, o po antro – $0{,}85\cdot 0{,}85p=0{,}7225p$. Antro produkto kaina po jos sumažinimo x % buvo $p-0{,}01x\cdot p=(1-0{,}01x)p$.

Kad abiejų produktų kainos vėl būtų lygios, turi galioti lygybė $1-0{,}01x=0{,}7225$, iš kurios gauname, kad $x=27{,}75$.

Ats.: 27,75.

8. Uoste yra dvi krovikų brigados, kraunančios prekes iš laivo. Jei šios brigados dirbtų atskirai, tai prie pirmos brigados sugaišto laiko pridėję antros brigados sugaištą laiką, gautume 12 valandų, o abiejų brigadų darbo trukmės skirtumas sudarytų 45 % laiko, per kurį abi brigados, dirbdamos kartu, iškrautų laivą. Apskaičiuokite, per kiek laiko kiekviena brigada, dirbdama atskirai, iškrautų visą laivą.

Sprendimas. Tegu t_1 ir t_2 yra laikas (valandomis), per kurį laivą iškrautų atitinkamai pirma ir antra brigada, jei dirbtų atskirai, o t – laikas (valandomis), per kurį laivą iškrautų abi brigados, jei dirbtų kartu. Darbo apimtį pažymėkime a. Nagrinėkime atvejį $t_1>t_2$. Pirmos brigados darbo sparta (darbo apimties a dalis, atliekama per valandą) yra $\frac{a}{t_1}$, o antros brigados – $\frac{a}{t_2}$. Vadinasi, per valandą abi brigados kartu atliktų $\frac{a}{t_1}+\frac{a}{t_2}=\frac{a(t_1+t_2)}{t_1t_2}$ viso darbo dalį. Dydis $\frac{a(t_1+t_2)}{t_1t_2}$ yra abiejų brigadų bendro darbo sparta, todėl laikas, per kurį abi brigados, dirbdamos kartu, iškrautų laivą, yra $t=\frac{a}{\frac{a(t_1+t_2)}{t_1t_2}}=\frac{t_1t_2}{t_1+t_2}$.

Pagal sąlygą, $t_1+t_2=12$, $t_1-t_2=0{,}45t$. Iš čia gauname:

$$\begin{cases} t_1+t_2=12, \\ t_1-t_2=0{,}45\cdot\dfrac{t_1t_2}{t_1+t_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1=12-t_2, \\ 12-2t_2=0{,}45\cdot\dfrac{(12-t_2)t_2}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1=12-t_2, \\ 12-2t_2=\dfrac{3}{80}(12-t_2)t_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1=12-t_2, \\ 960-160t_2=36t_2-3t_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1=12-t_2, \\ 3t_2^2-196t_2+960=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1=12-t_2, \\ t_2=\dfrac{98\pm 82}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1=12-t_2, \\ t_2=\dfrac{16}{3} \text{ arba } t_2=60 \text{ (netinka)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_2=\frac{16}{3},\ t_1=\frac{20}{3}.$$

Taigi pirma brigada laivą iškrautų per 6 h 40 min, o antra – per 5 h 20 min.

Aišku, kad atveju $t_2>t_1$ gautume, jog $t_1=5$ h 20 min ir $t_2=6$ h 40 min.

Ats.: Viena brigada per 5 h 20 min, o kita – per 6 h 40 min.

9. Stotyje A traukinys užtruko 1 h 42 min, todėl gavęs signalą važiavo į punktą B tokiu grafiku: kelio atkarpoje, sudarančioje 90 % viso kelio, jis važiavo 20 % didesniu greičiu, o likusioje kelio atkarpoje – 25 % didesniu greičiu negu turėjo važiuoti pagal tvarkaraštį. Į punktą B traukinys atvyko laiku. Kiek laiko šis traukinys turi važiuoti tarp A ir B pagal tvarkaraštį?

Sprendimas. Tegu t yra ieškomas laikas, s – atstumas tarp A ir B, o v – traukinio greitis, važiuojant pagal tvarkaraštį. Pagal sąlygą,

$$\frac{0{,}9s}{1{,}2v}+\frac{0{,}1s}{1{,}25v}=t-1{,}7.$$

Įrašę t vietoj $\frac{s}{v}$, gausime:

$$\frac{0{,}9}{1{,}2}t+\frac{0{,}1}{1{,}25}t=t-1{,}7,$$

$$\frac{3}{4}t+\frac{2}{25}t=t-1{,}7,$$

$$t=10 \ \text{(h)}.$$

Taigi pagal tvarkaraštį traukinys iš A į B turi važiuoti 10 h.

Ats.: 10 h.

10. Stebint dviejų kristalų augimą nustatyta, kad pirmojo kristalo masė per pirmus 3 mėnesius padidėjo tiek pat, kiek antrojo per pirmus 7 mėnesius. Po 12 mėnesių paaiškėjo, kad pirmojo kristalo masė padidėjo 4 %, o antrojo – 5 %. Raskite pirmojo ir antrojo kristalo pradinių masių santykį.

Sprendimas. Tegu m_1 ir m_2 yra atitinkamai pirmo ir antro kristalo pradinė masė. Jei pirmo kristalo masė per mėnesį padidėjo dydžiu a_1, o antro – dydžiu a_2, tai (pagal sąlygą)

$$\frac{12a_1}{m_1}=0{,}04 \quad \text{ir} \quad \frac{12a_2}{m_2}=0{,}05.$$

Iš čia gauname, kad $m_1=300a_1$, $m_2=240a_2$ ir $\frac{m_1}{m_2}=\frac{300a_1}{240a_2}=1{,}25\cdot\frac{a_1}{a_2}$.

Dydžius a_1 ir a_2 sieja sąryšis $3a_1=7a_2$, iš kurio išplaukia, kad $\frac{a_1}{a_2}=\frac{7}{3}$. Todėl

$$\frac{m_1}{m_2}=1{,}25\cdot\frac{7}{3}=\frac{35}{12}.$$

Vadinasi, $m_1:m_2=35:12$.

Ats.: 35:12.

Sprendimus parengė mokytoja ekspertė Regina Rudalevičienė ir docentas Antanas Apynis

L I E T U V O S J A U N Ų J Ų M A T E M A T I K Ų M O K Y K L A

ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

(2018–2020)

1. Raskite $a(x)+b(x)$, $a(x)-b(x)$, $a(x)\cdot b(x)$ ir kampu padalykite $a(x)$ iš $b(x)$ (nurodykite dalmenį ir liekaną), kai

$$a(x)=2x^6-3x^5+x^4+x^3-2x^2+3,\qquad b(x)=x^3+2x^2-x+4.$$

Sprendimas. Daugindami atskliaučiame ir suprastiname

$$(2x^6-3x^5+x^4+x^3-2x^2+3)\cdot(x^3+2x^2-x+4).$$

Dalyba kampu:

$$\begin{array}{l|l}
2x^6-3x^5+x^4+x^3-2x^2+3 & x^3+2x^2-x+4 \\ \hline
2x^6+4x^5-2x^4+8x^3 & 2x^3-7x^2+17x-48 \\
-7x^5+3x^4-7x^3-2x^2+3 & \\
-7x^5-14x^4+7x^3-28x^2 & \\
17x^4-14x^3+26x^2+3 & \\
17x^4+34x^3-17x^2+68x & \\
-48x^3+43x^2-68x+3 & \\
-48x^3-96x^2+48x-192 & \\
139x^2-116x+195 &
\end{array}$$

Ats.: $a(x)+b(x)=2x^6-3x^5+x^4+2x^3-x+7$,
$a(x)-b(x)=2x^6-3x^5+x^4-4x^2+x-1$,
$a(x)\cdot b(x)=2x^9+x^8-7x^7+14x^6-13x^5-x^4+9x^3-2x^2-3x+12$,
dalmuo $q(x)=2x^3-7x^2+17x-48$, liekana $r(x)=139x^2-116x+195$.

2. a) Padalykite kampu $a(x)$ iš $b(x)$ ir nurodykite dalmenį bei liekaną, kai

$$a(x)=3x^8+4x^6-5x^5+4x^4+3x^3+2x+1,\qquad b(x)=x^2+2x+2.$$

b) Koks bus a) dalies atsakymas, jei vietoj $b(x)$ imsime $b_1(x)=\frac{x^2}{2}+x+1$? Atsakymą gaukite ne dalydami kampu, bet remdamiesi a) dalies rezultatais.

Sprendimas. a)

$$\begin{array}{l|l}
3x^8+4x^6-5x^5+4x^4+3x^3+2x+1 & x^2+2x+2 \\ \hline
3x^8+6x^7+6x^6 & 3x^6-6x^5+10x^4-13x^3+10x^2+9x-38 \\
-6x^7-2x^6-5x^5+4x^4+3x^3+2x+1 & \\
-6x^7-12x^6-12x^5 & \\
10x^6+7x^5+4x^4+3x^3+2x+1 & \\
10x^6+20x^5+20x^4 & \\
-13x^5-16x^4+3x^3+2x+1 & \\
-13x^5-26x^4-26x^3 & \\
10x^4+29x^3+2x+1 & \\
10x^4+20x^3+20x^2 & \\
9x^3-20x^2+2x+1 & \\
9x^3+18x^2+18x & \\
-38x^2-16x+1 & \\
-38x^2-76x-76 & \\
60x+77 &
\end{array}$$

b) Jei $a(x)=b(x)\cdot q(x)+r(x)$, tai iš $b(x)=2b_1(x)$ gauname $a(x)=b_1(x)\cdot q_1(x)+r(x)$, kur $q_1(x)=2q(x)$ ir kur $\deg r(x)<\deg b_1(x)$. Vadinasi, $q_1(x)$ ir $r(x)$ yra dalmuo bei liekana.

Ats.: a) $q(x)=3x^6-6x^5+10x^4-13x^3+10x^2+9x-38$ ir $r(x)=60x+77$;
b) $q_1(x)=6x^6-12x^5+20x^4-26x^3+20x^2+18x-76$ ir $r(x)=60x+77$.

3. Padalykite $a(x)$ iš $b(x)$ ir kampu, ir pagal Hornerio schemą, nurodykite dalmenį bei liekaną, kai

$$a(x)=2x^3+x^2-x+4,\qquad b(x)=x+6.$$

Sprendimas. Žinoma, sprendžiant abiem būdais gaunamas tas pats atsakymas:

	2	1	-1	4
-6	2	$(-6)\cdot 2+1=-11$	$(-6)\cdot(-11)-1=65$	$(-6)\cdot 65+4=-386$

$$\begin{array}{l|l}
2x^3+x^2-x+4 & x+6 \\ \hline
2x^3+12x^2 & 2x^2-11x+65 \\
-11x^2-x+4 & \\
-11x^2-66x & \\
65x+4 & \\
65x+390 & \\
-386 &
\end{array}$$

Ats.: $q(x)=2x^2-11x+65$, $r(x)=-386$.

4. Duotas daugianaris $a(x) = 2x^{10} + 3x^8 + 4x^7 - 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 1$. Pagal Hornerio schemą: a) padalykite $a(x)$ iš $b(x) = x - 1$, nurodykite dalmenį ir liekaną; b) apskaičiuokite $a(-3)$.

Sprendimas. Tereikia sudaryti tokias lenteles:

	2	0	3	4	0	-5	4	3	2	0	1
1	2	2	5	9	9	4	8	11	13	13	14

	2	0	3	4	0	-5	4	3	2	0	1
-3	2	-6	21	-59	177	-536	1612	-4833	14501	-43503	130510

Ats.: a) $q(x) = 2x^9 + 2x^8 + 5x^7 + 9x^6 + 9x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 11x^2 + 13x + 13$, $r(x) = 14$; b) $a(-3) = 130510$.

5. Pagal Hornerio schemą sudarydami **vieną** kelių eilučių lentelę, raskite

$$a(x) = 3x^8 + 14x^7 + 27x^6 + 31x^5 + 30x^4 + 28x^3 + 19x^2 + 7x + 1$$

šaknies $c = -1$ kartotinumą.

Sprendimas. Atlikime dalybą iš $x - c = x + 1$ kelis kartus, kol gausime nenulinę liekaną:

	3	14	27	31	30	28	19	7	1
-1	3	11	16	15	15	13	6	1	**0**
-1	3	8	8	7	8	5	1	**0**	
-1	3	5	3	4	4	1	**0**		
-1	3	2	1	3	1	**0**			
-1	3	-1	2	1	**0**				
-1	3	-4	6	**-5**					

Matome, kad $a(x) = (x+1)^5 \cdot (3x^3 - x^2 + 2x + 1)$, kur $3x^3 - x^2 + 2x + 1$ iš $x + 1$ jau nesidalija (liekana -5).

Ats.: šaknies kartotinumas lygus 5.

6. Daugianaris $a(x) = x^9 - x^8 + 2x^7 + x^6 + 3x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ užrašytas pavidalu

$$a(x) = (x-4) \cdot (x+3) \cdot q(x) + a_1 \cdot (x-4) + a_0,$$

kur $q(x)$ yra daugianaris, o a_1 ir a_0 – konstantos.

a) Pagal Hornerio schemą raskite daugianarį $q_1(x) = (x+3) \cdot q(x) + a_1$ (kaip dalmenį) ir a_0 (kaip liekaną). b) Papildydami a) dalies Hornerio schemos lentelę dar viena eilute, raskite $q(x)$ ir a_1.

Sprendimas.

	1	-1	2	1	0	3	-4	2	3	-1
4	1	3	14	57	228	915	3656	14626	58507	234027
-3	1	0	14	15	183	366	2558	6952	37651	

Ats.: a) $q_1(x) = x^8 + 3x^7 + 14x^6 + 57x^5 + 228x^4 + 915x^3 + 3656x^2 + 14626x + 58507$, $a_0 = 234027$; b) $q(x) = x^7 + 14x^5 + 15x^4 + 183x^3 + 366x^2 + 2558x + 6952$, $a_1 = 37651$.

7. Daugianaris $a(x) = 2x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 + x^3 - x^2 + 5x + 2$ užrašytas pavidalu

$$a(x) = a_7(x-2)^7 + a_6(x-2)^6 + \cdots + a_2(x-2)^2 + a_1(x-2) + a_0,$$

t. y. išreikštas ne x, bet $y = x - 2$ laipsniais.

a) Pagal Hornerio schemą padalykite $a(x)$ iš $x - 2$ ir taip raskite $q_1(x) = a_7(x-2)^6 + a_6(x-2)^5 + \cdots + a_2(x-2) + a_1$ (kaip dalmenį) ir a_0 (kaip liekaną). b) Papildydami a) dalies Hornerio schemos lentelę dar viena eilute (dalydami $q_1(x)$ iš $x - 2$), raskite $q_2(x) = a_7(x-2)^5 + a_6(x-2)^4 + \cdots + a_3(x-2) + a_2$ ir a_1. c) Tęsdami šį procesą (kiekvieną naują dalmenį dalydami iš $x - 2$ ir prie lentelės prirašydami po eilutę), iš eilės raskite a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7.

Sprendimas. Užpildome lentelę:

	2	2	-2	3	1	-1	5	2
2	2	6	10	23	47	93	191	384
2	2	10	30	83	213	519	1229	
2	2	14	58	199	611	1741		
2	2	18	94	387	1385			
2	2	22	138	663				
2	2	26	190					
2	2	30						
2	2							

Ats.: $a_0 = 384$, $a_1 = 1229$, $a_2 = 1741$, $a_3 = 1385$, $a_4 = 663$, $a_5 = 190$, $a_6 = 30$, $a_7 = 2$, $q_1(x) = 2x^6 + 6x^5 + 10x^4 + 23x^3 + 47x^2 + 93x + 191$, $q_2(x) = 2x^5 + 10x^4 + 30x^3 + 83x^2 + 213x + 519$.

8. Išspręskite lygtį $x^6 - 7x^5 + 7x^4 + 42x^3 - 81x^2 - 27x + 81 = 0$ (t. y. raskite jos visus realiuosius sprendinius), jei žinoma, kad daugianaris kairėje lygybės pusėje turi šaknį 3, kurios kartotinumas didesnis už 1.

Sprendimas. Kadangi daugianaris turi *kartotinę* šaknį 3, tai galime kelis kartus dalyti iš $x - 3$:

	1	-7	7	42	-81	-27	81
3	1	-4	-5	27	0	-27	0
3	1	-1	-8	3	9	0	
3	1	2	-2	-3	0		
3	1	5	13	36			

Matome, kad pradinis daugianaris $a(x)$ lygus $(x - 3)^3 \cdot (x^3 + 2x^2 - 2x - 3)$. Tikrinant nedideles sveikąsias x reikšmes, galima pastebėti, kad $x^3 + 2x^2 - 2x - 3$ turi šaknį -1. Dalijame iš $x + 1$:

	1	2	-2	-3	0
-1	1	1	-3	0	

Taigi $a(x) = (x - 3)^3 \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + x - 3)$. Tada $a(x) = 0$, kai $x - 3 = 0$, $x + 1 = 0$ arba kai $x^2 + x - 3 = 0$. Atsakymą gauname, išsprendę visas tris lygtis.

Ats.: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_{3,4} = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

9. Taikydami Euklido algoritmą, raskite daugianarių

$$a(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1, \qquad b(x) = x^4 - 7x^2 + 1$$

didžiausią bendrą daliklį ir du tokius realiuosius skaičius c, kad $a(c) = b(c) = 0$.

Sprendimas. Pradedame nuo poros $a(x)$ ir $b(x)$, ir dalydami kampu randame tolimesnes poras:
1) $b(x)$ ir $R_0(x) = 5x^3 - 12x^2 - 4x + 3$ (dalmuo $x - 2$); 2) $5b(x)$ ir $R_0(x)$ (dėl patogumo);
3) $R_0(x)$ ir $R_1(x) = -\frac{11}{5}x^2 + \frac{33}{5}x - \frac{11}{5}$ (dalmuo $x + \frac{12}{5}$);
4) $R_0(x)$ ir $-\frac{5}{11}R_1(x) = x^2 - 3x + 1$ (dėl patogumo); 5) $-\frac{5}{11}R_1(x)$ ir 0 (dalmuo $5x + 3$).

Taigi didžiausias bendras daliklis yra $-\frac{5}{11}R_1(x)$ (arba bet koks daugianaris $\alpha R_1(x)$, kur $\alpha \neq 0$). Ieškomos c reikšmės yra šio daugianario šaknys.

Ats.: $x^2 - 3x + 1$; $c = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

10. Taikydami Euklido algoritmą, įrodykite, kad lygčių sistema

$$\begin{cases} 2x^4 + x^3 - x^2 - 3x - 2 = 0, \\ x^4 - x^3 - 3x^2 - 4x - 2 = 0 \end{cases}$$

neturi realiųjų sprendinių, ir tada raskite visus realiuosius x, tenkinančius lygiai vieną iš dviejų lygčių.

Sprendimas. Raskime $a(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 - 3x - 2$ ir $b(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 - 4x - 2$ DBD. Pradedame nuo poros $a(x)$ ir $b(x)$, ir dalydami kampu randame tolimesnes poras:
1) $b(x)$ ir $R_0(x) = 3x^3 + 5x^2 + 5x + 2$ (dalmuo 2); 2) $3b(x)$ ir $R_0(x)$ (dėl patogumo);
3) $R_0(x)$ ir $R_1(x) = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ (dalmuo $x - \frac{8}{3}$);
4) $R_0(x)$ ir $-\frac{3}{2}R_1(x) = x^2 + x + 1$ (dėl patogumo); 5) $-\frac{3}{2}R_1(x)$ ir 0 (dalmuo $3x + 2$).

Jei duotoji lygčių sistema turėtų sprendinį c, tai $a(x)$ ir $b(x)$ turėtų bendrą daliklį $x - c$. Bet tada iš jo dalytųsi ir šių daugianarių DBD $R(x) = -\frac{3}{2}R_1(x)$. Skaičius c būtų $R(x) = x^2 + x + 1$ šaknis, tačiau lygtis $x^2 + x + 1 = 0$ neturi realiųjų sprendinių. Tai įrodo, kad jų neturi ir duotoji sistema.

$a(x)$ ir $b(x)$ kampu padalykime iš jų DBD $R(x)$, kurį jau nustatėme. Taip gauname $a(x){:}\,R(x) = 2x^2 - x - 2$ ir $b(x){:}\,R(x) = x^2 - 2x - 2$. Spręskime pirmąją duotosios sistemos lygtį, kurią dabar galime užrašyti taip: $(x^2 + x + 1) \cdot (2x^2 - x - 2) = 0$. Kadangi $x^2 + x + 1 \neq 0$, tai belieka išspręsti $2x^2 - x - 2 = 0$. Analogiškai, antrosios pradinės lygties sprendiniai yra $x^2 - 2x - 2 = 0$ sprendiniai.

Ats.: $\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$ ir $1 \pm \sqrt{3}$.

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

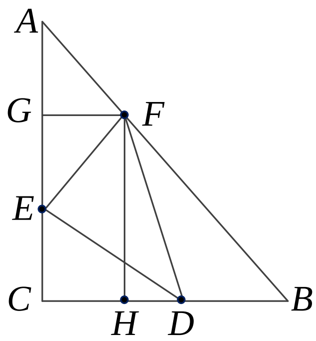
TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

(2018-2020)

1. Stačiojo trikampio ABC statinių ilgiai $AC = 15, BC = 20$. Trikampio kraštinėse AB, AC ir CB pažymėti taškai F, E ir D, be to $AE = 3, CD = 4,\ BF = 5$. Raskite trikampio DEF plotą.

Sprendimas. Iš uždavinio sąlygos turime, kad $AB = 25,\ DB = 16,\ AF = 20,\ CE = 12$. Nubrėžkime $FH \perp BC,\ FG \perp AC$ (1 pav.). Iš trikampių FHB ir ACB panašumo gauname, kad $\frac{FH}{FB} = \frac{AC}{CB}$, todėl $FH = 3$, o trikampio DBF plotas $S_1 = \frac{1}{2}BD \cdot FH = 24$. Iš trikampių AGF ir ACB panašumo išplaukia, kad $\frac{GF}{AF} = \frac{CB}{AB}$, todėl $GF = 16$, o trikampio AEF plotas lygus $S_2 = \frac{1}{2}AE \cdot FG = 24$. Trikampio CED plotas $S_3 = \frac{1}{2}CE \cdot ED = 24$, trikampio ABC plotas $S = \frac{1}{2}CA \cdot CB = 150$, todėl trikampio DEF plotas $s = S - S_1 - S_2 - S_3 = 78$.

Ats.:: 78.

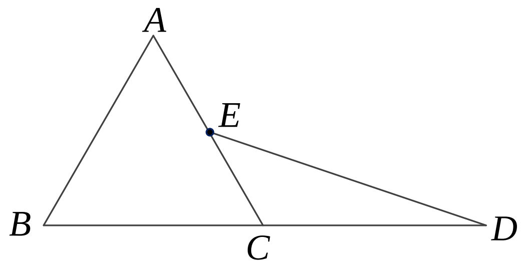


1 pav.

2. Lygiakraščio trikampio ABC kraštinės ilgis lygus 2, kraštinės BC tęsinyje už taško C atidėta atkarpa $CD = BC$, taškas E yra kraštinės AC vidurio taškas. Raskite trikampio CDE plotą.

Sprendimas. Kadangi $CD = BC = 2, CE = \frac{1}{2}AC = 1$, o $\angle ECD = 120^0$ (2 pav.), tai trikampio CDE plotas lygus $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ats.: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

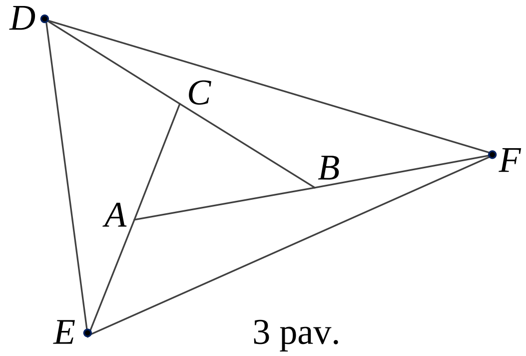


2 pav.

3. Taškas E yra simetriškas trikampio ABC viršūnei C viršūnės A atžvilgiu, taškas D yra simetriškas taškui B taško C atžvilgiu, o taškas F yra simetriškas taškui A viršūnės B atžvilgiu. Raskite trikampio DEF plotą, jei trikampio ABC plotas lygus 6.

Sprendimas. Ieškomasis plotas S lygus trikampių ABC, CED, EAF ir BFD plotų sumai (3 pav.). Kadangi trikampio ABC plotas lygus $\frac{1}{2}AB \cdot ACsin\angle CAB = \frac{1}{2}BC \cdot BAsin\angle ABC = \frac{1}{2}CA \cdot CBsin\angle ACB$, o $CE = 2CB, AF = 2AB,\ BD = 2BC, CB = CD$, tai $S_{CED} = \frac{1}{2}CE \cdot CDsin\angle ECD = \frac{1}{2}2CA \cdot CBsin(180^0 - \angle ACB) = CA \cdot CBsin\angle ACB = 2S_{ABC} = 12$, $S_{EAF} = \frac{1}{2}AE \cdot AFsin(180^0 - \angle BAC) = 2S_{ABC} = 12$, $S_{BFD} = \frac{1}{2}BF \cdot BDsin(180^0 - \angle ABC) = 2S_{ABC} = 12$, tai $S = 6 + 3 \cdot 12 = 42$.

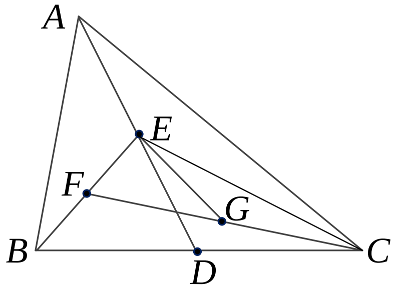
Ats.: 42.



3 pav.

4. Taškas D yra trikampio ABC kraštinės BC vidurio taškas, taškas E yra pusiaukraštinės AD vidurio taškas, taškas F yra atkarpos BE vidurio taškas, o taškas G yra atkarpos CF vidurio taškas. Raskite trikampio EFG plotą, jei trikampio ABC plotas lygus S.

Sprendimas. Kadangi atkarpa AD yra trikampio pusiaukraštinė (4 pav.), tai trikampių ABD ir ACD plotai lygūs $\frac{S}{2}$. Kadangi atkarpos BE ir CE yra trikampių ABD ir CAD pusiaukraštinės, tai trikampių BED ir CED plotai lygūs trikampių ABD ir CAD plotų pusei $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}S=\frac{1}{4}S$. Tuomet trikampio BEC plotas lygus šių trikampių plotų sumai, t. y. jis lygus $\frac{S}{2}$. Kadangi atkarpa CF yra trikampio EBC pusiaukraštinė, tai trikampio EFC plotas lygus trikampio BEC ploto pusei $\frac{S}{4}$. Atkarpa EG yra trikampio EFC pusiaukraštinė, todėl ieškomasis plotas lygus trikampio EFC ploto pusei, t. y. $\frac{S}{8}$.



4 pav.

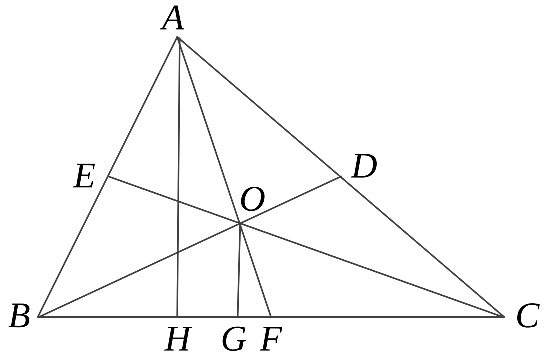
Ats.: $\frac{S}{8}$.

5. Trikampio ABC kraštinės BC ilgis lygus 20, o pusiaukraštinių BD ir CE ilgiai atitinkamai lygūs 18 ir 24. Raskite trikampio plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad trikampio ABC pusiaukraštinės BD ir CE susikerta taške O (5 pav.). Pagal pusiaukampinių savybes $BO : OD = CO : OE = 2 : 1$, tai $BO = 12$, $CO = 16$. Pagal Herono formulę apskaičiuokime trikampio BOC plotą. Jo pusperimetris $p=\frac{1}{2}(20+12+16)=24$, o plotas

$S_{BOC}=\sqrt{24\cdot(24-20)\cdot(24-12)\cdot(24-16)}$
$=96$.

Nubrėžkime trečiąją trikampio ABC pusiaukraštinę AF ir trikampių ABC ir OBC aukštines AH ir OG. Iš trikampių AFH ir OFG panašumo išplaukia, kad ir $AH : OG = AF : OF = 3$. Kadangi trikampių ABC ir OBC kraštinė BC bendra, tai jų plotų santykis lygus į tą kraštinę nubrėžtų aukštinių santykiui. Taigi trikampio. Taigi trikampio ABC plotas yra 3 kartus didesnis už trikampio OBC plotą, todėl ieškomasis plotas lygus 288.

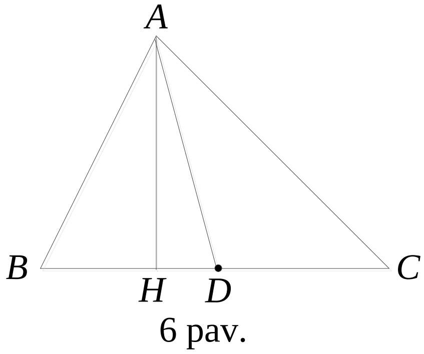


5 pav.

Ats.: 288.

6. Trikampio kraštinių ilgiai lygūs 13, 14 ir 15. Į ilgiausią kraštinę nubrėžtos aukštinė ir pusiaukraštinė. Raskite tarp jų esančio trikampio plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad $BC=15, AC=14, AB=13$, o atkarpos AD ir AH yra trikampio ABC pusiaukraštinė ir aukštinė, nubrėžtos iš viršūnės A (6 pav.). Pagal Herono formulę skaičiuojame trikampio ABC plotą. Jo pusperimetris
$p=\frac{1}{2}(15+14+13)=21$, o plotas
$S_{ABC}=\sqrt{21\cdot(21-15)\cdot(21-14)\cdot(21-13)}=84$.
Iš čia išplaukia, kad aukštinė $AH=\frac{2S_{ABC}}{BC}=\frac{56}{5}$. Žymėkime $BH=x$, tuomet $CH=15-x$, ir iš Pitagoro teoremos trikampiams AHC ir BHC gauname lygybes $AH^2=AB^2-BH^2$ ir $AH^2=AC^2-CH^2$. Iš lygties $13^2-x^2=14^2-$



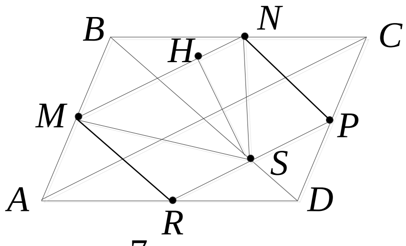
6 pav.

$(15-x)^2$ randame $x=\frac{33}{5}$. Todėl $HD=BD-HB=\frac{15}{2}-\frac{33}{5}=\frac{9}{10}$. Taigi trikampio AHD plotas $S=\frac{1}{2}\cdot HD\cdot AH=\frac{252}{50}$.

Ats.: $\frac{252}{50}$.

7. Taškai M, N, P, R yra lygiagretainio $ABCD$ kraštinių AB, BC, CD, DA vidurio taškai, taškas S yra atkarpos PR vidurio taškas. Raskite trikampio MNS plotą, jei lygiagretainio $ABCD$ plotas lygus 24.

Sprendimas. Nubrėžkime lygiagretainio įstrižaines BD ir AC (7 pav.). Atkarpos MR, MN, NP, PR yra trikampių ABD, BAC, CBD, ACD vidurinės linijos, todėl $MR \parallel BD \parallel NP, MN \parallel AC \parallel PR$, taigi keturkampis $MNPR$ yra lygiagretainis. Kadangi atkarpa MR yra trikampio ABD vidurinė linija, tai trikampio AMR plotas lygus ketvirtadaliui trikampio ABD ploto. Kadangi trikampio ABD plotas lygus pusei lygiagretainio $ABCD$ ploto, tai trikampio AMR plotas lygus $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 24=3$. Analogiškai trikampių BMN, ONP, DPR plotai irgi lygūs 3, taigi lygiagretainio $MNPR$ plotas lygus $24-4\cdot 3=12$. Nubrėžkime trikampio MNS aukštinę SH, ji yra ir lygiagretainio $MNPR$ aukštinė. Kadangi trikampio MNS ir lygiagretainio $MNPR$ kraštinė MN yra bendra, o aukštinė SH irgi bendra, tai trikampio plotas lygus pusei lygiagretainio ploto. Taigi trikampio MNS plotas lygus 6.

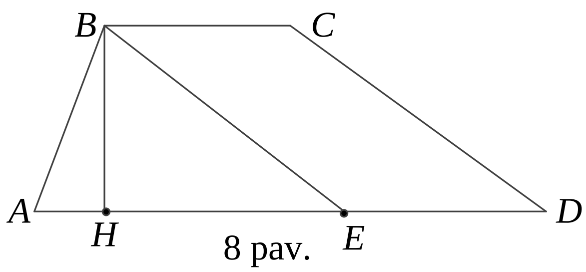


7 pav.

Ats.: 6.

8. Trapecijos pagrindų ilgiai lygūs 44 ir 16, o šoninių kraštinių ilgiai 17 ir 25. Raskite trapecijos plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad trapecijos $ABCD$ $AD=44, BC=16, AB=17, CD=25$, o atkarpa BH yra jos aukštinė (8 pav.). Nubrėžkime tiesę $BE \parallel CD$, tai keturkampis $BCDE$ yra lygiagretainis, taigi $ED=BC=16, BE=CD=25$, o $AE=AD-BC=28$. Trikampio ABE plotui s rasti taikome Herono formulę: jo pusperimetris



8 pav.

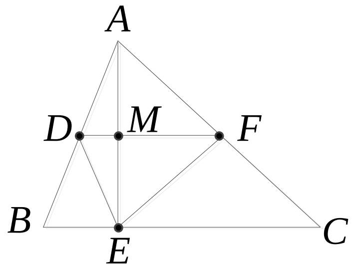
$$p=\frac{1}{2}(17+25+28)=35, \qquad s=\sqrt{35\cdot(35-17)\cdot(35-25)\cdot(35-28)}=210,$$

tai šio trikampio ir trapecijos aukštinė $BH=\frac{2s}{AE}=15$. Taigi trapecijos plotas $S=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot BH=450$.

Ats.: 450.

9. Trikampio ABC plotas lygus 10. Taškai D, E, F yra atitinkamai kraštinėse AB, BC, AC, be to, $AD=2, BD=3$. Raskite trikampio ABE plotą, jei jis yra lygus keturkampio $DBEF$ plotui.

Sprendimas. Sakykime, kad tiesės AE ir DF susikerta taške M. Iš lygybių $S_{AEB}=S_{AMD}+S_{DMEB}$, $S_{DBEF}=S_{EFM}+S_{DMEB}$ ir $S_{ABE}=S_{DBEF}$ išplaukia, kad trikampių AMD ir EFM plotai yra lygūs, todėl pagal 5 pavyzdžio rezultatą tiesės AF ir DE yra lygiagrečios. Todėl $\frac{BE}{BC}=\frac{BD}{BA}=\frac{3}{5}$. Trikampių ABC ir EAB aukštinė, nubrėžta iš viršūnės A yra ta pati, todėl jų plotų santykis lygus



9 pav.

kraštinių BC ir BE santykiui, t. y. $5 : 3$, todėl trikampio AEB plotas lygus $\frac{3}{5} \cdot 10 = 6$.

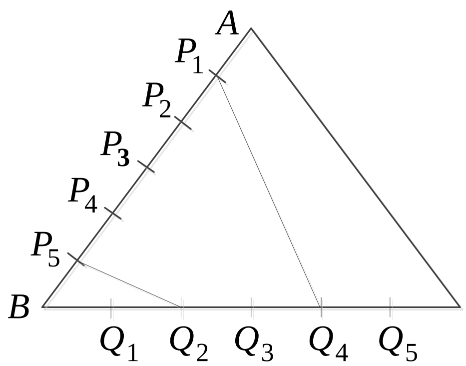
Ats.: 6.

10. Taškai P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 dalija trikampio ABC kraštinę AB į 6 lygias dalis $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4P_5 = P_5B$, o taškai Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 irgi dalija kraštinę BC į 6 lygias dalis $BQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4Q_5 = Q_5C$. Raskite keturkampio $P_5Q_2Q_4P_1$ plotą, jei trikampio ABC plotas lygus 96.

Sprendimas. Trikampių ABC ir BP_5Q_2 kampas B bendras (10 pav.), todėl jų plotų santykis $S_{BP_5Q_2} : S_{ABC} = (BP_5 \cdot BQ_2) : (BA \cdot BC) = \left(\frac{1}{6}BA \cdot \frac{2}{6}BC\right) : (BA \cdot BC) = \frac{1}{18}$, taigi trikampio BP_5Q_2 plotas lygus $\frac{1}{18} \cdot 96 = \frac{16}{3}$. Analogiškai trikampių ABC ir BP_1Q_4 kampas B yra bendras, todėl jų plotų santykis lygus $S_{BP_1Q_4} : S_{ABC} = (BP_1 \cdot BQ_4) : (BA \cdot BC) = \left(\frac{5}{6}BA \cdot \frac{4}{6}BC\right) : (BA \cdot BC) = \frac{5}{9}$,

Todėl trikampio BP_1Q_4 plotas lygus $\frac{5}{9} \cdot 96 = \frac{160}{3}$. Keturkampio $P_5Q_2Q_4P_1$ plotas yra trikampių BP_1Q_4 ir BP_5Q_2 plotų skirtumui, taigi jis lygus $\frac{160}{3} - \frac{16}{3} = 48$.

Ats.: 48.



10 pav.

Sprendimus parengė doc. Edmundas Mazėtis

L I E T U V O S   J A U N Ų J Ų   M A T E M A T I K Ų   M O K Y K L A

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

(2018–2020)

1. Skirtumą $\frac{2}{sin(4\alpha)} - ctg(2\alpha)$ išreikšti kurio nors argumento tangentu.

Sprendimas. $\frac{2}{sin(4\alpha)} - ctg(2\alpha) = \frac{2}{2sin(2\alpha)\,cos(2\alpha)} - \frac{cos(2\alpha)}{sin(2\alpha)} = \frac{1-cos^2(2\alpha)}{sin(2\alpha)\,cos(2\alpha)} = \frac{sin^2(2\alpha)}{sin(2\alpha)\,cos(2\alpha)} =$

$= \frac{sin(2\alpha)}{cos(2\alpha)} = tg\ (2\alpha).$

Ats.: $tg\ (2\alpha)$.

2. Nustatyti, ar sandaugos $tg\ \left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1-sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$ reikšmė priklauso nuo α.

Sprendimas. $tg\ \left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1-sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{tg\,\frac{\pi}{4}+tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg\frac{\pi}{4}\cdot tg\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\left(cos^2\frac{\alpha}{2}+sin^2\frac{\alpha}{2}\right)-2\,sin\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2}-sin^2\frac{\alpha}{2}} =$

$= \frac{1+\frac{sin\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}}}{1-\frac{sin\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{\left(cos\frac{\alpha}{2}-sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(cos\frac{\alpha}{2}-sin\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(cos\frac{\alpha}{2}+sin\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\left(cos\frac{\alpha}{2}+sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(cos\frac{\alpha}{2}-sin\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{\left(cos\frac{\alpha}{2}-sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(cos\frac{\alpha}{2}+sin\frac{\alpha}{2}\right)} = 1.$

Ats.: Nepriklauso.

3. Apskaičiuoti $cos^2(\alpha+\beta)+cos^2(\alpha-\beta)-\cos(2\alpha)\cdot cos(2\beta)$.

Sprendimas. $cos^2(\alpha+\beta)+cos^2(\alpha-\beta)-\cos(2\alpha)\cdot cos(2\beta) =$

$= \frac{1}{2}\big(1+\cos\big(2(\alpha+\beta)\big)\big)+\frac{1}{2}\big(1+\cos\big(2(\alpha-\beta)\big)\big)-\cos(2\alpha)\cdot cos(2\beta) =$

$= 1+\frac{1}{2}\big(\cos\big(2(\alpha+\beta)\big)+\cos\big(2(\alpha-\beta)\big)\big)-\cos(2\alpha)\cdot cos(2\beta) =$

$= 1+\frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{2(\alpha+\beta)+2(\alpha-\beta)}{2}\cos\frac{2(\alpha+\beta)-2(\alpha-\beta)}{2}-\cos(2\alpha)\cdot cos(2\beta) =$

$= 1+\cos(2\alpha)\cdot cos(2\beta)-\cos(2\alpha)\cdot cos(2\beta) = 1.$

Ats.: 1.

4. Įrodyti, kad reiškinio $sin\,47°+sin\,61°-sin\,11°-sin\,25°$ reikšmė lygi $cos\,7°$.

Sprendimas. $sin\,47°+sin\,61°-sin\,11°-sin\,25° = (sin\,47°+sin\,61°)-(sin\,11°+sin\,25°) =$

$$= 2\,sin\frac{47° + 61°}{2}cos\frac{47° - 61°}{2} - 2\,sin\frac{11° + 25°}{2}cos\frac{11° - 25°}{2} =$$

$$= 2\,sin\,54°\,cos\,7° - 2\,sin\,18°\,cos\,7° = 2\,cos\,7°(sin\,54° - sin\,18°) =$$

$$= 2\,cos\,7° \cdot 2\,sin\,18°\,cos\,36° = 2\,cos\,7° \cdot \frac{2\,sin\,18°\,cos\,18°}{cos\,18°} \cdot cos\,36° = cos\,7° \cdot \frac{2\,sin\,36°\,cos\,36°}{cos\,18°} =$$

$$= \cos 7° \cdot \frac{sin\,72°}{cos\,18°} = cos\,7° \cdot \frac{sin(90°-18°)}{cos\,18°} = cos\;\,7° \cdot \frac{cos\,18°}{cos\,18°} = cos\,7° \cdot 1 = cos\,7°.$$

Įrodyta.

5. Apskaičiuoti $16\,sin\frac{\alpha}{2} \cdot sin\frac{3\alpha}{2}$, jeigu $cos\,\alpha = \frac{3}{4}$.

Sprendimas. $16\,sin\frac{\alpha}{2} \cdot sin\frac{3\alpha}{2} = 16 \cdot \frac{1}{2}\left(cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{3\alpha}{2}\right) - cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{3\alpha}{2}\right)\right) = 8(cos\,\alpha - cos(2\alpha)) =$

$= 8\left(cos\,\alpha - (2cos^2\alpha - 1)\right) = 8(cos\,\alpha - 2cos^2\alpha + 1).$

Jei $cos\,\alpha = \frac{3}{4}$, tai $8(cos\,\alpha - 2cos^2\alpha + 1) = 8\left(\frac{3}{4} - 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1\right) = 5.$

Ats.: 5.

6. Išspręsti lygtį $cos(3x) - sin\,x = \sqrt{3} \cdot (cos\,x - sin(3x))$.

Sprendimas. $cos(3x) - sin\,x = \sqrt{3} \cdot (cos\,x - sin(3x))$,

$cos(3x) + \sqrt{3}sin(3x) = sin\,x + \sqrt{3} \cdot cos\,x.$

Padaliję iš 2 abiejose lygybės ženklo pusėse esančius reiškinius, gauname:

$\frac{1}{2}cos(3x) + \frac{\sqrt{3}}{2}sin(3x) = \frac{1}{2}sin\,x + \frac{\sqrt{3}}{2}cos\,x,$

$sin\frac{\pi}{6}cos(3x) + cos\frac{\pi}{6}sin(3x) = cos\frac{\pi}{3}sin\,x + sin\frac{\pi}{3}cos\,x,$

$sin\left(\frac{\pi}{6} + 3x\right) = sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right),$

$sin\left(\frac{\pi}{6} + 3x\right) - sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0,$

$2\,sin\frac{\left(\frac{\pi}{6}+3x\right)-\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{2}cos\frac{\left(\frac{\pi}{6}+3x\right)+\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{2} = 0,$

$sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right)cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$

Ši lygybė galioja tik kai

$sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 0$ arba $cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$

Iš pirmos lygties gauname, kad

$x = \frac{\pi}{12} + \pi k, k \in Z,$

o iš antros – $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}l, l \in Z.$

Aišku, kad bendrų elementų abi sprendinių aibės neturi.

Ats.: $x = \frac{\pi}{12} + \pi k, k \in Z$; arba $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} l, l \in Z$.

7. Išspręsti lygtį $sin\, x \cdot cos(2x) + cos\, x \cdot cos(4x) = sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) \cdot sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$.

Sprendimas. $sin\, x \cdot cos(2x) + cos\, x \cdot cos(4x) = sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) \cdot sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$,

$\frac{1}{2}(sin\,(-x) + sin(3x)) + \frac{1}{2}(cos(-3x) + cos(5x)) = \frac{1}{2}\left(cos(5x) - cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$,

$-sin\, x + sin(3x) + cos(3x) + cos(5x) = cos(5x) - sin\, x$,

$sin(3x) + cos(3x) = 0$,

Padaliję iš $cos(3x)$ abiejose lygybės ženklo pusėse esančius reiškinius, gauname:

$tg\,(3x) + 1 = 0$,

$tg\,(3x) = -1$,

$3x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$,

$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} k, k \in Z$.

Ats.: $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} k, k \in Z$.

8. Išspręsti lygtį $sin\, x \cdot sin(3x) + sin(4x) \cdot sin(8x) = 0$.

Sprendimas. $sin\, x \cdot sin(3x) + sin(4x) \cdot sin(8x) = 0$,

$\frac{1}{2}(cos(2x) - cos(4x)) + \frac{1}{2}(cos(4x) - cos(12x)) = 0$,

$cos(2x) - cos(12x) = 0$,

$-2\, sin(7x)\, sin(-5x) = 0$.

Ši lygybė galioja tik kai

$sin(7x) = 0$ arba $sin(5x) = 0$.

Iš pirmos lygties gauname, kad $x = \frac{\pi}{7} k, k \in Z$,

o iš antros – $x = \frac{\pi}{5} l, l \in Z$.

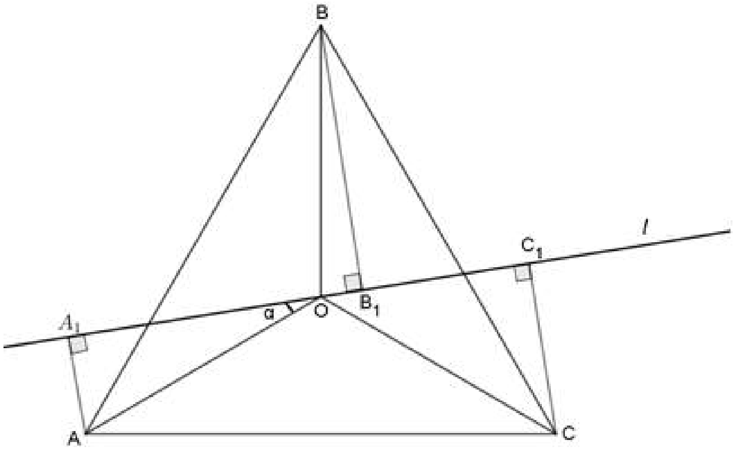
Antros lygties sprendiniai $x = \frac{\pi}{5} l, l \in Z$, priklauso ir pirmos lygties sprendinių aibei, kai $l = 5m$, $m \in Z$. Todėl pradinės lygties sprendinių aibę galima užrašyti taip:

$x = \frac{\pi}{7} k, k \in Z$; $x = \frac{\pi}{5} l, l \neq 5m, l \in Z, m \in Z$.

Ats.: $x = \frac{\pi}{7} k, k \in Z$; $x = \frac{\pi}{5} l, l \neq 5m, l \in Z, m \in Z$.

9. Apie lygiakraštį trikampį apibrėžto apskritimo spindulys lygus *R*. Per apskritimo centrą nubrėžta tiesė. Trikampio viršūnių atstumų d_1, d_2 ir d_3 iki šios tiesės kvadratų sumą išreikšti apskritimo spinduliu R.

Sprendimas. Tegul l – nubrėžta tiesė, $OA = OB = OC = R$ (čia R – apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo spindulys, α – kampas tarp OA ir l, $AA_1 = d_1$, $BB_1 = d_2$, $CC_1 = d_3$ ir $AA_1 \perp l$, $BB_1 \perp l$, $CC_1 \perp l$.



Jei $\angle AOA_1 = \alpha$, tai

$\angle BOB_1 = 180° - \angle A_1OB = 180° - (120° - \alpha) = 60° + \alpha$,

$\angle COC_1 = 180° - \angle A_1OA - \angle AOC = 180° - \alpha - 120° = 60° - \alpha$.

Iš stačiųjų trikampių AA_1O, BB_1O ir CC_1O gauname, kad

$AA_1 = d_1 = R\sin\alpha$, $BB_1 = d_2 = R\sin(60° + \alpha)$, $CC_1 = d_3 = R\sin(60° - \alpha)$.

Todėl trikampio viršūnių atstumų d_1, d_2 ir d_3 iki tiesės l kvadratų sumos išraiška apskritimo spinduliu R yra tokia:

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = R^2\left(\sin^2\alpha + \sin^2(60° + \alpha) + \sin^2(60° - \alpha)\right) =$$

$$= R^2\left(\frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha)) + \frac{1}{2}(1 - \cos(120° + 2\alpha)) + \frac{1}{2}(1 - \cos(120° - 2\alpha))\right) =$$

$$= \frac{R^2}{2}(3 - \cos(2\alpha) - \cos(120° + 2\alpha) - \cos(120° - 2\alpha)) =$$

$$= \frac{R^2}{2}\left(3 - \cos(2\alpha) - (\cos(120° + 2\alpha) + \cos(120° - 2\alpha))\right) =$$

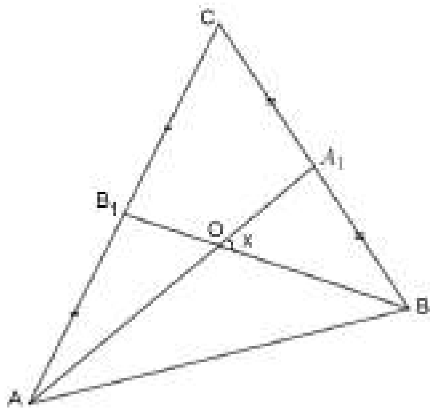
$$= \frac{R^2}{2}\left(3 - \cos(2\alpha) - 2\cos\frac{(120° + 2\alpha) + (120° - 2\alpha)}{2}\cos\frac{(120° + 2\alpha) - (120° - 2\alpha)}{2}\right) =$$

$$= \frac{R^2}{2}(3 - \cos(2\alpha) - 2\cos 120° \cos(2\alpha)) = \frac{R^2}{2}\left(3 - \cos(2\alpha) - 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cos(2\alpha)\right) = \frac{R^2}{2}\cdot 3 = \frac{3R^2}{2}.$$

Ats.: $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = \frac{3R^2}{2}$.

10. Trikampio *ABC* kraštinių *BC*, *CA* ir *AB* ilgiai yra atitinkamai *a*, *b* ir *c*. Nustatyti, kokiu kampu susikerta jo pusiaukraštinės AA_1 ir BB_1, jei $a^2 + b^2 = 5c^2$.

Sprendimas. Tarkime, kad trikampio *ABC* pusiaukraštinės sudaro kampą, kurio didumas x $(0<x<\pi)$.



Pritaikę kosinusų teoremą trikampiui ACA_1 ir trikampiui BCB_1, gauname, kad

$$AA_1 = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot b\cos C} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2 - ab\cos C},$$

$$BB_1 = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4} - 2 \cdot a \cdot \frac{b}{2} \cdot \cos C} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4} - ab\cos C}.$$

O pritaikę kosinusų teoremą trikampiui *ABC,* gauname lygybę

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$

Kadangi (pagal sąlygą)

$a^2 + b^2 = 5c^2$, gauname, kad $ab\cos C = 2c^2$.

Todėl

$$AA_1 = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2 - ab\cos C} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2 - 2c^2} = \sqrt{\frac{a^2 + 4b^2 - 8c^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + 3b^2 - 8c^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3b^2 - 3c^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{b^2 - c^2}$$

ir

$$BB_1 = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4} - ab\cos C} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4} - 2c^2} = \sqrt{\frac{4a^2+b^2-8c^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2+3a^2-8c^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2-3c^2}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Taikydami trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taško savybę, gauname, kad

$OA_1 = \frac{1}{3} AA_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{b^2 - c^2}$, o $OB = \frac{2}{3} BB_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{a^2 - c^2}$.

Todėl

$OA_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{b^2 - c^2}$,

$OB = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{a^2 - c^2}$.

Kampo x kosinusui rasti taikykime trikampiui A_1OB kosinusų teoremą:

$A_1B^2 = OA_1^2 + OB^2 - 2\, OA_1 \cdot OB \cdot \cos x$.

Iš pradžių apskaičiuokime OA_1 ir OB kvadratų sumą:

$OA_1^2 + OB^2 = \frac{1}{12}(b^2 - c^2) + \frac{1}{3}(a^2 - c^2) = \frac{1}{12}(b^2 - c^2 + 4a^2 - 4c^2) = \frac{1}{12}(a^2 + b^2 - 5c^2 + 3a^2) = \frac{a^2}{4}$.

Tęsdami gausime:

$\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{b^2 - c^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{a^2 - c^2} \cdot cos\, x$,

$\sqrt{b^2 - c^2} \cdot \sqrt{a^2 - c^2} \cdot cos\, x = 0$.

Iš čia $cos\, x = 0$.

Kadangi $0<x<\pi$, tai $x = \frac{\pi}{2}$.

Ats.: $\frac{\pi}{2}$.

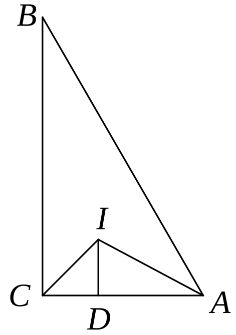
Sprendimus parengė docentas Antanas Apynis ir mokytoja ekspertė Regina Rudalevičienė.

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

(2018-2020)

1. Stačiojo trikampio vienas smailusis kampas lygus 60^0, įbrėžto į trikampį apskritimo centras nuo šio kampo viršūnės nutolęs atstumu lygiu 10. Raskite trikampio kraštinių ilgius.

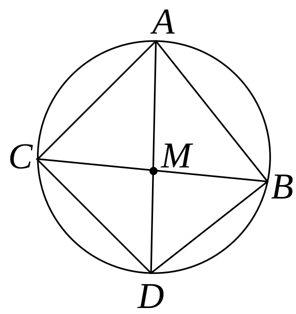


1 pav.

Sprendimas. Sakykime, kad stačiajame trikampyje ABC, $\angle C = 90^0$, $\angle A = 60^0$, taškas I yra įbrėžto apskritimo centras, $AI = 10$ (1 pav.). Iš taško I nuleidžiame statmenį $ID \perp AC$, šio statmens ilgis lygus įbrėžto į trikampį apskritimo spinduliui. Kadangi taške I susikerta trikampio pusiaukampinės, tai $\angle IAC = \frac{1}{2}\angle A = 30^0$, todėl $ID = IA\sin 30^0 = 5, DA = \sqrt{AI^2 - ID^2} = \sqrt{75}.$ Kadangi atkarpa CD irgi lygi įbrėžto į trikampį apskritimo spinduliui, tai $AC = AD + DC = \sqrt{75} + 5 = 5(\sqrt{3} + 1)$. Tuomet trikampio įžambinė $AB = \frac{AC}{\cos 60^0} = 10(\sqrt{3} + 1)$, o statinis $BC = AC\mathrm{tg}60^0 = 5\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$.

Ats.: $10(\sqrt{3} + 1)$, $5(\sqrt{3} + 1)$, $5\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$.

2. Trikampio ABC pusiaukraštinės, nubrėžtos iš viršūnės A, tęsinys kerta apibrėžtą apie šį trikampį apskritimą taške D taip, kad $AC = CD$. Raskite kraštinės AC ilgį, jei $BC = 2$.

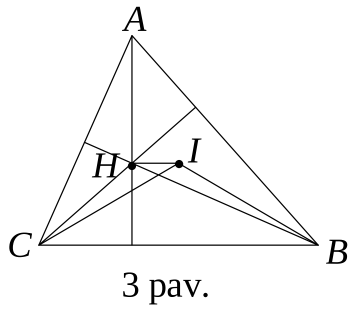


2 pav.

Sprendimas. Sakykime, kad taškas M yra trikampio kraštinės BC vidurio taškas (2 pav.), o ieškomosios kraštinės ilgis $AC = x$. Kadangi $AC = CD$, tai trikampis ACD lygiašonis, lankai AC ir CD yra lygūs, tai pagal įbrėžtinių kampų, besiremiančių į tą patį lanką ir į lygius lankus savybes gauname, kad $\angle DAC = \angle ADC = \angle ABC = \angle DBC$, o $\angle ADB = \angle ACB$. Iš čia išplaukia, kad trikampiai ABM ir CDM yra panašieji, todėl $\frac{BM}{AB} = \frac{MD}{DC}$ t. y. $MD = \frac{BM \cdot DC}{AB}$. Trikampiai BDM ir ACM taip pat panašieji, todėl $\frac{BD}{DM} = \frac{AC}{MC}$ t. y. $MD = \frac{BD \cdot MC}{AC}$. Kadangi $BM = MC = 1$, o $AC = CD$, tai sulyginę gautąsias atkarpos MD išraiškas, turime lygybę $AB \cdot BD = AC \cdot CD = x^2$. Kadangi trikampiai ABC ir MBD irgi panašieji, tai $\frac{BC}{BD} = \frac{AB}{MB}$, todėl $BC \cdot MB = AB \cdot BD = x^2$. Bet $MB = 1$, todėl $2 \cdot 1 == x^2$, taigi $x = AC = \sqrt{2}$.

Ats.: $\sqrt{2}$.

3. Trikampyje ABC $\angle A = 60^0$, $\angle B = 50^0$, taškas I yra įbrėžto apskritimo centras, o taškas H yra jo aukštinių susikirtimo taškas (ortocentras). Raskite kampą AHI.



3 pav.

Sprendimas. Pagal 2 pavyzdžio rezultatą $\angle BIC = 90^0 + \frac{1}{2}\angle A = 120^0$. Kadangi $\angle BHC = 180^0 - \angle HBC - \angle HCB = 180^0 - (90^0 - \angle ACB) - (90^0 - \angle ABC) = \angle B + \angle C = 180^0 - \angle A = 120^0$, tai $\angle BIC = \angle BHC$, todėl keturkampis $BIHC$ yra įbrėžtas į apskritimą (3 pav.). Tuomet $\angle AHI = 360^0 - \angle AHC - \angle IHC = 360^0 - (180^0 - \angle B) - \left(180^0 - \frac{1}{2}\angle B\right) = \frac{3}{2}\angle B = 75^0$.

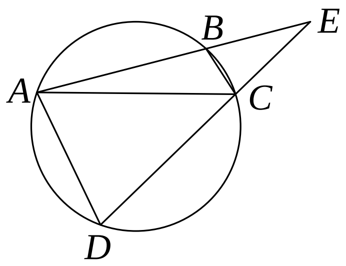
Ats.: 75^0.

4. Keturkampis $ABCD$ įbrėžtas į apskritimą, kraštinės AB tęsinys už taško B ir kraštinės CD tęsinys už taško C susikerta taške E. Žinoma, kad $EC = 6, CD = 2$, $AC = 6\sqrt{3}$, $AB : BE = 2 : 1$. Raskite keturkampio $ABCD$ perimetrą.

Sprendimas. Kadangi taškai A, B, C, D yra apskritime, o tiesės AB ir CD susikerta taške E, tai pagal 3 teoremą teisinga lygybė $AE \cdot BE = DE \cdot CE$ (4 pav.). Jei $AB = 2x$, $BE = x$, tai iš šios lygybės seka, kad $3x \cdot x = 6 \cdot 8$, todėl $x = 4$, o $AB = 8, BE = 4$. Taikydami kosinusų teoremą trikampiui AEC

gaunami, kad $\cos\angle AEC = \frac{AE^2+EC^2-AG^2}{2AE\cdot EC} = \frac{1}{2}$. Kraštinių AD ir BC ilgius rasime taikydami kosinusų teoremą trikampiams AED ir BEC: $AD^2 = AE^2 + ED^2 - 2AE\cdot ED\cdot\cos\angle AED = 112$, $BC^2 = BE^2 + CE^2 - 2BE\cdot CE\cdot\cos\angle BEC = 28$. Taigi $AD = 4\sqrt{7}$, $BC = 2\sqrt{7}$, todėl ieškomasis perimetras lygus $10 + 6\sqrt{7}$.

Ats.: $10 + 6\sqrt{7}$.

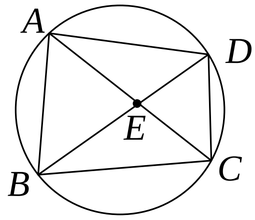


4 pav.

5. Keturkampis $ABCD$ yra įbrėžtas į apskritimą, jo įstrižainės susikerta taške E, įstrižainė BD, kurios ilgis lygus 25, yra kampo ABC pusiaukampinė, atkarpos CD ilgis lygus 15. Raskite į kokio ilgio atkarpas taškas E dalija įstrižainę BD.

Sprendimas. Kadangi įbrėžtiniai kampai ACD ir ABD remiasi į tą patį lanką AD (5 pav.), tai jie lygūs. Bet tiesė BD yra kampo ABC pusiaukampinė, taigi $\angle ECD = \angle ACD = \angle ABD = \angle DBC$. Iš čia išplaukia, kad trikampiai BCD ir CED yra panašieji (jų kampas BDC yra bendras ir $\angle DBC = \angle ECD$). Todėl $\frac{CD}{ED} = \frac{BD}{CD}$. Iš čia gauname, kad $ED = \frac{CD^2}{BD} = 9$. Todėl $BE = BD - ED = 16$.

Ats.: $BE = 16$, $ED = 9$.

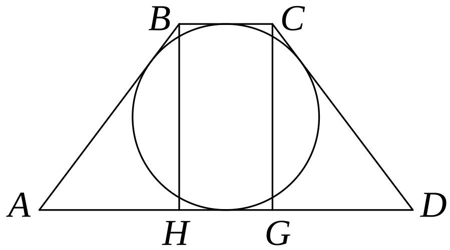


5 pav.

6. Lygiašonės trapecijos mažesnysis pagrindas lygus1, į trapeciją įbrėžtas apskritimas, kurio spindulys lygus 1. Raskite trapecijos plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad atkarpa BC yra lygiašonės trapecijos $ABCD$ mažesnysis pagrindas (6 pav.). Nubrėžkime statmenis BH ir CG į pagrindą AD ir pažymėkime šoninės kraštinės ilgį $AB = CD = x$. Kadangi į trapeciją įbrėžto apskritimo spindulys lygus 1, tai trapecijos aukštinė lygi jo skersmeniui, t. y. $BH = 2$. Kadangi trapecija lygiašonė, tai $AH = DG = \sqrt{x^2-4}$. Tuomet trapecijos ilgesnysis pagrindas $AD = 1 + 2\sqrt{x^2-4}$. Į trapeciją įbrėžiamas apskritimas, todėl pagal 4 teoremą $AB + CD = AD + BC$, t. y. $2x = 1 + 2\sqrt{x^2-4} + 1$. Sprendžiame šią lygtį ir gauname, kad $x - 1 = \sqrt{x^2-4}$, $x^2 - 2x + 1 = x^2 - 4$, todėl $x = \frac{5}{2}$, trapecijos pagrindas $AD = 4$, o jos plotas $S = \frac{1}{2}(AD + BC)\cdot BH = 5$.

Ats.: $S = 5$.

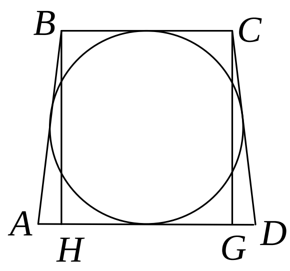


6 pav.

7. Apskritimo spindulys lygus 1, apie jį apibrėžta lygiašonė trapecija, kurios vienas pagrindas du kartus ilgesnis už kitą. Raskite trapecijos vidurinės linijos ilgį.

Sprendimas. Sakykime, kad į lygiašonę trapeciją $ABCD$ įbrėžtas apskritimas (7 pav.), o $BC = x$, $AD = 2x$. Nuleiskime statmenis BH ir CG iš viršūnių B ir C į pagrindą AD. Kadangi trapecija lygiašonė, o $HG = BC = a$, tai $AH = DG = \frac{x}{2}$. Apie trapeciją apibrėžtas apskritimas, todėl $AB + CD = AD + BC$, iš čia gauname, kad $AB = CD = \frac{3}{2}x$. Stačiojo trikampio ABH statinis BH lygus įbrėžto į trapeciją apskritimo skersmeniui, todėl $BH = 2$. Iš čia gauname, kad $AB^2 = AH^2 + BH^2$, t. y. $(\frac{3}{2}x)^2 = (\frac{x}{2})^2 + 2^2$. Taigi $x^2 = 2$, $x = \sqrt{2}$, o kadangi trapecijos, į kurią įbrėžiamas apskritimas, šoninė kraštinė lygi vidurinei linijai, tai trapecijos vidurinė linija lygi $\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

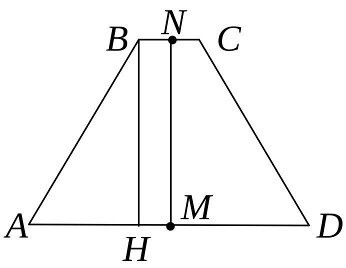
Ats.: $\frac{3}{2}\sqrt{2}$.



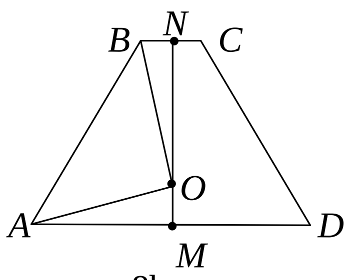
7 pav.

8. Trapecijos pagrindai lygūs 2 ir 10, apie ją galima apibrėžti apskritimą ir į ją galima įbrėžti apskritimą. Nustatykite, ar apibrėžto apskritimo centras yra trapecijos viduje, trapecijos pagrinde, ar trapecijos išorėje.

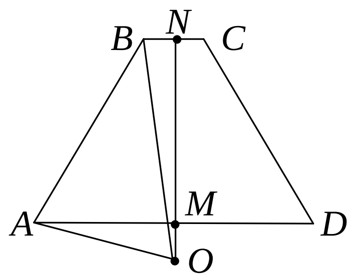
Sprendimas. Sakykime, kad $ABCD$ – duotoji trapecija, $AD = 10, BC = 2$ – jos pagrindai (8a pav.). Kadangi apie trapeciją galima apibrėžti apskritimą, tai ji lygiašonė, o kadangi į ją galima įbrėžti apskritimą, tai jos šoninė kraštinė lygi vidurinei linijai, taigi $AB = CD = \frac{1}{2}(AD + BC) = 6$. Kadangi trapecija lygiašonė, tai apibrėžto apie ją apskritimo centras ir įbrėžto į ją apskritimo centras yra tiesėje MN, jungiančioje trapecijos pagrindų vidurio taškus. Iš viršūnės B nuleidžiame statmenį $BH \perp AD$, tuomet $AH = \frac{1}{2}(AD - BC) = 4$. Iš stačiojo trikampio ABH surandame $BH = MN = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Jei apibrėžto apie trapeciją apskritimo spindulys R, o jo centras – taškas O, tai priklausomai nuo taško O padėties galimi trys atvejai: 1) taškas O yra trapecijos viduje (8b pav.), tuomet $OM + ON = MN$, 2) taškas O yra pagrindo AD vidurio taškas, tuomet $R = 5$, 3) taškas O yra



8a pav.



8b pav.

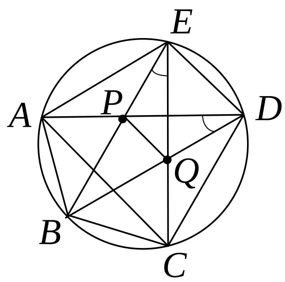


8c pav.

trapecijos išorėje (8c pav.), tuomet $ON - OM = MN$. Žymėkime $ON = x$, tuomet $OM = 2\sqrt{5} - x$ pirmuoju atveju ir $OM = x - 2\sqrt{5}$ trečiuoju atveju. Taigi abiem atvejais $OM = \left|x - 2\sqrt{5}\right|$. Iš stačiųjų trikampių AOM ir BON randame $OA^2 = AM^2 + OM^2 = 25 + \left|x - 2\sqrt{5}\right|^2$, $OB^2 = BN^2 + ON^2 = 1 + x^2$. Kadangi $OA = OB$, tai turime lygtį $25 + \left|x - 2\sqrt{5}\right|^2 = 1 + x^2$, kurią išsprendę gauname $x = \frac{11}{\sqrt{5}}$. Kadangi $\frac{11}{\sqrt{5}} - 2\sqrt{5} = \frac{1}{\sqrt{5}} > 0$, tai atkarpos ON ilgis yra didesnis, negu trapecijos aukštinės MN ilgis. Taigi apibrėžto apskritimo centras yra trapecijos išorėje.

Ats.: apibrėžto apskritimo centras yra trapecijos išorėje.

9. Penkiakampis $ABCDE$ yra įbrėžtas į apskritimą, jo kraštinės AB ir BC yra lygios, tiesės AD ir EB susikerta taške P, tiesės BD ir EC – taške Q. Raskite kampą EPQ, jei $\angle ACE = 40^0$, $\angle ADB = 54^0$.



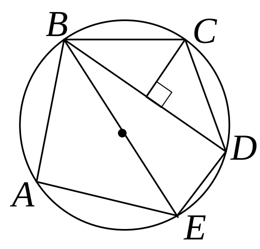
9 pav.

Sprendimas. Kadangi atkarpos AB ir BC yra lygios, tai lankai AB ir BC irgi lygūs (9 pav.), todėl $\angle ADB = \angle BEC$, o tai reiškia, kad $\angle PDQ = \angle PEQ$. Iš čia išplaukia, kad keturkampis $EDQP$ yra įbrėžtas į apskritimą, todėl $\angle EPQ = 180^0 - \angle EDQ$. Kadangi $\angle EDQ = \angle EDP + \angle PDQ = \angle EDA + \angle ADB = \angle ACE + \angle ADB = 40^0 + 54^0 = 94^0$, tai $\angle EPQ = 180^0 - 94^0 = 86^0$.

Ats.: 86^0.

10. Penkiakampis $ABCDE$ yra įbrėžtas į apskritimą, jo kraštinės AB ir AE yra lygios, kraštinės BC ir CD taip pat lygios, kampas ABE lygus 45^0, kampas EBD lygus 30^0, o $AB = \sqrt{2}$. Raskite penkiakampio plotą.

Sprendimas. Kadangi $AB = AE$, o $\angle ABE = 45^0$, tai ir $\angle AEB = 45^0$, todėl kampas BAE yra statusis, taigi atkarpa $BE = \sqrt{BA^2 + AE^2} = 2$ yra apskritimo skersmuo (10 pav.), o trikampio ABE plotas lygus $S_1 = \frac{1}{2}AB^2 = 1$. Kadangi atkarpa BE - apskritimo skersmuo, tai kampas BDE yra statusis, todėl $\angle BED = 60^0$, $BD = BE\cos 30^0 = \sqrt{3}$, $DE = BE\sin 30^0 = 1$, o trikampio BDE plotas lygus $S_2 = \frac{1}{2}BD \cdot DE = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Kadangi $BC = CD$, tai lankai BC ir CD yra lygūs. Įbrėžtinis kampas BED remiasi į lanką BD, o įbrėžtinis kampas BDC remiasi į lanką BC, kuris yra pusė lanko BD. Todėl $\angle BDC = \frac{1}{2}\angle BED = 30^0$. Lygiašonio trikampio BCD aukštinė, nubrėžta iš viršūnės C, lygi $h = \frac{1}{2}BD\operatorname{tg} 30^0 = \frac{1}{2}$, o šio trikampio plotas $S_3 = \frac{1}{2}BD \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Akivaizdu, kad penkiakampio plotas S lygus plotų S_1, S_2 ir S_3 sumai, tai $S = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$.



10 pav.

Ats.: $1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Sprendimus parengė dr. doc. Edmundas Mazėtis

6 tema. RODIKLINĖ FUNKCIJA IR JOS TAIKYMAS
(2018–2020)
ŠEŠTOJI UŽDUOTIS
Sprendimai

1. Raskite funkcijos $f(x)=\sqrt{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\right)\cdot\sqrt{1-x}}$ apibrėžimo sritį.

Sprendimas.

$$\begin{cases}1-x\ge 0,\\ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\right)\cdot\sqrt{1-x}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\le 1,\\ \left(\frac{1}{2}\right)^x-1\ge 0 \text{ (nes } \sqrt{1-x}\ge 0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\le 1,\\ \left(\frac{1}{2}\right)^x\ge 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\le 1,\\ x\le 0\end{cases}\Rightarrow x\le 0.$$

Atskirai patikrinkime reikšmę $x=1$. Tuomet $f(1)=0$ – vadinasi, $x=1$ taip pat priklauso apibrėžimo sričiai.

Ats.: $(-\infty;0]\cup\{1\}$.

2. Nustatykite funkcijos $f(x)=2^{4\sin x+3\cos x}$ reikšmių sritį.

Sprendimas. Pirmiausia surasime, kokiame intervale kinta rodiklio reiškinio $4\sin x+3\cos x$ reikšmės. Tegu $a\cdot\cos\alpha=4$ ir $a\cdot\sin\alpha=3$. Tuomet

$$4\sin x+3\cos x=a\cdot(\cos\alpha\cdot\sin x+\sin\alpha\cdot\cos x)=a\cdot\sin(\alpha+x).$$

Parametro *a* reikšmę nustatysime lygybes $a\cdot\cos\alpha=4$ ir $a\cdot\sin\alpha=3$ pakėlę kvadratu ir sudėję. Gausime: $a^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=25\Rightarrow a^2=25\Rightarrow a=\pm 5$. Taigi

$$f(x)=2^{\pm 5\cdot\sin(\alpha+x)},\ \alpha\in(-\infty;+\infty),\ x\in(-\infty;+\infty).$$

Kadangi $-1\le\sin(\alpha+x)\le 1$, tai abiem atvejais turėsime: $2^{-5}\le f(x)\le 2^5\Rightarrow\frac{1}{32}\le f(x)\le 32$.

Ats.: $[\frac{1}{32};32]$.

3. Kokia yra didžiausia funkcijos $f(x)=\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{x^2-2x}$ reikšmė?

Sprendimas. Kadangi $\sin\frac{\pi}{4}=2^{-\frac{1}{2}}$, tai $f(x)=2^{-\frac{1}{2}(x^2-2x)}$. Ši rodiklinė funkcija įgis didžiausią reikšmę taške, kuriame įgyjama didžiausia rodiklio $g(x)=-\frac{1}{2}(x^2-2x)$ reikšmė. Iš kvadratinio trinario savybių $g(x)\ge 0$, kai $x\in[0;2]$, ir didžiausia reikšmė $g(1)=\frac{1}{2}$ įgyjama, kai $x=1$. Taigi didžiausia funkcijos $f(x)$ reikšmė yra $f(1)=2^{g(1)}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$.

Ats.: $f(1)=\sqrt{2}$.

4. Išspręskite lygtį $\dfrac{3^{\sqrt{-12x}}+3}{4}=3^{\sqrt{-3x}}$.

Sprendimas.

$$\frac{3^{\sqrt{-12x}}+3}{4}=3^{\sqrt{-3x}} \Leftrightarrow 3^{\sqrt{-12x}}+3=4\cdot 3^{\sqrt{-3x}} \Leftrightarrow 3^{\sqrt{-12x}}-4\cdot 3^{\sqrt{-3x}}+3=0 \Leftrightarrow \left(3^{\sqrt{-3x}}\right)^2-4\cdot 3^{\sqrt{-3x}}+3=0.$$

Pažymėję $3^{\sqrt{-3x}}=a$, gauname lygtį $a^2-4a+3=0$, kurios sprendiniai yra $a_1=3, a_2=1$. Taigi

$3^{\sqrt{-3x}}=3 \Rightarrow \sqrt{-3x}=1 \Rightarrow -3x=1 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{3}$,

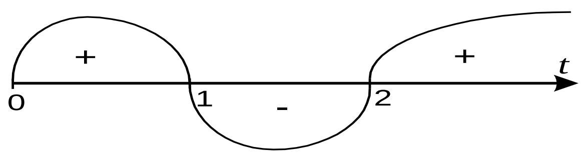
$3^{\sqrt{-3x}}=1 \Rightarrow \sqrt{-3x}=0 \Rightarrow -3x=0 \Rightarrow x=0$.

Ats.: $-\dfrac{1}{3}, 0$.

5. Išspręskite nelygybę $\dfrac{2^{1-x}-2^x+1}{2^x-1}\le 0$.

Sprendimas. Pažymėję $2^x=t, t>0$, gauname nelygybę: $\dfrac{\frac{2}{t}-t+1}{t-1}\le 0 \Rightarrow \dfrac{t^2-t-2}{t(t-1)}\ge 0 \Rightarrow$

$\dfrac{(t+1)(t-2)}{t(t-1)}\ge 0$. Šią nelygybę patogu spręsti intervalų metodu (turėkime omenyje, kad $t>0$):



Iš schemos matome, kad nelygybės sprendiniai yra $t\in(0;1)\cup[2;+\infty)$. Taigi: $0<2^x<1 \Rightarrow x<0$ arba $2^x\ge 2 \Rightarrow x\ge 1$.

Ats.: $x\in(-\infty;0)\cup[1;+\infty)$.

6. Išspręskite nelygybę $\dfrac{4^x}{4^x-3^x}<4$.

Sprendimas. Kairiosios nelygybės pusės trupmenos skaitiklį ir vardiklį padalinę iš $4^x\ne 0$, gauname nelygybę $\dfrac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^x}<4$. Pažymėję $\left(\dfrac{3}{4}\right)^x=t,\ t>0$, turėsime:

$$\frac{1}{1-t}<4 \Rightarrow \frac{1}{1-t}-4<0 \Rightarrow \frac{4t-3}{1-t}<0 \Rightarrow \frac{t-\frac{3}{4}}{t-1}>0 \Rightarrow t\in\left(0;\frac{3}{4}\right)\cup(1;+\infty).$$

Tuomet $\left(\dfrac{3}{4}\right)^x<\dfrac{3}{4} \Rightarrow x>1$ arba $\left(\dfrac{3}{4}\right)^x>1 \Rightarrow x<0$.

Ats.: $x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$.

7. Turime tirpalą, kuriame nuosėdos sudaro 20% viso kiekio. Kiekvienas filtras sugeria 80% nuosėdų. Kiek mažiausiai reikia filtrų, kad perfiltravus tirpalą gautume tirpalą, turintį ne daugiau kaip 0,01% nuosėdų. (Žinoma, kad $\lg 2 \approx 0{,}30$).

Sprendimas. Pagal sąlygą nuosėdos sudaro $\frac{1}{5}$ tirpalo. Po pirmojo perfiltravimo nuosėdos tirpale sudarys $\left(\frac{1}{5}\right)^2$ dalį, po antrojo – $\left(\frac{1}{5}\right)^3$ ir t. t., po k-tojo – $\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}$ dalį tirpalo. Pagal sąlygą nuosėdos turi sudaryti ne didesnę kaip 10^{-4} dalį tirpalo, todėl filtravimų skaičiui surasti turime išspręsti nelygybę $\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1} \le 10^{-4}$. Tuo tikslu logaritmuojame abi nelygybės puses: $\lg\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1} \le \lg 10^{-4} \Rightarrow$

$-(k+1)\lg 5 \le -4 \Rightarrow (k+1)\lg 5 \ge 4 \Rightarrow k \ge \frac{4}{\lg 5} - 1 \Rightarrow k \ge \frac{4}{\lg\frac{10}{2}} - 1 \Rightarrow k \ge \frac{4}{1-\lg 2} - 1$. Čia įrašę $\lg 2 \approx 0{,}30$, gauname, kad $k \ge 4{,}7$. Taigi mažiausiai reikia 5 filtrų.

Ats.: 5 filtrų.

8. Mieste 131071 gyventojas. Vienas gyventojas 9 val. ryto pasakė naujieną dviem savo pažįstamiems. Po pusvalandžio šie du gyventojai perdavė šią naujieną kiekvienas kitiems dviem savo pažįstamiems, dar nežinojusiems jos. Pastarieji keturi vėl po pusvalandžio perpasakojo naujieną kiekvienas dviem savo pažįstamiems ir t. t. Tokiu būdu kas pusvalandį naujieną sužinodavo vis kiti nežinojusieji naujienos miesto gyventojai. Kelintą valandą naujieną sužinojo visi miesto gyventojai?

Sprendimas. Pagal sąlygą:

9 val. ryto naujieną žinojo $1+2=2^2-1=3$ gyventojai,

po pusės valandos, t. y. 9:30, ją jau žinojo $1+2+2^2=2^3-1=7$ gyventojai,

dar po pusės valandos, t. y. 10:00, ją jau žinojo $1+2+2^2+2^3=2^4-1=15$ gyventojų,

dar po valandos, t. y. 11:00, naujieną žinojo $1+2+2^2+2^3+2^4+2^5=2^6-1=63$ ir t. t.

dar po 6 valandų, t. y. 17:00, naujieną žinojo $1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+...+2^{15}+2^{16}=2^{17}-1=131071$ ($2^{17}=131072$).

Ats.: 17 valandą.

9. Radioaktyvioji anglis kartais naudojama organinių liekanų (tokių kaip kaulai, medžio anglis, sėklos) amžiui nustatyti. Ši radioaktyvioji anglis skyla pagal dėsnį $y(t)=y_0\cdot 2^{kt}$; čia $y(t)$ – anglies kiekis laiko momentu *t* (metai), y_0 – radioaktyviosios anglies kiekis pradiniu laiko momentu.

1) Radioaktyviosios anglies skilimo pusamžis (laikas, per kurį suskyla pusė pradinio radioaktyviosios anglies kiekio y_0) yra 5700 metų. Apskaičiuokite konstantos *k* reikšmę.

2) Kiek procentų radioaktyviosios anglies liks medžio anglyje po 1500 metų?

Sprendimas.

1) Pagal sąlygą sudarome lygtį: $\frac{y_0}{2}=y_0\cdot 2^{5700k} \Rightarrow 2^{-1}=2^{5700k} \Rightarrow -1=5700k \Rightarrow k=-\frac{1}{5700}$.

2) Įrašę apskaičiuotąją konstantos *k* reikšmę, gauname tokį radioaktyviosios anglies skilimo dėsnį: $y(t)=y_0\cdot 2^{-\frac{t}{5700}}$. Po 1500 metų iš pradinio kiekio y_0 radioaktyviosios anglies liks

$y(1500) = y_0 \cdot 2^{-\frac{1500}{5700}} = y_0 \cdot 2^{-\frac{15}{57}} \approx y_0 \cdot 2^{-0,263} \approx y_0 \cdot 0,833$. Užrašius tai procentais – radioaktyviosios anglies liks 83,3%.

Ats.: 83,3%.

10. Į banko, kurio metinė palūkanų norma 1,3%, sąskaitą padėtas 3000 eurų indėlis. Apskaičiuokite kokia pinigų suma bus sąskaitoje po dvejų metų, kai palūkanos prie indėlio priskaičiuojamos nenutrūkstamai.

Sprendimas. Pagal nenutrūkstamų palūkanų formulę $P^* = B_0 \cdot (e^p - 1)$ apskaičiuosime pinigų sumą sąskaitoje po vienerių metų: $P_1^* = 3000 \cdot (e^{0,013} - 1) \approx 3000 \cdot 1,013 = 3039$. Analogiškai po antrųjų metų sąskaitoje bus $P_2^* = 3039 \cdot (e^{0,013} - 1) \approx 3039 \cdot 1,013 \approx 3078,51$ eurų.

Ats.: 3078,51 eurų.

Sprendimus parengė M. Skakauskienė ir E. Stankus

L I E T U V O S   J A U N Ų J Ų   M A T E M A T I K Ų   M O K Y K L A

SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

(2018–2020)

1. Aritmetinės progresijos pirmųjų n narių suma apskaičiuojama pagal formulę $S_n = 2n^2 - 27n$. Raskite mažiausiąjį n, kuriam esant, $a_n > 0$.

Sprendimas. Remdamiesi formule $S_n = 2n^2 - 27n$ randame narį a_n:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2n^2 - 27n) - \left(2(n-1)^2 - 27(n-1)\right) = (2n^2 - 27n) - (2n^2 - 31n + 29) = 4n - 29.$$

Kad galiotų sąlyga $a_n > 0$, turi būti $4n - 29 > 0$. Iš čia gauname, kad $n > 7{,}25$.

Taigi ieškoma mažiausia n reikšmė yra 8.

Ats.: 8.

2. Aritmetinės progresijos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ pirmųjų 7 narių suma lygi 2555. Raskite geometrinės progresijos $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ketvirtą narį b_4, jei $b_1 = a_1 = 1$ ir $b_7 = a_7$.

Sprendimas. Pagal sąlygą, $\frac{(1+a_7)\cdot 7}{2} = 2555$.

Iš čia gauname, kad $a_7 = 729$.

Tegu q – geometrinės progresijos $b_1, b_2, b_3, \ldots$ vardiklis. Kadangi $b_1 = a_1 = 1$, tai

$b_7 = b_1 \cdot q^6 = q^6 = 729$.

Iš čia gauname, kad $q^3 = \pm 27$.

Vadinasi, $b_4 = b_1 \cdot q^3 = q^3 = \pm 27$.

Ats.: ± 27.

3. Dvi aritmetinės progresijos 17, 21, ... ir 16, 21, ... turi vienodų narių. Raskite pirmų 100 skaičių, kurie yra abiejų progresijų nariai, sumą.

Sprendimas. Aritmetinės progresijos 17, 21, ... narius žymėkime a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, o aritmetinės progresijos 16, 21, ... narius žymėkime b_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Pirmos progresijos skirtumą žymėkime d_a, o antros progresijos skirtumą – d_b.

Tada $a_1 = 17$, $d_a = 4$, $a_n = a_1 + (n-1)d_a = 17 + (n-1)\cdot 4 = 4n + 13$

ir

$b_1 = 16$, $d_b = 5$, $b_n = b_1 + (n-1)d_b = 16 + (n-1)\cdot 5 = 5n + 11$.

Tarkime, kad pirmosios progresijos narys a_n sutampa su antrosios progresijos nariu b_m,

t. y. $a_n = b_m$. Gauname lygybę $4n + 13 = 5m + 11$, iš kurios išplaukia, kad $4n + 2 = 5m$.

Skaičius $5m$ dalijasi iš 5, todėl ir skaičius $4n + 2$ turi dalytis iš 5. Taigi galimos n reikšmės yra $n = 2, 7, 12, 17, \ldots$, o atitinkamos m reikšmės yra $m = 2, 6, 10, 14, \ldots$. Vadinasi, tarpusavyje lygūs yra šie abiejų progresijų nariai:

$$a_2 = b_2 = 21,\ a_7 = b_6 = 41,\ a_{12} = b_{10} = 61,\ a_{17} = b_{14} = 81, \ldots .$$

Matome, kad skaičiai 21, 41, 61, 81, ... sudaro aritmetinę progresiją, kurios pirmas narys 21, o skirtumas 20. Belieka apskaičiuoti jos pirmųjų 100 narių sumą:

$$S_{100} = \frac{2\cdot 21 + 99\cdot 20}{2}\cdot 100 = 101100.$$

Ats.: 101100.

4. Skaičiai a, b, c, d sudaro geometrinę progresiją. Raskite $(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2-$ $-(a-d)^2$.

Sprendimas. Tegu q yra geometrinės progresijos vardiklis. Tada $b=aq$, $c=aq^2$ ir $d=aq^3$. Tuomet $(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2-(a-d)^2=(a-aq^2)^2+(aq-aq^2)^2+(aq-aq^3)^2-(a-aq^3)^2=$ $=a^2((1-q^2)^2+(q-q^2)^2+(q-q^3)^2-(1-q^3)^2)=a^2\big((1-2q^2+q^4)+(q^2-2q^3+q^4)+(q^2-$ $-2q^4+q^6)-(1-2q^3+q^6)\big)=a^2\cdot 0=0$.

*Ats.:*0.

5. Trys skaičiai sudaro geometrinę progresiją. Iš trečio nario atėmus 64, gaunama aritmetinė progresija. Po to iš antro nario atėmus 8, gaunama nauja geometrinė progresija. Kokie yra tie trys skaičiai?

Sprendimas. Tegu a, b ir c yra ieškomi skaičiai, o q yra geometrinės progresijos a, b, c vardiklis. Tada $b=aq$, $c=aq^2$.

Kadangi skaičių seka a, aq, aq^2-64 yra aritmetinė progresija, tai turi būti tenkinama sąlyga $aq-a=(aq^2-64)-aq$, kuri ekvivalenti lygybei $aq^2-2aq+a-64=0$.

Skaičių a, $aq-8$, aq^2-64 seka yra geometrinė progresija, todėl

$$\frac{aq-8}{a}=\frac{aq^2-64}{aq-8}.$$

Iš čia gauname:

$$(aq-8)^2=a(aq^2-64),$$
$$a^2q^2-16aq+64=a^2q^2-64a,$$
$$aq-4a-4=0.$$

Skaičiams a ir q rasti belieka išspręsti lygčių sistemą $\Rightarrow\begin{cases} aq^2-2aq+a-64=0, \\ aq-4a-4=0. \end{cases}$

Gauname:

$$\begin{cases} a(q-1)^2=64, \\ a(q-4)=4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a(q-1)^2}{a(q-4)}=\frac{64}{4}, \\ a=\frac{4}{q-4}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (q-1)^2=16(q-4), \\ a=\frac{4}{q-4}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2-18q+65=0, \\ a=\frac{4}{q-4}. \end{cases}$$

Lygties $q^2-18q+65=0$ sprendiniai yra $q=5$ ir $q=13$. Skaičių a randame iš lygties $a=\frac{4}{q-4}$.

Jei $q=5$, tai $a=4$, $b=20$, $c=100$.

Jei $q=13$, tai $a=\frac{4}{9}$, $b=\frac{52}{9}$, $c=\frac{676}{9}$.

Ats.: 4, 20, 100; $\frac{4}{9}$, $\frac{52}{9}$, $\frac{676}{9}$.

6. Uždaviniai buvo sprendžiami vienas po kito. Kiekvienam uždaviniui, pradedant antruoju, išspręsti prireikdavo po tiek pat kartų mažiau laiko negu prieš tai spręstam. Kiek uždavinių buvo išspręsta, jei visų uždavinių, išskyrus pirmąjį, sprendimas užtruko 63,5 minutės; visų uždavinių, išskyrus paskutinį, sprendimas – 127 minutes, o visų uždavinių, išskyrus pirmuosius du, sprendimas užtruko 31,5 minutės?

Sprendimas. Tegu n – išspręstų uždavinių skaičius, o b_n– n-tajam uždaviniui išspręsti reikalingas laikas (minutėmis), $n \in N$. Skaičių seka (b_n) yra geometrinė mažėjanti progresija, kurios vardiklis q tenkina sąlygą $0 < q < 1$.

Pagal sąlygą,

$$S_n - b_1 = 63{,}5, \tag{1}$$

$$S_n - b_n = 127, \tag{2}$$

$$S_n - b_1 - b_2 = 31{,}5. \tag{3}$$

Iš (1) ir (3) lygybės gauname, kad

$$63{,}5 - b_2 = 31{,}5,\ b_2 = 32,\ \text{o}\ b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{32}{q}\ \text{ir}\ b_n = b_1 q^{n-1} = \frac{32q^{n-1}}{q}.$$

Iš (1) ir (2) lygybės gauname, kad

$$S_n = 63{,}5 + b_1\ \text{ir}\ S_n = 127 + b_n.$$

Tuomet

$$63{,}5 + b_1 = 127 + b_n,$$

$$b_1 - b_n = 63{,}5,$$

$$\frac{32}{q} - \frac{32q^{n-1}}{q} = 63{,}5,$$

$$32(1 - q^{n-1}) = 63{,}5q. \tag{4}$$

Iš (1) lygybės gauname, kad

$$\frac{b_1(q^n - 1)}{q-1} - b_1 = 63{,}5,$$

$$b_1\big((q^n - 1) - (q - 1)\big) = 63{,}5(q - 1),$$

$$b_1 q(q^{n-1} - 1) = 63{,}5(q - 1),$$

$$\frac{32}{q} \cdot q(q^{n-1} - 1) = 63{,}5(q - 1),$$

$$32(q^{n-1} - 1) = 63{,}5(q - 1),$$

$$32(1 - q^{n-1}) = 63{,}5(1 - q). \tag{5}$$

Iš (4) ir (5) lygybės gauname, kad $q = 1 - q$ ir $q = 0{,}5$.

Įrašę q reikšmę $0{,}5 = \frac{1}{2}$ į (4) lygybę gauname lygtį

$$32\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = 63{,}5 \cdot \frac{1}{2}.$$

Šios lygties sprendinys yra $n = 8$. Tai reiškia, kad buvo išspręsta 8 uždaviniai.

Ats.: 8 uždaviniai.

7. Į apskritimą, kurio spindulys R, įbrėžtas taisyklingas trikampis; į trikampį įbrėžtas apskritimas; į apskritimą vėl įbrėžtas taisyklingasis trikampis ir t. t. Raskite apskritimų ilgių sumą ir skritulių plotų sumą.

Sprendimas. Tegu r_n yra n-tojo apskritimo spindulio ilgis, $n \in N$. Tuomet $r_1 = R$.

Nesunku įsitikinti, kad į pirmąjį apskritimą, kurio spindulys R, įbrėžto taisyklingo trikampio kraštinės ilgis lygus $R\sqrt{3}$, į tą trikampį įbrėžto apskritimo (antro) spindulio ilgis r_2 yra lygus $\frac{R}{2}$.

Į antrą apskritimą, kurio spindulys $r_2 = \frac{R}{2}$, įbrėžto taisyklingo trikampio kraštinės ilgis lygus $\frac{R\sqrt{3}}{2}$, o į tą trikampį įbrėžto apskritimo (trečio) spindulio ilgis r_3 lygus $\frac{R}{4}$.

Pastebime, kad apskritimų spindulių ilgiai r_1, r_2, r_3, ... sudaro begalinę geometrinę progresiją, kurios $r_1 = R$, o vardiklis $q = \frac{1}{2}$. Šios progresijos narių suma $r_1 + r_2 + \ldots$ lygi $\frac{R}{1-\frac{1}{2}} = 2R$.

Randame apskritimų ilgių sumą:

$$2\pi r_1 + 2\pi r_2 + 2\pi r_3 + \ldots = 2\pi(r_1 + r_2 + \ldots) = 2\pi \cdot 2R = 4\pi R.$$

Apskritimų spindulių ilgių kvadratai R^2, $\frac{R^2}{4}$, $\frac{R^2}{16}$, ... irgi sudaro begalinę mažėjančią geometrinę progresiją, kurios pirmas narys R^2, o vardiklis lygus $\frac{1}{4}$. Šios progresijos narių suma $r_1^2 + r_2^2 + \ldots$ lygi

$$\frac{R^2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4R^2}{3}.$$

Randame skritulių plotų sumą:

$$\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \ldots = \pi(r_1^2 + r_2^2 + \ldots) = \pi \cdot \frac{4R^2}{3} = \frac{4}{3}\pi R^2.$$

Ats.: $4\pi R$; $\frac{4}{3}\pi R^2$.

8. Geometrinės progresijos b_1, b_2, b_3, ... pirmas narys lygus 1. Kuriai šios progresijos vardiklio reikšmei esant reiškinio $4b_2 + 5b_3$ reikšmė yra mažiausia?

Sprendimas. Tegu (b_n) – geometrinė progresija, kurios pirmas narys $b_1 = 1$, o vardiklis q. Tuomet $b_2 = q$, $b_3 = q^2$. Įrašę b_2 ir b_3 reikšmes į reiškinį $4b_2 + 5b_3$, gauname:

$$4b_2 + 5b_3 = 4q + 5q^2 = 5(q^2 + 0{,}8q) = 5\big((q^2 + 2q \cdot 0{,}4 + 0{,}4^2) - 0{,}4^2\big) =$$

$$= 5((q + 0{,}4)^2 - 0{,}16) = 5(q + 0{,}4)^2 - 0{,}8.$$

Reiškinio $5(q + 0{,}4)^2 - 0{,}8$ reikšmė yra mažiausia esant mažiausiai reiškinio $(q + 0{,}4)^2$ reikšmei, t. y., kai $q + 0{,}4 = 0$ ir $q = -0{,}4$.

Ats.: $-0{,}4$.

9. Aritmetinės progresijos skirtumas nelygus nuliui. Seka, kurią sudaro šios progresijos pirmo ir antro, antro ir trečio bei trečio ir pirmo nario sandauga, yra geometrinė progresija. Raskite jos vardiklį.

Sprendimas. Tegu a_1, a_2 ir a_3 yra aritmetinės progresijos nariai, o d $(d \neq 0)$ – jos skirtumas.

Pagal sąlygą, skaičiai

$$b_1 = a_1 \cdot a_2 = a_1(a_1 + d),$$
$$b_2 = a_2 \cdot a_3 = (a_1 + d)(a_1 + 2d),$$
$$b_3 = a_3 \cdot a_1 = (a_1 + 2d)a_1$$

sudaro geometrinę progresiją. Jos vardiklį q galima rasti dvejopai – pagal formulę

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{(a_1+d)(a_1+2d)}{a_1(a_1+d)} = \frac{a_1+2d}{a_1},\ a_1 \neq 0,$$

arba pagal formulę

$$q = \frac{b_3}{b_2} = \frac{(a_1+2d)a_1}{(a_1+d)(a_1+2d)} = \frac{a_1}{a_1+d},\ a_1 + d \neq 0.$$

Iš lygybės $\frac{a_1+2d}{a_1} = \frac{a_1}{a_1+d}$ gauname, kad

$(a_1 + 2d)(a_1 + d) = a_1^2$, o iš čia – lygybę $d(3a_1 + 2d) = 0$.

Kadangi $d \neq 0$, tai $3a_1 + 2d = 0$. Vadinasi, $d = -\frac{3a_1}{2}$.

Šią aritmetinės progresijos skirtumo d išraišką įrašykime, pavyzdžiui, į pirmą vardiklio q skaičiavimo formulę ir gausime, kad

$$q = \frac{a_1-3a_1}{a_1} = -2.$$

Ats.: -2.

10. Raskite triženklį skaičių, jei jo skaitmenys sudaro geometrinę progresiją, o triženklio skaičiaus, 400 vienetų mažesnio už ieškomą skaičių, skaitmenys sudaro aritmetinę progresiją.

Sprendimas. Tegu $\overline{abc}$ yra ieškomas triženklis skaičius. Pagal sąlygą,

$$a \in \{5; 6; 7; 8; 9\},\ b^2 = ac \text{ ir } b = \frac{(a-4)+c}{2}.$$

Iš čia gauname, kad

$$\frac{a-4+c}{2} = \sqrt{ac},$$
$$a - 2\sqrt{ac} + c = 4,$$
$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{c}\right)^2 = 4,$$
$$\sqrt{a} = \sqrt{c} \pm 2.$$

Aišku, kad galimos c reikšmės yra 0, 1, 4 ir 9.

Skaičiuodami įsitikiname, kad tinka tik $c = 1$. Tada $a = 9$ ir $b = 3$.

Taigi ieškomas triženklis skaičius yra 931.

Ats.: 931.

Sprendimus parengė docentas Antanas Apynis ir mokytoja ekspertė Regina Rudalevičienė.

Lošimai, laimėjimai, tikimybės ...

Parengė Vilius Stakėnas

Sprendimai

1 uždavinys. *Lošiama metant tris simetriškus šešiasienius kauliukus, kurių sienelės sužymėtos skaičiais* $1, 2, 3, 4, 5, 6$. *Laimėjimas lygus skaičių ant atvirtusių sienelių sumai. Apskaičiuokite tikimybes, kad laimėjimas bus lygus* 9 *ir* 10.

Sprendimas. Galime įsivaizduoti, kad kauliukai skirtingų spalvų, todėl juos galime atskirti ir pavadinti pirmuoju, antruoju, trečiuoju kauliukais. Bandymo baigtis – akučių atvirtusių ant pirmojo, antrojo, trečiojo kauliuko trejetas $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$. Iš viso yra 6^3 skirtingų baigčių. Skaičius 9 ir 10 galime išreikšti suma trijų skaičių, nedidesnių už 6 ir išdėstytų nemažėjimo tvarka šešiais būdais:

$$\begin{aligned} 9 &= 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3, \\ 10 &= 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+3+5 = 2+4+4 = 3+3+4. \end{aligned}$$

Jeigu visi sumos dėmenys skirtingi, išraišką atitinka 6 bandymo baigtys; jeigu du dėmenys vienodi, yra 3 bandymo baigtys, jeigu visi dėmenys vienodi, tėra viena bandymo baigtis. Taigi pažymėję akučių sumą S gausime:

$$\begin{aligned} P(S=9) &= \frac{1}{6^3}(6+6+3+3+6+1) = \frac{25}{216}, \\ P(S=10) &= \frac{1}{6^3}(6+6+3+6+3+3) = \frac{27}{216}. \end{aligned}$$

2 uždavinys. *Urnoje yra* 5 *balti ir* 5 *juodi rutuliai, koordinačių plokštumoje pažymėti taškai su sveikaskaitėmis koordinatėmis. Taške* $O(0;0)$ *stovi kareivėlis. Iš urnos žaidėjas atsitiktinai traukia vieną rutulį: jeigu jis baltas – kareivėlis žengia žingsnį į dešinę, t.y., pereina į tašką* $A(1;0)$*; jeigu juodas – pereina į tašką* $B(0;1)$*. Po to iš urnos traukiamas antras, trečias rutulys, kol urna ištuštėja. Po kiekvieno ištraukto rutulio kareivėlis pereina į gretimą dešinįjį pažymėtą tašką, jeigu ištrauktas rutulys baltas, ir į gretimą viršutinįjį, jeigu rutulys juodas. Kokia tikimybė, kad šitaip keliaudamas iš taško* $O(0;0)$ *į* $N(5;5)$ *kareivėlis aplankys bent vieną iš taškų* $T_1(2;2), T_2(3;2), T_3(2;3), T_4(3;3)$*?*

Sprendimas. Kareivėlio kelią vienareikšmiškai nusako ištrauktų rutulių eilė. Šios eilės ir yra bandymo baigtys. Kiek skirtingų eilių galima sudaryti iš 5 baltų ir 5 juodų rutulių? Įsivaizduokime, kad pagaminome dėžutę su 10 skyrelių ištrauktiems rutuliams sudėti. Kiek yra galimybių išdėstyti penkis baltus rutulius šioje dėžutėje? Tiek, kiek yra galimybių parinkti 5 skyrelius baltiems rutuliams, t.y., C_{10}^5. Tai ir yra visų galimų baigčių skaičius.

Pažymėkime A_1, A_2, A_3, A_4 įvykius, kad kareivėlis aplankys taškus T_1, T_2, T_3, T_4. Aišku, kad mus domina įvykių sąjunga $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Pasinaudoję įvykių sąjungos tikimybės formule gausime:

$$\begin{aligned}
P(A) &= S_1 - S_2 + S_3 + S_4, \\
S_1 &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4), \\
S_2 &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_4) \\
&+ P(A_2 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_4) + P(A_3 \cap A_4), \\
S_3 &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) \\
&+ P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4), \\
S_4 &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).
\end{aligned}$$

Prieš pradėdami skaičiuoti pastebėkime, kad kareivėlis negali aplankyti abiejų taškų T_2 ir T_3; taip pat negali aplankyti visų trijų taškų T_1, T_2, T_3 bei T_2, T_3, T_4. Taip pat negali aplankyti visų keturių taškų. Taigi iš tiesų

$$\begin{aligned}
P(A) &= S_1 - S_2 + S_3, \\
S_1 &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4), \\
S_2 &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_4) \\
&+ P(A_2 \cap A_4) + P(A_3 \cap A_4), \\
S_3 &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4).
\end{aligned}$$

Baigtis, palankias įvykiams skaičiuosime naudodamiesi daugybos taisykle. Pavyzdžiui, baigčių, palankių įvykiui $A_1 \cap A_4$ yra tiek, kiek yra kareivėlio kelių iš $O(0;0)$ į $N(5;5)$, einančių per T_1 ir T_4. Pirmiausia turime patekti į tašką T_1. Tam prireiks 4 žingsnių, iš kurių du turi būti nukreipti į dešinę, iš viso tokių kelių yra C_4^2. Po to dviem žingsniais (vienu į dešinę, kitu į viršų) turime patekti į tašką T_4. Tą galime padaryti $C_2^1 = 2$ būdais. Galop iš taško T_4 į tašką $(5;5)$ galime patekti C_4^2 būdais. Taigi

$$|A_1 \cap A_4| = C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_4^2, \quad P(A_1 \cap A_4) = \frac{C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_4^2}{C_{10}^5}.$$

Pastebėkime, kad visų įvykių tikimybes galime užrašyti trupmenomis su tuo pačiu vardikliu. Taigi dalybą iš šio vardiklio galime atlikti pačioje skaičiavimų pabaigoje. Jeigu nesuklysime, gausime tokią tikimybės reikšmę:

$$P(A) = \frac{200}{252}.$$

3 uždavinys. *Urna su rutuliais ta pati kaip 2 uždavinyje, tas pats kareivėlis stovi taške $O(0;0)$. Jo kelionės taisyklė – ta pati, tačiau atsitiktinai ištraukus rutulį jis sugrąžinamas į urną. Kokia tikimybė, kad dešimties žingsnių kelionėje kareivėlis nors kartą užsuks į bent vieną bent vieną iš taškų*

$T_1(2;2), T_2(3;2)$, $T_3(2;3), T_4(3;3)$?

Sprendimas. Jeigu žingsnį į dešinę žymėsime raide D, o į viršų – raide V, tai bandymo baigtį galėsime užrašyti dešimties raidžių seka, pavyzdžiui, DVVDDDDVVD. Aišku, kad tokių sekų iš viso yra 2^{10}. Naudosime tuos pačius įvykių žymenis kaip ankstesniame uždavinyje. Kad kareivėlis užsuktų į tašką T_1 jis iš pradžių turi keliauti vienu iš C_4^2 kelių, o likusieji 6 žingsniai gali būti bet kokie, taigi $|A_1| = C_4^2 \cdot 2^6$ ir $P(A_1) = C_4^2 \cdot 2^6/2^{10} = C_4^2/2^4$. Taip pat skaičiuojame ir kitų įvykių bei jų sankirtų tikimybes:

$$|A_1 \cap A_4| = C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot 2^4, \quad P(A_1 \cap A_4) = \frac{C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot 2^4}{2^{10}}.$$

Apskaičiavę gausime:

$$\begin{aligned}
S_1 &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = \frac{84}{64}, \\
S_2 &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_4) \\
&+ P(A_2 \cap A_4) + P(A_3 \cap A_4) \\
&= 2 \cdot \frac{C_4^2}{2^5} + 2 \cdot \frac{C_4^2}{2^6} + \frac{C_5^2}{2^6} = \frac{56}{64}, \\
S_3 &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = 2 \cdot \frac{C_4^2}{2^6} = \frac{12}{64}, \\
P(A) &= S_1 - S_2 + S_3 = \frac{84}{64} - \frac{46}{64} + \frac{12}{64} = \frac{25}{32}.
\end{aligned}$$

4 uždavinys. *Urnoje yra n rutulių, sužymėtų skaičiais nuo 1 iki n, $n \geqslant 9$. Prieš lošimą žaidėjas užpildo 3×3 gardelės kvadratėlius įrašydamas į juos atsitiktinai parinktus skirtingus aibės $\{1, 2, \ldots, n\}$ skaičius. Iš urnos vienas po kito atsitiktinai traukiami rutuliai ir skelbiami ant jų užrašyti skaičiai. Jeigu rutulio skaičius yra įrašytas gardelės langelyje, žaidėjas jį užbraukia. Jeigu paskelbus penkis skaičius žaidėjo gardelėje bus užbraukta kuri nors eilutė ar stulpelis, žaidėjas laimi prizą. Kokia tikimybė laimėti? Kokia būtų tikimybė laimėti, jeigu būtų traukiami šeši skaičiai? Apskaičiuokite šias tikimybes, kai $n = 10$.*

Sprendimas. Pažymėkime A įvykį, kad žaidėjas laimės, A_1, A_2, A_3 – įvykius, kad bus užbrauktos atitinkamai pirmoji, antroji ir trečioji eilutės, A_4, A_5, A_6 – kad bus užbraukti pirmasis, antrasis, trečiasis stulpeliai. Tada įvykis A yra įvykių A_i sąjunga, taigi A tikimybei skaičiuoti galime naudoti sąjungos tikimybės formulę. Pastebėkime, kad tiek traukiant penkis, tiek šešis rutulius trys įvykiai A_i negali kartu įvykti, taigi

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup) = S_1 - S_2, \\
S_1 &= P(A_1) + \cdots + P(A_6), \\
S_2 &= P(A_1 \cap A_2) + \cdots + P(A_5 \cap A_6).
\end{aligned}$$

Sumoje S_1 yra šeši dėmenys, o sumoje S_2 – 15. Nagrinėkime atvejį, kai traukiami 5 rutuliai. Tada dvi eilutės negali būti užbrauktos, du stulpeliai – taip pat. Taigi $P(A_i \cap A_4) = P(A_i \cap A_5) = P(A_i \cap A_6) = 0$, kai $i = 1, 2, 3$. Taigi tik šeši sumos S_2 dėmenys yra nelygūs nuliui.

Bandymas prasideda, kai žaidėjas užpildo lentelę skaičiais. Pažymėkime pirmosios eilutės skaičius a_{11}, a_{12}, a_{13}, antrosios ir trečiosios atitinkamai a_{21}, a_{22}, a_{23} ir a_{31}, a_{32}, a_{33}. Kadangi laimėjimo tikimybė nepriklauso nuo skaičių paskelbimo tvarkos, galime manyti, kad visi penki skaičiai paskelbiami iš karto. Tada bandymo baigtis yra penkių skaičių iš aibės $\{1, 2, \ldots, n\}$ derinys. Taigi iš viso yra C_n^5 skirtingų baigčių. Kad įvyktų įvykis A_1 turi būti būtinai paskelbti skaičiai a_{11}, a_{12}, a_{13} ir dar du papildomai. Taigi įvykiui A_1 yra C_{n-3}^2 palankių baigčių,

$$P(A_1) = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}.$$

Aišku, kad kitų įvykių tikimybės yra tos pačios, taigi

$$S_1 = 6 \cdot \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}.$$

Kad įvyktų įvykis $A_1 \cap A_4$ turi būti paskelbti skaičiai $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{31}$. Šiam įvykiui tėra viena palanki baigtis. Kitoms sankirtoms – taip pat. Todėl

$$S_2 = 6 \cdot \frac{1}{C_n^5},$$

ir

$$P(A) = 6 \cdot \frac{C_{n-3}^2 - 1}{C_n^5}.$$

Kai $n = 10$, tai $P(A) = 10/21$.

Kai traukiami šeši rutuliai, tai $P(A_i) = C_{n-3}^3/C_n^6$ ir $S_1 = 6C_{n-3}^3/C_n^6$. Tačiau šiuo atveju visos tikimybės $P(A_i \cap A_j)$ yra teigiamos. Tikimybės, kad dvi eilutės (du stulpeliai) bus užbraukti lygios

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{C_n^6},$$

tikimybės, kad viena eilutė ir vienas stulpelis bus užpildyti, lygios

$$P(A_1 \cap A_4) = \frac{C_{n-5}^1}{C_n^6}.$$

Taigi

$$P(A) = S_1 - S_2 = 6\frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} - 9\frac{1}{C_n^6} - 6\frac{C_{n-5}^1}{C_n^6} = \frac{6C_{n-3}^3 - 6C_{n-5}^1 - 9}{C_n^6}.$$

Kai $n = 10, P(A) = 171/210$.

5 uždavinys. *Urnoje yra 3 balti ir 3 juodi rutuliai. Žaidėjai A ir B pakaitomis atsitiktinai be grąžinimo traukia iš urnos po rutulį. Žaidimas pasibaigia, kai antrą kartą ištraukiamas baltas rutulys. Kokia tikimybė, kad laimės A? Kokia būtų A laimėjimo tikimybė, jeigu urnoje būtų 2 balti ir 4 juodi? Jeigu būtų 4 balti ir 2 juodi?*

Sprendimas. Bus paprasčiau skaičiuoti, jeigu tarsime, kad ir paaiškėjus laimėtojui, rutuliai traukiami toliau, kol urna ištuštėja. Tada bandymo baigtis – rutulių eilė. Jeigu baltus rutulius pakeisime raidėmis B, o juodus raidėmis J, kiekvieną baigtį galėsime pavaizduoti šešių raidžių seka: trys raidės šioje sekoje yra A, trys raidės – B. Iš viso tokių sekų yra C_6^3. A laimėjimui yra palankios sekos, kuriose antroji raidė B yra šioje sekoje trečioji arba penktoji. Tokių sekų atitinkamai yra $C_2^1 \cdot C_3^1$ ir C_4^1. Jei L_A reiškia įvykį, kad laimės A, tai

$$P(L_A) = \frac{C_2^1 \cdot C_3^1 + C_4^1}{C_6^3} = \frac{1}{2}.$$

Jeigu urnoje būtų 2 balti ir 4 juodi rutulia, tai

$$P(L_A) = \frac{C_2^1 + C_4^1}{C_6^2} = \frac{2}{5}.$$

Analogiškai urnos su 4 baltais ir 2 juodais rutuliais atveju gautume

$$P(L_A) = \frac{C_2^1 \cdot C_3^2}{C_6^2} = \frac{2}{5}.$$

6 uždavinys. *Yra trys urnos, kiekvienoje jų – 6 dviejų spalvų rutuliai. Pirmoje urnoje yra 3 juodi ir 3 balti rutuliai, antroje – 2 balti ir 4 juodi, trečioje baltų rutulių skaičius nežinomas. Iš pirmos urnos atsitiktinai parinktas rutulys perkeliamas į antrą urną, po to – atsitiktinai parinktas antros urnos rutulys perkeliamas į trečiąją, iš jos – atsitiktinis rutulys grąžinamas į pirmąją urną. Kokia tikimybė, kad pirmoje urnoje vėl bus 3 juodi ir 3 balti rutuliai?*

Sprendimas. Pažymėkime trečiosios urnos baltų rutulių skaičių u, o juodų – v, taigi $u + v = 6$. Tegu A yra įvykis, kad bandymo pabaigoje pirmos urnos baltų ir juodų rutulių skaičiai liko tie patys, o B_i, J_i, kad iš i-osios urnos perkeliamas atitinkamai baltas, juodas rutuliai. Taigi įvykis A yra įvykių $B_1 \cap B_2 \cap B_3, B_1 \cap J_2 \cap B_3, J_1 \cap B_2 \cap J_3, J_1 \cap J_2 \cap J_3$ sąjunga.

Naudodamiesi tikimybių sandaugos formule skaičiuojame:

$$\begin{aligned}
P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) &= P(B_1)P(B_2|B_1)P(B_3|B_1 \cap B_2) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{u+1}{7}, \\
P(B_1 \cap J_2 \cap B_3) &= P(B_1)P(J_2|B_1)P(B_3|B_1 \cap J_2) = \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{u}{7}, \\
P(J_1 \cap B_2 \cap J_3) &= P(J_1)P(B_2|J_1)P(J_3|J_1 \cap B_2) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{v}{7}, \\
P(J_1 \cap J_2 \cap J_3) &= P(J_1)P(J_2|B_1)P(J_3|J_1 \cap J_2) = \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{v+1}{7}.
\end{aligned}$$

Sudėję šias tikimybes gausime

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{3}{6} \cdot (\frac{3}{7} \cdot \frac{u+1}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{u}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{v}{7} + \frac{5}{7} \cdot \frac{v+1}{7}) \\
&= \frac{3}{6} \cdot \frac{3(u+1) + 4u + 2v + 5(v+1)}{49} \\
&= \frac{3}{6} \cdot \frac{7(u+v)+8}{49} = \frac{3}{6} \cdot \frac{50}{49} = \frac{25}{49}.
\end{aligned}$$

7 uždavinys. *Kad būtų priimtas į šachmatų klubą Tomas turi sužaisti po vieną partiją su klubo nariais A, B, C ir nepralaimėti dviejų partijų iš eilės. Partijos negali baigtis lygiosiomis. Įvykiai, kad Tomas laimės prieš A, B, C yra nepriklausomi, o jų tikimybės lygios $p_A, p_B, p_C, 1 > p_A > p_B > p_C > 0$. Tomas gali pasirinkti vieną iš šešių partijų su varžovais eilę.*

1. Įrodykite, kad tikimybė įstoti į klubą pasirinkus varžovų eilę ABC yra lygi tikimybei įstoti į klubą pasirinkus varžovų eilę CBA.

2. Kokią varžovų eilę turėtų pasirinkti Tomas, kad tikimybė įstoti į klubą būtų didžiausia?

Sprendimas. 1. Pažymėkime U_A, U_B, U_C įvykius, kad Tomas laimės prieš A, B, C, o U_{ABC}, U_{CBA} įvykius, kad bus priimtas į klubą, jeigu pasirinks varžovų eiles ABC ir CBA.

Tarkime, kad pasirinkta varžovų eilė ABC. Jeigu Tomas laimės prieš B, t.y., įvyks įvykis U_B, jis tikrai bus priimtas. Jeigu pralaimės, taigi, įvyks įvykis $\overline{U_B}$, jis bus priimtas tik tada, kai laimės ir prieš A, ir prieš C, todėl turi kartu įvykti įvykiai U_A, U_B. Gauname

$$U_{ABC} = U_B \cup \overline{U_B} \cap U_A \cap U_C, \quad P(U_{ABC}) = P(U_B) + P(\overline{U_B} \cap U_A \cap U_C).$$

Kadangi įvykiai $\overline{U_B}, U_A, U_C$ yra nepriklausomi, tai

$$P(U_{ABC}) = p_B + p_A(1 - p_B)p_C.$$

Jeigu Tomas pasirinktų varžovų eilę CBA, analogiškai gautume, kad

$$P(U_{C,B,A}) = p_B + p_A(1 - p_B)p_C,$$

taigi tikimybės lygios.

2. Tomas gali pasirinkti varžovus šešiais būdais, tačiau jau matėme, kad tikimybė būti priimtam į klubą priklauso tik nuo to, su kuo bus žaidžiama antra partija. Taigi

$$\begin{aligned} P(U_{BAC}) &= P(U_{CAB}) = p_A + p_B(1-p_A)p_C, \\ P(U_{ABC}) &= P(U_{CBA}) = p_B + p_A(1-p_B)p_C, \\ P(U_{ACB}) &= P(U_{ACB}) = p_C + p_A(1-p_C)p_B. \end{aligned}$$

Nuojauta turbūt sako, kad geriausia rinktis vieną iš dviejų eilių, kurios viduryje yra varžovas, prieš kurį tikimybė laimėti yra didžiausia. Įsitikinkime, pavyzdžiui, kad $P(U_{BAC}) > P(U_{ABC})$. Iš tikrųjų:

$$P(U_{BAC}) - P(U_{ABC}) = p_A - p_B + p_Bp_C - p_Ap_C = (p_A - p_B)(1-p_C) > 0.$$

Lygiai taip pat gautume $P(U_{ABC}) - P(U_{ACB}) > 0$, ir

$$P(U_{BAC}) > P(U_{ABC}) > P(U_{ACB}) > 0.$$

8 uždavinys. *Urnoje yra $N \geqslant 3$ rutulių, iš jų u balti, kiti juodi. Iš urnos atsitiktinai ištraukiami trys rutuliai, nustatoma daugumos ištrauktųjų rutulių spalva ir visi trys rutuliai perkeliami į antrą urną. Iš jos žaidėjas atsitiktinai traukia vieną rutulį. Jeigu ištraukia daugumos spalvos rutulį – laimi prizą.*

1. Raskite tikimybę P_u, kad žaidėjas nelaimės.

2. Panagrinėkite tikimybių santykį P_u/P_{u-1} ir įrodykite, kad tikimybės P_u didėja, kai u prabėga intervalo $[0;(N+1)/2]$ sveikuosius skaičius, ir mažėja, kai prabėga intervalo $((N+1)/2;N]$ skaičius.

Sprendimas. Ištraukus tris rutulius iš pirmosios urnos, gali nebūti nei vieno balto rutulio, gali būti lygiai vienas, lygiai du arba visi trys balti rutuliai. Pažymėkime šiuos įvykius H_0, H_1, H_2, H_3. Aišku, kad kai kurie iš jų gali ir neįvykti. Pavyzdžiui, jei $u = 2$, tai H_3 yra negalimas įvykis. Tegu A yra įvykis, kad žaidėjas nelaimės. Naudodamiesi pilnosios tikimybės formule gauname:

$$\begin{aligned} P_u &= P(A) = P(H_0)P(A|H_0) + P(H_1)P(A|H_1) \\ &+ P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3). \end{aligned}$$

Aišku, kad $P(A|H_0) = P(A|H_3) = 0, P(A|H_1) = P(A|H_2) = 1/3$. Taigi

$$\begin{aligned} P_u &= P(H_1)\frac{1}{3} + P(H_2)\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\frac{C_u^1C_{N-u}^2}{C_N^3} + \frac{1}{3}\frac{C_u^2C_{N-u}^1}{C_N^3} \\ &= \frac{u(N-u)(N-u-1) + u(u-1)(N-u)}{6C_N^3} = \frac{N-2}{6C_N^3}\cdot u(N-u). \end{aligned}$$

Matome, kad $P_0 = P_N = 0$. Kai $2 \leqslant u \leqslant N-1$, gauname

$$\frac{P_u}{P_{u-1}} = \frac{u(N-u)}{(u-1)(N-u+1)} \geqslant 1, \quad \text{kai} \quad u(N-u) \geqslant (u-1)(N-u+1),$$

t.y., kai $u \leqslant (N+1)/2$.

9 uždavinys. *Mesta moneta atvirsta herbu su tikimybe p ir skaičiumi su tikimybe q, $p+q=1$. Moneta metama keturis kartus, vienodų rezultatų eilę pavadinkime bloku, o bloko rezultatų skaičių – jo ilgiu. Pavyzdžiui, jeigu metimų rezultatai yra $HHSH$, tai pirmojo bloko ilgis lygus 2, antrojo – 1. Raskite įvykių*

$$\begin{aligned} A_1 &= = \{\textit{pirmojo bloko ilgis lygus } 1\}, \\ A_2 &= = \{\textit{antrojo bloko ilgis lygus } 1\}, \\ B_1 &= = \{\textit{pirmojo bloko ilgis lygus } 2\}, \\ B_2 &= = \{\textit{antrojo bloko ilgis lygus } 2\} \end{aligned}$$

tikimybes. Kurio iš įvykių A_1, A_2 tikimybė didesnė? Kurio iš įvykių B_1, B_2 tikimybė didesnė?

Sprendimas. Bandymo baigtys užrašomos keturių raidžių sekomis, H reiškia, kad moneta atvirto herbu, S – skaičiumi. Įvykiui A_1 palankios šios baigtys: HSSS, HSSH, HSHS,HSHH, SHHH, SHHS, SHSH,SHSS. Taigi

$$P(A_1) = 2pq^3 + 2qp^3 + 4p^2q^2 = 2pq(p^2 + 2pq + q^2) = 2pq.$$

Savo ruožtu įvykiui A_2 palankios baigtys HSHH, HSHS, HHSH, HHHS, SHSS, SHSH, SSHS,SSSH. Taigi

$$\begin{aligned} P(A_2) &= 3pq^3 + 3p^3q + 2p^2q^2 = pq(3q^2 + 3p^2 + 2pq) \\ &= pq(3(q^2 + p^2 + 2pq) - 4pq)) = pq(3 - 4pq). \end{aligned}$$

Tačiau $pq = p(1-p) \leqslant 1/4$, taigi $P(A_2) \geqslant pq\big(3 - 4 \cdot \frac{1}{4}\big) = 2pq$. Taigi $P(A_2)$ yra didesnė už $P(A_1)$.

Įvykiui B_1 yra palankios šios baigtys: HHSH, HHSS, SSHS, SSHH. Taigi

$$P(B_1) = p^3q + pq^3 + 2p^2q^2 = pq(p^2 + 2pq + q^2) = pq.$$

Įvykiui B_2 yra palankios šios baigtys: SHHS, SSHH, HSSH, HHSS. Todėl

$$P(B_2) = 4p^2q^2.$$

Kadangi

$$P(B_2) = 4p^2q^2 = (pq) \cdot (4pq) \leqslant pq \cdot 1,$$

tai $P(B_2) \leqslant P(B_1)$.

10 uždavinys. *Ant stalo – penki gaubteliai, po vienu iš jų – moneta. Žaidėjas pasirenka du gaubtelius, bet jų neatidengia. Žaidimo vedėjas siūlo žaidėjui pasirinkti vieną iš žaidimo pabaigos būdų:*

1. Žaidėjas atidengia savo gaubtelius ir pasiima monetą, jeigu ją randa.

2. Žaidimo vedėjas atidengia vieną iš savo dangtelių, po kuriuo nėra monetos, o žaidėjas keičia abu savo dangtelius į vedėjo dangtelius ir juos atidengia.

3. Žaidimo vedėjas atidengia du savo dangtelius, po kuriais nėra monetos, o žaidėjas keičia vieną savo dangtelių į vedėjo dangtelį ir atidengia turimus dangtelius.

Kam lygios tikimybės žaidėjui gauti monetą šiais pasirinkimo atvejais? Kuriuo atveju tikimybė didžiausia?

Sprendimas. Žaidimą sudaro du žingsniai: pirmajame pasirenkami dangteliai, antrajame pagal pasirinktą taisyklę jie atidengiami. Pirmajame žingsnyje gali įvykti du įvykiai;

$$\begin{aligned} H_0 &= \{\text{po pasirinktais dangteliais nėra monetos}\}, \\ H_1 &= \{\text{po vienu iš pasirinktų dangtelių yra moneta}\}. \end{aligned}$$

Nesunku surasti šių įvykių tikimybes:

$$P(H_0) = \frac{C_4^2}{C_5^2} = \frac{6}{10}, \quad P(H_1) = \frac{C_4^1}{C_5^2} = \frac{4}{10}.$$

Pažymėkime A įvykį, kad žaidėjas gaus monetą. Akivaizdu, kad 1) taisyklės atveju $P(A) = P(H_1) = 4/10$. Kitais atvejais įvykio tikimybę skaičiuosime naudodamiesi pilnosios tikimybės formule

$$P(A) = P(H_0)P(A|H_0) + P(H_1)P(A|H_1) = \frac{6}{10} \cdot P(A|H_0) + \frac{4}{10} \cdot P(A|H_1).$$

Jeigu žaidėjas pasirinks 2) taisyklę, t.y., keis visus pirmajame žingsnyje pasirinktus dangtelius, tai $P(A|H_0) = 1, P(A|H_1) = 0$, taigi

$$P(A) = P(H_0) = \frac{6}{10}.$$

Trečiosios taisyklės atveju $P(A|H_0) = 1, P(A|H_1) = 1/2$, taigi

$$P(A) = \frac{6}{10} \cdot 1 + \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{10}.$$

Trečioji taisyklė yra naudingiausia žaidėjui.