LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Jaunajam matematikui

22

2019–2021 metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Užduotys

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla (LJMM) **skelbia klausytojų priėmimą 2019–2021 mokslo metams.**

Mokykla yra dvimetė. Į ją priimami vienuoliktos klasės, o rekomendavus matematikos mokytojui, ir žemesnių klasių mokiniai, išsprendę stojamąją užduotį. Iš viso numatoma išnagrinėti aštuonias temas: keturias šiais mokslo metais, o likusias keturias – kitais. Mokslą planuojame užbaigti 2021 metų balandžio mėnesį baigiamuoju uždavinių sprendimo konkursu Vilniaus universitete. Sėkmingai įvykdę visą programą, mokiniai gauna Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos baigimo pažymėjimus.

Mokestis už visą mokymosi LJMM laiką yra 10 Eurų (jį moka tik priimtieji į LJMM). Metodinė medžiaga ir užduotys skelbiamos LJMM interneto svetainės http://uosis.mif.vu.lt/ljmm/ puslapiuose.

Stojamosios užduoties sprendimus prašome rašyti į ploną sąsiuvinį. Ant **sąsiuvinio viršelio** ir ant **atskiro lapelio** spausdintomis raidėmis užrašykite savo **vardą, pavardę**, **mokyklą ir klasę**, kurioje mokotės, bei **namų adresą**.

Kartu su sprendimais **prašome atsiųsti tuščią voką su užrašytu savo adresu ir priklijuotu pašto ženklu**. Tada mes pranešime, ar Jūs įstojote į LJMM, o įstojusius informuosime apie mokesčio mokėjimo tvarką ir patį mokymąsi. Įstojusieji tame pačiame laiške ras suteiktą informacinės sistemos „Mano LJMM“ vartotojo vardą ir slaptažodį, su kuriais galės matyti kiekvienos savo užduoties sprendimų įvertinimus.

Stojamosios užduoties sprendimus išsiųskite **iki 2019 m. spalio 21 dienos** šiuo adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematikos metodikos centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius.

Mokinių atsiųsti darbai negrąžinami.

LJMM 2019–2021 mokslo metų programa: kelionės uždaviniai; tiesinių lygčių sistemos; netiesinių lygčių sistemos; taisyklingieji daugiakampiai; logaritmai; erdvės tiesių ir plokštumų geometrija; skaičiai langeliuose; kombinatorika ir tikimybės.

STOJAMOJI UŽDUOTIS

1. Raskite visas natūraliųjų skaičių x ir y poras (x; y), kurios tenkina lygybę $x^2+y^2=74$.

2. Išspręskite lygtį $\frac{3}{x^2+x+1}+x^2+x=3$.

3. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} x^2+xy+3=0, \\ y-3x-7=0. \end{cases}$

4. Dviratininkas 96 km atstumą nuvažiavo 2 h greičiau negu buvo numatęs, nes kas valandą nuvažiavo 1 km daugiau negu planavo nuvažiuoti per 1 h 15 min. Kokiu greičiu važiavo dviratininkas?

5. Valgomosios druskos tirpalas gautas sumaišius tris skirtingos koncentracijos 20 kg, 50 kg ir 80 kg valgomosios druskos tirpalus. Pirmojo tirpalo druskos koncentracija yra 10 %, antrojo 2 %, trečiojo 15 %. Kokia gautojo tirpalo druskos koncentracija?

6. Išspręskite nelygybę $|x-2|\cdot(x-1)>0$.

7. Skaičiai x ir y yra teigiami, be to $x+y=10$. Kokia mažiausia sumos $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ reikšmė?

8. Skaičius $n+1$ dalijasi iš 3. Nustatykite, ar skaičius $4+7n$ dalijasi iš 3.

9. Apskritimo centras yra taškas O, kvadrato $OABC$ kraštinės OA ir OC yra to apskritimo spinduliai. Kitas kvadratas $MNPQ$ yra nubrėžtas taip, kad taškas M yra atkarpoje OA, taškas O yra kraštinės MN vidurio taškas, o P ir Q yra apskritimo taškai. Raskite kvadratų plotų santykį.

10. Trikampis ABC yra lygiašonis, $AB=BC$, aukštinė BF yra du kartus ilgesnė už aukštinę AE. Raskite kampo prie pagrindo kosinusą.

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

1 tema. KELIONIŲ UŽDAVINIAI

(2019–2021)

Teorinę medžiagą parengė bei pirmąją užduotį sudarė Kazimieras Pulmonas

Kelionių uždaviniai – vieni iš daugelio tekstinių uždavinių, su kuriais susiduriame mus supančiame gyvenime. Jų sprendimas siejasi su fizikoje nagrinėjamomis kelio, laiko ir greičio tarpusavio sąryšingumo (sąsajų) sąvokomis. Pagal siužetą šie uždaviniai apima įvairius tiesiaeigio judėjimo, judėjimo ratu ir eskalatoriumi atvejus, plaukimo upe, vidutinio greičio radimo uždavinius. Dažnai pasitaiko tokiuose uždaviniuose dviejų ar daugiau objektų artėjimo vienas prie kito (priartėjimo) atvejai šiems judant vienas paskui/priešais kitą arba nutolstant vienam nuo kito.

Visi judėjimo uždaviniai sprendžiami arba aritmetiniu metodu, t. y. paprasčiausiai nuosekliu loginio samprotavimo grandinės būdu jungiant sąlygos (žodinio teksto) duomenis ir darant atitinkamas išvadas. Arba algebriniu būdų – uždavinio sąlygos duomenis pakeičiant matematiniais simboliais ir reiškiniais ir iš jų sudarant ir parašant matematinius modelius: lygtis, nelygybes, jų sistemas ir panašiai, bei juos išsprendžiant. Arba ypač kelionių uždavinius kartais patogu spręsti ir grafiniu metodu. Bet kaip sprendžiant dažnai tenka gerokai paplušėti.

Sprendimo apipavidalinimui pasirenkami paprastai tokie orientaciniai būdai: aiškinamasis, aprašomasis (komentuojamasis), lentelė, grafinis, mišrusis. Visi jie lygiaverčiai. Nei vienam jų neteikiama pirmenybė.

Apskritai uždavinio sprendėjo reikalas ir valia pasirinkti sprendimo vieną iš metodų ir būdų. Nors kartais iš visų jų yra ir pats paprasčiausias (racionaliausias). Bet tai matematikos mokymo metodikos specialistų reikalas.

1 pavyzdys. Ratu, kurio ilgis 100 m, slenka du kūnai. Slinkdami ta pačia kryptimi, jie susitinka kas 20 sekundžių, o slinkdami priešinga kryptimi susitinka kas 4 sekundės. Raskite kiekvieno kūno slinkimo greitį per sekundę.

Spręskime šį uždavinį aritmetiškai. Kadangi rato ilgis 100 m, o slinkdami vienas priešais kitą kūnai susitinka kas 4 sekundės, kūnų greičių suma (priartėjimas) yra 100 : 4 = 25 (m/s). Kadangi judėdami ta pačia kryptimi kūnai susitinka kas 20 sekundžių, tai kūnų greičių skirtumas (priartėjimas) yra 100 : 20 = 5 (m/s). Vadinasi, greičiau judančio kūno dvigubas greitis yra 25 + 5 = 30 (m/s), o greitis 15 m/s. Lėčiau judančio kūno greitis 25 – 15 = 10 (m/s).

Ats.: 15 m/s, 10 m/s.

2 pavyzdys. Du skautai eina vienas priešais kitą iš miestų A ir B, tarp kurių yra 30 km. Jei pirmasis išeitų 2 h anksčiau už antrąjį, tai jie susitiktų po 2,5 h nuo antrojo skauto išėjimo. Jei antrasis išeitų 2 h anksčiau už pirmąjį, tai jie susitiktų po 3 h nuo pirmojo skauto išėjimo Koks yra kiekvieno skauto greitis?

Šį uždavinį spręskime algebriškai.

Tegu I skauto (iš miesto A) greitis yra x km/h, o II (iš miesto B) –y km/h.

Pirmuoju atveju iki susitikimo I skautas ėjo 4,5 h, o II – 2,5 h.

Pagal sąlygą: $4{,}5x + 2{,}5y = 30$.

Antruoju atveju iki susitikimo I skautas ėjo 3 h, o II – 5 h.

Pagal sąlygą: $3x + 5y = 30$.

Išsprendę lygčių sistemą

$$\begin{cases} 4{,}5x + 2{,}5y = 30, \\ 3x + 5y \quad = 30; \end{cases}$$

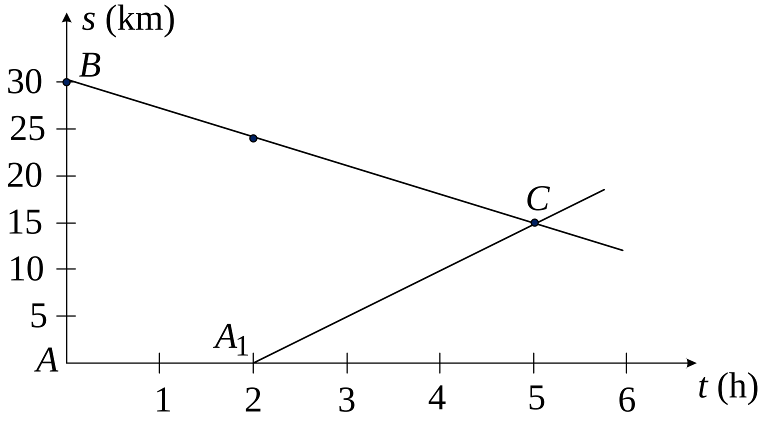
gauname $x = 5\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$, $y = 3\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$.

Ats.: $5\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$, $3\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$.

3 pavyzdys. Dvi skautų grupės eina viena priešais kitą iš vietovių A ir B, tarp kurių yra 30 km. Grupės iš A greitis yra $5\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$, o iš B – $3\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$. Grupė iš B išėjo 12 val., o iš miesto A – 14 val. Kurią valandą šios grupės susitiko, jeigu žinoma, kad jos ėjo pastoviais greičiais.

Spręskime šį uždavinį grafiškai, iš pradžių išsiaiškinę, kiek laiko truko grupių kelionė iki susitikimo nuo grupės iš vietovės B išėjimo.

Skautų grupės iš vietovės *B* kelionę vaizduoja tiesės *BC* dalis, o grupės iš *A* – tiesės A_1C dalis.



Kadangi tiesės *BC* dalis (spindulys) eina, pavyzdžiui, per taškus (0; 30) ir (2; 24), tai jos lygtis yra $s_B = -3t + 30.$

Kadangi tiesės A_1C dalis (spindulys) eina, pavyzdžiui, per taškus (2; 0) ir (3; 5), tai jos lygtis yra $s_A = 5t - 10.$

Vietovėje *C* abi grupės susitiko, tai kartu nuėjo visą atstumą *AB*: $s_B + s_A = 30,$ todėl

$$-3t + 30 + 5t - 10 = 30,\ \ 2t = 10 \ \text{ ir } \ t = 5\,\text{h}.$$

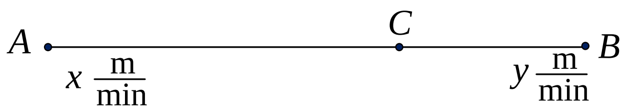
Vadinasi, iki susitikimo grupė iš *B* ėjo 5 h, o grupių susitikimas įvyko 17 val. (12 + 5 = 17).

Ats.: 17 val.

Kartais sprendžiant uždavinius algebriškai nereikia vengti kintamaisiais pasižymėti ne tik vieną ar du nežinomuosius, bet ir daugiau: tris, keturis. Ne visada būtina, o kartais ir neįmanoma rasti visų jų reikšmes. Kintamieji reikalingi siekiant aiškiau matematiškai aprašyti nagrinėjamą situaciją.

4 pavyzdys. Iš skirtingų vietovių *A* ir *B* tuo pačiu metu vienas priešais kitą išvažiavo du dviratininkai. Vienas jų atvažiavo į vietovę *B* po 32 minučių po prasilenkimo, o kitas atvažiavo į vietovę *A* po 50 minučių nuo jų prasilenkimo. Kiek laiko važiavo dviratininkai iki susitikimo?

Pavaizduokime dviratininkų kelionę schema (joje taškas *C* žymi susitikimo vietą).



Sakykime, kad:

dviratininko, važiavusio iš *A* į *B* greitis yra *x* m/min,

dviratininko, važiavusio iš *B* į *A* greitis yra *y* m/min,

iki susitikimo dviratininkai važiavo *t* min.

Tada atstumas *AC* = *xt* metrų, o atstumas *BC* = *yt* metrų. Toliau galime spręsti taip:

I būdas

Dviratininkas, važiavęs iš *A* į *B*, atstumą *CB* nuvažiavo per $\frac{yt}{x}$ min, o dviratininkas iš *B* į *A* atstumą *CA* nuvažiavo per $\frac{xt}{y}$ min.

Pagal sąlygą: $\frac{yt}{x} = 32,.\ \frac{xt}{y} = 50.$

Sudauginę šias lygtis turime: $\frac{yt}{x} \cdot \frac{xt}{y} = 32 \cdot 50,\ \ t^2 = 16 \cdot 25 \cdot 4,\ \ t = 4 \cdot 5 \cdot 2\ \ (t > 0),\ t = 40$ min.

II būdas

Važiuojant tam tikrą atstumą, laikas yra atvirkščiai proporcingas greičiui, todėl, važiuojant atstumą *CA*:

t min – $x\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$,

$50 \text{ min} - y \dfrac{\text{m}}{\text{min}}$

Iš čia išplaukia, kad

$$\frac{t}{50} = \frac{y}{x}, \qquad (1)$$

o važiuojant atstumą *CB*:

$t \text{ min} - y \dfrac{\text{m}}{\text{min}}$,

$32 \text{ min} - x \dfrac{\text{m}}{\text{min}}$

Iš čia išplaukia, kad

$$\frac{t}{32} = \frac{x}{y}, \quad \frac{y}{x} = \frac{32}{t}. \qquad (2)$$

Sulyginę (1) ir (2) lygybes, turime

$$\frac{t}{50} = \frac{32}{t}, \quad t^2 = 32 \cdot 50, \quad t = 4 \cdot 5 \cdot 2 \ (t > 0), \quad t = 40 \ \text{min}.$$

Taigi dviratininkai susitiko po 40 min nuo jų išvažiavimo.

Ats.: 40 min.

Neįprasti ir netradiciniai yra kelionės eskalatoriumi uždaviniai.

5 pavyzdys. Eidamas eskalatoriumi jo judėjimo kryptimi Vaidotas suskaičiavo 60 laiptelių, o eidamas priešinga judėjimo kryptimi – 90 laiptelių. Kiek laiptelių suskaičiuotų Vaidotas, eidamas nejudančiu eskalatoriumi, jei tiek žemyn, tiek žemyn jis ėjo pastoviu greičiu?

Sakykime, kad eskalatoriaus

- ilgis yra s laiptelių,
- judėjimo greitis – u laiptelių per laiko vienetą,
- Vaidoto ėjimo greitis – v laiptelių per laiko vienetą ($v > u$).

Vaidotas eina eskalatoriumi žemyn $(v+u)$ greičiu, todėl s laiptelių atstumą nueina per tiek pat laiko, per kiek nueina 60 laiptelių, eidamas v greičiu. Vadinasi,

$$\frac{s}{v+u} = \frac{60}{v}, \qquad (1)$$

Aukštyn Vaidotas eina $(v-u)$ greičiu, todėl s laiptelių atstumą nueina per tiek pat laiko, per kiek nueina 90 laiptelių, eidamas v greičiu. Vadinasi,

$$\frac{s}{v-u} = \frac{90}{v}, \qquad (2)$$

Padaliję (1) lygtį iš (2) gauname:

$$\frac{v-u}{v+u} = \frac{60}{90}, \quad \frac{v-u}{v+u} = \frac{2}{3}, \quad 3(v-u) = 2(v+u), \quad v = 5u.$$

Gautą išraišką įrašę, pavyzdžiui, į (2) lygybę turime

$$\frac{3}{5u-u} = \frac{90}{54}, \quad s = \frac{4u \cdot 90}{54}, \quad s = 72.$$

Taigi, eidamas nejudančiu eskalatoriumi Vaidotas suskaičiuotų 72 laiptelius.

Ats.: 72 laipteliai.

Pasitaiko uždavinių ne tik su tradicinėmis užduotimis: raskite, apskaičiuokite, kiek... ir panašiai, bet ir su netradicinėmis: įrodykite, įsitikinkite ir kt.

6 pavyzdys. Iš Kauno į Vilnių ir atgal skrenda malūnsparnis. Įrodykite, kad malūnsparnio skrydis, esant tykiam orui, trunka trumpiau negu pučiant pastoviam vėjui Vilniaus – Kauno kryptimi.

Paprastumo dėlei sakykime, kad malūnsparnio skrydis viena kryptimi yra s km, malūnsparnio greitis $v \dfrac{km}{h}$, o vėjo greitis $v_1 \dfrac{km}{h}$ $(v > v_1)$.

Malūnsparnio skrydis iš Kauno į Vilnių ir atgal, esant tykiam orui, trunka $\frac{2s}{v}h,$ o pučiant vėjui

$$\frac{s}{v-v_1}+\frac{s}{v+v_1}=\frac{2sv}{(v-v_1)(v+v_1)}\ \text{(h)}.$$

Palyginkime šiuos laikus:

$$\frac{2s}{v}-\frac{2sv}{(v-v_1)(v+v_1)}=\frac{2s(v^2-vv_1+vv_1-v_1^2-v^2)}{(v-v_1)(v+v_1)}=-\frac{2sv_1^2}{v(v-v_1)(v+v_1)}<0.$$

Kadangi laikų skirtumas yra neigiamas, tai $\frac{2s}{v}<\frac{2sv}{(v-v_1)(v+v_1)}$.

Vadinasi, malūnsparnio skrydis į Vilnių ir atgal trumpiau trunka esant tykiam orui negu vėjuotam.

Egzistuoja įvairūs galimi vieno ir to paties uždavinio sprendiniai.

7 pavyzdys. Iš vietovės *A* į vietovę *B* upe žemyn išplaukė plaustas. Po 2,4 valandos paskui jį išplaukė motorinė valtis, kurios savasis greitis 20 km/h. Motorinė valtis pavijo plaustą ir tuoj pat apsisukusi pasuko atgal į vietovę *A*. Po 3,6 valandų nuo išplaukimo motorinė valtis grįžo į *A*, o plaustas atplaukė į vietovę *B*. Apskaičiuokite upės tėkmės greitį.

1. Tegu upės tėkmės greitis $x\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, atstumas tarp vietovės *A* ir plausto pavijimo vietos *y* km. Motorinė valtis šį atstumą upe pasroviui plaukė $\frac{y}{20+x}$ h, o plaustas – $\frac{y}{x}$ h. Sudarome pirmą lygtį: $\frac{y}{x}-\frac{y}{20+x}=2{,}4$. Plaustas nuo susitikimo su motorine valtimi vietos iki vietovės *B* plaukė dar $(3{,}6x-y)$ km. Kadangi plausto ir valties po susitikimo plaukimo laikai vienodi, tai sudarome antrą lygtį: $\frac{y}{20-x}=\frac{3{,}6x-y}{x}$.

Turime lygčių sistemą:

$$\begin{cases}\frac{y}{x}-\frac{y}{20+x}=\frac{12}{5},\\ \frac{y}{20-x}=\frac{\frac{18}{5}-y}{x};\end{cases}\quad \text{arba}\quad \begin{cases}3x^2+60x=25y,\\ -9x^2+180x=50y.\end{cases}$$

Padalįę vieną lygtį iš kitos gauname: $\frac{3x+60}{180-9x}=\frac{1}{2}$ arba $5x=20$. Todėl $x=4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

2. Atkreipkime dėmesį, kad galima buvo sulyginti ne laikus, o atstumus.

Pagal sąlygą:

- atstumas, kurį nuplaukė plaustas iki susitikimo su valtimi,
- atstumas, kurį nuplaukė valtis iki plausto pavijimo ir
- atstumas, kurį nuplaukė valtis, po plausto pavijimo iki grįžimo į vietovę *A*.

yra vienas ir tas pats.

Pažymėkime raide *z* laiką nuo valties išplaukimo iki plausto pavijimo momentų. Todėl:

$$(2{,}4+z)x=z(20+x)=(3{,}6-2{,}4-z)\cdot(20-x).$$

Iš čia:

$$2{,}4x+zx=20z+zx=24-1{,}2x-20z+zx.$$

Iš lygybės $2{,}4x+zx=20z+zx$ išplaukia, kad $2{,}4x=20z$.

Todėl

$$1{,}2x=24-40z=24-4{,}8x,\ \ 6x=24,\ \ x=4\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right).$$

Spręsdami taip išvengėme kvadratinių lygčių.

3. Spręskime šį uždavinį analizuodami situaciją upės požiūriu.

Pagal sąlygą iki motorinės valties išplaukimo plaustas plaukė pasroviui 2,4 valandos $x\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ greičiu, todėl valties išplaukimo momentu atstumas tarp jų (valties ir plausto) buvo $2{,}4x$ km. Valtis ir plaustas yra priklausomi nuo upės tėkmės: plausto greitis upės vandens atžvilgiu – nulis, valties greitis – 20 km/h, vadinasi, valties ir plausto priartėjimo (prisivijimo) greitis 20 km/h, nepriklausomai nuo upės tėkmės greičio. Todėl valtis pavijo plaustą per $z = 2{,}4x : 20 = 0{,}12x$ (h).

Taigi plaukimo situacijos analizė atveda mus prie priklausomybės, kurią tradiciškai nusako sukonstruotų lygčių ir jų sistemų sprendimas. Turime:

- motorinė valtis pasroviui nuplaukė $(20 + x)z$ km;
- motorinė valtis prieš srovę nuplaukė $(20 - x)(3{,}6 - 2{,}4 - z)$ km.

Vadinasi, $(20 + x)z = (20 - x)(1{,}2 - z)$, todėl $40z = 24 - 1{,}2x$ arba $4{,}8x = 24 - 1{,}2x$, t. y. $x = 4\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$.

4. Paieškome grynai aritmetinio šio uždavinio sprendimo.

Plaustas plaukė iš viso 3,6 valandos, iš jų iki valties išplaukimo momento 2,4 h. Todėl darome išvadą, kad valties kelias nuo vietovės *A* iki pavyto plausto (upės tėkmės atžvilgiu) lygus $2{,}4 : 3{,}6 = \dfrac{2}{3}$ atstumo *AB*.

Jeigu nebūtų buvę upės tėkmės, tai valties kelias atgal (upės atžvilgiu) būtų buvęs tas pats. Bet upės tėkmė plukdė ir plaustą, ir valtį kryptimi iš *A* į *B*. Kadangi upės tėkmė plukdė valtį lygiai tokį pat laiką kaip ir plaustą, valties išplaukimo momento atžvilgiu, tai per šį laiką plaustas nuplaukė atstumą, lygų $\dfrac{1}{3}AB$. Tuo pačiu ir valtį nuplukdė $\dfrac{1}{3}AB$.

Vadinasi, valtis upės atžvilgiu nuplaukė pirmyn $\dfrac{2}{3}AB$ ir atgal $\dfrac{2}{3}AB + \dfrac{1}{3}AB$, t. y. iš viso $\dfrac{5}{3}AB$. Per šį laiką, kaip jau išsiaiškinome upės vanduo nuplaukė plaustą atstumą lygų $\dfrac{1}{3}AB$. Taigi motorinės valties savasis greitis $\dfrac{5}{3} : \dfrac{1}{3} = 5$ kartus didesnis už upės tėkmės greitį.

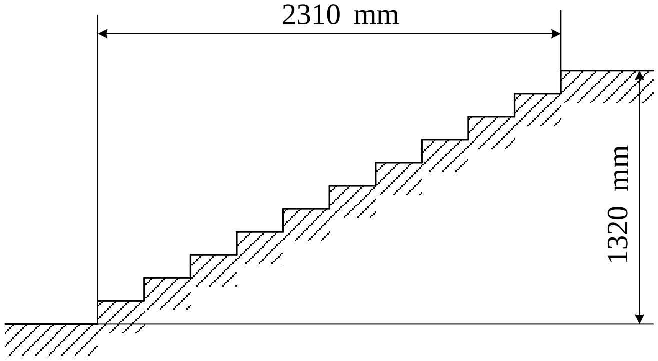
Todėl upės tėkmės greitis $20 : 5 = 4\ \left(\dfrac{\text{km}}{\text{h}}\right)$.

Ats.: $4\ \left(\dfrac{\text{km}}{\text{h}}\right)$.

Įvairiai spręsdami šį uždavinį gavome vieną ir tą patį atsakymą. Todėl neabejojame jo teisingumu. Išsprendus vienu iš būdu, tikslinga kritiškai vertinti gautą atsakymą ir atlikti jo patikrinimą. Paprastai patikrinimas neturėtų pakartoti visą sprendimo eigą. Apsiriboti situacijos nagrinėjimu, panaudojant rastų duomenų reikšmes.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Paveiksle pateiktas mieste esančių laiptų skersinis pjūvis. Apskaičiuokite laiptų vienos pakopos aukštį ir plotį (gylį).



2. Per tam tikrą laiką motociklininkas nuvažiavo iš kaimo į miestą. Jei jis važiuotų 4 km/h lėčiau, tai nuvažiuotų į miestą 1 h vėliau. Jei motociklininkas važiuotų 6 km/h greičiau, tai kelionė truktų tik 80 % to laiko, kurį jis važiavo. Raskite pradinį motociklininko greitį ir atstumą tarp kaimo ir miesto.

3. Raitelis ir pėstysis išvyko iš tos pačios vietovės *A* į vietovę *B*. Raitelis nuvykęs į *B* 50 minučių anksčiau už pėstyjį, tuojau pat grįžo atgal ir susitiko su pėsčiuoju už 2 km nuo *B*. Visą kelią iš *A* į *B* ir atgal raitelis nujojo per 1 h 40 min. Raskite atstumą tarp *A* ir *B*, raitelio ir pėsčiojo greičius.

4. *Senovinis uždavinys:* „Du žmonės išėjo iš vienos vietos, aplink miestą, ir vienas jų ėjo po 4 varstus per valandą, kitas po $3\frac{1}{3}$ varsto; o aplink tą miestą yra 15 varstų. Reikia sužinoti: po kiek valandų tie du žmonės susitiko ir kiek kartų kiekvienas jų apėjo miestą?“

5. Ratu, kurio ilgis 999 m, ta pačia kryptimi slenka du kūnai ir susitinka kas 37 minutės. Kas kiek laiko susitiktų šie kūnai, judėdami tuo pačiu ratu vienas priešais kitą, jeigu žinoma, kad vienas kūnas slenka 4 kartus greičiau už kitą.

6. Ketvirtadalį kelio automobilis važiavo 60 km/h greičiu, trečdalį kelio – 80 km/h greičiu. Kokiu greičiu važiavo automobilis likusią kelio dalį, jeigu žinoma, kad visą kelią jis važiavo vidutiniu $77\frac{1}{7}$ km/h greičiu?

7. Vyksta trijų skautų grupių 30 km turistinės varžybos. Kai finišavo pirmoji grupė, antroji buvo atsilikusi 3 km, o kai finišavo ši – trečioji grupė nuo jos buvo atsilikusi irgi 3 km. Kokiu atstumu nuo pirmos grupės, kai ši finišavo, buvo atsilikusi trečia grupė? Žinoma, kad grupės keliavo pastoviais greičiais.

8. Akvilė, eidama žemyn eskalatoriumi, kuris irgi juda žemyn, suskaičiavo 40 laiptelių. Kiek laiptelių suskaičiuotų mergaitė eidama šiuo eskalatoriumi aukštyn, jeigu eidama nejudančiu suskaičiuotų 60 laiptelių?

9. Mama šiandien vienu išėjimu iš namų nori apsilankyti penkeriose vietose: parduotuvėje, vaistinėje, bibliotekoje, banke ir teatro kasoje. Kiek iš viso mamai yra galimų šių objektų aplankymo maršrutų variantų, jeigu žinoma, kad parduotuvė ir vaistinė yra viename pastate?

10. Iš Seredžiaus Nemunu, kurio tėkmės greitis 3 km/h Jurbarko link pasroviui išplaukė kateris, kurio savasis greitis b km/h. Tuo pačiu metu iš A. panemunių miestelio pasitikti katerio išplaukė motorinė valtis, kurios savasis greitis c km/h ($c > 5$). Susitikimas įvyko B vietovėje, nutolusioje nuo Seredžiaus a km. Įsitikinkite, kad katerio ir valties plaukimo laikas iki susitikimo būtų tas pats, jeigu Nemuno tėkmės greitis šiame ruože būtų 4 km/h.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2019 m. gruodžio 20 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematikos metodikos centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: http://uosis.mif.vu.lt/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

2 tema. TIESINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS

(2019–2021)

Teorinę medžiagą parengė bei antrąją užduotį sudarė dr. Antanas Apynis

1. Tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemos

Turėdami mintyje, kad esame gerai išmokę spręsti tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemas, keliaukime prie tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemų. O kad būtų paprasčiau, pradėkime nuo konkrečios trijų lygčių su trimis nežinomaisiais *x, y* ir *z* sistemos

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5, \\ x - 3y + 2z = 4, \\ 3x + 2y - 5z = 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Ieškokime tokių nežinomųjų *x, y* ir *z* reikšmių trejetų (*x*; *y*; z), kuriems esant galiotų ir pirma, ir antra, ir trečia lygybė.

Iš pirmos lygties $2x + y - z = 5$ išreikškime *z* (aišku, nežinomaisiais *x* ir *y*):

$$z = 2x + y - 5. \qquad (2)$$

Šią *z* išraišką įrašykime į kitas dvi sistemos lygtis. Gausime tiesinių lygčių su nežinomaisiais *x* ir *y* sistemą

$$\begin{cases} x - 3y + 2(2x + y - 5) = 4, \\ 3x + 2y - 5(2x + y - 5) = 1, \end{cases}$$

kuri *ekvivalenti* sistemai

$$\begin{cases} 5x - y = 14, \\ -7x - 3y = -24. \end{cases} \qquad (3)$$

Sakydami, kad viena tiesinių lygčių sistema yra ekvivalenti kitai tiesinių lygčių sistemai, turėsime mintyje, jog jų sprendiniai sutampa arba abi sistemos neturi sprendinių. Kitaip sakant, dvi tiesinių lygčių (su dviem ar daugiau nežinomųjų) sistemos vadinamos ekvivalenčiomis, jeigu jų sprendinių aibės sutampa.

Matome, kad išspręsti (1) sistemą gana paprasta. Išsprendus (3) sistemą (gautume $x = 3,\ \ y = 1$), tereikia pagal (2) formulę apskaičiuoti *z* reikšmę (gautume $z = 2$) ir padaryti išvadą, kad trejetas (3; 1; 2) yra vienintelis (1) sistemos sprendinys.

Tęsdami pažintį, išnagrinėkime kitą pavyzdį – trijų tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} x + 3y - 7z = 1, \\ 3x - y + z = 5, \\ 2x + y - 3z = 3. \end{cases} \qquad (4)$$

Kadangi nežinomojo *z* koeficientas antroje lygtyje lygus 1, tai *z* išraiškai nežinomaisiais *x* ir *y* gauti pasirinkime būtent antrą lygtį. Gausime, kad

$$z = -3x + y + 5. \qquad (5)$$

Šią *z* išraišką įrašę į kitas sistemos lygtis, gausime sistemą

$$\begin{cases} x + 3y - 7(-3x + y + 5) = 1, \\ 2x + y - 3(-3x + y + 5) = 3, \end{cases}$$

o atlikę veiksmus – ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} 22x - 4y = 36, \\ 11x - 2y = 18. \end{cases} \qquad (6)$$

Aišku, kad ši dviejų tiesinių lygčių sistema su nežinomaisiais *x* ir *y* turi be galo daug sprendinių, kuriuos galima užrašyti pavidalu $(t;\ \frac{1}{2}(11t - 18)),\ \ t \in \mathbf{R}$. Tada $z = -3t + \frac{1}{2}(11t - 18) + 5 = \frac{5}{2}t - 4,\ \ t \in \mathbf{R}$, o kiekvienas realiųjų skaičių trejetas

$$(t;\ \frac{1}{2}(11t - 18);\ \frac{5}{2}t - 4),\ \ t \in \mathbf{R}, \qquad (7)$$

yra (4) sistemos sprendinys. Pasirinkę, pavyzdžiui, $t = 0$, gautume sprendinį (0; –9; –4), o pasirinkę $t = 2$ – sprendinį (2; 2; 1).

Apibendrinant galima pasakyti, kad (4) tiesinių lygčių sistema turi be galo daug sprendinių. Juos galima užrašyti (7) pavidalu.

O kad būtų dar aiškiau, ko galima tikėtis iš tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemų, išspręskime šią trijų tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą:

$$\begin{cases} 2x+5y+z=8, \\ x-3y+4z=2, \\ 3x+2y+5z=7. \end{cases} \tag{8}$$

Iš pirmos lygties išplaukia, kad

$$z=-2x-5y+8.$$

Tada iš kitų dviejų lygčių gauname tiesinių lygčių su nežinomaisiais x ir y sistemą

$$\begin{cases} x-3y+4(-2x-5y+8)=2, \\ 3x+2y+5(-2x-5y+8)=7, \end{cases}$$

o atlikę veiksmus – sistemą

$$\begin{cases} -7x-23y=-30, \\ -7x-23y=-33. \end{cases}$$

Aišku, kad ši sistema neturi sprendinių (nes nėra nė vienos realiųjų skaičių x ir y poros $(x; y)$, kuriai esant galiotų ir pirma, ir antra lygybė).

Vadinasi, (8) sistema neturi sprendinių. Kitaip sakant, jos sprendinių aibė yra *tuščioji aibė* (žym. $\varnothing$).

Ką tik išnagrinėtų trijų pavyzdžių pakanka, kad turėtume teisę pasakyti, jog:

- yra tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemų, kurios turi tik vieną sprendinį;
- yra tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemų, kurios turi be galo daug sprendinių;
- yra tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemų, kurios neturi nė vieno sprendinio.

Dviejų tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistema

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases} \tag{9}$$

arba turi be galo daug sprendinių, arba – nė vieno.

Pavyzdžiui, sistema

$$\begin{cases} x+\ y+\ z\ =7, \\ 2x+2y+2z=9 \end{cases} \tag{10}$$

neturi sprendinių, nes negali būti, kad galiotų ir lygybė $x+y+z=7$, ir lygybė $x+y+z=4{,}5$.

O lygčių sistema

$$\begin{cases} x+2y+3z=6, \\ 3x+2y+z=6 \end{cases} \tag{11}$$

turi be galo daug sprendinių. Tuo įsitikinkime spręsdami ją:

$$\begin{cases} x+2y+3z=6, \\ 3x+2y+z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=6-3x-2y, \\ x+2y+3(6-3x-2y)=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=6-3x-2y, \\ -8x-4y=-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=6-3x-2y, \\ 2x+y=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=3-2x, \\ z=6-3x-2(3-2x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3-2x, \\ z=x. \end{cases}$$

Jei $x=t$, $t\in\mathbf{R}$, tai $y=3-2t$, $z=t$, o trejetas $(t; 3-2t; t)$ yra (11) sistemos sprendinys.

Vadinasi, (11) sistema turi be galo daug sprendinių; juos galim užrašyti pavidalu

$$(t; 3-2t; t),\ t\in\mathbf{R}.$$

Atkreipkime dėmesį į tai, kad nepakanka konkrečių pavyzdžių analizės, kuri pagrįstų teiginį, jog neįmanoma, kad (9) sistema turėtų tik vieną sprendinį. Na, o teorinį įrodymą šį kartą praleisime.

Tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemos, kurias sudaro keturios, penkios ar daugiau lygčių, yra sprendžiamos analogiškai. Ir gana lengvai galėtume įsitikinti, kad tokia sistema gali turėti tik vieną sprendinį arba be galo daug sprendinių, arba nė vieno sprendinio.

2. Tiesinių lygčių sistemos sprendimas Gauso metodu

Bet kuri tiesinė lygtis su n nežinomųjų užrašoma pavidalu

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b; \tag{12}$$

čia $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ yra nežinomieji, $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ – atitinkamų nežinomųjų koeficientai, o b – laisvasis narys.

Tiesinės lygties su n nežinomųjų sprendiniu vadinamas kiekvienas realiųjų skaičių $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$ rinkinys $(r_1; r_2; r_3; ...; r_n)$, kuriam esant galioja lygybė

$$a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3 + ... + a_nr_n = b.$$

Tiesinių lygčių su n nežinomųjų sistema paprastai užrašoma taip:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{13}$$

Lygčių skaičius m gali būti bet kuris už 1 didesnis natūralusis skaičius.

Atkreipkime dėmesį į nežinomųjų x_j, $j = 1, 2, 3, ..., n$, koeficientų a_{ij}, $i = 1, 2, 3, ..., m$, $j = 1, 2, 3, ..., n$, skaitymą. Pavyzdžiui, simbolis a_{11} skaitomas „a vienas vienas“, simbolis a_{21} skaitomas „a du vienas“, o simbolis a_{37} – „a trys septyni“.

Esant reikalui (13) sistemą sudarančias lygtis žymėsime simboliais $L_1, L_2, L_3, ..., L_m$, o jų sprendinių aibes atitinkamai $X_1, X_2, X_3, ..., X_m$.

Išspręsti (13) tiesinių lygčių sistemą reiškia rasti visus realiųjų skaičių $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$ rinkinius $(r_1; r_2; r_3; ...; r_n)$, kurie tenkina kiekvieną sistemos lygtį, arba įrodyti, kad nėra nė vieno tokio realiųjų skaičių rinkinio.

Sistemos sprendinių aibę žymėsime X. Pagal apibrėžimą, $X = X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap ... \cap X_m$. Šis užrašas reiškia, kad X yra visų lygčių sprendinių aibių $X_1, X_2, X_3, ..., X_m$ bendroji dalis (ji vadinama aibių *sankirta*).

Užrašas $X = \varnothing$ reiškia, kad lygčių sistema sprendinių neturi.

Aišku, kad bet kurią tiesinių lygčių su n nežinomųjų sistemą galima spręsti panašiai kaip pirmame skyrelyje buvo aiškinamas tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemos sprendimas. Tačiau esant didesniam už 3 nežinomųjų skaičiui tas sprendimo būdas pasidaro gana nepatogus.

Susipažinkime su tiesinių lygčių sistemos sprendimo metodu, kurį pasiūlė vokiečių matematikas Gausas (Carl Friedrich Gauss, 1777–1855).

Iš pradžių apibrėšime kelis veiksmus, kurie atliekami su (13) sistemą sudarančiomis lygtimis:

- Tiesinių lygčių su n nežinomųjų $L_i:\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + ... + a_{in}x_n = b_i$ ir $L_k:\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + ... + a_{kn}x_n = b_k$ *suma* (žym. $L_i + L_k$) vadinama tiesinė lygtis su n nežinomųjų $(a_{i1} + a_{k1})x_1 + (a_{i2} + a_{k2})x_2 + (a_{i3} + a_{k3})x_3 + ... + (a_{in} + a_{kn})x_n = b_i + b_k.$

- Tiesinės lygties su n nežinomųjų $L_i:\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + ... + a_{in}x_n = b_i$ ir skaičiaus α *sandauga* (žym. αL_i) vadinama tiesinė lygtis su n nežinomųjų $\alpha a_{i1}x_1 + \alpha a_{i2}x_2 + \alpha a_{i3}x_3 + ... + \alpha a_{in}x_n = \alpha b_i.$

- Tiesinių lygčių L_i ir L_k su n nežinomųjų *skirtumu* (žym. $L_i - L_k$) vadinama lygčių L_i ir $(-1)\cdot L_k$ suma $L_i + (-1)\cdot L_k$.

- Tiesinių lygčių su n nežinomųjų L_i ir L_k $(i \neq k)$ *tiesiniu dariniu* vadinama lygčių αL_i ir βL_k suma $\alpha L_i + \beta L_k$. Skaičiai α ir β vadinami tiesinio darinio *koeficientais.*

1 pavyzdys. Nagrinėdami tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \end{cases}$$

sudarykime šiuos jos lygčių tiesinius darinius: 1) $2L_1 + 3L_2$; 2) $2L_1 + L_3$; 3) $L_1 - 4L_4$.

Sprendimas. 1) Kad būtų lengviau, iš pradžių sudarykime lygtis $2L_1$ ir $3L_2$, o tada abi naujas lygtis sudėkime stulpeliu. Gausime:

$$\begin{array}{rl} & 2L_1:\ 2x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 8 \\ + & 3L_2:\ 6x_1 - 9x_2 + 15x_3 = 12 \\ \hline & 2L_1 + 3L_2:\ 8x_1 - x_2 + 13x_3 = 20. \end{array}$$

2) Kadangi $2L_1$ yra tiesinė lygtis $2x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 8,$ o L_3 yra tiesinė lygtis $3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6,$ tai tiesinis darinys $2L_1 + L_3$ yra tiesinė lygtis su trimis nežinomaisiais

$$(2+3)x_1 + (8+1)\ x_2 + (-2+2)x_3 = 14,$$

t. y. lygtis $5x_1 + 9x_2 + 0 \cdot x_3 = 14.$

Trečias dėmuo $0 \cdot x_3$ paprastai nerašomas. Todėl galima sakyti, kad tiesinis darinys $2L_1 + L_3$ yra $5x_1 + 9x_2 = 14,$ bet sprendžiant sistemą reikia turėti mintyje, kad gautoji tiesinė lygtis yra $5 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 14.$

3) Tiesinis darinys $L_1 - 4L_4$ yra tiesinių lygčių $L_1:\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 4$ ir $4L_4:\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 12$ skirtumas $-3x_1 - 3x_3 = -8.$ Atskirai žiūrint tai lygtis su dviem nežinomaisiais x_1 ir x_3, bet sprendžiant sistemą (dar kartą primename) ji turi būti suvokiama kaip tiesinė lygtis su trimis nežinomaisiais $(-3) \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + (-3) \cdot x_3 = -8.$

Dabar suformuluosime (nepateikdami įrodymo) labai svarbią tiesinių lygčių sistemos **savybę**.

Bet kurią tiesinių lygčių su n nežinomųjų sistemos

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{13}$$

lygtį $L_i:\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$, *pakeitus jos ir bet kurios kitos lygties* $L_k:\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k$ *tiesiniu dariniu* $\alpha L_i + \beta L_k$, $\alpha \neq 0,$ *gaunama ekvivalenti tiesinių lygčių su n nežinomųjų sistema.*

Taikant šią savybę galima eliminuoti (pašalinti) dalį nežinomųjų pasirinktose lygtyse. Kitaip sakant, pasiekti, kad pasirinktose lygtyse dalies nežinomųjų koeficientai būtų lygūs nuliui.

2 pavyzdys. Eliminuodami nežinomuosius išspręskime tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9. \end{cases} \tag{14}$$

Sprendimas. Iš pradžių antrą sistemos lygtį L_2 pakeiskime tiesiniu dariniu $L_1 + L_2$, o trečią lygtį pakeiskime tiesiniu dariniu $L_1 + L_3$. Atidžiau įsižiūrėję, lengvai suprasime, kad šiais veiksmais siekiama eliminuoti nežinomąjį x_2 iš antros ir trečios lygties, nes tiesinis darinys L_1+L_2 yra tiesinė lygtis $3\cdot x_1+0\cdot x_2+3\cdot x_3=7$, o tiesinis darinys L_1+L_3 yra tiesinė lygtis $4\cdot x_1+0\cdot x_2+4\cdot x_3=14$.

Taigi gauname tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 \qquad + 3x_3 = 7, \\ 4x_1 \qquad + 4x_3 = 14, \end{cases} \tag{15}$$

ekvivalenčią (14) sistemai.

O dabar trečią lygtį L_3: $4x_1+4x_3=14$ pakeiskime tiesiniu dariniu $4L_2-3L_3$, t. y. tiesine lygtimi $0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=-14$. Gausime ekvivalenčią (15) sistemai (taigi ir (14) sistemai) tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 \qquad + 3x_3 = 7, \\ \qquad\qquad 0 = -14, \end{cases} \tag{16}$$

kurią suvokiame kaip sistemą

$$\begin{cases} 2\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = 5, \\ 3\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = 7, \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = -14. \end{cases}$$

Aišku, kad trečia lygtis neturi sprendinių. Vadinasi, sprendinių neturi ne tik (16), bet ir jai ekvivalenčios (15) bei (14) lygčių sistemos.

Ats.: Sistema sprendinių neturi.

Gauso metodas yra toks nežinomųjų eliminavimo būdas, kuriuo siekiama sprendžiamą tiesinių lygčių su *n* nežinomųjų sistemą pakeisti ekvivalenčia *trikampe tiesinių lygčių sistema*

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n \end{cases} \tag{17}$$

arba ekvivalenčia *trapecine tiesinių lygčių sistema*

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1k}x_k + c_{1k+1}x_{k+1} + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2k}x_k + c_{2k+1}x_{k+1} + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad c_{kk}x_k + c_{kk+1}x_{k+1} + \ldots + c_{kn}x_n = d_k. \end{cases} \tag{18}$$

Tiek trikampę, tiek trapecinę tiesinių lygčių sistemą gana lengva išspręsti.

3 pavyzdys. Išspręskime trikampę tiesinių lygčių su 4 nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \qquad + 3x_4 = 8, \\ \qquad 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ \qquad\qquad 5x_3 + 2x_4 = 19, \\ \qquad\qquad\qquad 6x_4 = 12. \end{cases} \tag{19}$$

Sprendimas. Iš ketvirtos lygties gauname, kad $x_4=2$. Šią x_4 reikšmę įrašykime į kitas sistemos lygtis ir (atlikę veiksmus) gausime tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \qquad = 2, \\ \qquad 3x_2 + 2x_3 = 6, \\ \qquad\qquad 5x_3 = 15. \end{cases}$$

Iš trečios lygties gauname, kad $x_3=3$, o tada iš antros lygties išplaukia, jog $x_2=0$. Ir pagaliau iš pirmos lygties gauname, kad $x_1=1$. Vadinasi, (1; 0; 3; 2) yra vienintelis (19) sistemos sprendinys.

Ats.: (1; 0; 3; 2).

4 pavyzdys. Išspręskime trapecinę tiesinių lygčių su 4 nežinomaisiais sistemą.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 7, \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 6, \\ 4x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases} \tag{20}$$

Sprendimas. Laisvai pasirinkime realųjį skaičių t kaip nežinomojo x_4 reikšmę, įrašykime jį į (20) sistemą ir pertvarkykime pačią sistemą taip:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 7 + t, \\ 3x_2 + x_3 = 6 - 2t, \\ 4x_3 = 1 + 3t. \end{cases}$$

Nežinomųjų x_1, x_2 ir x_3 atžvilgiu šią sistemą galima traktuoti kaip trikampę tiesinių lygčių sistemą. Iš L_3 gauname, kad $x_3 = \frac{1+3t}{4}$. Įrašę šią išraišką į L_1 ir L_2, gausime sistemą

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = \frac{23-11t}{4}, \\ 3x_2 = \frac{23-11t}{4}, \end{cases}$$

iiš kurios išplaukia, jog $x_2 = \frac{23-11t}{12}$ ir $x_1 = \frac{23-11t}{12}$.

Taigi, (20) sistema turi be galo daug sprendinių – realiųjų skaičių ketvertų

$$\left(\frac{23-11t}{12}; \frac{23-11t}{12}; \frac{1+3t}{4}; t \right), \ t \in \mathbf{R}.$$

Ats.: $\left(\frac{23-11t}{12}; \frac{23-11t}{12}; \frac{1+3t}{4}; t \right), \ t \in \mathbf{R}.$

5 pavyzdys. Taikydami Gauso metodą išspręskime tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 17, \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -24, \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -33. \end{cases} \tag{21}$$

Sprendimas. Iš pradžių eliminuokime nežinomąjį x_1 iš L_2, L_3 ir L_4. Tuo tikslu L_2 pakeiskime lygtimi $3L_1 - 2L_2$, lygtį L_3 pakeiskime lygtimi $L_1 - 2L_3$, o lygtį L_4 – lygtimi $2L_1 - L_4$. Gausime ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 17, \\ x_2 - 16x_3 = 65, \\ x_2 - 16x_3 = 65, \\ 7x_2 - 15x_3 = 67. \end{cases}$$

Dabar eliminuokime x_2 iš L_3 ir L_4. Tuo tikslu L_3 pakeiskime lygtimi $L_2 - L_3$, o lygtį L_4 – lygtimi $-7L_2 + L_4$ Gausime ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 17, \\ x_2 - 16x_3 = 65, \\ 0 = 0, \\ 97x_3 = -388. \end{cases} \tag{22}$$

Šios sistemos trečia lygtis yra L_3: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$. Ji yra *tapatybė*, nes ją tenkina kiekvienas realiųjų skaičių r_1, r_2 ir r_3 trejetas (r_1; r_2; r_3). Aišku, kad ši lygtis neturi įtakos (22) sistemos sprendinių aibei. Todėl ją pašaliname iš sistemos, o toliau sprendžiame ekvivalenčią trijų lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 17, \\ \qquad x_2 - 16x_3 = 65, \\ \qquad\qquad 97x_3 = -388. \end{cases}$$

Iš L_3 gauname, kad $x_3 = -4$. Tada iš L_2 apskaičiuojame $x_2 = 1$, o iš L_1 randame $x_1 = -2$.

Taigi (–2; 1; –4) yra vienintelis (21) sistemos sprendinys.

Ats.: (–2; 1; –4).

6 pavyzdys. Taikydami Gauso metodą išspręskime tiesinių lygčių su 4 nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 10x_2 + 4x_3 - 7x_4 = -6, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 8x_4 = -31, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8. \end{cases} \tag{23}$$

Sprendimas. Iš pradžių lygtį L_2 pakeiskime lygtimi $-L_1 + L_2$, lygtį L_3 pakeiskime lygtimi $-3L_1 + L_3$, lygtį L_4 – lygtimi $L_1 - L_4$, o lygtį L_5 – lygtimi $L_1 - L_5$. Gausime ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 17, \\ -2x_2 + x_3 - 4x_4 = -18, \\ 3x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 35, \\ 3x_2 - x_3 - 4x_4 = -4. \end{cases}$$

Nežinomąjį x_2 eliminuokime iš trečios, ketvirtos ir penktos lygties. Tuo tikslu L_3 pakeiskime lygtimi $2L_2 + L_3$, lygtį L_4 pakeiskime lygtimi $-3L_2 + L_4$, o lygtį L_5 –lygtimi $-3L_2 + L_5$. Gausime ekvivalenčią lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 17, \\ -5x_3 + 2x_4 = 16, \\ 5x_3 - 2x_4 = -16, \\ 8x_3 - 13x_4 = -55. \end{cases}$$

Siekdami eliminuoti nežinomąjį x_3 iš ketvirtos ir penktos lygties, lygtį L_4 pakeiskime lygtimi $L_3 + L_4$, o lygtį L_5 – lygtimi $8L_3 + 5L_5$. Gausime ekvivalenčią lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 17, \\ -5x_3 + 2x_4 = 16, \\ 0 = 0, \\ -49x_4 = -147, \end{cases}$$

Pašalinę tapatybę L_4: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0$, gauname trikampę tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 17, \\ -5x_3 + 2x_4 = 16, \\ -49x_4 = -147, \end{cases}$$

iš kurios apskaičiuojame visas sprendinio komponentes: $x_4 = 3$, $x_3 = -2$, $x_2 = 2$, $x_1 = 1$.

Taigi (23) sistema turi vienintelį sprendinį – realiųjų skaičių ketvertą (1; 2; –2; 3).
Ats.: (1; 2; –2; 3).

7 pavyzdys. Taikydami Gauso metodą išspręskime tiesinių lygčių su 4 nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases} \tag{24}$$

Sprendimas. Lygtį L_2 pakeiskime lygtimi $2L_1 - L_2$, o lygtį L_3 – lygtimi $3L_1 - L_3$. Gausime ekvivalenčią lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ \quad 5x_2 - 11x_3 + 5x_4 = -1, \\ \quad 5x_2 - 11x_3 + 5x_4 = -4. \end{cases}$$

Aišku, kad ši lygčių sistema neturi sprendinių, nes reiškinys $5x_2 - 11x_3 + 5x_4$ gali įgyti tik vieną reikšmę esant bet kuriam x_2, x_3 ir x_4 reikšmių rinkiniui.

Na, o tęsdami nežinomųjų eliminavimo procesą lygtį L_3 galėtume pakeisti lygtimi $L_2 - L_3$: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 3$, kuri tikrai neturi nė vieno sprendinio.

Taigi (24) sistemos sprendinių aibė yra tuščioji aibė $\varnothing$.
Ats.: Sistema neturi sprendinių.

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

2. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$$

3. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

4. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 7. \end{cases}$$

5. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

6. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

7. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9, \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 8., \end{cases}$$

8. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5, \\ x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$$

9. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10. \end{cases}$$

10. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ x_2 - x_3 = 1, \\ x_3 - x_4 = 2, \\ x_4 - x_5 = -9, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 2. \end{cases}$$

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2020 m. vasario 10 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematikos metodikos centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: http://uosis.mif.vu.lt/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA

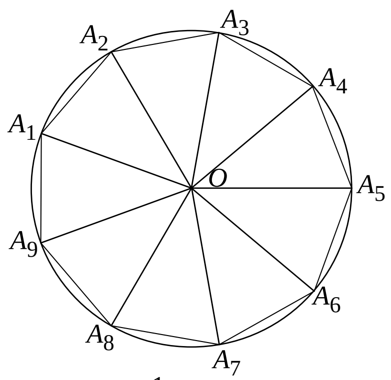
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

3. TAISYKLINGIEJI DAUGIAKAMPIAI

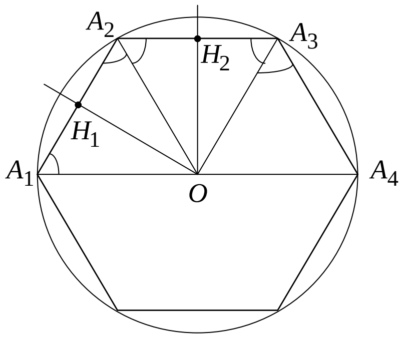
(2019–2021)

Teorinę medžiagą parengė ir trečiąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Edmundas Mazėtis

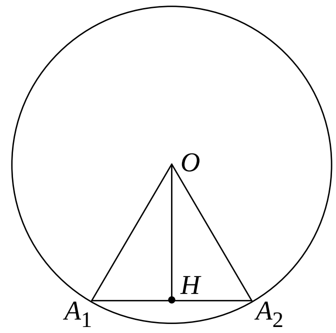
Daugiakampis vadinamas taisyklinguoju, jei visų jo kraštinių ilgiai yra vienodi ir visų vidaus kampų didumai yra vienodi. Pradžioje parodysime, kad kiekvienam natūraliajam n egzistuoja taisyklingasis daugiakampis $A_1A_2 \dots A_n$, turintis n kraštinių. Tuo tikslu imame apskritimą su centru O ir spinduliu R ir padalijame pilnutinį kampą į n lygių dalių, t. y. nubrėžiame n centrinių kampų $A_1OA_2, A_2OA_3, \dots,$ $A_{n-1}OA_n, A_nOA_1$, kurių visų didumai lygūs $\frac{360^0}{n}$; 1 pav. parodytas atvejis $n = 9$. Trikampiai A_1OA_2, A_2OA_3, … , $A_{n-1}OA_n$, A_nOA_1 yra lygūs lygiašoniai trikampiai, nes kraštinės $OA_1, OA_2, \dots,$ OA_n yra lygios apskritimo spinduliui, o kampai tarp jų lygūs $\frac{360^0}{n}$. Taigi gautojo daugiakampio $A_1A_2 \dots A_n$ visos kraštinės yra lygios. Nesunkiai patikrinama, kad šio daugiakampio kampai taip pat lygūs: $\angle A_1A_2A_3 = \angle OA_2A_1 + \angle OA_2A_3 = \angle OA_3A_2 + \angle OA_3A_4 = \angle A_2A_3A_4$ ir taip analogiškai visiems daugiakampio $A_1A_2 \dots A_n$ kampams. Taigi šis daugiakampis yra taisyklingasis $n-$kampis. Atvirkščiai, jei duotas taisyklingasis n – kampis $A_1A_2 \dots A_n$, taške O susikerta kraštinių A_1A_2 ir A_2A_3 vidurio statmenys (2 pav.), tai $OA_1 = OA_2 = OA_3$. Trikampiai A_1OA_2 ir A_2OA_3 yra lygūs lygiašoniai trikampiai, todėl kampai OA_1A_2, OA_2A_1, OA_2A_3 ir OA_3A_2 yra lygūs - jie lygūs taisyklingojo $n-$kampio kampo pusei. Iš čia išplaukia, kad jiems lygus ir kampas OA_3A_4 , taigi trikampiai OA_2A_3 ir OA_3A_4 yra lygūs, o tai reiškia, kad $OA_3 = OA_4$. Tęsdami šį samprotavimą toliau gauname, kad taškas O yra vienodai nutolęs nuo $n-$kampio viršūnių. Taigi taškas O yra apie taisyklingąjį n – kampį $A_1A_2 \dots A_n$ apibrėžto apskritimo centras.



1 pav.



2 pav.



3 pav.

Iš taško O nubrėžkime trikampių A_1OA_2, A_2OA_3, … , $A_{n-1}OA_n$, A_nOA_1 aukštines OH_1, OH_2, …, OH_n, kurios yra lygios kaip lygių trikampių aukštinės, nubrėžtos į atitinkamai lygias kraštines. Taigi daugiakampio $A_1A_2 \dots A_n$ kraštinės yra vienodu atstumu nutolę nuo taško O. Tai reiškia, kad į kiekvieną taisyklingąjį daugiakampį yra įbrėžiamas apskritimas, ir apie kiekvieną taisyklingąjį daugiakampį yra apibrėžiamas apskritimas, be to, įbrėžto ir apibrėžto apskritimų centrai sutampa.

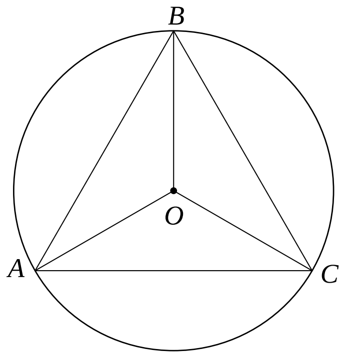
Sakykime, kad $a_n = A_1A_2$ yra taisyklingojo $n-$kampio kraštinė, OH – lygiašonio trikampio OA_1A_2 aukštinė (3 pav.). Aišku, kad atkarpa $OA_1 = R$ yra apibrėžto apie daugiakampį apskritimo spindulys, o $OH = r$ – įbrėžto į daugiakampį apskritimo spindulys. Kadangi $\angle A_1OA_2 = \frac{360^0}{n}$, tai $\angle HOA_1 = \frac{1}{2}\angle A_1OA_2 = \frac{180^0}{n}$. Iš stačiojo trikampio OHA_1 gaunamos tokios lygybės, siejančios taisyklingojo $n-$kampio kraštinės ilgį ir apibrėžto bei įbrėžto apskritimų spindulių ilgius:

$$a_n = 2R\sin\frac{180^0}{n}, \ a_n = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180^0}{n}, \ r = R\cos\frac{180^0}{n}. \qquad (1)$$

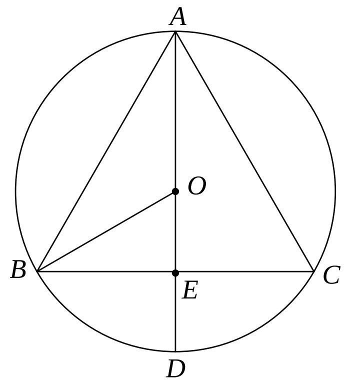
Taisyklingojo n – kampio plotą galima skaičiuoti pagal formulę $S = \frac{1}{2}R^2\sin\frac{360^0}{n}$.

Kai $n = 3$, gaunamas taisyklingasis, arba lygiakraštis trikampis ABC, kurio visos kraštinės lygios, visi kampai lygūs 60^0, įbrėžto į taisyklingąjį trikampį apskritimo ir apibrėžto apie jį apskritimo centras O yra taškas, kuriame susikerta trikampio pusiaukampinės (ir pusiaukraštinės, ir aukštinės), o $\angle AOB = \angle BOC =$

$\angle AOC = 120^0$ (4 pav.). Pagal (1) formules apibrėžto apie taisyklingąjį trikampį apskritimo spindulys lygus $R = \frac{\sqrt{3}}{3}a,$ o įbrėžto į jį apskritimo spindulys $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a,$ čia a – taisyklingojo trikampio kraštinės ilgis.



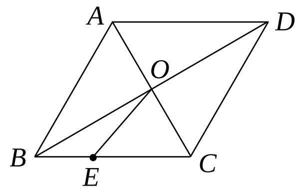
4 pav.



5 pav.

1 pavyzdys. Parodysime vieną paprastą būdą, kaip į duotąjį apskritimą įbrėžiamas taisyklingasis trikampis. Nubrėžkime bet kurį duotojo apskritimo, kurio centras – taškas $O,$ skersmenį $AD,$ taškas E yra atkarpos OD vidurio taškas, per tašką E brėžiame tiesę, statmeną skersmeniui $AD,$ ši tiesė kerta apskritimą taškuose B ir $C,$ trikampis ABC yra lygiakraštis (5 pav.). Tikrai, stačiojo trikampio EOB įžambinė lygi apskritimo spinduliui $R,$ statinis $OE = \frac{R}{2},$ todėl $\angle OBE = 30^0,$ tai $\angle EOB = 60^0,$ o $\angle BOC = 120^0.$ Kadangi lankai AB ir AC yra lygūs (jie simetriški skersmens AD atžvilgiu), tai jų didumai irgi lygūs $120^0.$ Kadangi lygiems lankams atitinka lygios stygos, tai iš čia gauname, kad $AB = AC = BC,$ taigi trikampis ABC yra lygiakraštis.

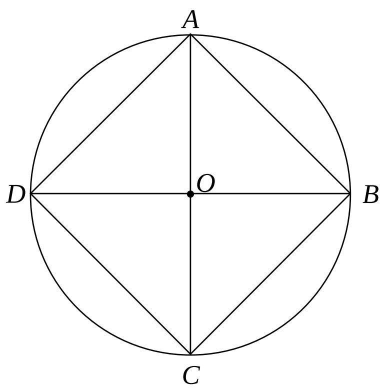
2 pavyzdys. Rombo $ABCD$ kraštinės ilgis lygus $a,$ $\angle BAD = 120^0,$ taške O susikerta rombo įstrižainės, kraštinėje BC yra taškas $E,$ dalijantis šią kraštinę santykiu $BE : EC = 1 : 2.$ Rasime atkarpos OE ilgį (6 pav.).



6 pav.

Sprendimas. Kadangi $\angle BAD = 120^0,$ tai $\angle ABC = 180^0 - \angle BAD = 60^0.$ Lygiašonis trikampis $ABC,$ kurio vienas kampas lygus $60^0,$ yra lygiakraštis, $AC = a,$ $OC = \frac{a}{2}.$ Iš sąlygos $BE : EC = 1 : 2$ išplaukia, kad $CE = \frac{2a}{3}.$ Ieškomąją atkarpą OE rasime trikampiui OEC pritaikę kosinusų teoremą: $OE^2 = OC^2 + EC^2 - 2OC \cdot EC \cos 60^0 = \frac{13}{36}a^2.$ Todėl $OE = \frac{\sqrt{13}}{6}a.$

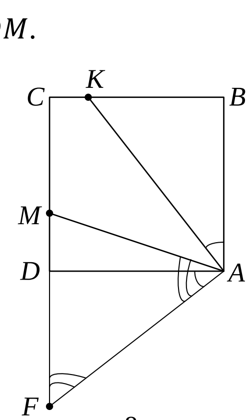
Kai $n = 4,$ turime taisyklingąjį keturkampį – kvadratą $ABCD,$ kurio visos kraštinės lygios, o kampai statieji. Kvadrato įstrižainių AC ir BD susikirtimo taškas O yra apie jį apibrėžto ir į jį įbrėžto apskritimų centras. Jei kvadrato kraštinės ilgis lygus $a,$ tai apibrėžto apie kvadratą apskritimo spindulys lygus $R = \frac{\sqrt{2}}{2}a,$ o į kvadratą įbrėžto apskritimo spindulys lygus $\frac{a}{2}.$ Norėdami į duotąjį apskritimą įbrėžti kvadratą, brėžiame du statmenus skersmenis AC ir $BD,$ keturkampis $ABCD$ yra kvadratas (7 pav.).



7 pav.

3 pavyzdys. Kvadrato $ABCD$ kraštinėje CD pažymėtas taškas $M,$ kampo BAM pusiaukampinė kerta kraštinę BC taške $K.$ Įrodysime, kad $AM = BK + DM.$

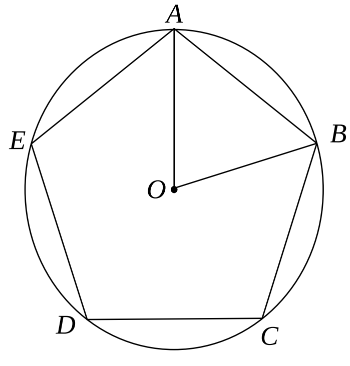
Sprendimas. Pratęskime kraštinę CD už taško D ir jos tęsinyje atidėkime atkarpą $DF = BK$ (8 pav.). Statieji trikampiai ABK ir ADF yra lygūs, nes $AB = AD$ ir $BK = DF,$ todėl $\angle BAK = \angle DAF.$ Pažymėkime $\angle BAK = \angle KAM = \angle DAF = \alpha,$ tuomet $\angle MAF = \angle MAD + \angle DAF = (90^0 - 2\alpha) + \alpha = 90^0 - \alpha.$ Bet iš stačiojo trikampio DAF gauname, kad $\angle AFD = 90^0 - \alpha,$ todėl $\angle MAF = \angle AFD,$ trikampis AMF lygiašonis, $AM = MF = MD + DF = MD + BK,$ ką ir reikėjo įrodyti.



8 pav.

Kai $n = 5, 6, \ldots,$ turime atitinkamai taisyklingąjį penkiakampį, taisyklingąjį šešiakampį ir t. t. Taisyklingojo penkiakampio $ABCDE$ (9 pav.) kampas AOB lygus $360^0 : 5 = 72^0,$ todėl $\angle OAB = \frac{1}{2}(180^0 - \angle AOB) = 54^0,$ taigi taisyklingojo penkiakampio vidaus kampas $\angle ABC = 2\angle OBA = 108^0.$ Tada pagal (1) formulę apie taisyklingąjį penkiakampį apibrėžto ir į jį įbrėžto apskritimų spinduliai yra lygūs

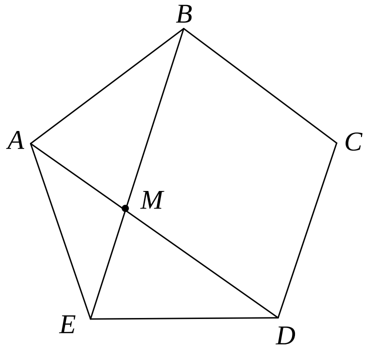
$R = \frac{a}{2\sin 36^0}$ ir $r = \frac{a}{2\mathrm{tg}36^0}$, čia a – taisyklingojo penkiakampio kraštinės ilgis. Pastebėkime, kad 36^0 laipsnių kampo sinusą ir kosinusą nesunkiai galima apskaičiuoti. Tam reikia žinoti trigubo kampo kosinuso formulę, kuri lengvai išvedama, taikant sumos kosinuso ir dvigubo kampo sinuso bei kosinuso formules: $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha \cos\alpha = 4cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Tarę, kad $\alpha = 18^0$, iš akivaizdžios lygybės $\sin 36^0 = \cos 54^0$ gauname trigonometrinę lygtį $\sin 2\alpha = \cos 3\alpha$, kurią spręsdami turime: $2\sin\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, o kadangi $\cos\alpha = \cos 18^0 \neq 0$, tai $2\sin\alpha = 4\cos^2\alpha - 3$. Pakeitę $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, gauname kvadratinę lygtį $4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 1 = 0$, kurios teigiamas sprendinys yra $\sin\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Taigi $\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, tuomet $\cos 18^0 = \sqrt{1-\sin^2 18^0} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, o $\sin 36^0 = 2\sin 18^0 \cos 18^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $\cos 36^0 = \cos^2 18^0 - \sin^2 18^0 = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$. Taigi taisyklingojo penkiakampio kraštinės ir apie jį apibrėžto spindulio ryšys yra $a_5 = \sqrt{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})}R = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}R$.



9 pav.

4 pavyzdys. Taisyklingojo penkiakampio $ABCD$ kraštinės ilgis lygus 2, įstrižainės AD ir BE susikerta taške M (10 pav.). Rasime atstumą AM.

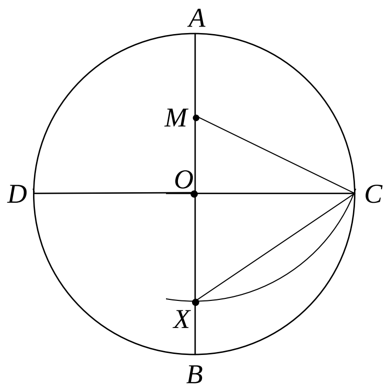
Sprendimas. Kadangi trikampis ABE yra lygiašonis, tai $\angle AEB = \frac{1}{2}(180^0 - \angle EAB) = \frac{1}{2}(180^0 - 108^0) = 36^0$. Trikampiai ABE ir AED yra lygūs lygiašoniai trikampiai, todėl $\angle AEM = \angle AEB = \angle DAE = \angle MAE = 36^0$, taigi trikampis AEM yra lygiašonis, jo kampas prie pagrindo lygus 36^0, todėl jo šoninės kraštinės AM ilgis $AM = \frac{1}{2}AE : \cos 36^0 = \sqrt{5} - 1$.



10 pav.

5 pavyzdys. Pateiksime vieną iš taisyklingojo penkiakampio braižymo būdų. Sakykime, kad AB ir CD – du statmeni apskritimo, kurio centras taškas O o spindulio ilgis lygus R, skersmenys, taškas M yra atkarpos AO vidurio taškas. Apskritimas, kurio centras yra taškas M, o spindulys – atkarpa MC, kerta skersmenį AB taške X (11 pav.). Atkarpa CX yra į duotąjį apskritimą įbrėžto taisyklingojo penkiakampio kraštinė.

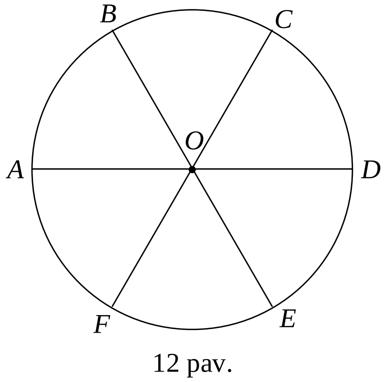
Iš tikrųjų, atkarpos OM ilgis lygus $\frac{R}{2}$, todėl nubrėžtojo apskritimo spindulys $MX = MC = \sqrt{OM^2 + OC^2} = \sqrt{(\frac{R}{2})^2 + R^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}R$. Kadangi $OX = MX - OM = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$, tai iš stačiojo trikampio OXC randame $CX = \sqrt{OC^2 + OX^2} = \sqrt{R^2 + (\frac{\sqrt{5}-1}{2}R)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = a_5$, ką ir reikėjo įrodyti.



11 pav.

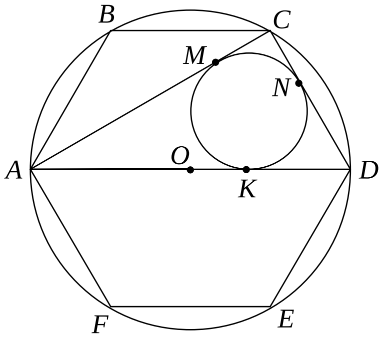
Kai $n = 6$, turime taisyklingąjį šešiakampį $ABCDEF$ (12 pav.), kuriame visi kampai $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF = \angle FOA = 60^0$, visi vidaus kampai lygūs po 120^0, taigi trikampiai $AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOA$ yra lygiakraščiai. Pagal (1) lygybes yra teisingi tokie ryšiai tarp taisyklingojo šešiakampio kraštinės a_6, apibrėžto apie taisyklingąjį šešiakampį apskritimo spindulio R ir į jį įbrėžto apskritimo spindulio r: $a_6 = R$, $a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$.

6 pavyzdys. Apie taisyklingąjį šešiakampį $ABCDEF$ apibrėžto apskritimo spindulys lygus R. Rasime į trikampį ACD įbrėžto apskritimo spindulį (13 pav.).



12 pav.

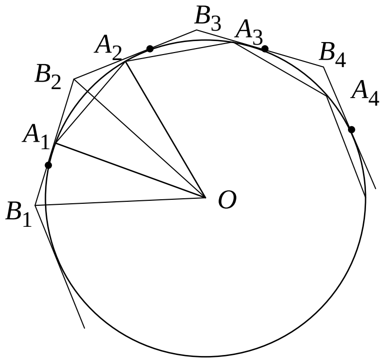
Sprendimas. Lygiašoniame trikampyje ABC $\angle ABC = 120^0$, todėl $\angle BAC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^0 - \angle ABC) = 30^0$, taigi $\angle ACD = 120^0 - 30^0 = 90^0$, t. y. trikampis ACD yra statusis. Iš trikampio ABC randame, kad $AC = 2AB\cos 30^0 = \sqrt{3}R$. Kadangi $CD = R$, tai iš stačiojo trikampio ACD gauname $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = 2R$. Sakykime, kad trikampio ACD kraštines AC, CD ir AD įbrėžtas į jį apskritimas liečia atitinkamai taškuose $M, N,$ ir K. Pagal apskritimo liestinių, nubrėžtų iš vieno taško, savybę $CM = CN = r$, $AM = AK = \sqrt{3}R - r$, $DN = DK = R - r$, čia $r -$ įbrėžto į trikampį ACD apskritimo spindulys. Kadangi $AD = AK + DK$, tai $2R = (\sqrt{3}R - r) + (R - r)$. Iš čia gauname, kad $r = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)R$.



13 pav.

7 pavyzdys. Taisyklingasis $n -$ kampis $A_1A_2 \dots A_n$ yra įbrėžtas į apskritimą, o taisyklingasis $n -$ kampis $B_1B_2 \dots B_n$ apibrėžtas apie tą patį apskritimą (14 pav.). Nustatysime, ar gali vieno jų plotas būti ne mažiau nei 4 kartus didesnis nei kito.

Sprendimas. Sakykime, kad taškas O yra apskritimo centras, o jo spindulys lygus R. Tuomet pagal (1) formules daugiakampio $A_1A_2 \dots A_n$ kraštinės ilgis $a_n = 2R\sin\frac{180^0}{n}$, o kadangi apskritimas yra įbrėžtas į daugiakampį $B_1B_2 \dots B_n$, tai jo kraštinė $b_n = 2R\, tg\, \frac{180^0}{n}$. Daugiakampių plotų santykis yra lygus trikampių OA_1A_2 ir OB_1B_2 plotų santykiui. Šie trikampiai yra lygiašoniai ($OA_1 = OA_2$, $OB_1 = OB_2$), o jų kampai prie viršūnės O lygūs ($\angle A_1OA_2 = \angle B_1OB_2 = \frac{360^0}{n}$), taigi jie yra panašieji. Panašiųjų trikampių plotai sutinka kaip jų atitinkamų kraštinių kvadratai, todėl pagal sąlygą turime, kad $\frac{b_n^2}{a_n^2} \geq 4$, t. y. $\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{1}{2}$. Įrašę kraštinių a_n ir b_n reikšmes gauname, kad daugiakampių kraštinių skaičius $n \geq 3$ turi tenkinti nelygybę $\cos\frac{180^0}{n} \leq \frac{1}{2}$.

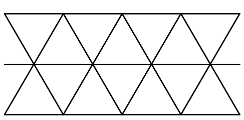


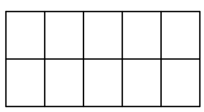
14 pav.

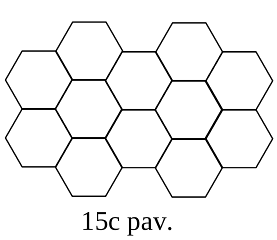
Kai $n = 3$, gauname lygybę, nes $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$. Kai $n = 4$, tai $\cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2}$. Kai $n > 4$, $\frac{180^0}{n} < 45^0$, todėl $\cos\frac{180^0}{n} > \cos 45^0 > \frac{1}{2}$. Taigi tik kai $n = 3$, apibrėžtojo trikampio plotas du kartus didesnis už įbrėžtojo trikampio plotą, o su visais kitais n daugiakampių, tenkinančių uždavinio sąlygą, negali būti.

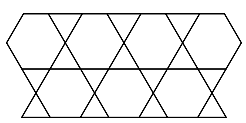
Jei plokštuma yra padengiama vienodais taisyklingaisiais daugiakampiais taip, kad kiekvienas plokštumos taškas būtų arba uždengiamas vieninteliu daugiakampiu, arba yra tik dviejų daugiakampių bendros kraštinės taškas, arba yra keleto daugiakampių bendra viršūnė, tai sakoma, kad turime parketą. Ne iš bet kurių taisyklingųjų daugiakampių gaunamas parketas. Sakykime, kad turime parketą iš taisyklingųjų n-kampių, o kiekvienoje jų bendroje viršūnėje A_i sueina k daugiakampių. Kadangi bet kurio n- kampio vidaus kampų suma s skaičiuojama pagal formulę $s = 180^0(n-2)$, tai taisyklingojo n- kampio vidaus kampo didumas yra lygus $\frac{180^0(n-2)}{n}$. Tuomet kampų, kurių viršūnė yra taškas A_i, suma lygi $\frac{180^0(n-2)}{n}k$. Kadangi daugiakampiai padengia plokštumą be tarpų ir vienas su kitu neturi bendrų vidaus taškų, tai ši suma yra lygi 360^0. Taigi reikia rasti tokius sveikuosius skaičius n ir k, kuriems būtų teisinga lygybė $\frac{180^0(n-2)}{n}k = 360^0$, t. y. lygybė $(n-2)k = 2n$. Iš jos gauname, kad $k = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$. Skaičius $\frac{4}{n-2}$ su $n \geq 3$ yra sveikasis tik kai $n = 3, n = 4$ ir $n = 6$. Taigi plokštumą galima padengti vienodais taisyklingais daugiakampiais tik tada, kai tie daugiakampiai yra lygiakraščiai trikampiai, kvadratai ir taisyklingieji šešiakampiai. Tuomet vieną bendrą viršūnę turi 6 trikampiai, 4 kvadratai ir 3 šešiakampiai. 15 pav. pavaizduoti visi šie trys parketai.

Galima nagrinėti ir plokštumos padengimus nebūtinai vienodais taisyklingaisiais daugiakampiais. Sakykime, kad plokštuma padengiama dviejų rūšių taisyklingaisiais daugiakampiais - $n -$ kampiais ir $m -$ kampiais, kurių kraštinės ilgis yra vienodas, o kiekvienas taškas, kuris yra bendra daugiakampių viršūnė,


15a pav.


15b pav.


15c pav.


16 pav.

yra k $n-$kampių ir l $m-$kampių bendra viršūnė. Kadangi visų daugiakampių kampų, turinčių tą pačią viršūnę, suma lygi 360^0, tai sveikieji skaičiai m, n, k ir l turi tenkinti lygybę $\frac{180^0(n-2)}{n}k + \frac{180^0(m-2)}{m}l = 360^0$. Suprastinę gauname, kad

$$k(mn-2m) + l(mn-2n) = 2mn. \quad (2)$$

Pvz., jei parketas daromas iš trikampių ($n = 3$) ir šešiakampių ($m = 6$), tai (2) lygtis tampa tokia $6k + 12l = 36$, t. y. $k + 2l = 6$. Šią lygtį tenkina skaičiai $k = 2, l = 2$. Taigi egzistuoja plokštumos padengimas taisyklingaisiais trikampiais ir šešiakampiais, o kiekvienoje bendroje viršūnėje yra 2 šešiakampių ir 2 trikampių viršūnės (16 pav.). Bet taisyklingaisiais šešiakampiais ir kvadratais negalima padengti plokštumos, nes jei viename taške atsidurtų k šešiakampių viršūnių ir l trikampių viršūnių, iš (2) lygybės gautume lygtį $(4 \cdot 6 - 2 \cdot 6)k + (4 \cdot 6 - 2 \cdot 4)l = 2 \cdot 4 \cdot 6$, t. y. lygtį $4k + 3l = 12$. Nesunku pastebėti, kad nėra tokių natūraliųjų skaičių (k, l), kuriems būtų teisinga ši lygybė. Tikrai, iš jos seka, kad $l = \frac{12-4k}{3}$, todėl $12 - 4k > 0$, $k < 3$, bet su $k = 1, k = 2$ skaičius l nėra sveikasis.

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Apskritimo styga, kurios ilgis 2, nuo apskritimo centro nutolusi atstumu 3. Į apskritimą įbrėžtas taisyklingasis trikampis. Raskite jo plotą.

2. Rombo $ABCD$ kraštinės ilgis lygus 6, $\angle BAD = 60^0$, taške O susikerta rombo įstrižainės. Kraštinėje BC yra toks taškas E, kad $CE = 2$. Raskite atkarpos OE ilgį.

3. Kvadrato $ABCD$ viduje yra taškas K ir $BK = 12$. Nubrėžtas kvadratas $AKLM$, kurio viršūnė L yra kvadrato $ABCD$ viduje, o krsštinė LM kerta atkarpą AD. Raskite atkarpos MD ilgį.

4. Kvadrato kraštinės ilgis lygus 6, jo viduje yra taškas, kuris nuo gretimų kvadrato viršūnių nutolęs atstumais 5 ir 3. Kokiais atstumais tas taškas yra nutolęs nuo kitų dviejų kvadrato viršūnių?

5. Taškas E yra kvadrato $ABCD$ kraštinėje AD, o taškas F – kraštinėje BC, be to, $BE = EF = FD = 30$. Raskite kvadrato kraštinės ilgį.

6. Taisyklingojo penkiakampio $ABCDE$ kraštinės ilgis lygus 4, įstrižainės BD ir AC susikerta taške M. raskite atkarpos AM ilgį.

7. Taisyklingojo penkiakampio $ABCDE$ išorėje nubrėžtas lygiakraštis trikampis ABF, o penkiakampio viduje – kvadratas $ABMN$. Raskite kampą FMC.

8. Apie taisyklingąjį šešiakampį $ABCDEF$ apibrėžto apskritimo spindulys lygus 10, įstrižainės AD ir EC susikerta taške L. Raskite į trikampį ACL įbrėžto apskritimo spindulį.

9. Taisyklingasis $n-$ kampis $A_1A_2 \dots A_n$ yra įbrėžtas į apskritimą, o taisyklingasis $n-$ kampis $B_1B_2 \dots B_n$ apibrėžtas apie tą patį apskritimą. Ar gali šių daugiakampių perimetrų santykis būti lygus 0,51?

10. Ar galima plokštumą padengti a) taisyklingaisiais trikampiais ir kvadratais? b) taisyklingaisiais penkiakampiais ir taisyklingaisiais trikampiais? Jei atsakymas teigiamas, nubraižykite tokio parketo fragmentą, o jei neigiamas, paaiškinkite, kodėl.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2020 m. balandžio 15 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematikos metodikos centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: http://www.mif.vu.lt/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

IV. NETIESINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS

(2019–2021)

Teorinę medžiagą parengė bei ketvirtąją užduotį sudarė doc. dr. Antanas Apynis

Netiesinių lygčių sistema su n nežinomųjų $(n = 2, 3, \ldots)$ vadinsime tokią sistemą, kurios bent viena lygtis nėra tiesinė.

Jau žinome, kad tiesinių lygčių sistemos yra išsprendžiamos gana lengvai – tereikia gerai suprasti ir išmokti taikyti Gauso metodą. Tuo tarpu netiesinių lygčių sistemų sprendimas gana dažnai yra daug sunkesnis, taigi ir įdomesnis. Šioje jauniesiems matematikams skirtoje temoje apsiribosime netiesinių lygčių su dviem ir trimis nežinomaisiais sistemomis. Kad būtų paprasčiau vieną kitą teorinį teiginį bei praktinį patarimą pateiksime nagrinėdami konkrečius uždavinius.

1 pavyzdys. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - xy + 2x + 3y = 7, \\ x + y = 2. \end{cases} \tag{1}$$

Sprendimas. Matome, kad antra lygtis yra tiesinė. Todėl vieną nežinomąjį (tiek x, tiek y) lengva išreikšti kitu nežinomuoju. Jo išraišką įrašę į pirmą lygtį, turėtume gauti kvadratinę – taigi gerai pažįstamą – lygtį.

Sistemą spręskime taip:

$$\begin{cases} y = 2 - x, \\ 2x^2 + (2-x)^2 - x(2-x) + 2x + 3(2-x) = 7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 - x, \\ 4x^2 - 7x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - x, \\ x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-48}}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - x, \\ x = \dfrac{3}{4} \text{ arba } x = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{4},\ y = \frac{5}{4} \text{ arba } x = 1,\ y = 1.$$

Taigi (1) lygčių sistema turi du sprendinius – realiųjų skaičių x ir y poras $\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$ ir (1; 1).

Ats.: $\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$, (1; 1).

2 pavyzdys. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} xy + x + y = 1, \\ x^2 + y^2 = 6. \end{cases} \tag{2}$$

Sprendimas. Atidžiai pažvelgę į sistemą sudarančias lygtis tikrai suprasime, kad ir viena, ir kita lygtis yra *simetrinė* nežinomųjų x ir y atžvilgiu. Kitaip sakant, sukeitę x ir y vietomis gauname tokią pat lygtį.

Įsidėkime, kad simetrinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą tikslinga pradėti spręsti nežinomuosius x ir y pakeičiant nežinomaisiais

$$u = x + y \text{ ir } v = xy, \tag{3}$$

nes kiekvieną simetrinį (x ir y atžvilgiu) daugianarį įmanoma išreikšti *pagrindiniais* simetriniais reiškiniais $x + y$ ir xy.

Kadangi $xy + x + y = v + u$ ir $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$, tai pakeitę nežinomuosius gausime lygčių sistemą

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^2 - 2v = 6, \end{cases} \tag{4}$$

kuri labai panaši į 1 pavyzdžio lygčių sistemą.

Šią sistemą spręskime taip:

$$\begin{cases} v = 1 - u, \\ u^2 - 2(1-u) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 1 - u, \\ u^2 + 2u - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 1 - u, \\ (u+1)^2 - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 1 - u, \\ u + 1 = \pm 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 1 - u, \\ u = -4 \text{ arba } u = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow u = -4,\ v = 5$ arba $u = 2,\ v = -1$.

Gavome du (4) sistemos sprendinius: (–4; 5) ir (2; –1).

Nežinomųjų x ir y reikšmėms rasti reikia išspręsti dvi lygčių sistemas:

1) $\begin{cases} x + y = -4, \\ xy = 5 \end{cases}$ ir 2) $\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = -1. \end{cases}$

Atkreipkime dėmesį į tai, kad sprendžiant lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v \end{cases}$$

galima taikyti Vijeto teoremą, pagal kurią x ir y yra kvadratinės lygties

$$t^2 - ut + v = 0$$

sprendiniai.

Taigi sistemos

$$\begin{cases} x + y = -4, \\ xy = 5 \end{cases} \tag{5}$$

sprendiniams rasti spręskime kvadratinę lygtį $t^2 + 4t + 5 = 0$, o sistemos

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = -1 \end{cases} \tag{6}$$

sprendiniams rasti – kvadratinę lygtį $t^2 - 2t - 1 = 0$.

Kvadratinė lygtis $t^2 + 4t + 5 = 0$ sprendinių neturi, nes

$$t^2 + 4t + 5 = (t + 2)^2 + 1 > 0, \text{ jei } t \in \mathbf{R},$$

todėl (5) sistema sprendinių irgi neturi.

Spręsdami antrą kvadratinę lygtį gauname:

$$t^2 - 2t - 1 = 0 \Rightarrow (t - 1)^2 = 2 \Rightarrow t - 1 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow t = 1 - \sqrt{2} \text{ arba } t = 1 + \sqrt{2}.$$

Vadinasi, $x = 1 - \sqrt{2}$, $y = 1 + \sqrt{2}$ arba $x = 1 + \sqrt{2}$, $y = 1 - \sqrt{2}$. Darome išvadą, kad (6) sistema turi du sprendinius: $(1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$ ir $(1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2})$. Aišku, kad tik jie yra (2) sistemos sprendiniai.

Ats.: $(1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$, $(1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2})$.

3 pavyzdys. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x^4 + y^4 = 97. \end{cases} \tag{7}$$

Sprendimas. Matome, kad abi lygtys yra simetrinės, todėl keisdami nežinomuosius taikykime formules $u = x + y$ ir $v = xy$.

Kadangi

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 = ((x + y)^2 - 2xy)^2 - 2(xy)^2 =$$
$$= (u^2 - 2v)^2 - 2v^2 = u^4 - 4u^2v + 2v^2,$$

tai iš (7) sistemos gauname sistemą

$$\begin{cases} u = 5, \\ u^4 - 4u^2v + 2v^2 = 97, \end{cases} \tag{8}$$

kurią išspręsti visai nesunku:

$$\begin{cases} u = 5, \\ 5^4 - 4 \cdot 5^2 \cdot v + 2v^2 = 97 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 5, \\ 2v^2 - 100v + 625 = 97 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 5, \\ v^2 - 50v + 264 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 5, \\ (v - 25)^2 - 361 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = 5, \\ (v - 25)^2 = 361 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 5, \\ v = 25 \pm 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 5, \\ v = 6 \text{ arba } v = 44. \end{cases}$$

Taigi (8) sistema turi du sprendinius: (5; 6) ir (5; 44).

Nežinomųjų x ir y poroms (x; y), tenkinančioms (7) sistemą, rasti reikia išspręsti dvi lygčių sistemas:

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6 \end{cases} \text{ ir } \begin{cases} x+y=5, \\ xy=44. \end{cases}$$

Pirmoji iš jų yra ekvivalenti (pagal Vijeto teoremą) kvadratinei lygčiai

$$t^2-5t+6=0, \tag{9}$$

o antroji – kvadratinei lygčiai

$$t^2-5t+44=0. \tag{10}$$

Kadangi (9) lygties sprendiniai yra 2 ir 3, tai gauname du (7) sistemos sprendinius: (2; 3) ir (3; 2).

Kvadratinė lygtis $t^2-5t+44=0$ sprendinių neturi, nes

$$t^2-5t+44=(t-2{,}5)^2+37{,}25>0, \quad \text{jei} \quad t\in\mathbf{R}.$$

Vadinasi, (7) lygčių sistema daugiau sprendinių neturi.

Ats.: (2; 3), (3; 2).

Dabar glaustai apžvelkime kitą galimybę išspręsti (7) lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y=5, \\ x^4+y^4=97. \end{cases}$$

Tokia galimybė aiškiai matoma, nes pirma sistemos lygtis yra tiesinė. Tačiau pasinaudoti ja nėra paprasta, nes įrašę nežinomojo y išraišką $y=5-x$ į antrą lygtį ir atlikę veiksmus gautume ketvirto laipsnio lygtį

$$x^4-10x^3+75x^2-250x+264=0. \tag{11}$$

Yra žinoma, kad kiekvieną ketvirto laipsnio daugianarį įmanoma išskaidyti dviejų kvadratinių trinarių sandauga, bet pats skaidymas daugeliu atvejų yra labai nelengvas darbas. Be to, reikia ir papildomų matematikos žinių.

Nesileisdami į konkretų aiškinimą, užrašysime tik galutinį rezultatą:

$$x^4-10x^3+75x^2-250x+264=(x^2-5x+6)(x^2-5x+44).$$

Lygybės teisingumu nesunku įsitikinti sudauginus kvadratinius trinarius.

O turint šį skaidinį (11) lygties sprendinius rasti visai lengva – tereikia išspręsti dvi kvadratines lygtis:

$$x^2-5x+6=0 \quad \text{ir} \quad x^2-5x+44=0.$$

Pirmos lygties sprendiniai yra 2 ir 3, o antra lygtis sprendinių neturi.

Vadinasi, (11) lygtis turi du sprendinius ($x=2$ ir $x=3$), pagal kuriuos gauname abu (7) sistemos sprendinius ((2; 3) ir (3; 2)).

4 pavyzdys. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^3-y^3=19(x-y), \\ x^3+y^3=7(x+y). \end{cases} \tag{13}$$

Sprendimas. Aišku, kad (13) lygčių sistema yra ekvivalenti lygčių sistemai

$$\begin{cases} x^3-y^3-19(x-y)=0, \\ x^3+y^3-7(x+y)=0, \end{cases}$$

o ši – lygčių sistemai

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2-19)=0, \\ (x+y)(x^2-xy+y^2-7)=0. \end{cases} \tag{14}$$

Jei būtų $y=x$, tai (14) lygčių sistema būtų ekvivalenti lygčiai

$$2x\cdot(x^2-7)=0,$$

iš kurios gautume, kad $x=0$ arba $x=\pm\sqrt{7}$.

Jei būtų $y=-x$, tai (14) lygčių sistema būtų ekvivalenti lygčiai

$$2x\cdot(x^2-19)=0,$$

iš kurios gautume, kad $x=0$ arba $x=\pm\sqrt{19}$.

Vadinasi, realiųjų skaičių poros (0; 0), $(-\sqrt{7};-\sqrt{7})$, $(\sqrt{7};\sqrt{7})$, $(-\sqrt{19};\sqrt{19})$ ir $(\sqrt{19};-\sqrt{19})$ yra (13) lygčių sistemos sprendiniai.

Jei $y\neq x$ ir $y\neq -x$, tai (14) sistema yra ekvivalenti simetrinių lygčių sistemai

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2-19=0, \\ x^2-xy+y^2-7=0. \end{cases} \tag{15}$$

Ją spręskime taikydami keitinius $u=x+y$ ir $v=xy$.

Kadangi $x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=u^2-v$ ir $x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy=u^2-3v$, tai iš (15) sistemos gausime lygčių sistemą

$$\begin{cases} u^2-v-19=0, \\ u^2-3v-7=0, \end{cases} \tag{16}$$

kurią galima išspręsti taip:

$$\begin{cases} u^2-v=19, \\ u^2-3v=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2=v+19, \\ v+19-3v=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2=v+19, \\ v=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2=25, \\ v=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=-5 \text{ arba } u=5, \\ v=6. \end{cases}$$

Gavome, kad (16) lygčių sistema turi du sprendinius: (–5; 6) ir (5; 6).

Belieka išspręsti dvi lygčių sistemas:

$$\begin{cases} x+y=-5, \\ xy=6 \end{cases} \text{ ir } \begin{cases} x+y=5, \\ xy=6. \end{cases}$$

Pirma sistema ekvivalenti (pagal Vijeto teoremą) kvadratinei lygčiai $t^2+5t+6=0$, o antra – kvadratinei lygčiai $t^2-5t+6=0$. Jų sprendiniai yra atitinkamai –2 ir –3 ir 2 ir 3. Pagal juos gauname keturis (15) sistemos sprendinius: (–2; –3), (–3; –2), (2; 3), (3; 2).

Vadinasi, (13) lygčių sistemos sprendinių aibę sudaro šios realiųjų skaičių poros: (0; 0), $(-\sqrt{7};-\sqrt{7})$, $(\sqrt{7};\sqrt{7})$, $(-\sqrt{19};\sqrt{19})$, $(\sqrt{19};-\sqrt{19})$, (–2; –3), (–3; –2), (2; 3) ir (3; 2).

5 pavyzdys. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} 3x^2+2xy-9x-4y+6=0, \\ 5x^2+2xy-12x-4y+4=0. \end{cases} \tag{17}$$

Sprendimas. Lygčių sistemą pertvarkykime taip:

$$\begin{cases} 2xy-4y=-3x^2+9x-6, \\ 2xy-4y=-5x^2+12x-4. \end{cases} \tag{18}$$

Dabar tikrai aišku, kad būtinai turi galioti lygybė $-3x^2+9x-6=-5x^2+12x-4$, kuri ekvivalenti kvadratinei lygčiai $2x^2-3x-2=0$.

Išsprendę ją gauname, kad $x=-\dfrac{1}{2}$ arba $x=2$. Šias *x* reikšmes paeiliui įrašę į (18) sistemos pirmą lygtį rasime jas atitinkančias nežinomojo *y* reikšmes:

1) jei $x=-\dfrac{1}{2}$, tai $2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)y-4y=-3\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+9\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)-6 \Rightarrow y=\dfrac{9}{4}$;

2) jei $x=2$, tai $2\cdot 2y-4y=-3\cdot 2^2+9\cdot 2-6 \Rightarrow 0\cdot y=0$.

Pastarasis rezultatas reiškia, kad esant $x=2$ nežinomojo *y* reikšmė gali būti bet kuris realusis skaičius (jį pažymėkime *r*).

Taigi (17) sistemos sprendinių aibę sudaro be galo daug realiųjų skaičių porų: $\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$ ir (2; *r*), $r \in \mathbf{R}$.

Ats.: $\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$ ir (2; *r*), $r \in \mathbf{R}$.

6 pavyzdys. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 3, \\ y^2 - 3xy = 2. \end{cases} \tag{19}$$

Sprendimas. Pirmą lygtį padauginkime iš 2, o antrą – iš 3. Gausime ekvivalenčią lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x^2 - 8xy + 2y^2 = 6, \\ 3y^2 - 9xy = 6. \end{cases}$$

Aišku, kad turi galioti lygybė

$$2x^2 - 8xy + 2y^2 = 3y^2 - 9xy,$$

iš kurios gauname lygybę

$$2x^2 + xy - y^2 = 0.$$

Padalijęs ją iš y^2 $(y \neq 0)$ gausime kvadratinę lygtį (trupmenos $\frac{x}{y}$ atžvilgiu)

$$2 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 1 = 0. \tag{20}$$

Čia pat atkreipkime dėmesį į tai, kad tarp (19) sistemos sprendinių (*x; y*) tikrai nėra nė vieno, kad būtų $y = 0$ (įrašę į antrą lygtį $y = 0$ gautume neteisingą lygybę $0 = 2$).

Tegu $\frac{x}{y} = t$. Tada (20) lygtis įgis pavidalą $2t^2 + t - 1 = 0$. Išsprendę ją gausime dvi t reikšmes: $t = -1$ ir $t = \frac{1}{2}$.

Jei $t = -1$, tai $\frac{x}{y} = -1 \Rightarrow y = -x$.

Šiuo atveju iš (19) sistemos pirmos lygties gausime kvadratinę lygtį $6x^2 = 3$, iš kurios išplaukia, jog $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ arba $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Realiųjų skaičių poros $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ir $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ yra (19) sistemos sprendiniai.

Jei $t = \frac{1}{2}$, tai $y = 2x$. Įrašę į (19) sistemos pirmą lygtį gauname kvadratinę lygtį $-3x^2 = 3$, kuri neturi sprendinių.

Vadinasi, (19) lygčių sistema turi tik du sprendinius.

Ats.: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

7 pavyzdys. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x^2 - 2y^2 = 1. \end{cases} \tag{21}$$

Sprendimas. Pažymėję $t = \frac{x}{y}$, gausime, kad $\frac{y}{x} = \frac{1}{t}$, o įrašę į pirmą sistemos lygtį gausime lygtį $t - \frac{1}{t} = \frac{5}{6}$, kurią nesunku išspręsti:

$$t - \frac{1}{t} = \frac{5}{6} \Rightarrow 6t^2 - 5t - 6 = 0 \Rightarrow t = -\frac{2}{3} \text{ arba } t = \frac{3}{2}.$$

Jei $t = -\frac{2}{3}$, tai

$$\frac{x}{y} = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}y.$$

Įrašę į (21) sistemos antrą lygtį gausime:

$$\left(-\frac{2}{3}y\right)^2 - 2y^2 = 1 \Rightarrow -\frac{14}{9}y^2 = 1.$$

Vadinasi, šiuo atveju (21) sistema sprendinių neturi.

Jei $t = \frac{3}{2}$, tai

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}y.$$

Įrašę į (21) sistemos antrą lygtį gausime:

$$\left(\frac{3}{2}y\right)^2 - 2y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = -2 \text{ arba } y = 2.$$

Šiuo atveju gauname du (21) sistemos sprendinius: (–3; –2) ir (3; 2).

Ats.: (–3; –2), (3; 2).

8 pavyzdys. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 3, \\ 2xy + 4x = 7. \end{cases} \tag{22}$$

Sprendimas. Iš pradžių pabandykime nežinomąjį y išreikšti nežinomuoju x ir pereiti prie lygties su vienu nežinomuoju sprendimo. Iš antros lygties gauname, kad

$$y = \frac{7}{2x} - 2.$$

Aišku, kad ši išraiška yra korektiška, nes (22) sistema tikrai neturi sprendinio, kurio komponentė x lygi nuliui.

Įrašę į pirmą lygtį gauname lygtį su vienu nežinomuoju:

$$2x^2 + \left(\frac{7}{2x} - 2\right)^2 = 3,$$

$$2x^2 + \frac{49}{4x^2} - \frac{14}{x} + 4 = 3,$$

$$2x^2 + 1 - \frac{14}{x} + \frac{49}{4x^2} = 0,$$

o padauginę iš $4x^2$ – ketvirtojo laipsnio lygtį

$$8x^4 + 4x^2 - 56x + 49 = 0. \tag{23}$$

Dabar turėtume apsispręsti – ar ieškoti kelio į (23) lygties sprendinių aibę, ar sugrįžti į pačią pradžią. Šį kartą sugrįžkime į pradžią. Iš pirmos lygties atimkime antrą lygtį ir gausime:

$$2x^2 + y^2 - 2xy - 4x = -4,$$

$$(x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) = 0,$$

$$(x-y)^2+(x-2)^2=0.$$

O ši lygybė galioja tik kai $x-y=0$ ir $x-2=0$. Vadinasi, (23) sistema gali turėti tik vieną sprendinį – realiųjų skaičių porą (2; 2). Bet ji netenkina nei pirmos, nei antros lygties.

Belieka pasakyti, kad (23) lygčių sistema sprendinių neturi.

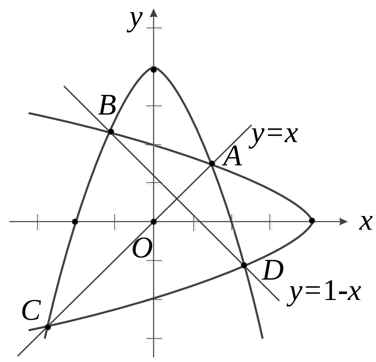
Dar atkreipkime dėmesį į tai, kad ne tik išsprendėme (23) sistemą, bet ir įrodėme (aišku, netiesiogiai!), jog (23) lygtis neturi (realiųjų) sprendinių.

Ats.: $\varnothing$.

9 pavyzdys. Raskime parabolių, kurių lygtys yra $x=4-y^2$ ir $y=4-x^2$, susikirtimo taškų koordinates.

Sprendimas. Iš pradžių nubrėžkime abi paraboles (žr. pav.). Kadangi susikirtimo taškai yra ir vienoje, ir kitoje parabolėje, jų koordinatės turi tenkinti ir lygtį $x=4-y^2$, ir lygtį $y=4-x^2$. Vadinasi, reikia išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} x=4-y^2, \\ y=4-x^2, \end{cases} \tag{24}$$



kuri ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} x+y^2=4, \\ y+x^2=4. \end{cases}$$

Aišku, kad turi galioti lygybė

$$x+y^2=y+x^2.$$

O ją pertvarkykime taip:

$$(x-y)+(y^2-x^2)=0,$$
$$(x-y)+(y-x)(y+x)=0,$$
$$(x-y)(1-x-y)=0.$$

Vadinasi, yra tik dvi galimybės: arba $y=x$, arba $y=1-x$.

Jei $y=x$, iš pirmos lygties gauname:

$$x=4-x^2 \Rightarrow x^2+x-4=0 \Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \text{ arba } x=-\frac{1+\sqrt{17}}{2}.$$

Šiuo atveju gauname du (24) sprendinius – realiųjų skaičių x ir y poras $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2};\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$ ir $\left(-\frac{1+\sqrt{17}}{2};-\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$. Aišku, kad pirma pora yra taško A (žr. pav.) koordinatės, o antra pora – taško C koordinatės.

Jei $y=1-x$, iš pirmos ((24) sistemos) lygties gauname:

$$x=4-(1-x)^2,$$
$$x=3+2x-x^2,$$
$$x^2-x-3=0 \Rightarrow x=\frac{1-\sqrt{13}}{2} \text{ arba } x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

Atitinkamos y reikšmės yra:

$$1-\frac{1-\sqrt{13}}{2}=\frac{1+\sqrt{13}}{2} \text{ ir } 1-\frac{1+\sqrt{13}}{2}=\frac{1-\sqrt{13}}{2}.$$

Taigi taško B koordinatės yra $\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$, o taško D koordinatės (žr. pav.) yra $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$.

Ats.: $A\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$, $B\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$, $C\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}; \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$, $D\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$.

10 pavyzdys. Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = 1-z, \\ \frac{yz}{y+z} = 2-x, \\ \frac{zx}{z+x} = 2-y. \end{cases} \tag{25}$$

Sprendimas. Aišku, kad negali būti nei $x+y=0,$ nei $y+z=0,$ nei $z+x=0.$ Vadinasi, padauginę pirmą lygtį iš $x+y$, antrą iš $y+z$, o trečią iš $z+x$ gausime ekvivalenčią lygčių sistemą

$$\begin{cases} xy = x+y-zx-zy, \\ yz = 2y+2z-xy-xz, \\ zx = 2z+2x-yz-yx, \end{cases}$$

kuri ekvivalenti lygčių sistemai

$$\begin{cases} xy+yz+zx = x+y, \\ xy+yz+zx = 2y+2z, \\ xy+yz+zx = 2x+2z. \end{cases}$$

Matome, kad būtinai turi galioti lygybės $x+y=2y+2z,$ $x+y=2x+2z,$ o iš jų išplaukia lygybė $2y+2z=2x+2z.$

Vadinasi, būtinai turi būti $y=x.$ Todėl

$$x+y=2y+2z \Rightarrow 2x=2x+2z \Rightarrow z=0.$$

Įrašę į (25) sistemos pirmą lygtį gausime:

$$\frac{x^2}{2x}=1 \Rightarrow x=2.$$

Taigi (25) lygčių sistema turi vienintelį sprendinį (realiųjų skaičių *x*, *y* ir *z* trejetą (*x*; *y*; *z*)) (2; 2; 0).
Ats.: (2; 2; 0).

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x-y=6, \\ x^3-y^3=126. \end{cases}$$

2. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=91, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$$

3. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$$

4. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{xy} = \dfrac{5}{2}, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

5. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y-1} - \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{1}{x}, \\ y^2 - x - 5 = 0. \end{cases}$$

6. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} (x+y)(x^2 - y^2) = 16, \\ (x-y)(x^2 + y^2) = 40. \end{cases}$$

7. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 4, \\ 2xy = 2y - 5. \end{cases}$$

8. Raskite parabolių, kurių lygtys yra $y = x^2 - 9$ ir $x = y^2 - 9$, susikirtimo taškų koordinates.

9. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{5xy}{x+y} = 6, \\ \dfrac{4xz}{x+z} = 3, \\ \dfrac{3yz}{y+z} = 2. \end{cases}$$

10. Raskite visus realiųjų skaičių x, y ir z trejetus (x; y; z), kad kiekvienas iš jų būtų lygus kitų dviejų skaičių sumos kvadratui.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2020 m. gegužės 25 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematikos metodikos centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: http://www.mif.vu.lt/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

5. STEREOMETRIJOS UŽDAVINIAI

(2019–2021)

Teorinę medžiagą parengė ir penktąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Edmundas Mazėtis

Atlikdami šią užduotį, nagrinėsite erdvės geometrijos – stereometrijos elementus. Planimetrijoje plokštuma traktuojama nepriklausomai nuo jos padėties erdvėje, tuo tarpu stereometrijos uždaviniuose paprastai nagrinėjama ne viena, o kelios skirtingos plokštumos. Svarbu pažymėti, kad kiekvienoje erdvės plokštumoje yra teisinga plokštumos geometrija – planimetrija. Taigi stereometrijos uždaviniuose taikomi žinomi plokštumos geometrijos faktai.

Pateikiame keletą svarbiausių stereometrijos teiginių, kurie padės Jums sėkmingai atlikti šią užduotį.

1 teiginys – tai plokštumos egzistavimo aksioma. Bet kurie trys skirtingi erdvės taškai yra vienoje plokštumoje; jei tie taškai nėra vienoje tiesėje, tai per juos eina vienintelė plokštuma.

1.1 išvada. Per duotąją tiesę ir per duotąjį jai nepriklausantį tašką eina vienintelė plokštuma.

1.2 išvada. Per dvi susikertančias tieses eina vienintelė plokštuma.

1.3 išvada. Per dvi lygiagrečias tieses eina vienintelė plokštuma.

2 teiginys. Jei du tiesės a taškai yra plokštumoje $\alpha,$ tai bet kuris kitas tiesės a taškas yra plokštumoje $\alpha,$ tuomet sakoma, kad tiesė a yra plokštumoje $\alpha,$ arba kad plokštuma α eina per tiesę a.

3 teiginys. Jei tiesė a yra lygiagreti su kuria nors plokštumos α tiese b, tai tiesė a yra lygiagreti su plokštuma α.

4 teiginys. Jei dvi plokštumos α ir β turi bent vieną bendrą tašką, tai plokštumų α ir β sankirta yra tiesė.

5 teiginys. Jei plokštuma α eina per tiesę $a,$ lygiagrečią su plokštuma $\beta,$ o plokštumos α ir β susikerta, tai plokštumų α ir β sankirtos tiesė yra lygiagreti su tiese a.

6 teiginys. Jei plokštumos α ir β yra lygiagrečios, o plokštuma γ kerta plokštumą $\alpha,$ tai ji kerta ir plokštumą ir β o jų sankirtos tiesės $\alpha \cap \gamma$ ir $\beta \cap \gamma$ yra lygiagrečios.

7 teiginys. Jei dvi plokštumos α susikertančios tiesės yra lygiagrečios su dviem plokštumos β susikertančioms tiesėms, tai plokštumos α ir β yra lygiagrečios.

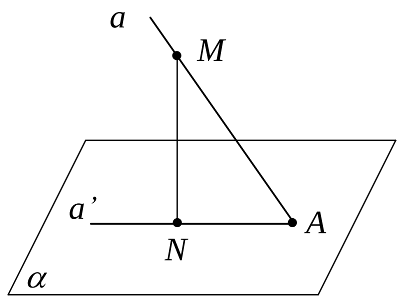
8 teiginys. Kad ir kokia bebūtų tiesė a ir jai nepriklausantis taškas $A,$ egzistuoja vienintelė tiesė, einanti per tašką a ir lygiagreti su tiese a.

8.1 išvada. Kad ir kokia bebūtų plokštuma α ir jai nepriklausantis taškas A, egzistuoja vienintelė plokštuma, einanti per tašką A ir lygiagreti su plokštuma α.

Tiesė a yra statmena plokštumai $\alpha,$ jei ji yra statmena bet kuriai tos plokštumos tiesei.

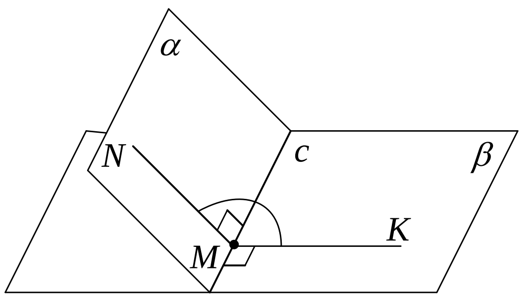
9 teiginys. Tiesė a yra statmena plokštumai $\alpha,$ jei ji yra statmena bet kurioms dviem tos plokštumos susikertančioms tiesėms.

10 teiginys. Kokia bebūtų plokštuma α ir taškas A (kuris gali būti plokštumoje $\alpha,$ o gali ir joje nebūti), egzistuoja vienintelė tiesė, einanti per tašką A ir statmena plokštumai α.



1 pav.

Sakykime, kad tiesė a kerta plokštumą α taške A (1 pav.). Iš bet kurio tiesės a taško M nuleiskime statmenį plokštumai $\alpha,$ kertantį plokštumą α taške N, kuris vadinamas taško M *ortogonaliąja projekcija* plokštumoje $\alpha.$ Visų tiesės a taškų ortogonaliosios projekcijos plokštumoje α yra tiesėje a', kuri vadinama tiesės a ortogonaliąja projekcija plokštumoje $\alpha.$ Kampas φ tarp tiesės a ir jos ortogonaliosios projekcijos plokštumoje α yra vadinamas kampu tarp tiesės a ir plokštumos α. Atstumas MN nuo taško M iki jno ortogonaliosios projekcijos plokštumoje α yra vadinamas atstumu nuo taško M iki plokštumos α.

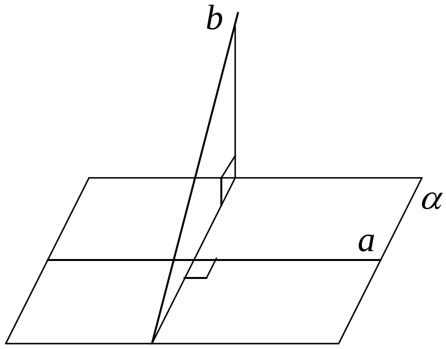


2 pav.

Sakykime, kad plokštumos α ir β yra susikertančios, tiesė c yra jų sankirtos tiesė. Pasirinkime bet kurį tiesės c tašką M ir nubrėžkime plokštumoje α spindulį $MN,$ statmeną tiesei $c,$ o plokštumoje β – spindulį MK, statmeną tiesei c (2 pav.). Kampas tarp nubrėžtųjų spindulių NMK yra vadinamas dvisienio kampo tarp plokštumų α ir β tiesiniu kampu. Akivaizdu, kad jo didumas nepriklauso nuo tiesės c taško M parinkimo ir jis vadinamas dvisienio kampo tarp plokštumų α ir β didumu. Susikirsdamos plokštumos sudaro keturis dvisienius kampus. Jei vienas jų yra statusis, tai ir visi likusieji taip pat statieji. Tuomet plokštumos α ir β yra statmenos.

11 teiginys. Jei dvi tiesės a ir b yra statmenos plokštumai $\alpha,$ tai jos yra lygiagrečios.

12 teiginys (trijų statmenų teorema). Plokštumos α tiesė a yra statmena tiesei $b,$ nesančiai plokštumoje $\alpha,$ tada ir tik tada, kai ji statmena tiesės b ortogonaliajai projekcijai plokštumoje α (3 pav.).



3 pav.

13 teiginys. Jei dvi plokštumos yra statmenos tai pačiai tiesei, tai jos yra lygiagrečios.

14 teiginys. Jei tiesė a yra statmena plokštumai $\alpha,$ tai ji statmena bet kuriai plokštumai, lygiagrečiai su plokštuma $\alpha.$

15 teiginys. Jei plokštuma α yra statmena plokštumai $\beta,$ tai ji yra statmena bet kuriai plokštumai, lygiagrečiai su plokštuma $\beta.$

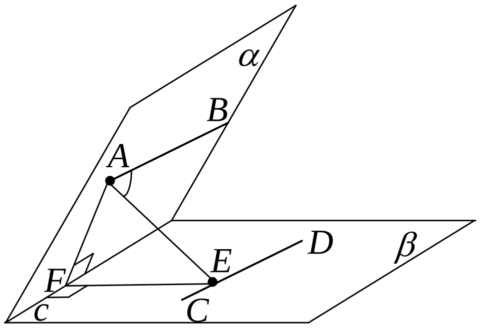
16 teiginys. Jei tiesė a yra statmena plokštumai $\alpha,$ o plokštuma β eina per tiesę $a,$ tai plokštumos α ir β yra statmenos.

Dvi erdvės tiesės, kurios nėra vienoje plokštumoje, yra vadinamos *prasilenkiančiomis tiesėmis.* Prasilenkiančios tiesės nėra lygiagrečios ir neturi bendrų taškų. Prasilenkiančių tiesių savybes apibūdina šie teiginiai:

17 teiginys. Jei tiesė a yra plokštumoje $\alpha,$ o tiesė b plokštumą α kerta taške, nepriklausančiame tiesei $a,$ tai tiesės a ir b yra prasilenkiančios.

18 teiginys. Jei a ir b – dvi prasilenkiančios tiesės, tai per tiesę a eina vienintelė plokštuma $\alpha,$ lygiagreti su tiese $b,$ o per tiesę b eina vienintelė plokštuma $\beta,$ lygiagreti su tiese $a;$ plokštumos α ir β yra lygiagrečios, o atstumas tarp jų yra lygus atstumui tarp prasilenkiančių tiesų a ir $b.$ Šis atstumas yra lygus ir atstumui nuo tiesės a iki plokštumos β (arba atstumui nuo tiesės b iki plokštumos α).

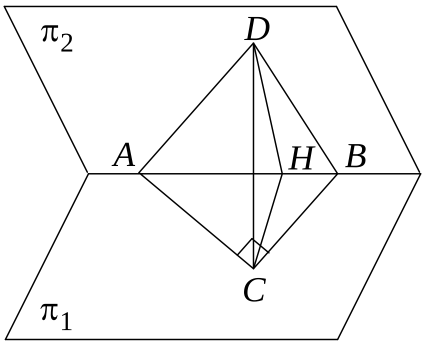
1 pavyzdys. Plokštumos α ir β sudaro 60^0 laipsnių dvisienį kampą, plokštumoje α yra tiesė $AB,$ plokštumoje β – su tiese AB lygiagreti tiesė $CD,$ taškai A ir C nuo plokštumų α ir β susikirtimo tiesės nutolę atitinkamai atstumais a ir $b.$ Rasime atstumą tarp tiesių AB ir $CD.$



4 pav.

Sprendimas. Visų pirma pastebėsime, kad tiesės AB ir CD yra lygiagrečios su plokštumų α ir β susikirtimo tiese c (4 pav.). Tikrai, jei tiesė AB kerta tiesę $c,$ tai šių tiesių sankirtos taškas yra plokštumoje β ir nepriklauso tiesei $CD,$ todėl pagal 17 teiginio rezultatą tiesės AB ir CD yra prasilenkiančios – prieštara uždavinio sąlygai. Nuleiskime iš taško A statmenį AF į tiesę $c,$ tai $AF = a.$ Iš taško F iškeliame statmenį FE tiesei $CD,$ tai $FE = b.$ Kadangi $FA \perp c,$ $FE \perp c,$ tai kampas AFE yra dvisienio kampo tarp plokštumų α ir β tiesinis kampas, taigi $\angle AFE = 60^0.$ Tiesės AE ortogonalioji projekcija plokštumoje β yra tiesė $FE.$ Kadangi tiesė AB yra statmena tiesei $FE,$ tai pagal trijų statmenų teoremą gauname, kad tiesės AE ir AB yra statmenos; analogiškai tiesės AE ir CD taip pat statmenos, taigi atkarpa AE yra tiesių AB ir CD bendras statmuo, o jos ilgis yra ieškomasis atstumas tarp šių tiesių. Jį rasime trikampiui AEF taikydami kosinusų teoremą: $AE^2 = AF^2 + FE^2 - 2AF \cdot EF \cdot \cos\angle AFE = a^2 + b^2 - ab.$ Taigi $AE = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}.$

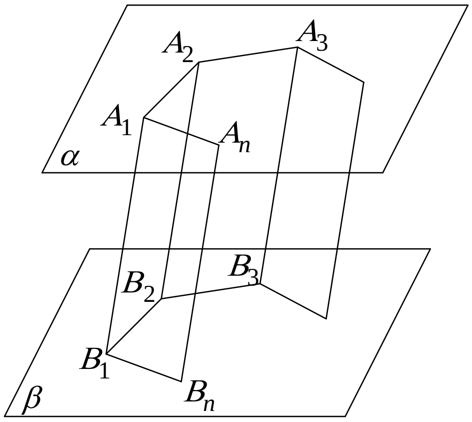
2 pavyzdys. Per stačiojo trikampio įžambinę nubrėžta plokštuma, sudaranti su trikampio statiniais kampus α ir $\beta.$ Rasime kampą, kurį ši plokštuma sudaro su trikampio plokštuma.



5 pav.

Sprendimas. Sakykime, kad trikampis $ABC,$ $\angle C = 90^0$yra plokštumoje $\pi_1,$ o per tiesę AB nubrėžta duotoji plokštuma π_2 (5 pav.). Nuleiskime iš taško C statmenį CD į plokštumą $\pi_2,$ tiesės AD ir BD yra tiesių AC ir BC ortogonaliosios projekcijos plokštumoje $\pi_2,$ todėl $\angle CAD = \alpha,$ $\angle CBD = \beta.$ Nubrėžkime trikampio ABC aukštinę $CH,$ tiesė HD yra tiesės CH ortogonalioji projekcija plokštumoje $\pi_2.$ Kadangi tiesė AB yra plokštumoje π_2 ir statmena tiesei $CH,$ tai pagal trijų statmenų teoremą ji statmena ir tiesei HD, taigi kampas CHD yra dvisienio kampo tarp plokštumų π_1 ir π_2 tiesinis kampas. Iš stačiojo trikampio CHD išplaukia, kad $\sin\angle CHD = \frac{CD}{CH}$. Pažymėkime $CD = m$, tuomet iš stačiųjų trikampių ACD ir BCD randame, kad $AC = \frac{m}{\sin\alpha}$, $BC = \frac{m}{\sin\beta}$, todėl $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{m^2}{sin^2\alpha} + \frac{m^2}{sin^2\beta}} = \frac{m}{\sin\alpha\sin\beta}\sqrt{sin^2\alpha + sin^2\beta}$. Stačiajame trikampyje ABC yra teisinga lygybė $AB \cdot CH = AC \cdot BC$, nes abi jos pusės lygios dvigubam trikampio plotui. Iš šios lygybės randame $CH = \frac{AC\cdot BC}{AB} = \frac{m}{\sqrt{sin^2\alpha + sin^2\beta}}$, taigi $\sin\angle CHD = \frac{CD}{CH} = \sqrt{sin^2\alpha + sin^2\beta}$. Todėl ieškomasis kampas tarp plokštumų π_1 ir π_2 lygus $\arcsin\sqrt{sin^2\alpha + sin^2\beta}$.

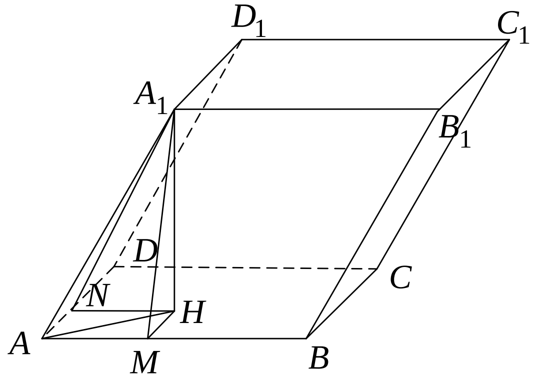
Sakykime, kad lygiagrečiose plokštumose α ir β yra du lygūs n-kampiai $A_1A_2...A_n$ ir $B_1B_2...B_n$ (6 pav.), be to, tiesės A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n yra lygiagrečios. Tuomet keturkampiai $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ yra lygiagretainiai, todėl $A_1A_2 \| B_1B_2$, $A_2A_3 \| B_2B_3$, ..., $A_nA_1 \| B_nB_1$. Briaunainis, kurį sudaro du lygūs n-kampiai $A_1A_2...A_n$ ir $B_1B_2...B_n$ ir n lygiagretainių $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$, yra vadinamas *n-kampe prizme*. Kai $n = 4$, keturkampė prizmė paprastai vadinama gretasieniu. Lygūs n-kampiai $A_1A_2...A_n$ ir $B_1B_2...B_n$ yra vadinami *prizmės pagrindais,* o minėtieji lygiagretainiai – *prizmės šoninėmis sienomis*. Atkarpos A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n yra vadinamos prizmės *šoninėmis briaunomis;* jos yra lygios ir lygiagrečios. Atkarpos, jungiančios prizmės viršūnes, kurios nėra vienoje sienoje, vadinamas *prizmės įstrižainėmis*. Statmuo, nuleistas iš bet kurio vieno pagrindo taško į kito pagrindo plokštumą, vadinamas *prizmės aukštine.* Jei prizmės pagrindai yra lygiagretainiai, turime gretasienį. Jei prizmės šoninės briaunos statmenos pagrindų plokštumoms, tai prizmė vadinama *stačiąja*: priešingu atveju prizmė yra pasviroji. Stačiosios prizmės aukštinė lygi šoninei briaunai. Stačioji prizmė vadinama *taisyklingąja*, jei jos pagrindai yra taisyklingieji daugiakampiai. Prizmės šoninio paviršiaus plotas yra jos šoninių sienų plotų suma. Jis lygus prizmės pagrindo perimetro ir prizmės šoninės sienos aukštinės sandaugai. Prizmės tūris lygus jos pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai.



6 pav.

3 pavyzdys. Gretasienio briaunų ilgiai lygūs $a, b, c,$ pirmosios jų yra statmenos, o trečioji su kitomis dviem sudaro 60^0 kampus. Rasime gretasienio tūrį.

Sprendimas. Sakykime, gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (7 pav.) briaunos $AB = a$ ir $AD = b$ yra statmenos, o briauna $AA_1 = c$ su jomis sudaro 60^0 laipsnių kampus, t. y. $\angle A_1AB = \angle A_1AD = 60^0$. Nuleiskime statmenį A_1H iš viršūnės A_1 į gretasienio pagrindą $ABCD$, o iš taško H nuleiskime statmenis pagrindo kraštinėms $HM \perp AB$, $HN \perp AD$. Kadangi gretasienio pagrindas $ABCD$ yra stačiakampis, tai keturkampis $AMHN$ irgi yra stačiakampis. Tiesė HM yra tiesės A_1M ortogonalioji projekcija pagrindo plokštumoje, todėl tos plokštumos tiesė AB, statmena tiesei HM, pagal trijų statmenų teoremą yra statmena tiesei A_1M. Iš stačiojo trikampio AA_1M gauname, kad $AM = AA_1\cos\angle A_1AB = \frac{c}{2}$.

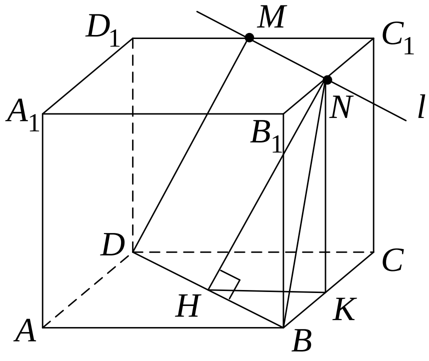


7 pav.

Analogiškai įrodome, kad tiesės A_1N ir AD taip pat statmenos, todėl $AN = \frac{c}{2} = AM$. Taigi keturkampis $AMHN$ yra kvadratas, jo įstrižainė $AH = AM\sqrt{2} = \frac{c}{\sqrt{2}}$. Iš stačiojo trikampio AA_1H randame gretasienio aukštinę $A_1H = \sqrt{A_1A^2 - AH^2} = \sqrt{c^2 - (\frac{c}{\sqrt{2}})^2} = \frac{c}{\sqrt{2}}$. Kadangi gretasienio pagrindas yra stačiakampis, jo plotas $S = ab$, tai gretasienio tūris $V = \frac{abc}{\sqrt{2}}$.

4 pavyzdys. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pagrindas yra kvadratas $ABCD$, kurio kraštinės ilgis lygus $8\sqrt{2}$, briaunos AA_1 ilgis lygus 4. Per pagrindo įstrižainę BD ir briaunos C_1D_1 vidurio tašką nubrėžta plokštuma. Rasime gautojo pjūvio plotą ir dvisienį kampą, kurį sudaro nubrėžtoji plokštuma su gretasienio pagrindo plokštuma.

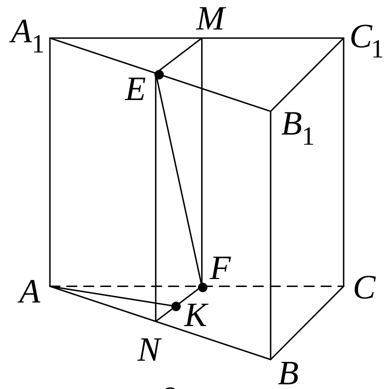
Sprendimas. Sakykime, kad taškas M yra stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunos C_1D_1 vidurio taškas (8 pav.). Kadangi gretasienio pagrindų plokštumos lygiagrečios, tai kertančioji plokštuma jas kerta lygiagrečiomis tiesėmis (6 teiginys), taigi plokštumą $A_1B_1C_1D_1$ kertančioji plokštuma kerta tiese l, einančia per tašką M ir lygiagrečia su tiese BD. Jei tiesė l kerta gretasienio briauną B_1C_1 taške N, tai trapecija $BDNM$ yra ieškomasis pjūvis. Kadangi $MN \parallel BD \parallel B_1D_1$, o taškas M yra kraštinės C_1D_1 vidurio taškas, tai atkarpa MN yra trikampio $B_1C_1D_1$ vidurinė linija, taigi $MN = \frac{1}{2}B_1D_1 = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8.$ Gretasienio sienoje BCC_1B_1 iš taško N nuleidžiame statmenį NK tiesei BC, tai taškas K yra briaunos BC vidurio taškas, todėl $BK = 4\sqrt{2}$, o iš stačiojo trikampio NBK randame, kad $BN = \sqrt{BK^2 + NK^2} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (8\sqrt{2})^2} = \sqrt{48}$. Iš stačiojo trikampio D_1DM randame, kad $MD = \sqrt{D_1D^2 + D_1M^2} = \sqrt{48} = BN$, taigi gautoji pjūvyje trapecija yra lygiašonė. Pjūvio plokštumoje iš taško N nuleidžiame statmenį $NH \perp BD$, atkarpa NH yra šios trapecijos aukštinė, $BH = \frac{1}{2}(BD - MN) = 4$, $NH = \sqrt{NB^2 - BH^2} = 4\sqrt{2}$, todėl ieškomasis pjūvio plotas $S = \frac{BD+MN}{2} \cdot NH = 48\sqrt{2}$. Kampą tarp kertančiosios plokštumos ir gretasienio pagrindo plokštumos rasime iš stačiojo trikampio NHK. Kadangi tiesė HK yra tiesės HN ortogonalioji projekcija gretasienio pagrindo plokštumoje ir $HN \perp BD$, tai pagal trijų statmenų teoremą $KH \perp BD$, taigi kampas NHK yra ieškomojo dvisienio kampo tiesinis kampas. Kadangi $\sin \angle NHK = \frac{NK}{NH} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, todėl ieškomasis kampas tarp plokštumų lygus 45^0.



8 pav.

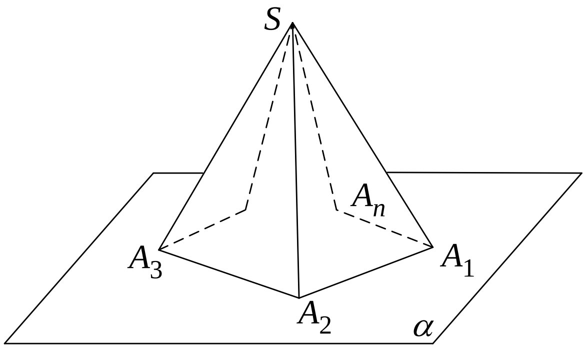
5 pavyzdys. Taisyklingosios trikampės prizmės $ABCA_1B_1C_1$ pagrindo kraštinės ilgis lygus $4\sqrt{3}$, taškai E ir F yra atitinkamai briaunų A_1B_1 ir AC vidurio taškai (9 pav.). Rasime atstumą tarp tiesių AA_1 ir EF.

Sprendimas. Kadangi tiesė AA_1 yra plokštumoje ABB_1A_1, o tiesė EF kerta šią plokštumą taške E, nepriklausančiame tiesei AA_1, tai tiesės AA_1 ir EF yra prasilenkiančios (17 teiginys). Norint rasti atstumą tarp prasilenkiančių tiesių, galima ieškoti plokštumos, einančios per vieną iš tiesių ir lygiagrečios su kita tiese (18 teiginys). Nubrėžkime trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ vidurines linijas EM ir FN, lygiagrečias atitinkamai su briaunomis B_1C_1 ir BC. Šios tiesės lygiagrečios, todėl per jas eina plokštuma, kuri lygiagreti su tiese AA_1 (nes ši plokštuma lygiagreti su prizmės siena BCC_1B_1, kuri lygiagreti su tiese AA_1). Taigi atstumas tarp tiesių AA_1 ir EF yra lygus atstumui nuo bet kurio tiesės AA_1 taško iki tos plokštumos. Nubrėžkime statmenį $AK \perp NF$, šis statmuo yra statmenas ir plokštumai, einančiai per taškus M, E, F, N, o jo ilgis lygus lygiakraščio trikampio ABC aukštinės pusei, t. y. ieškomasis atstumas tarp tiesių AA_1 ir EF lygus $AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 3$.



9 pav.

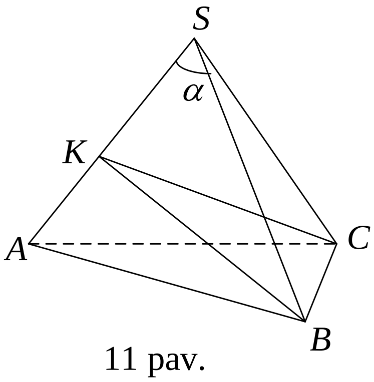
Nagrinėjame n-kampį $A_1A_2...A_n$, kurio visos viršūnės yra vienoje plokštumoje, ir tašką S, nepriklausantį tai plokštumai. Tašką S sujungę atkarpomis su taškais A_1, A_2, ..., A_n gauname n trikampių A_1A_2S, A_2A_3S, ..., A_nA_1S (10 pav.). Paviršius, sudarytas iš n-kampio $A_1A_2...A_n$ ir minėtų n trikampių, vadinamas *n-kampe piramide*. Daugiakampis $A_1A_2...A_n$ vadinamas *piramidės pagrindu*, taškas S – *piramidės viršūne*, trikampiai A_1A_2S, A_2A_3S, ..., A_nA_1S – *piramidės šoninėmis sienomis*, atkarpos A_1S, A_2S, ..., A_nS – *piramidės šoninėmis briaunomis*. Statmuo iš piramidės viršūnės S į pagrindo plokštumą, vadinamas *piramidės aukštine*.



10 pav.

Piramidė yra vadinama *taisyklingąja*, jei jos pagrindas – taisyklingasis daugiakampis, o atkarpa, jungianti to daugiakampio centrą su piramidės viršūne, yra piramidės aukštinė. Taisyklingosios piramidės visos šoninės sienos yra lygūs lygiašoniai trikampiai, jų aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės *S*, yra lygios, jos vadinamos piramidės *apotemomis*. Piramidės šoninio paviršiaus plotas lygus visų jos šoninių sienų plotų sumai. Taisyklingosios piramidės šoninio paviršiaus plotas lygus jos pagrindo perimetro ir apotemos sandaugos pusei. Piramidės tūris lygus piramidės pagrindo ploto ir aukštinės sandaugos trečdaliui.

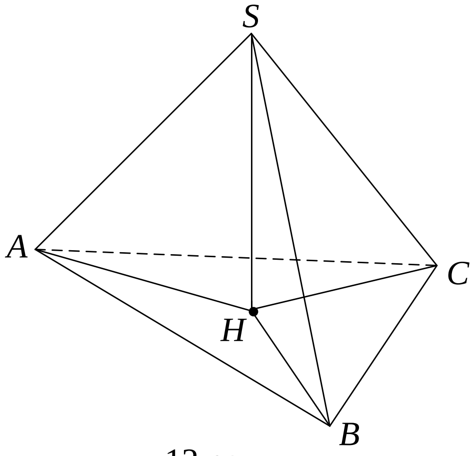
6 pavyzdys. Taisyklingosios trikampės piramidės $SABC$ plokščiasis kampas prie viršūnės ASB lygus $\alpha < 120^0$. Rasime šios piramidės dvisienį kampą tarp šoninių sienų.



11 pav.

Sprendimas. Iš apibrėžimo išplaukia, kad taisyklingosios piramidės $SABC$ pagrindas ABC yra lygiakraštis trikampis, o šoninės sien0s ASB, BSC ir ASC yra lygūs lygiašoniai trikampiai. Nubrėžkime trikampio ASB aukštinę BK (11 pav.), Trikampiai ABK ir ACK yra lygūs (kraštinė AK bendra, $AB = AC$, $\angle BAK = \angle CAK = \frac{180^0-\alpha}{2}$), todėl ir kampas AKC yra statusis. Taigi kampas BKC yra dvisienio kampo tarp plokštumų ASB ir ASC tiesinis kampas. Žymėkime $AB = AC = BC = a$, iš stačiojo trikampio ABK randame sienų aukštines $BK = CK = AB\sin\angle BAC = a\sin\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = a\cos\frac{\alpha}{2}$. Trikampiui BKC taikydami kosinusų teoremą gauname, kad $\cos\angle BKC = \frac{BK^2+CK^2-BC^2}{2\cdot BK\cdot CK} = \frac{2a^2cos^2\frac{\alpha}{2}-a^2}{2a^2cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2cos^2\frac{\alpha}{2}-(cos^2\frac{\alpha}{2}+sin^2\frac{\alpha}{2})}{2cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\alpha}{2cos^2\frac{\alpha}{2}}$. Taigi $\angle BKC = \arccos\frac{\cos\alpha}{2cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

7 pavyzdys. Trikampės piramidės $ABCS$ pagrindas yra trikampis ABC, kurio $\angle A = 120^0$, $BC = a$, o visų piramidės šoninių briaunų ilgiai lygūs b. Rasime piramidės aukštinės ilgį. Nustatysime, ar su visomis a ir b reikšmėmis uždavinys turi prasmę.



12 pav.

Sprendimas. Iš piramidės viršūnės S nuleiskime statmenį SH į pagrindo plokštumą (12 pav.). Statieji trikampiai SAH, SBH ir SCH yra lygūs, nes jų statinis SH yra bendras, o įžambinės lygios, nes pagal sąlygą $SA = SB = SC = b$. Taigi $AH = BH = CH$, todėl taškas H yra apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras, o atkarpos $AH = BH = CH = R$ – to apskritimo spinduliai. Iš sinusų teoremos turime, kad $\frac{a}{\sin\angle A} = 2R$, todėl $R = AH = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Tuomet piramidės aukštinė $SH = \sqrt{AS^2 - AH^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$. Iš čia matome, kad briaunų ilgiams a ir b turi būti teisinga nelygybė $b > \frac{a}{\sqrt{3}}$.

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Plokštumos α ir β sudaro 45^0 laipsnių dvisienį kampą, jų sankirtos tiesėje c pažymėtas taškas C, iš jo plokštumose α ir β iškelti statmenys tiesei c, juose atidėtos atkarpos CA plokštumoje α ir CB plokštumoje β taip, kad $CA = 2CB$. Per taškus A ir B nubrėžtos dvi lygiagrečios tiesės – tiesė a plokštumoje α ir tiesė b plokštumoje β . Atstumas tarp tiesių a ir b lygus d. Raskite atstumus nuo tiesės c iki tiesių a ir b.

2. Iš atkarpos $AB = 6$ galų nubrėžti du spinduliai, kurie yra statmeni tarpusavyje ir statmeni atkarpai AB. Tuose spinduliuose atidėtos atkarpos $AC = 6$, $BD = 3$. Raskite atstumą nuo atkarpos AB vidurio taško iki tiesės CD.

3. Dvisienio kampo tarp plokštumų π_1 ir π_2 didumas lygus β, iš jų sankirtos tiesės c taško A nubrėžta tiesė, esanti plokštumoje π_1 ir su tiese c sudaranti kampą α. Kokį kampą ta tiesė sudaro su plokštuma π_2?

4. Plokštumos α ir β sudaro 120^0 kampą, jų sankirtos tiesėje yra atkarpa $AB = 5$. Iš taško A plokštumoje α iškeltas statmuo tiesei AB ir jame atidėta atkarpa $AC = 8$, iš taško B plokštumoje β iškeltas statmuo tiesei AB ir jame atidėta atkarpa $BD = 6$. Raskite atkarpos CD ilgį.

5. Stačiojo gretasienio pagrindas yra lygiagretainis, kurio kraštinių ilgiai 3 ir 4, o kampas tarp jų lygus 120^0. Trumpesnioji gretasienio įstrižainė yra lygi ilgesniajai pagrindo įstrižainei. Raskite gretasienio tūrį.

6. Per stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ viršūnes A, C ir D_1 nubrėžta plokštuma, kuri sudaro su pagrindo plokštuma 60^0 dvisienį kampą. Gretasienio pagrindo kraštinės lygios 3 ir 4. Raskite gretasienio tūrį.

7. Taisyklingosios trikampės prizmės $ABCA_1B_1C_1$ pagrindo kraštinės ilgis lygus $\frac{8\sqrt{3}}{3}$, o šoninės briaunos ilgis lygus $2\sqrt{3}$. Per prizmės pagrindo kraštinę AC ir briaunos B_1C_1 vidurio tašką nubrėžta plokštuma. Raskite gautojo pjūvio plotą ir dvisienį kampą, kurį ši plokštuma sudaro su prizmės pagrindo plokštuma.

8. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pagrindas yra kvadratas $ABCD$, kurio kraštinės ilgis lygus 4. Raskite atstumą tarp tiesių AA_1 ir B_1D.

9. Taisyklingosios keturkampės piramidės visos šoninės sienos su pagrindo plokštuma sudaro kampus α. Raskite dvisienį kampą tarp gretimų piramidės šoninių sienų.

10. Trikampės piramidės visos šoninės briaunos lygios a, vienas plokščiasis kampas prie viršūnės yra statusis, kiti du lygūs po 60^0. Raskite piramidės tūrį.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2020 m. lapkričio 5 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematikos ir informatikos metodikos katedra, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: http://www.mif.vu.lt/ljmm/

<u>LIETUVOS JAUN ŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA</u>

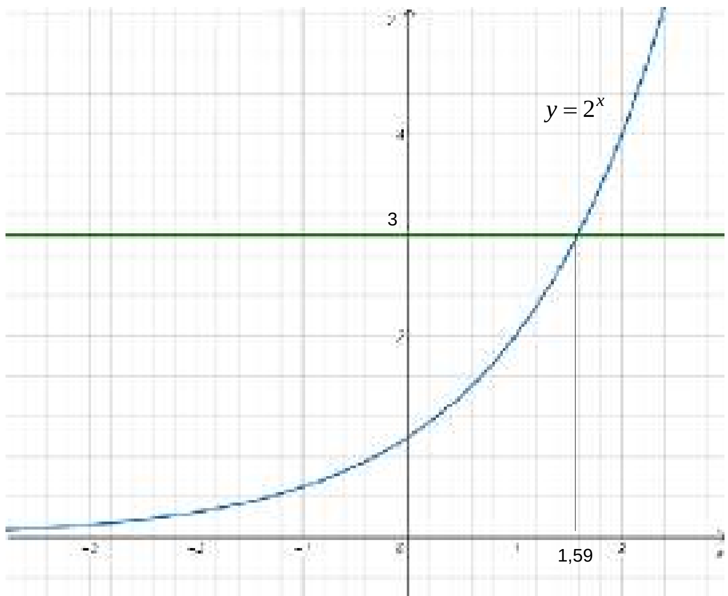
6. LOGARITMAI

(2019–2021)

Teorinę medžiagą parengė ir šeštąją užduotį sudarė prof. dr. Eugenijus Stankus

Logaritmą (gr. logos-santykis + arithmos-skaičius) kaip matematinę sąvoką, palengvinančią matematinius skaičiavimus, 1614 m. įvedė škotų matematikas, fizikas ir astronomas Dž. Neperas (John Napier,1550-1617), žinomas ir slapyvardžiu Marvellous Merchiston. Šiuolaikinį logaritmų žymenį XVIII amžiuje pasiūlė šveicarų matematikas bei fizikas L. Oileris (Leonhard Euler, 1707-1783).

Prisiminkime, kad sprendžiant rodiklinę lygtį $a^x = b\ (a > 0, a \neq 1, b > 0)$ skaičių b tenka užrašyti laipsniu pagrindu a, t. y. $b = a^c$. Tuomet iš laipsnių savybių: $a^x = a^c \Rightarrow x = c$. Tačiau tokiu būdu galime rasti tik kai kurių rodiklinių lygčių $a^x = b$ sprendinius, nes skaičius b išreiškiamas lygybe $b = a^c$ nenaudojant logaritmo sąvokos tik kai kuriais atvejais. Pavyzdžiui, nesunku išspręsti lygtį $5^x = \frac{125}{\sqrt{5}}$, nes $\frac{125}{\sqrt{5}} = 5^{3-\frac{1}{2}} = 5^{\frac{5}{2}}$. Taigi $5^x = \frac{125}{\sqrt{5}} \Rightarrow 5^x = 5^{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$. Tačiau šis sprendimo būdas neveikia, pavyzdžiui, lygčiai $2^x = 3$, nors iš rodiklinės funkcijos $y = 2^x$ grafiko (1 pav.) matome, kad ši lygtis sprendinį turi. Jis apytikriai lygus 1,59. Nagrinėjamos lygties sprendiniui užrašyti ir pasitarnauja logaritmo sąvoka.



1 pav.

***Apibrėžimas**. Tegu $a > 0, b > 0$ ir $a \neq 1$. **Skaičiaus b logaritmu pagrindu a** (žymime $\log_a b$) vadiname laipsnio rodiklį, kuriuo pakėlus skaičių a, gaunamas skaičius b.*

Akivaizdu, kad $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$.

Pavyzdžiui, kadangi $2^3 = 8$, tai $3 = \log_2 8$; $3^{-2} = \frac{1}{9}$, todėl $\log_3 \frac{1}{9} = -2$;

$2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3 \approx 1{,}59$.

Kai logaritmo pagrindas yra 10, vietoje $\log_{10} b$ rašoma $\lg b$. Šis logaritmas vadinamas **dešimtainiu logaritmu** ir dažnai taikomas inžinerijoje.

Logaritmas pagrindu e (≈2,718) yra vadinamas **natūriniu logaritmu** ir yra plačiai naudojamas matematikoje.

Dvejetainis logaritmas – logaritmas pagrindu 2 naudojamas kompiuterių moksle.

Atkreipkime dėmesį, kad logaritmo apibrėžimas gali būti užrašytas matematine formule

$$a^{\log_a b} = b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0),$$

kuri vadinama **pagrindine logaritmų tapatybe** (PLT).

Iš logaritmo apibrėžimo ir laipsnių savybių išplaukia logaritmų savybės. Kai kurias čia įrodysime.

1. *Jeigu dviejų skaičių logaritmai tuo pačiu pagrindu lygūs, tai ir šie skaičiai yra lygūs.*

Įrodymas. Tegu $\log_a b_1 = \log_a b_2$. Pasinaudokime PLT ir atitinkama laipsnių savybe (jei laipsniai tuo pačiu pagrindu lygūs, tai ir jų rodikliai yra lygūs): $b_1 = a^{\log_a b_1} = a^{\log_a b_2} = b_2$.

2. *Teigiamų dauginamųjų sandaugos logaritmas yra lygus dauginamųjų logaritmų sumai*:

$$\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2 . \qquad (1)$$

Įrodymas. Kadangi $b_1 > 0, b_2 > 0$, tai vėl iš PLT ir atitinkamos laipsnių savybės gauname: $b_1 = a^{\log_a b_1}$, $b_2 = a^{\log_a b_2}$, $b_1 \cdot b_2 = a^{\log_a b_1} \cdot a^{\log_a b_2} = a^{\log_a b_1 + \log_a b_2}$. Kita vertus $b_1 \cdot b_2 = \log_a a^{(b_1 \cdot b_2)}$, todėl (1) lygybė galioja.

Pastaba. Reikalavimas $b_1 > 0, b_2 > 0$ (1) lygybėje yra esminis. Jei $b_1 < 0, b_2 < 0$, tai būtų neapibrėžti (1) lygybės dešiniosios pusės dėmenys. Tačiau šiuo atveju galioja lygybė $\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a |b_1| + \log_a |b_2|$.

Analogiškai samprotaudami gausime ir trečiąją savybę.

3. *Teigiamų skaičių santykio logaritmas yra lygus skaitiklio ir vardiklio logaritmų skirtumui*:

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2 . \qquad (2)$$

Šią formulę galime apibendrinti ir atvejui, kai $b_1 < 0, b_2 < 0$. Tuomet $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a |b_1| - \log_a |b_2|$.

4. *Teigiamo skaičiaus laipsnio logaritmas yra lygus laipsnio rodiklio ir laipsnio pagrindo logaritmo sandaugai* :

$$\log_a b^k = k \cdot \log_a b \qquad (3)$$

Įrodymas vėl išplaukia iš PLT ir laipsnių savybių: $b = a^{\log_a b}$ $(a > 0, a \neq 1, b > 0) \Rightarrow b^k = a^{k \cdot \log_a b}$. Kadangi taip pat $b^k = a^{\log_a b^k}$, tai (3) lygybė teisinga.

Operuojant logaritmais kartais naudinga logaritmą kuriuo nors pagrindu pakeisti logaritmu kitu pagrindu (trumpiau tai vadinama *perėjimu prie kito pagrindo*).

5. *Perėjimo prie kito pagrindo formulė*:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}; \; a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1 . \qquad (4)$$

Įrodymas. Kadangi $b = a^{\log_a b}$, tai ir abiejų lygybės pusių logaritmai pagrindu c lygūs (toliau šį veiksmą vadinsime *logaritmavimu*): $\log_c b = \log_c (a^{\log_a b})$. Pasinaudoję (3) savybe turėsime: $\log_c b = \log_a b \cdot \log_c a$. Išreiškę $\log_a b$ gauname (4) lygybę.

Taikant šias savybes galima atlikti sudėtingesnius skaičiavimus bei spręsti vadinamąsias *logaritmines lygtis* – kai lygties nežinomasis yra logaritmo pagrindo arba logaritmo reiškinyje. Panagrinėsime pavyzdžius.

1 *pavyzdys*. Apskaičiuokime: $\log_{a^k} a^l = \frac{\log_a a^l}{\log_a a^k} = \frac{l}{k}$.

2 *pavyzdys*. Su kokiu logaritmo pagrindu x teisinga lygybė $\log_x b = a \; (a > 0)$? Kadangi $x^a = b$, tai $x = b^{\frac{1}{a}}$.

3 *pavyzdys*. Apskaičiuokime $\log_{15} 25$, kai $\log_{15} 3 = l$.

Sprendimas. $\log_{15} 125 = \log_{15} 5^3 = 3\log_{15} 5 = 3\log_{15} \frac{15}{3} = 3(\log_{15} 15 - \log_{15} 3) = 3(1 - l)$.

4 *pavyzdys*. Įrodykime, kad dviejų pasirinktųjų skaičių u ir v logaritmų santykis yra toks pat su bet kokiu pagrindu, t. y.

$$\frac{\log_a u}{\log_a v} = \frac{\log_b u}{\log_b v} \; (a > 0, a \neq 1, b > 0, \; b \neq 1, u > 0, v > 0, v \neq 1) . \qquad (5)$$

Įrodymas. Pagal (4) formulę $\log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a}$ ir $\log_a v = \frac{\log_b v}{\log_b a}$. Apskaičiavę santykį $\frac{\log_a u}{\log_a v}$ gauname (5) lygybę.

5 *pavyzdys*. Apskaičiuokime $\log_{a \cdot b \cdot c} u$, kai žinomi $\log_a u = l, \log_b u = m$ ir $\log_c u = n$.

Sprendimas.

$$\log_{a \cdot b \cdot c} u = \frac{\log_u u}{\log_u (a \cdot b \cdot c)} = \frac{1}{\log_u a + \log_u b + \log_u c} = \frac{1}{\frac{1}{\log_a u} + \frac{1}{\log_b u} + \frac{1}{\log_c u}} = \frac{1}{\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}} .$$

6 *pavyzdys*. Įrodysime teiginį: jei teigiami nelygūs 1 skaičiai a, b ir c yra geometrinės progresijos nariai, tuomet su bet kuriuo teigiamu skaičiumi $u \neq 1$ galioja lygybė $\frac{\log_a u}{\log_c u} = \frac{\log_a u - \log_b u}{\log_b u - \log_c u}$.

Įrodymas. Kadangi a, b ir c yra geometrinės progresijos nariai, tai $b=\sqrt{ac}$. Tuomet

$$\log_b u=\frac{1}{\log_u b}=\frac{1}{\log_u \sqrt{ac}}=\frac{2}{\log_u a+\log_u c}=\frac{2}{\frac{1}{\log_a u}+\frac{1}{\log_c u}}=\frac{2\log_a u\cdot\log_c u}{\log_a u+\log_c u}\Rightarrow$$

$$\frac{\log_a u-\log_b u}{\log_b u-\log_c u}=\frac{\log_a u-\frac{2\log_a u\cdot\log_c u}{\log_a u+\log_c u}}{\frac{2\log_a u\cdot\log_c u}{\log_a u+\log_c u}-\log_c u}=\frac{\log_a u-\frac{2\log_a u\cdot\log_c u}{\log_a u+\log_c u}}{\frac{2\log_a u\cdot\log_c u}{\log_a u+\log_c u}-\log_c u}=\frac{\log_a u}{\log_c u}.$$ Teiginys įrodytas.

Išsamiau apsistodami ties logaritminėmis lygtimis panagrinėsime kai kurių iš jų sprendimus. Logaritminių lygčių sprendimas dažniausiai grindžiamas kūrybišku logaritmų savybių taikymu.

7 *pavyzdys*. Išspręskime lygtį $\log_3(5+4\log_3(x-1))=2$.

Sprendimas. Pagal logaritmo apibrėžimą $5+4\log_3(x-1)=3^2$. Toliau: $4\log_3(x-1)=4\Rightarrow$ $\Rightarrow\log_3(x-1)=1\Rightarrow x-1=3\Rightarrow x=4$.

Pastaba. Kadangi nenustatėme lygties apibrėžimo srities, nusakomos „nemalonia“ nelygybių sistema $\begin{cases}5+4\log_3(x-1)>0,\\ x-1>0\end{cases}$, tai gautąją reikšmę privalu patikrinti. Įrašę $x=4$ į lygtį, gauname teisingą lygybę $2=2$. Taigi $x=4$ yra lygties sprendinys.

Ats.: 4.

8 *pavyzdys*. Išspręskime lygtį $\log_2(3-x)+\log_2(1-x)=3$.

Sprendimas. Dabar pirmiau nustatykime lygties apibrėžimo sritį. Ji nusakoma nelygybių sistema: $\begin{cases}3-x>0,\\ 1-x>0\end{cases}\Rightarrow x<1$. Sprendžiame lygtį: $\log_2(3-x)+\log_2(1-x)=3\Rightarrow\log_2((3-x)(1-x))=3\Rightarrow$

$(3-x)\cdot(1-x)=8\Rightarrow x^2-4x-5=0\Rightarrow x_1=5,\ x_2=-1$. Tik $x=-1$ yra apibrėžimo srities taškas.

Ats. -1.

Atkreipkime dėmesį, kad lygties apibrėžimo srities nustatymas – esminis sprendimo etapas. Kartais ši sritis yra tuščia aibė, taigi iš karto darome išvadą – lygtis sprendinių neturi.

9 *pavyzdys*. Išspręskime lygtį $\log_3(2-x)-\log_2(x-4)=5$.

Sprendimas. Lygties apibrėžimo sritis, nusakoma nelygybių sistema $\begin{cases}2-x>0,\\ x-4>0\end{cases}\Rightarrow\varnothing$, yra tuščia aibė. Taigi ši lygtis sprendinių neturi.

10 *pavyzdys*. Išspręskime lygtį $(x+1)^{\log_3(x+1)}=9(x+1)$.

Sprendimas. Čia $x+1>0\Rightarrow x>-1$. Jei reiškiniai lygūs, tai ir jų logaritmai lygūs (šis veiksmas vadinamas *logaritmavimu*). Logaritmuojame abi lygties puses: $\log_3((x+1)^{\log_3(x+1)})=\log_3(9(x+1))\Rightarrow$ $\log_3^2(x+1)=2+\log_3(x+1)\Rightarrow\log_3^2(x+1)-\log_3(x+1)-2=0$. Gavome kvadratinę lygtį $\log_3(x+1)$ atžvilgiu, kurios sprendimą patogiau užrašyti pažymėjus $t=\log_3(x+1)$ (šis veiksmas vadinamas *kintamojo keitimu*). Tuomet $t^2-t-2=0\Rightarrow t_1=2,\ t_2=-1\Rightarrow\log_3(x+1)=2,\log_3(x+1)=-1\Rightarrow x_1=8,\ x_2=-\frac{2}{3}$. Abi reikšmės priklauso lygties apibrėžimo sričiai – gavome du lygties sprendinius.

Ats. 8, $-\frac{2}{3}$.

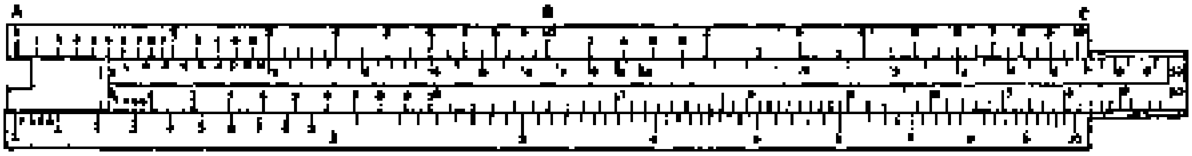
11 *pavyzdys*. Išspręskime lygtį $\lg^2 x-\lg x^3+2=0$. Primename, kad $\lg^2 x=(\lg x)^2$, $\lg x^3=\lg(x^3)$.

Sprendimas. Kintamojo keitimu $t=\lg x, x>0$, gauname lygtį: $t^2-3t+2=0\Rightarrow t_1=1,\ t_2=2$. Iš čia $\lg x=1\Rightarrow x=10;\ \lg x=2\Rightarrow x=100$.

Ats. 10, 100.

Keli logaritmų taikymo praktikoje pavyzdžiai.

Logaritminė liniuotė buvo populiari skaičiavimo priemonė iki atsirandant skaičiavimo mašinoms ir kompiuteriams (žr.2 pav.).



2 pav.

Tai mechaninė skaičiuoklė, kurią sudaro logaritminiu principu sukalibruotos juostos. Paprastai išorinės juostos yra nejudamos, o skaičiavimui naudojama judrioji (slankioji) juosta yra viduryje. Nors ir vadinama liniuote, logaritmine liniuote nematuojamas ilgis, ar bent jau matuoti ilgį nėra jos pagrindinė paskirtis.

Liniuotę apie 1614-1620 m. sukūrė anglų dvasininkas ir matematikas E. Giunteris (Edmund Gunter, 1581-1626) pagal Dž. Nepero sudarytas logaritmines lenteles. Jo liniuotėje logaritminės atkarpos buvo sudedamos skriestuvu, o 1630 m. skriestuvas pakeistas slankikliu. E. Giunteris daug prisidėjo prie topografijos, matematikos ir astronomijos vystymosi.

Logaritminė skalė. Naudojant logaritminę skalę patogu kompaktiškai vaizduoti skaitmeninius duomenis, kai jų reikšmės užima labai platų intervalą – didžiausios iš jų yra šimtus ar net tūkstančius kartų didesnės negu mažiausios. Tokia skalė yra netiesinė.

Įprastinėje tiesinėje skalėje žymės išdėstytos tolygiai visoje skaičių tiesėje, t. y. atstumas tarp dviejų gretimų žymių visoje skalėje yra vienodas. Pavyzdžiui, atstumas tarp žymių 1 ir 2 yra toks pats kaip ir tarp žymių 100 ir 101, ar 2020 ir 2021 ir t. t. Braižant įvairių funkcijų grafikus *OX* ir *OY* ašyse dažniausiai vartojamos tiesinės skalės.

Tuo tarpu logaritminėje skalėje minėto tolygumo nėra. Konstruojant dešimtainę logaritminę skalę pasirenkama bazinė atkarpa (laikykime ją vienetine), su kuria nuo skaičiaus 1 sužymimos žymės 10, 100, 1000, 10000 ir t. t., t. y. dešimties laipsniai. Tuomet tokioje skalėje kiekvienam skaičiui *x* priklausomai nuo jo skaitmenų skaičiaus priskiriamas taškas $\{\lg x\}$ - trupmeninė $\lg x$ dalis (ji vadinama *mantise*). Žr. 3 paveikslą, kuriame pavaizduota dešimtainės logaritminės skalės atkarpa intervale [0,1; 100].). Pavyzdžiui, vienaženkliams skaičiams priskiriamas taškas $\lg x$ atkarpoje [1; 10], dviženkliams skaičiams atkarpoje [10; 100) priskiriamas taškas $\lg x - 1$, triženkliams skaičiams atkarpoje [100; 1000) taškas $\lg x - 2$ ir pan.

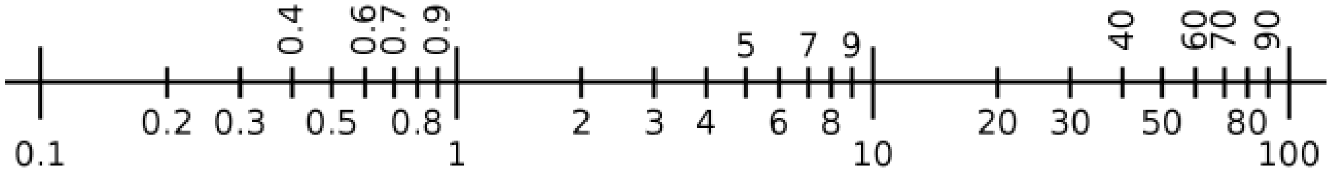
Kai $0{,}1 \le x < 1$, gauname taškus į kairę nuo taško 1.

Pateikiame lentelę, kurioje surašytos apytikslės logaritmų mantisių reikšmės, kai $x = 10, 20, 30, ..., 90$. Pagal apskaičiuotas mantises atidėtos atitinkamos žymės intervale [10, 90] (žr. 3 pav.).

Akivaizdu, kad šioje skalėje tolygumo nėra. Pavyzdžiui, atstumai, tarp žymių 10 ir 20 bei 60 ir 70 nėra vienodi, nors skirtumas tarp šių porų skaičių yra tas pats 10.

Analogiškai galėtume sudaryti logaritminę skalę ir kitu logaritmo pagrindu.

x	{lg*x*}
10	0
20	0,30
30	0,48
40	0,60
50	0,70
60	0,78
70	0,85
80	0,90
90	0,95



3 pav.

Richterio skalė. Žemės drebėjimui apibūdinti yra naudojami du parametrai – stiprumas arba magnitudė (angl., magnitude - dažnai žymima trumpiniu M) ir intensyvumas (angl., intensity - dažnai žymima trumpiniu I).

Metodą žemės drebėjimų stiprumui - magnitudei matuoti 1931 m pasiūlė K. Wadati (Kyioo Wadati – japonų seismologas, 1902-1995). Amerikiečių seismologas ir fizikas Ch. Richter (Charles Francis Richter, 1900-1985) bendradarbiaudamas su Gutenbergu (Beno Gutenberg – vokiečių-amerikiečių seismologas, 1889-1960) 1935 m. šį metodą patobulino įvesdamas taip vadinamą Richterio skalę ir pirmą kartą ją panaudojo žemės drebėjimo stiprumui apibūdinti. Jiems priklauso formulė, siejanti seisminių bangų energiją su žemės drebėjimo magnitude: $\lg E(s) = 11{,}8 + 1{,}5M$; čia *E(s)* - seisminių bangų energija, išreikšta ergais (1 ergas = 10^{-7} džaulio).

Richterio magnitudė yra lygi Wood-Anderson seismografu užfiksuotos seismogramos maksimalios amplitudės dešimtainiam logaritmui, kai atstumas nuo seisminio įvykio židinio iki seismografo yra 100 km. Wood-Anderson seismografas, sukurtas 1920 m., buvo viena iš pirmųjų praktinių seisminių bangų registravimo priemonių. (Harry Oscar Wood - amerikiečių seismologas, 1879-1958; John August Anderson – amerikiečių astronomas, 1876-1959). Jeigu atstumas iki židinio yra kitoks, įvedama atitinkama pataisa.

Šiuo metu plačiau naudojamos septynios skirtingai apibrėžiamos magnitudės skalės (pvz. lokalioji, tūrinių bangų, paviršinių bangų), tačiau apytiksliai jos visos atitinka pačią pirmąją Richter vardu pavadintą skalę. Kadangi ši skalė yra logaritminė, žemės drebėjimų, kurių magnitudės skiriasi vienu balu, išsilaisvinusios energijos kiekis skiriasi apie 30 kartų. Pavyzdžiui, 4 magnitudžių drebėjimo energija yra 32 kartus didesnė už 3 magnitudžių drebėjimą, o 7 magnitudžių drebėjimas yra apie 900 kartų stipresnis nei 5 magnitudžių drebėjimas! Neteisinga manyti, kad magnitudės skalė prasideda 1 ir baigiasi 9 ar 10. Ji nėra apribota. Tačiau, dėl žemės dydžio ir sandaros, vis dėlto negali būti viršijama tam tikra magnitudė. Žiniasklaidos pranešimuose taip pat dažniausiai naudojami Richterio skalės balai.

Garso intensyvumo matavimas. Garso intensyvumo lygis matuojamas belais (žymima B) pagerbiant škotų mokslininką, telefono ryšio išradėją A. G. Belą (Alexander Graham Bell, 1847-1922). Praktikoje dažniau vartojamas dešimt kartų mažesnis vienetas – decibelas (žymima dB).

Decibelų skalė, kaip ir Richterio, yra logaritminė. Todėl, pavyzdžiui, garso lygiui padidėjus trimis decibelais, triukšmo intensyvumas padvigubėja, įprasto pokalbio metu triukšmo lygis būna maždaug 65 dB, o šaukiant paprastai siekia apie 80 dB. Skirtumas yra tik 15 dB, nors garsas yra 30 kartų intensyvesnis.

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Apskaičiuokite logaritminio reiškinio $\dfrac{1}{\log_5 3} + \dfrac{1}{\log_{125} 3} - \log_9 625 - \log_3 225$ reikšmę.

2. Apskaičiuokite $\lg \sqrt[3]{25}$, kai $\lg 64 = m$.

3. Įrodykite teiginį: jeigu $(ac)^{\log_a b} = c^2$, tai skaičiai $\log_a u, \log_b u$ ir $\log_c u$ su bet kuriuo teigiamu u yra aritmetinės progresijos nariai $(a > 0, a \neq 1, b > 0, \ b \neq 1, c > 0, c \neq 1)$.

4. Išspręskite lygtį $\log_{0,5}^2 x - \log_{0,5} x^2 = \log_{0,5}^2 3 - 1$.

5. Išspręskite lygtį $\dfrac{2\lg x}{\lg(5x-4)} = 1$.

6. Išspręskite lygtį $\lg\sqrt{1+x} + 3\lg\sqrt{1-x} = \lg\sqrt{1-x^2}$.

7. Išspręskite lygtį $x^{\log_{\sqrt{x}}(x-2)} = 9$.

8. Išspręskite lygtį $\log_{3x}\dfrac{3}{x} + \log_3^2 x = 1$.

9. Išspręskite lygtį $\log_5 x \cdot \log_{16} 25 = 1$.

10. Sudarykite dešimtainės logaritminės skalės intervalo [100; 950] eskizą atidėję šioje skalėje skaičius $x = 100, 150, 250, 350, ..., 950$ atitinkančias žymes.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2020 m. gruodžio 20 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematikos metodikos centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mokyklos interneto svetainės adresas: http://www.mif.vu.lt/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA

L I E T U V O S   J A U N Ų J Ų   M A T E M A T I K Ų   M O K Y K L A

7 tema. KOMBINATORIKA IR TIKIMYBĖS

(2019-2021)

Teorinę medžiagą parengė bei septintąją užduotį sudarė prof. dr. Eugenijus Stankus

Kombinatorika yra matematikos sritis, pirmiausia nagrinėjanti baigtinių aibių elementų junginių, tenkinančių tam tikras sąlygas, sudarymo principus ir tų junginių skaičiaus radimo metodus. Ji yra glaudžiai susijusi su daugeliu kitų matematikos sričių tokių kaip logika, fizika, biologija, informatika ir, žinoma, tikimybių teorija. Viena iš seniausių kombinatorikos dalių yra grafų teorija, kuri taip pat turi daugybę natūralių ryšių su kitomis sritimis. Šioje užduotyje panagrinėsime tik kombinatorikos pradmenis bei jų taikymą skaičiuojant nesudėtingų įvykių tikimybes.

Panašios temos jau ne kartą buvo gvildentos ankstesnėse LJMM užduotyse, todėl, jeigu kas nors būtų neaišku, mūsų archyve šiais klausimais galima rasti ir papildomos medžiagos.

Pasirinkus bet kurios prigimties elementų baigtinę aibę, tarkime, $A=\{a_1; a_2; ...; a_n\}$, iš jos elementų galima sudaryti įvairius naujus rinkinius – *junginius*. Panašiai iš abėcėlės raidžių galima sudaryti įvairius žodžius – raidžių junginius, netgi nebūtinai turinčius prasmę.

Taip ir iš aibės *A* elementų gali būti sudaromi įvairūs junginiai – elementų poros, trejetai ar didesnės apimties rinkiniai – *sutvarkyti* (kai elementų tvarka svarbi, t. y. jeigu sukeisime bent du elementus vietomis, gausime kitą junginį) arba nesutvarkyti, arba kai patys elementai nesikartoja arba kartojasi.

Pavyzdžiui, užrašant natūralųjį skaičių dešimtainėje skaičiavimo sistemoje naudojamas sutvarkytas skaitmenų aibės $\{0; 1; 2; ...; 9\}$ elementų junginys. Tokiame junginyje kiekvienas skaitmuo turi savo reikšmę – tai arba vienetų, arba dešimčių, arba šimtų ir pan. skaitmenys, t. y., elementų tvarka svarbi. Be to, čia elementai gali kartotis. Plokštumos taško $(x; y)$ koordinatės (x, y – realieji skaičiai) taip pat yra sutvarkyta realiųjų skaičių pora, kaip ir bet kuris *n*-matės erdvės taškas, kuris užrašomas sutvarkytu *n* realiųjų skaičių junginiu.

Kai kuriose loterijose norint laimėti reikia atspėti tam tikrą skaičių rinkinį – šio junginio elementų tvarka nesvarbi. Pavyzdžiui, Keno Loto tiražo metu iškrenta 20 laimingų skaičių iš natūraliųjų skaičių aibės $\{1; 2; 3; \ldots; 60\}$. Jūs galite rinktis, kiek skaičių (nuo 2 iki 10) spėsite – pasirinktų skaičių tvarka nesvarbi, skaičiai kartotis negali.

Dažnai, ypač skaičiuojant įvykių tikimybes, tenka nustatyti, kiek (o kartais ir kokių) junginių, tenkinančių tam tikras sąlygas, galima sudaryti iš pasirinktosios aibės *A* ar jos poaibių elementų. O tai – kombinatorikos sritis.

Prisiminkime pagrindines kombinatorikos sąvokas, kai kurių nesudėtingų kombinatorikos uždavinių sprendimo taisykles ir formules, padedančias tokius uždavinius spręsti.

Taigi, kaip matėme, turint kurių nors matematinių objektų (nebūtinai skaičių) aibę $A=\{a_1; a_2; ...; a_n\}$, iš jos elementų galima sudaryti įvairius junginius.

Junginiai be pasikartojimų. Junginį, sudarytą iš *m* skirtingų aibės $A=\{a_1; a_2; ...; a_n\}$ elementų ($m \in \{1; 2; ...; n\}$), vadinsime *junginiu be pasikartojimų*. Jeigu šis junginys nesutvarkytas, tai jis vadinamas *deriniu iš n elementų po m elementų* (*be pasikartojimų*). Kai toks junginys sutvarkytas, tai jį vadinsime *gretiniu iš n elementų po m elementų* (*be pasikartojimų*). O gretinį iš *n* elementų po *n* elementų vadiname *kėliniu iš n elementų* (*be pasikartojimų*).

Aibės $A=\{a_1; a_2; ...; a_n\}$ poaibių po *m* elementų, kitaip tariant, derinių be pasikartojimų, skaičius žymimas C_n^m. Gretinių be pasikartojimų iš *n* elementų po *m* elementų skaičius žymimas A_n^m, o kėlinių be pasikartojimų iš *m* elementų skaičius – P_m. Iš mokyklinio matematikos kurso žinome, kad

$$P_m = m! \qquad (1)$$

ir

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot 1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (C_n^0 = 1,\ C_n^n = 1). \qquad (2)$$

Čia sandauga $k! = k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ vadinama skaičiaus *k faktorialu*. Susitarta laikyti, kad $0! = 1$. Skaičiai C_n^m, A_n^m ir P_m yra susieti formule $A_n^m = C_n^m \cdot P_m$. Taigi

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}, \quad m\in\{1;2;...;n\}. \tag{3}$$

Dar panagrinėsime sudėtingesnes kombinatorines struktūras – junginius su pasikartojimais.

Junginiai su pasikartojimais. Junginį, sudarytą iš *m* ($m\ge 1$) aibės $A=\{a_1;a_2;...;a_n\}$ elementų, kurie junginyje gali kartotis, vadinsime *junginiu su pasikartojimais*. Jeigu šis junginys nesutvarkytas, tai jis vadinamas *deriniu iš n elementų po m elementų* (*su pasikartojimais*). Derinių su pasikartojimais iš *n* elementų po *m* elementų skaičius surandamas pagal formulę

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!\cdot(n-1)!}. \tag{4}$$

Pavyzdžiui, kai $A=\{a;b\}$, tai $\overline{C}_2^3 = C_4^3 = 4$. Šie deriniai yra tokie: $(a;a;a), (b;b;b), (a;a;b), (a;b;b)$.

Sutvarkytą junginį iš *n* elementų po *m* elementų su pasikartojimais vadiname *gretiniu iš n elementų po m elementų su pasikartojimais*. Aišku, kad tokių gretinių skaičius yra $\overline{A}_n^m = n^m$.
Pavyzdžiui, kai $A=\{a;b\}$, tai $\overline{A}_2^3 = 2^3 = 8$ ir gretiniai yra tokie: $(a;a;a), (b;b;b), (a;a;b), (a;b;a)$, $(b;a;a), (a;b;b, (b;a;b), (b;b;a)$.

Apibrėždami *kėlinius su pasikartojimais*, sudarytais iš aibės $A=\{a_1;a_2;...;a_n\}$ elementų, turime nurodyti kiek kokių aibės *A* elementų kėlinyje norime matyti. Todėl tokių kėlinių skaičių patogu žymėti $P(k_1,k_2,\cdots,k_n)$; čia k_1 – elemento a_1 pasikartojimų skaičius kėlinyje, k_2 – elemento a_2 pasikartojimų skaičius kėlinyje ir t. t. Suma $k_1+k_2+\ldots+k_n$ yra kėlinio su pasikartojimais ilgis. Kėlinių su pasikartojimais skaičius surandamas pagal formulę

$$P(k_1,k_2,\cdots,k_n) = \frac{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}. \tag{5}$$

Pavyzdžiui, kai $A=\{a;b;c\}$, tai $P(2,1,1) = \dfrac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!} = 12$. Visų šių kėlinių su pasikartojimais aibė yra: $\{(a;a;b;c), (b;a;a;c), (b;c;a;a), (a;a;c;b), (c;a;a;b), (c;b;a;a), (a;b;a;c), (a;b;c;a)$, $(b;a;c;a), (a;c;a;b), (a;c;b;a), (c;a;b;a)\}$.

***Kombinatorinės dauginimo* ir *sudėties taisyklės*.** Šioms taisyklėms suformuluoti patogiau baigtinės aibės $A=\{a_1;a_2;...;a_n\}$ elementų skaičių žymėti $|A|$ (taigi $|A|=n$).

Tarkime, turime dvi baigtines aibes $A=\{a_1;a_2;...;a_n\}$ ir $B=\{b_1;b_2;...;b_m\}$. Jų *Dekarto sandauga* (žymima $A\times B$) vadiname visų galimų porų $(x;y)$, kai $x\in A,\ y\in B$, aibę.

Kombinatorinė dauginimo taisyklė teigia, kad $|A\times B| = |A|\cdot|B| = n\cdot m$.

Šio teiginio teisingumu įsitikinama tiesiogiai suskaičiavus visus Dekarto sandaugos elementus $(a_i;b_j)$, kai $i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,m$. Pritaikius matematinę indukciją kombinatorinė dauginimo taisyklė įrodoma ir su bet kuriuo dauginamųjų skaičiumi: $|A_1\times A_2\times\ldots\times A_k| = |A_1|\cdot|A_2|\cdot\ldots\cdot|A_k|$.

Tegu dabar *A* ir *B* yra baigtinės aibės, neturinčios bendrų elementų ($A\cap B=\varnothing$).

Kombinatorinė sudėties taisyklė teigia, kad

$$|A\cup B| = |A|+|B|. \tag{6}$$

Paprasčiau šią taisyklę galima formuluoti taip: jeigu vieną elementą turime pasirinkti iš aibės *A* arba iš aibės *B*, tai to elemento pasirinkimo galimybių yra $|A|+|B|$.

Kombinatorinė sudėties taisyklė galioja ir su bet kuriuo aibių skaičiumi $k\ge 2$. Jeigu aibės $A_1, A_2,\ldots,A_k$ poromis neturi bendrų elementų, t. y. $A_i\cap A_j=\varnothing,\ i\ne j,\ i,j=1,2,\ldots,k$, tai

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k| = |A_1|+|A_2|+\ldots+|A_k|. \tag{7}$$

Jei aibės *A* ir *B* turi bendrų elementų, t. y. $A \bigcap B \neq \varnothing$ (kartais sakoma – aibės *A* ir *B* kertasi), tai

$$|A \bigcup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \qquad (8)$$

Atkreipkime dėmesį, kad (8) formulė apibendrina (6) formulę, t. y. galima teigti, kad (8) lygybė galioja su bet kuriomis baigtinėmis aibėmis *A* ir *B*.

Dar apie aibes. Objektų, nagrinėjamų konkrečiame uždavinyje, aibė vadinama *universaliąja aibe* – pažymėkime ją raide *E*. Tegu aibė *A* yra universaliosios aibės poaibis: $A \subseteq E$. Aibė $\overline{A} = E \setminus A$ (aibių skirtumas) vadinama *aibės A papildiniu*.

Tarkime, $A \subseteq E$ ir $B \subseteq E$, tuomet galioja lygybės

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}\ , \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad (9)$$

performuluojamos ir matematinės logikos terminais, vadinamos De Morgano dėsniais (Augustus De Morgan – anglų matematikas ir logikas, 1806-1871).

Aibių sąryšiai, tarp jų ir (9), kaip žinome, puikiai iliustruojami Veno diagramomis (John Venn – britų filosofas ir matematikas, 1834-1923). Šiose diagramose universalioji aibė vaizduojama stačiakampiu, o jo viduje – poaibiai vaizduojami skrituliais (arba ovalais), kurie arba nesikerta, arba kertasi, arba yra vienas kitame, priklausomai nuo ryšių tarp vaizduojamų aibių. Siūlome savarankiškai pasinaudojus Veno diagramomis įsitikinti de Morgano dėsnių teisingumu.

1 *pavyzdys*. Mokykloje mokosi 1000 mokinių. Iš jų 800 slidinėja, o 550 – čiuožia pačiūžomis. Nei slidinėti, nei čiuožti pačiūžomis nemoka 52 mokiniai. Apskaičiuokime kiek mokinių ir slidinėja, ir čiuožia pačiūžomis.

Sprendimas. Čia universaliąją aibę *E* sudaro 1000 mokinių: $|E| = 1000$. Tegu *A* – slidinėjančių mokinių aibė, *B* – čiuožiančių pačiūžomis mokinių aibė: $|A| = 800$, $|B| = 550$. Mums reikia rasti $|A \cap B|$.

Aibę $\overline{A} \cap \overline{B}$ sudaro mokiniai, kurie nei slidinėja, nei čiuožia pačiūžomis: $|\overline{A} \cap \overline{B}| = 52$. Iš (8) formulės išplaukia, kad

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|. \qquad (10)$$

Pagal De Morgano dėsnį $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = E \setminus (A \cup B)$. Iš čia turime: $|\overline{A} \cap \overline{B}| = |E \setminus (A \cup B)| \Rightarrow |A \cup B| = 1000 - 52 = 948$. Įrašę į (10) formulę reikiamus skaičius, gauname, kad $|A \cap B| = 800 + 550 - 948 = 402$. *Ats*. 402.

Bandymai ir įvykiai. Aibių teorija ir kombinatorika padėjo pagrindus tikimybių teorijos atsiradimui. Tikimybių teorijoje įvykiai traktuojami kaip bandymo baigčių aibės, kurioms priskiriamas tam tikras matas – įvykio tikimybė.

Bandymu arba *eksperimentu* vadiname sąlygų, sudarančių galimybę įvykti stebimajam įvykiui, visumą. Su kiekvienu bandymu galime susieti šio *bandymo baigčių aibę*, t. y. išvardinti visas galimybes, kuriomis gali pasibaigti bandymas. Pavyzdžiui, lošimo kauliuko vieno metimo baigtys yra šešios – gali atsiversti bet kuri iš šešių lošimo kauliuko sienelių. Taigi su šiuo bandymu susiejame baigčių aibę $E = \{e_1; e_2; e_3; e_4; e_5; e_6\}$; čia $e_i,\ i = 1, 2, \ldots, 6$, žymi bandymo baigtį – galimybę lošimo kauliukui atsiversti *i* akutėmis. Šios baigtys laikomos *vienodai galimomis*, nes nė viena iš jų neturi daugiau šansų pasirodyti, negu bet kuri kita.

Iš aibės *E* elementų galime sudaryti įvairius poaibius, kaip tai darėme su universaliąja aibe. Dabar tokius poaibius vadinsime *įvykiais*. Pavyzdžiui, įvykis *A*, kad lošimo kauliukas atsivers lyginiu akučių skaičiumi, gali būti užrašytas taip: $A = \{e_2; e_4; e_6\}$, įvykis atsiversti pirminiu akučių skaičiumi yra $B = \{e_2; e_3; e_5\}$, įvykis, kad atsivers šešiukė, bus sudarytas tik iš vienos baigties $E_6 = \{e_6\}$. Įvykius $E_1 = \{e_1\},\ E_2 = \{e_2\},\ E_3 = \{e_3\},\ E_4 = \{e_4\},\ E_5 = \{e_5\},\ E_6 = \{e_6\}$, sudarytus iš vienos baigties, vadinsime *elementariaisiais įvykiais*. Atkreipkime dėmesį, kad dažnai pačios baigtys taip pat vadinamos elementariaisiais įvykiais. Įvykis *E* (kad lošimo kauliukas vis vien kuria nors puse atsivers) yra *būtinasis*, o tuščios aibės simboliu $\varnothing$ žymimas *negalimasis* įvykis (ko negali nutikti, pavyzdžiui, kad kauliukas dings ar pan.). Baigtys, kurios sudaro įvykį, vadinamos *palankiomis* šiam įvykiui. Sudarę visus galimus su bandymu susijusius įvykius, įskaitant būtinąjį ir negalimąjį, gausime šio bandymo *įvykių erdvę*.

Kadangi dabar įvykiai yra baigčių aibės, tai jiems galioja įprastiniai aibių veiksmai – sąjunga, sankirta bei kiti sąryšiai. Belieka priderinti terminologiją: dabar $A \cup B$ yra įvykių sąjunga; $A \cap B$ - įvykių sankirta; $\overline{A} = E \setminus A$ - įvykis, *priešingasis* įvykiui *A*; kai $A \cap B = \varnothing$, tai įvykiai *A* ir *B* yra *nesutaikomi*.

Klasikinis tikimybės apibrėžimas. Tegu $E = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ yra bandymo baigčių aibė su vienodai galimomis baigtimis. Įvykio *A*, sudaryto iš *m* šiam įvykiui palankių baigčių, t. y. $|A| = m,\ m \le n$, *tikimybe* vadiname skaičių $P(A) = \dfrac{m}{n}$.

Paminėsime kelias, iš šio apibrėžimo išplaukiančias, tikimybės savybes:

1) $P(\varnothing)=0$ (negalimojo įvykio tikimybė lygi nuliui); $P(E) = 1$ (būtinojo įvykio tikimybė lygi 1);

2) su bet kuriuo įvykiu *A* teisinga nelygybė $0 \le P(A) \le 1$;

3) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

4) jei įvykiai *A* ir *B* yra nesutaikomi, tai $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

5) su bet kuriais įvykiais *A* ir *B* teisinga lygybė $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Apskaičiuokime įvykio *A*, kad vieną kartą metus monetą ji atsivers herbu, tikimybę. Šio bandymo baigčių aibę sudaro dvi vienodai galimos baigtys e_H (galimybė atsiversti herbui) ir e_M (galimybė atsiversti monetai), t. y. $E = \{e_H; e_M\}$. Palankių įvykiui *A* baigčių yra viena. Todėl $P(A) = \dfrac{1}{2}$.

Šis rezultatas puikiai dera su visiems žinomu faktu, kad metus monetą galimybės atsiversti herbui ar monetai yra vienodos. Tai patvirtina ir statistiniai tyrimai – skaičiuojant herbo atsivertimo dažnį po daugelio monetos metimų, nustatyta, kad jis svyruoja apie skaičių 0,5.

Taikydami klasikinį apibrėžimą įvykių, susijusių su aukščiau paminėtu vienu lošimo kauliuko metimu, gausime: $P(E_1) = P(\{e_1\}) = \dfrac{1}{6}$, $P(A) = P(\{e_2;\ e_4; e_6\}) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = P(\{e_2; e_3; e_5\}) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Klasikinis tikimybės apibrėžimas – paprasčiausias ir lengviausiai suvokiamas – juo prasidėjo ir tikimybių teorijos istorija. Pirmą tikimybių teorijos knygą „Knyga apie žaidimą kauliuku“ parašė italų mokslininkas Kardanas (Gerolamo Cardano, 1501-1576), publikuota 1663 m.

Skaičiuojat įvykio tikimybę pagal klasikinį apibrėžimą reikia surasti kiek iš viso yra bandymo baigčių ir kiek iš jų – palankių nagrinėjamam įvykiui. Ne visuomet lengva tai padaryti. Čia jau reikia kombinatorikos žinių.

Keli tikimybių skaičiavimo pavyzdžiai.

2 *pavyzdys*. Dėžėje 9 vienodi rutuliai, iš kurių 4 balti ir 5 juodi. Iš dėžės atsitiktinai išimami du rutuliai. Apskaičiuokime tikimybę, kad abu ištraukti rutuliai bus tos pačios spalvos.

Sprendimas. Iš viso vienodai galimų baigčių yra $C_9^2 = \dfrac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$. Palankių nagrinėjamam įvykiui (abu rutuliai balti arba abu rutuliai juodi) baigčių skaičius yra $C_4^2 + C_5^2 = \dfrac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \dfrac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 6 + 10 = 16$.

Pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą nagrinėjamo įvykio tikimybė $p = \dfrac{16}{36} = \dfrac{4}{9}$. *Ats*. $p = \dfrac{4}{9}$.

3 *pavyzdys*. Devyniaženklis Tomo draugo telefono numeris sudarytas iš skaitmenų 1, 6, 7, 8. Tomas atsimena, kad šiame numeryje skaičius 1 įeina du kartus, 6 – tris kartus, 7 – vieną kartą, 8 – tris kartus. Apskaičiuokime tikimybę, kad Tomas atspės draugo telefono numerį.

Sprendimas. Bandymo baigčių aibę sudaro kėliniai (ilgio 9) su pasikartojimais iš 4 elementų. Jų skaičius randamas iš (5) formulės: $P(2,3,1,3) = \dfrac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 3!} = 5040$. Tuomet tikimybė atspėti numerį lygi $p = \dfrac{1}{5040} \approx 0{,}0002$. Taigi Tomo galimybės paskambinti draugui labai mažos. *Ats*. $p = \dfrac{1}{5040}$.

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1. Iš aibės $A=\{a;b;c\}$ elementų sudarykite: a) visų derinių su pasikartojimais po 2 elementus aibę; b) visų derinių su pasikartojimais po 4 elementus aibę.

2. Tegu $A=\{a;b;c;d;e\}$. Kiek iš šios aibės elementų galima sudaryti:

a) derinių be pasikartojimų po 3 elementus?
b) derinių su pasikartojimais po 3 elementus?
c) gretinių be pasikartojimų po 3 elementus?
d) gretinių su pasikartojimais po 3 elementus?
e) kėlinių be pasikartojimų?
f) kėlinių su pasikartojimais, kai elementas *a* įeina vieną kartą, *b* – du kartus, *c* – vieną kartą, *d* – du kartus, *e* – tris kartus?

3. Kiek skirtingų penkiaženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 0, 3, 5, 7 ?

4. Tegu *A*, *B* ir *C* – bet kurios aibės, turinčios elementų atitinkamai $|A|, |B|$ ir $|C|$. Išveskite formulę aibės $A \cup B \cup C$ elementų skaičiui $|A \cup B \cup C|$ ((8) formulės analogą trijų aibių sąjungai).

5. Turistų grupėje – 100 žmonių, 70 iš jų kalba angliškai, 45 – prancūziškai, o 23 – kalba abiem kalbomis. Kiek turistų nekalba nei angliškai, nei prancūziškai?

6. Vieną kartą metus lošimo tetraedrą, kurio sienelės sužymėtos skaičiais 1, 2, 3 ir 4, stebima ant kurios sienelės jis nukris. Kiek elementų sudaro šio bandymo įvykių erdvę? Išvardinkite šiuos įvykius.

7. Vieną kartą metami du simetriški šešiasieniai lošimo kauliukai, kurių sienelės sužymėtos skaičiais 1, 2, 3, 4, 5, 6. Raskite tikimybę, kad ant atsivertusių sienelių užrašytų skaičių sandauga bus lygi 10 arba 12.

8. Dėžėje 15 vienodų, besiskiriančių tik spalvomis, rutulių: 4 geltoni, 5 žali ir 6 raudoni. Iš jos atsitiktinai išimami 3 rutuliai. Apskaičiuokite tikimybę, kad bus ištraukti: a) tos pačios spalvos rutuliai; b) skirtingų spalvų rutuliai.

9. Detektyvų mėgėjo biblioteka gavo devynių šiuolaikinio norvegų rašytojo Jo Nesbo knygų siuntą. Šios knygos buvo sudėtos į lentyną atsitiktiniu būdu. Kokia tikimybė, kad knygos „Troškulys“ ir „Policija“ bus padėtos greta viena kitos.

10. Iš sekos 1, 2, ..., *n* atsitiktinai renkamės du skaičius. Apskaičiuokite tikimybę, kad vienas iš pasirinktųjų skaičių bus mažesnis už *k*, o kitas – didesnis už *k*. Čia *k* yra bet kuris natūralusis skaičius, $1<k<n$.

Septintosios užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2021 m. vasario 5 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematikos metodikos centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: http://www.mif.vu.lt/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ
MOKYKLOS TARYBA

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

8. SKAIČIAI, LYGTYS, LANGELIAI BEI LENTELĖS
(2019 - 2021)

Teorinę medžiagą parengė bei aštuntąją užduotį sudarė docentas Romualdas Kašuba
(Vilniaus universitetas)

Mes daug kuo domimės ir taip pat kai ko ir nežinome. Daug ką mes galime suskaičiuoti, daug ką mes galime sugalvoti, tačiau visada yra dalykų, kurie mums prieš ko nors imantis būna neaiškūs, ar ne iki galo aiškūs, žodžiu, kelia mums tam tikrų problemų. Tačiau tai mūsų negąsdina, nes dažniausiai mums būna aišku, ko gi čia reikėtų griebtis arba bent jau būna aišku, į kurią gi pusę čia mums reikėtų žiūrėti.

Labai dažnai - ypač mokykloje ar kokioje nors kitoje rimtoje vietoje - mums užrašo kokią nors lygybę ir klausia mūsų, kurie gi skaičiai čia dabar tinka arba, „kabinant“ plačiau, kaipgi čia reikėtų elgtis, kad sužinotume daugiau, negu kad žinome dabar.

Kad įvadas nebūtų per ilgas, paimkime ir išnagrinėkime kokį nors konkretų pavyzdį. Tarkime, kad mūsų prašo surasti kokį nors skaičių, tinkantį lygčiai

$$x^2 - 3x + 2 = 0 .$$

Tai mes suprantame, kad tai yra visai paprasta, nes juk tai yra kvadratinė lygtis, kurios šaknis galima rasti pagal formules arba paprasčiausiai atspėti. Sakysime, mūsų atveju pats paprasčiausias skaičius x = 0 netinka, nes

$$0^2 - 3 \cdot 0 + 2 \neq 0$$

(kitaip sakant, taip nutinka dėl to, kad lygtyje yra vadinamasis laisvasis narys). Tuo tarpu sekantys iš eilės einantys sveikieji skaičiai yra tinkami, nes

$$1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0 .$$

Ir taip pat

$$2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0 .$$

Pradedant nuo tokių pačių paprasčiausių pavyzdžių kartais pavyksta padaryti ir kai ką sunkesnio, sakysime išspręsti (arba atspėti) ir kai ką sudėtingesnio – sakysime rasti lygties

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

sprendinį.

Pasižiūrėję, kaip mes įstatinėjome, mes matome, kad vėl tinka *x* reikšmė lygi 1, nes

$$1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0 .$$

Iš to, kas čia yra pasakyta, lygiai taip pat matome, kad panašiai surastume ir lygties

$$x^n - 3x + 2 = 0$$

sprendinį ir juo būtų tas pats skaičius 1.

1. Uždavinys. Toliau mes pasižiūrėkime, kaip mes galėtume išspręsti tokią dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{pmatrix} 1+a^2 = 2b \\ 1+b^2 = 2a \end{pmatrix}$$

Pirmiausiai pastebėkime, kad iš pirmosios sistemos lygties turime, kad b yra teigiamas, o iš antrosios, kad teigiamas yra ir skaičius a.

Dėl simetriškos sistemos išvaizdos galima pabandyti atimti vieną sistemos lygtį iš kitos ir taip gauti lygybę

$$a^2 - b^2 = 2(b-a).$$

Dabar sukėlus viską į vieną pusę ir išskaidžius dauginamaisiais gausime

$$(a-b)(a+b-2) = 0.$$

Jeigu dabar prilygintume nuliui pirmąjį daugiklį

$$a-b=0,$$

tai gautume

$$a = b$$

ir būtų 2 lygybės, pirmoji iš kurių persirašytų kaip

$$1+a^2 = 2a$$

arba

$$(a-1)^2 = 0,$$

kitaip tariant

$$a = 1.$$

Lygiai taip pat gautume, kad ir $b = 1$.

Jeigu prilygintume 0 kitą daugiklį, tai būtų $a + b = 2$ ir tada spręsdami susidariusią sistemą

$$\begin{pmatrix} 1+a^2 = 2b \\ a+b=2 \end{pmatrix}$$

gautume

$$1+a^2 = 2(2-a),$$

iš kur seka, kad

$$a^2 + 2a - 3 = 0.$$

Ši lygtis turi dvi šaknis 1 ir -3 . Kadangi -3 netinka, nes jau buvo pastebėta, kad kintamieji *a* ir *b* yra teigiami, tai lieka, kad $a = 1$. Panašiai ir *b* bus lygus 1, Taigi gauname, kad mūsų sistema turi vienintelį sprendinį

$$(a; b) = (1; 1).$$

Pastaba. Tačiau tą lygčių sistemą galima išspręsti ir kitaip. Jeigu mes sudėtume abi sistemos lygtis, tai gautume $a^2 + 1 - 2a + b^2 + 1 - 2b = 0$. O ją dabar galima perrašyti kaip

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 = 0.$$

O iš čia iš karto matome vienintelį sprendinį arba mūsų jau turėtą porą (1; 1).

2. Uždavinys. Skaičiuje 628110 galima tarp jo skaitmenų taip sudėti skliaustus bei aritmetikos veiksmų ženklus, kad gautume 100, pavyzdžiui, elgiantis kad ir taip:

$$(6:2+8-1)\times 10.$$

Padarykite tą patį su skaičiais 682121, 247637, 344348, 642542 ir 722344.

Sprendimas. Truputį paeksperimentavę pirmuoju atveju randame

$$6\cdot 8\cdot 2 + 1 + 2 + 1 = 100.$$

Antrasis atvejis gal kiek sunkesnis, bet irgi baigiasi gerai, jūs tik pasižiūrėkite:

$$(24 + (7 - 6\,))(-3 + 7) = 100.$$

Trečiasis atvejis gali būti padarytas kad ir taip: $(-3 + 4)\cdot(4 + 3\cdot 4\cdot 8) = 100$, ketvirtasis $6\cdot 4\cdot 2+(54 - 2) = 100$, o pats paskutinysis – $(72 - 2) + (34 - 4) = 100$.

3. Uždavinys. Negeras berniukas Apolinaras išplėšė iš knygos keletą iš eilės einančių puslapių. Pasirodė, kad pirmasis išplėštas puslapis buvo 47, o paskutinis puslapis yra užrašomas panaudojant tik tokius skaitmenis, kuriais užrašomas pirmasis išplėštasis puslapis. Kiek puslapių iš knygos išplėšė Apolinaras? O kitą kartą Apolinaras padarė vėl tą patį, tik dabar jau pirmasis išplėštasis puslapis buvo 587, o paskutinysis vėl buvo užrašomas panaudojant tuos pačius tris skaitmenis kaip buvo ir pirmajame išplėštame puslapyje. Kiek dabar puslapių bus dabar išplėšęs Apolinaras.

Tai visiškai nesunkus uždavinys, reikia tik pastebėti, kad paskutinysis išplėštasis puslapis tegali būti lyginis ir todėl jis tegali būti tik 44 arba 74. Atvejis 44 atkrenta, nes jis mažesnis už 47, todėl lieka tik atvejis 74 ir tada Apolinaras bus išplėšęs

$$74 - 47 + 1 = 28$$

puslapius. Antruoju atveju gauname, kad paskutinis išplėštasis puslapis vėl turi būti lyginis skaičius ir todėl jis tegali būti lygus 758, tai yra Apolinaras bus išplėšęs

$$758 - 587 + 1 = 172$$

puslapius.

4. Uždavinys. Ar galima į kvadrato 3×3 langelius įrašyti paporiui skirtingus skaitmenis tokiu būdu, kad būtų išpildyta tokia sąlyga: kiekvienas iš 6 triženklių skaičių gaunamų jeigu bet kurios eilutės skaitmenis perskaitytume iš kairės į dešinę (pavyzdžiu galėtų būti 3-ženklis skaičius def) ir jeigu bet kurio stulpelio skaitmenis perskaitytume iš viršaus į apačią (pavyzdžiu galėtų būti triženklis skaičius adg) būtų visi pirminiai skaičiai?

a	b	c
d	e	f
g	h	l

Sprendimas. Pastebėkime kad penki skaičiai, kuriais baigiasi mūsų 6 pirminiai skaičiai g, h, l, c ir f negali būti lyginiai skaičiai bei taip pat negali lygūs 5-ui. Todėl tie penki skaičiai tegali būti lygūs 1, 3, 7 ir 9, todėl jie tikrai pasikartos, o tai prieštarauja tam, jog jie visi yra paporiui skirtingi.

Atsakymas. Ne, negalima.

5. **Uždavinys.** Devyniuose kvadratinės lentelės 3×3 langeliuose, po vieną skaičių kiekviename langelyje užrašyti visi sveikieji skaičiai nuo 1 iki 9 tokiu būdu, kad skaičių sumos, esančios kiekvienoje eilutėje, kiekviename stulpelyje ir abiejose ilgosiose įstrižainėse yra tarpusavyje lygios. Ar galima nustatyti, koks skaičius yra parašytas centriniame tokios lentelės langelyje.

Skaitytojas gali be vargo pastebėti, kad mes kalbame apie magiškus 3 × 3 kvadratus, užpildomus pirmaisiais devyniais natūraliaisiais skaičiais nuo 1 iki 9.

Taigi pirmiausiai pastebėkime, kad visų 9 skaičių nuo 1 iki 9 suma be jokios abejonės yra

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45,$$

Todėl kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio elementų suma yra lygiai 3 kartus mažesnė ir todėl yra lygi 15. Beje, tada 15 turi būti lygi ir abiejų įstrižainių skaičių suma.

Jeigu dabar pasižiūrėsime į centrinį magiškojo kvadrato skaičių c, tai jis priklauso antrajam stulpeliui, antrajai eilutei bei abejoms įstrižainėms – kitaip sakant, jis dalyvauja 4 sumose, kurios visos yra lygios po 15. Visi kiti magiškojo kvadrato elementai, išskyrus tą centrinį elementą c taip sumuojant yra įskaičiuojami po vienintelį kartą.

Todėl yra teisinga tokia lygybė

$$3c + (\text{visų skaičių nuo 1 iki 9 suma}) = 4 \cdot 15 = 60.$$

Kitaip sakant $3c + 45 = 60$, arba $3c = 15$ ir $c = 5$.

Beliktų tik įsitikinti, kad toks magiškas kvadratas, užpildomas pirmaisiais devyniais natūraliaisiais skaičiais, tikrai egzistuoja. Tai nesunku padaryti, galima gauti pavyzdį

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Nesunkiai matome, kad tai tikrai yra vadinamasis magiškasis kvadratas.

6. Uždavinys. Devyniuose kvadratinės lentelės 3 × 3 langeliuose parašyti devyni paporiui skirtingi skaičiai taip, kad sumos skaičių, parašytų kiekvienoje iš trijų eilučių, kiekviename iš trijų stulpelių bei abiejose įstrižainėse yra lygios tarpusavyje. Visų devynių skaičių suma yra lygi 99. Koks skaičius gali stovėti centriniame lentelės langelyje?

Sprendimas. Mes panaudosime ką tik turėtą magišką kvadratą, kurio visų skaičių suma, kaip pamename, yra 45. Mums reikia padaryti, kad toji suma būtų 99, arba 99 – 45 = 54 didesnė. Tam pakanka kiekvieną ankstesnio magiško kvadrato skaitmenį padidinti po 54 : 9 = 6 arba vietoje ankstesnio magiško kvadrato

2	7	6
9	5	1
4	3	8

imti

8	13	12
15	11	7
10	9	14

Dabar matome, kad centriniame langelyje gali stovėti skaičius 11. **Atsakymas:** 11.

Pastaba. Tą patį būtume galėję gauti ir vėl pasinaudoję tuo, kad centrinis elementas dalyvauja 4 sumose, kurios dabar yra lygios po 33. Visi kiti magiškojo kvadrato elementai į tas keturias sumas patenka po vienintelį kartą. Todėl visų magiškojo kvadrato skaičių ir trigubo centrinio skaičiaus suma būtų lygi $4 \cdot 33 = 132$. Vadinasi, $3c + 99 = 132$. Toliau seka, kad

$$3c = 33$$

ir

$$c = 11.$$

7. Uždavinys. Ar galima į kiekvieną kvadratinės lentelės 5×5 langelį įrašyti vieną kurį iš skaičių -1, 0, 1 taip, kad visos sumos skaičių, esančių kiekvienoje eilutėje, taip pat ir kiekviename stulpelyje bei abiejose įstrižainėse būtų visos skirtingos?

Sprendimas. Penkių sveikųjų skaičių, kurių kiekvienas yra -1, 0, arba 1, suma yra skaičius, kuris kinta tarp -5 ir +5 imtinai. Tarp -5 ir +5 yra 11 sveikųjų skaičių, o skaičiuojamų sumų yra 12 (penkios sumos eilutėmis, penkios sumos stulpeliais ir dar dvi įstrižainių sumos), todėl kurios nors dvi sumos turės sutapti. **Atsakymas.** Ne, negalima.

8. Uždavinys. Ar skaičius $4^9 + 6^{10} + 3^{20}$ yra pirminis ar sudėtinis?

Sprendimas. Kadangi 4^9 yra skaičiaus 2^9 kvadratas, o 3^{20} yra 3^{10} kvadratas, tai pakaktų, kad 6^{10} būtų lygi dvigubai jų sandaugai. Ir taip tikrai ir yra, nes $2 \cdot 2^9 \cdot 3^{10} = 2^{10} \cdot 3^{10} = (2 \cdot 3)^{10} = 6^{10}$.

Atsakymas. Kadangi mes ką tik nustatėme, kad $4^9 + 6^{10} + 3^{20} = (2^9 + 3^{10})^2$, todėl jis tikrai yra sudėtinis skaičius.

9. Uždavinys. Dviženklį skaičių padaliname iš jo skaitmenų sandaugos ir gauname, kad dalmuo yra lygus 2, o liekanos turime 5. Jeigu mes perstatytume to dviženklio skaičiaus skaitmenis ir padarytume tą patį, tai dabar dalmuo būtų lygus 5, o liekana būtų lygi 2. Raskite tą dviženklį skaičių.

Sprendimas. Nuosekliai užrašome tai, kas pasakyta sąlygoje ir gauname

$$10a + b = 2ab + 5 \quad \text{bei} \qquad 10b + a = 5ab + 2.$$

Belieka išspręsti šią lygčių sistemą. Pamėginkime eliminuoti ab. Tuo tikslu pirmąją lygtį padauginsime iš 5, o antrąją – iš 2 ir atimsime antrąją lygtį iš pirmosios. Taip mes gausime

$$50a + 5b - 20b - 2a = 25 - 4 = 21 \text{ arba } 48a - 15b = 21.$$

Padalinę iš 3 turėsime $16a - 5b = 7$.

Parašę, kad

$$5b = 16a - 7$$

tuos $5b$ įrašysime į antrąją sistemos lygtį

$$10b + a = 2(16a - 7) + a = (16a - 7)a + 2.$$

Tai yra tas pats kaip

$$32a - 14 + a = 16a^2 - 7a + 2,$$

arba

$$16a^2 - 40a + 16 = 0.$$

Padalinę iš 8 gausime

$$2a^2 - 5a + 2 = 0.$$

Ši kvadratinė lygtis turi 2 šaknis, viena iš kurių tik viena yra sveikoji ir ji yra lygi 2. Kita šaknis, kuri yra lygi ½, mums netinka. Ir taip mes gauname, kad

$$5b = 16 \cdot 2 - 7 = 32 - 7 = 25$$

ir todėl $b = 5$ arba atsakymas yra 25. Jis akivaizdžiai tenkina uždavinio sąlygas.

10. Uždavinys. Palyginkite skaičių x su skaičiumi 4, jeigu iš sekančių trijų teiginių lygiai 2 yra teisingi, o vienas klaidingas:

1) $x < 3$; 2) $\sqrt{(x-3)(x-22)} = \sqrt{3-x} \cdot \sqrt{22-x}$; 3) $x > 22$.

(A) $x < 4$ (B) $x > 4$ (C) $x \geq 4$ (D) $x = 4$ (E) neįmanoma nustatyti

Sprendimas. Kadangi 1) ir 3) teiginiai prieštarauja vienas kitam, tai jie abu teisingi būti negali. Tačiau nesuderinami yra taip pat ir 2) bei 3) teiginiai, nes jei $x > 22$, tai antrosios lygybės dešinioji pusė yra neapibrėžta. Vadinasi, vienu metu teisingi gali būti tik pirmasis ir antrasis teiginiai. O jie yra teisingi tik kai $x < 3$. Todėl teisingas atsakymas yra A.

11. Uždavinys. Faktiškai neaprėpiami Jono gabumai galutinai paaiškėjo visiems, kai jis nusprendė tapti duomenų analitiku ir greitai pradėjo galėti sėkmingai užpildyti kone kiekvieną 3 × 3 lentelę. Štai uždavinys, kuriam Jonui užteko pusvalandžio, o jo kaimynas technologas Tamošius Bekepuris priešokiais tebesprendžia jį iki šiol pradėjęs spręsti dar prieškarantininiais laikus. Taigi į tuos 9 lentelės 3 × 3 langelius reikėtų įrašyti sveikuosius teigiamus – nebūtinai skirtingus – skaičius taip, kad visų trijų eilučių ir visų trijų stulpelių skaičių sumos duotų 6 skirtingus pirminius skaičius. Negana to, iš karto yra keliamas globalus klausimas apie tai, kokia yra pati mažiausia įmanoma visų 9 tokios lentelės skaičių suma. Taigi kokia ji gali būti?

Sprendimas. Pirmiausiai pastebėkime, jog pats mažiausias pirminis skaičius, kuris tokiu būdu gali būti gautas yra mažiausiai 3. Todėl pati mažiausia įmanoma tokios lentelės skaičių suma yra lygi arba nemažesnė už pusę šešių pačių mažiausių pirminių skaičių, didesnių už 2, sumos. Tačiau 6 patys mažiausi pirminiai skaičiai, kurie yra didesni už 2, yra 3, 5, 7, 11, 13 ir 17. Jų suma yra lygi 3+5+7+11+13+17=15+11+30=56. Kadangi kiekvienas lentelės skaičius yra sumuojamas du kartus – ir horizontaliai, ir vertikaliai – todėl tie šeši nelyginiai skaičiai turi pasidalinti į dvi lygias sumas po tris skaičius. Tačiau to negali būti, nes pusė nuo 56 yra 28, o 28 kaip lyginis skaičius negali būti lygus trijų nelyginių skaičių sumai. Todėl tokie 6 patys mažiausi pirminiai skaičiai čia atsakymu būti negali, nes suma 28 yra negalima. O suma 29 yra galima ir ji yra gaunama imant 6 pirminius skaičius 3, 5, 7, 11, 13 ir 19. O pati lentelė gali būti užpildyta kad ir taip:

1	1	3
1	4	6
1	2	10

12. Uždavinys. Yra žinoma, kad $a+b+c=7$, o $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=0{,}7.$ Raskite sumą $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$

Sprendimas. Pažymėkime $S=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$ Tada S + 3 =

$$\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}+1=\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{b+c+a}{c+a}+\frac{c+a+b}{a+b}=7\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)=7\cdot 0{,}7=4{,}9.$$

Todėl S = 4,9 – 3 = 1,9.

13. Uždavinys. Į lentelės 3 × 3 langelius įrašėme natūraliuosius (nebūtinai skirtingus) skaičius tokiu būdu, kad visos 6 sumos – trijų tos lentelės eilučių ir trijų tos lentelės stulpelių skaičių sumos – yra skirtingos. Raskite mažiausią įmanomą visų tokios lentelės skaičių sumą. **Atsakymas** 17.

Pirmiausiai pastebėkime, kad skaičių suma kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje yra nemažesnė kaip 1+1+1 = 3. Sakykime, kad S yra visų lentelės skaičių suma, tada $S + S$ yra visų eilučių sumų suma plius visų stulpelių sumų suma. Todėl

$$S + S \geq 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33.$$

Kadangi $2S$ yra lyginis skaičius, tai $2S \geq 34$, arba $S \geq 17$. Reikšmė S =17 tikrai yra pasiekiama, kas yra matoma iš žemiau pateikiamos lentelės:

1	1	1
1	1	3
2	4	3

Pastaba. Tokia lentelė yra ne viena, nes dar tinka, pavyzdžiui, ir tokia lentelė

5	3	1
1	2	2
1	1	1

14. Uždavinys. Raskite patį mažiausią skaičių, kurio dešimtainiame užraše dalyvauja tik skaitmenys 2 ir 3 (kiekvienas iš tų skaitmenų bent po vieną kartą) ir kuris dalijasi ir iš 2, ir iš 3.

Sprendimas. Skaičius dalijasi iš 2 išimtinai tiktai tada, kai paskutinysis jo skaitmuo yra lyginis. Vadinasi, mūsų darybos skaičius baigiasi 2. Toliau skaičius dalijasi iš 3 išimtinai tik tada, kai jo skaitmenų suma dalijasi be liekanos iš 3. Todėl jeigu mes turėsime tokį skaičių, kuris dalijasi be liekanos ir iš 2, ir iš 3 ir iš jo išbrauksime visus 3-tus, tai gautojo skaičiaus dalumas iš 2, ir iš 3 nebus pažeistas. Tik, suprantama, būtų pažeista sąlyga, kad jame turi būti bent vienas 3. Bet jeigu skaičiuje nėra trejetų, o tik dvejetai, tai jis dalijasi iš 3, jeigu tų dvejetų skaičius dalijasi iš 3. Todėl pats mažiausias toks skaičius būtų 222. Beliko grąžinti vieną trejetą vėliausiai į dešimčių skiltį ir gauti uždavinio atsakymą arba skaičių 2232 kaip patį mažiausią iš visų tokių skaičių.

15. Uždavinys. Raskite patį mažiausią skaičių, kuris dalijasi iš 8 ir kurio dešimtainiame dėstinyje po tris kartus dalyvauja išimtinai tik skaitmenys 1, 2, 3 ir 4.

Sprendimas. Apskritai pats mažiausias skaičius, kuriame yra 3 vienetai, 3 dvejetai, 3 trejetai ir 3 ketvertai – tai skaičius

$$111222333444.$$

Tačiau jis nesidalija iš 8, nes skaičius, kurį sudaro trys paskutinieji jo skaitmenys ir kuris yra 444, nesidalija be liekanos iš 8 – o tai yra būtina ir pakankama skaičiaus dalumo iš 8 sąlyga. Todėl vienas iš 4-tų turi būti bent jau tūkstančių skiltyje. Taip pakeitus gauname tris naujas kandidatūras į patį mažiausią skaičių – tai yra skaičiai 111222334344, 111222334434 ir 111222334443. Pats mažiausias iš jų yra pirmasis skaičius ir jis mums tinka, nes tikrai dalijasi iš 8, nes iš 8 dalijasi skaičius 344.

Atsakymas. 111222334344

16. Uždavinys. Su kokiu pačiu didžiausiu n į lentelę $5 \times n$, turinčią 5 eilutes ir n stulpelių, galima įrašyti skaičius 0,1 ir 2 (įrašant po vieną skaičių kiekviename langelyje) taip, kad kiekvieno stulpelio skaičių sumos būtų visos paporiui skirtingos, o kiekvienos eilutės skaičių sumos būtų visos vienodos.

Sprendimas. $n = 11$. Pirmiausiai pažiūrėkime, kokias reikšmes gali įgyti penkių kiekvieno stulpelio skaičių suma. Pati mažiausia jos reikšmė yra $0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$, o pati didžiausia reikšmė yra $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$. Skirtingų sveikųjų skaičių nuo 0 iki 10 yra lygiai 11. Kadangi pagal sąlygą visos stulpelių skaičių sumos turi būti skirtingos, tai jų gali būti daugiausiai 11. Antra vertus, žemiau pateiktas pavyzdys rodo, kad taip tikrai gali būti, tai yra kad lentelė 5×11, tenkinanti uždavinio sąlygas, tikrai egzistuoja.

0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2
0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2
0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2
0	0	0	0	0	1	2	2	2	2	2

17. Uždavinys. Krepšyje buvo ne daugiau kaip 55 grybai, o be to, dar buvo žinoma, kad baravykų santykis su ne baravykais buvo kaip 3 : 2. Po to, kai iš krepšio buvo išimti 4 patys mažiausi grybai, baravykų santykis su ne baravykais pasidarė lygus 4 : 3. Kiek grybų buvo pintinėje iš pradžių?

Sprendimas. Jeigu baravykų santykis su ne baravykais yra kaip 3:2, tai tada bendras grybų skaičius dalijasi iš 5, taigi baigiasi arba 0, arba 5, todėl lieka tokios kandidatūros 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50 ir 55. Atmetus 4 sumažintas grybų skaičius turi dalintis iš 7. Tai yra vienas kuris iš skaičių 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46 ir 51 turi dalintis iš 7. Matome, kad toks skaičius yra vienintelis ir jis yra 21. Todėl pintinėje iš pradžių buvo 25 grybai. **Atsakymas.** Buvo 25 grybai.

18. Uždavinys. Ratuku tam tikra tvarka surašyti skaičiai 1, 2, ..., 100. Bet kuriems dviem gretimiems skaičiams yra suskaičiuojamas jų skirtumas (iš didesniojo skaičiaus atimant mažesnį). Paaiškėjo, kad visi rastieji skirtumai neviršija tam tikro natūraliojo skaičiaus *n*. Kokią pačią mažiausią reikšmę gali įgyti *n*?

Sprendimas. Išdėstymas ratuku 1, 3, 5, 7,..., 99, 100, 98, 96,...., 2 parodo, kad tas skirtumas yra ne didesnis už 2. Belieka įsitikinti, kad jis negali būti lygus 1. Tai seka iš to, kad skaičius 1 būdamas ratuke turėtų turėti du kaimynus, kurie abu negali nuo jo skirtis per 1.
Atsakymas. Pati mažiausia *n* reikšmė yra 2.

19. Uždavinys. Andrius ir Jonas nudažo tvorą per 3 valandas. Jonas ir Justas nudažytų tą pačią tvorą per 6 valandas, o Justas ir Andrius – per 4 valandas. Per kiek laiko (skaičiuojant valandomis) tą tvorą nudažytų visi trys berniukai, dirbdami kartu?

Sprendimas. Paskaičiuokime, kiek tvorų jie visi nudažytų per 12 valandų. Taigi Andrius su Jonu per 12 valandų nudažytų 4 tvoras, Jonas su Justu – 2 tvoras, o Justas su Andriumi – 3. Todėl jie visi trys per 24 valandas nudažytų 4 + 2 + 3 = 9 tvoras. Taigi vieną tvorą jie dažytų 24/9 valandos. O 24/9 yra tiek pat kiek 8/3 arba, kitaip sakant, tai yra 2 val. ir 40 min. **Atsakymas.** Per 2 val. 40 min.

20. Uždavinys. Petras norėtų įrašyti sveikuosius skaičius į lentelės 4 × 4 langelius (įrašydamas po vieną skaičių į kiekvieną langelį tokiu būdu, kad suma skaičių, esančių trijuose iš eilės einančiuose vienos eilutės arba vieno stulpelio langeliuose yra visada vienoda. Tris skaičius jis jau įrašė, kaip tai yra parodyta šalia esančioje lentelėje.

	2		
			3
4			
		?	

Kokį skaičių Petras turėtų įrašyti į klaustuku pažymėtą langelį?

Sprendimas. Tarkime, kad Petras turi įrašyti į vieną eilutę, arba į vieną kurį stulpelį įrašyti keturis skaičius *a*, *b*, *c* ir *d* (tokia tvarka kaip čia kad išvardinta). Tada pagal sąlygą $a + b + c = b + c + d$, iš kur seka, kad $a = d$. Kitaip sakant, du skaičiai, esantys skirtinguose vienos eilutės arba vieno stulpelio kraštuose (arba galuose) yra lygūs. Todėl, pavyzdžiui, pirmas skaičius antroje eilutėje yra lygus 3, o antras skaičius ketvirtoje eilutėje yra lygus 2.

	2		
3			3
4			
x	2	?	

Dabar tegul pirmas skaičius ketvirtoje eilutėje yra *x*, tada $x + 2 + ? = 3 + 4 + x$, o iš čia $? = 7 + x - x - 2 = 5$. **Atsakymas.** 5.

21. Uždavinys. Skaičių 96 užrašykite kuo didesnio skaičiaus paporiui skirtingų pirminių skaičių suma.

Sprendimas. Pastebėkime, kad 9 ir daugiau pirminių dėmenų dabar čia negali būti, nes dabar devynių pačių mažiausių pirminių skaičių suma jau duoda skaičių 2 + 3 + 5 + 7 + 11 +13 + 17 + 19 + 23 = 100. Bus per daug ir pirmieji aštuoni pirminiai skaičiai, nes jų (pačių mažiausių) suma jau bus 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 = 77 ir iki reikiamos sumos trūksta 96 – 77 = 19 ir tokiu atveju dėmenį 2 būtų galima pakeisti tik į 21, 3 – į 22, 5 – į 24, 7 - į 26, 11 – į 30, 13 – į 32, 17 – į 36, 19 – į 38. Visais tais atvejais gaunami nepirminiai skaičiai, tai reiškia, kad toks keitinys nepraeina. O suma visokių kitokių 8 pirminių skaičių yra arba didesnė kaip 96, arba mažesnė, tai yra ji tikrai nelygi 96. O štai nurodytoji suma su septyniais pirminiais skaičiais egzistuoja: 2 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 41 = 96. **Atsakymas.** 7 dėmenys.

22. Uždavinys. Eilute užrašykite 10 skirtingų natūraliųjų skaičių tokiu būdu, kad bet kurių dviejų gretimų skaičių suma dalijasi iš 2, o bet kurių trijų greta esančių skaičių suma dalijasi iš 3. Kokią pačią mažiausią reikšmę gali įgyti tokių 10 skaičių suma?

Sprendimas. Kadangi bet kurių dviejų gretimų skaičių suma yra lyginė, tai tie skaičiai yra to paties lyginumo ir todėl tada visi skaičiai yra vienodo lyginumo. Jeigu jie visi yra nelyginiai, tai tada jų suma yra nemažesnė kaip 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 +15 + 17 + 19 = 100. O jeigu jie visi yra lyginiai, tai tada jų suma yra nemažesnė kaip 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 18 + 20 = 110 > 100.

Kita vertus skaičiai 1, 3, 5, 7, ..., 19, užrašyti nurodyta eile, tikrai tenkina uždavinio sąlygas.
Atsakymas. 100.

23. Uždavinys. Prie dviženklio skaičiaus iš dešinės buvo prirašytas tam tikras skaitmuo. Taip buvo gautas triženklis skaičius, kuris pasirodė esąs du kartus didesnis už triženklį skaičių, kuris būtų buvęs gautas prie pradinio dviženklio skaičiaus iš kairės prirašius 3. Raskite visus tokius dviženklius skaičius.

Sprendimas. Jeigu a yra duotasis dviženklis skaičius, o x yra tas iš dešinės prirašytas skaitmuo. Tada triženklis skaičius, kuris yra taip gaunamas, yra užrašomas pavidalu $10a + x$. O jeigu prie dviženklio skaičiaus iš kairės prirašytume skaitmenį 3, tai gauname skaičių $300 + a$. Pagal sąlygą $10a + x = 2(300 + a)$, iš kur $a = 75 – x/8$. Kadangi skaičius a yra sveikasis, tai skaitmuo x tegali būti lygus tik 0 arba 8. Pirmuoju atveju $a = 75$, o antruoju atveju $a = 74$. **Atsakymas.** 74 ir 75 .

24. Uždavinys. Surašykite į eilutę 10 sveikųjų skaičių tokiu būdu, kad bet kurių penkių iš eilės einančių skaičių suma būtų teigiama, o bet kurių septynių iš eilės einančių skaičių suma būtų neigiama.
Atsakymas. 5, -7, 5, -7, 5, 5, -7, 5, -7, 5

25. Uždavinys. Grupė vaikų pasidalijo tarp savęs po lygiai krūvą obuolių. Jeigu vaikų toje grupėje būtų buvę vos dviem mažiau, tai kiekvienam iš jų jau būtų išėję vienu obuoliu daugiau, o jeigu vaikų būtų buvę net trimis mažiau, tai kiekvienam iš jų būtų išėję jau dviem obuoliais daugiau. Kiek vaikų buvo toje grupėje?

Sprendimas. Sakykime, kad vaikų skaičius yra x ir kad jiems išeina po y obuolių (kitaip tariant, vaikai dalijosi $x{\cdot}y$ obuolių. Iš čia išeina, kad jeigu vaikų skaičius būtų buvęs $x – 2$, tai jiems būtų išėję po $y + 1$ obuolį, o jeigu vaikų skaičius būtų buvęs $x – 3$, tai tada kiekvienam iš jų būtų išėję po $y + 2$ obuolių.

Kitaip sakant, turime, kad

$$x{\cdot}y = (x – 2)\cdot(y + 1) = (x – 3)\cdot(y + 2).$$

Todėl

$$xy = xy – 2y + x – 2 = xy – 3y + 2x – 6.$$

arba

$$– 2y + x – 2 = – 3y + 2x – 6 = 0.$$

Padauginę pirmąją lygtį iš -3, o antrąją - iš 2 ir jas sudėję gautume

$$-3x + 6 + 4x - 12 = 0$$

arba kad

$$x = 6.$$

Tada iš bet kurios lygties gauname, kad $y = 2$, arba kad tie 6 vaikai dalijosi $6 \cdot 2 = 12$ obuolių. Tada tikrai, jeigu vaikų būtų buvę dviem mažiau, arba 4, tai jiems tikrai būtų tekę po 3 obuolius, o jeigu vaikų būtų buvę 3 mažiau, arba 3, tai tada jiems būtų tekę po 4 obuolius.

26. Uždavinys. Raskite patį mažiausią skaičių, kurio dešimtainiame užraše yra tik skaitmenys 4 ir 9 (kiekvienas iš jų pasitaiko bent po vieną kartą) ir kuris dalijasi ir iš 4, ir iš 9.

Sprendimas. Kad nurodytosios konstrukcijos skaičius dalintųsi iš 4, jis turi baigtis dviem ketvertais (nes skaičius dalijasi iš 4 tada ir tiktai tada, kai skaičius, kurį sudaro du paskutinieji jo skaitmenys, dalijasi iš 4. Mūsų darybos skaičių paskutinieji du skaitmenys sudaro skaičius 44, 94, 49 ir 99. Aišku, kad tik pirmasis skaičius dalijasi iš 4. Toliau skaičius dalijasi iš 9 tada ir tik tada, kai jo skaitmenų suma dalijasi be liekanos iš 9. Todėl jeigu mes visus skaitmenis lygius 9 išbrauktume, tai toks skaičius ir toliau dalintųsi be liekanos iš 4 ir iš 9 (tik būtų pažeista sąlyga, kad jame turi būti bent vienas 9). Tačiau skaičius, kuriame nėra 9-tų, o yra tik 4-tai dalijasi iš 9 tik tada, kai 4-tų skaičius jame dalijasi iš 9. Taigi pats mažiausias toks skaičius yra 444 444 444. Dabar reikia į jį grąžinti bent vieną 9-tą vėliausiai į šimtų skiltį. Taip mes ir gausime patį mažiausią skaičių 4 444 444 944.

27. Uždavinys. Raskite patį mažiausią nelyginį natūralųjį skaičių, kuris dalijasi be liekanos iš 9 ir kurio dešimtainiame užraše dalyvauja tik skaičiai 0, 1, 2, 3 ir 4. (Kiekvienas iš tų skaitmenų pasitaiko bent po vieną kartą, kitokių skaitmenų nėra, be to, skaičius tikrai neprasideda nuliu).

Sprendimas. Kadangi visi nurodytieji skaitmenys dalyvauja bent po vieną kartą, tai mūsų paieškomojo skaičiaus skaitmenų suma yra tikrai ne mažesnė kaip $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, todėl dalumui iš 9 reikės, kad skaitmenų suma būtų mažiausiai 18. Todėl teks pridėti dar du ketvertus ir paskutinį skaičių imti nelyginiu. Taip gausime skaičių

1 024 443. **Atsakymas.** 1 024 443.

28. Uždavinys. Ar egzistuoja toks skaičius n, kad suma $2^8 + 2^{11} + 2^n$ būtų pilnas kvadratas?

Sprendimas. Iškėlus 2^8 prieš skliaustus (o tai yra skaičiaus 2^4 kvadratas) skliaustuose turėsime reiškinį $1 + 2^3 + 2^{n-8}$, kuris tada taip pat turėtų būti kvadratas. O jis galėtų būti pilnas kvadratas, jeigu $1 + 2^3 + 2^{n-8} = 1 + 2 \cdot 2^2 + 2^4$. Tam pakaktų, kad $2^{n-8} = 2^4$. Tai reiškia, kad $n - 8 = 4$, kitaip sakant, kad $n = 12$.

Atsakymas. Kai $n = 12$, tai skaičius $2^8 + 2^{11} + 2^{12}$ yra pilnas kvadratas, nes $2^8 + 2^{11} + 2^{12} = (2^4)^2 + 2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 + (2^6)^2 = (2^4 + 2^6)^2 = (16 + 64)^2 = 80^2$.

29. Uždavinys. Lentelę 5×5 reikia užpildyti skaitmenimis 1, 2, 3, 4 ir 5 taip, kad kiekvienas iš tų skaičių po kartą pasirodytų kiekvienoje eilutėje, kiekviename stulpelyje ir kiekvienoje įstrižainėje. Keletas skaičių jau yra įrašyti. Nustatykite, koks skaičius bus įrašytas centriniame laukelyje, kuriame dabar yra ? ženklas.

3	4			5
2				
		?		
				4

Sprendimas. Pastebėkime, kad kairiajame apatiniame lentelės langelyje negali būti įrašytas nei 2, nei 3, nei 4, nei 5, nes kiekvienas skaičius kiekvienoje eilutėje, kiekviename stulpelyje ir kiekvienoje įstrižainėje tegali pasirodyti tik po vieną kartą. Vadinasi, tame langelyje tegali būti įrašytas 1. Tada centriniame langelyje negali stovėti nei skaičius 1, nei 3, nei 4, nei 5. Todėl jame turi būti įrašytas 2.
Atsakymas. Centriniame langelyje turi būti įrašytas 2.
Pastaba. Nors uždavinys to ir nereikalauja, bet neblogai būtų įsitikinti, kad tokia lentelė tikrai užsipildo. Tai padaryti mūsų atveju nesunku ir galima pratęsti pildymą kad ir taip:

3	4	1	2	5
2	5	3	4	1
4	1	2	5	3
5	3	4	1	2
1	2	5	3	4

30. Uždavinys. Petriukas sugalvojo tam tikrą natūralųjį skaičių. Po to jis padaugino jį iš 13 ir užbraukė paskutinį gautosios sandaugos skaitmenį. Po to jis tą naująjį skaičių padaugino iš 5 ir vėl užbraukęs paskutinį gautosios sandaugos skaitmenį gavo skaičių 23. Kokį skaičių buvo sugalvojęs Petriukas?

Sprendimas. Jeigu Petriukas, padauginęs kažką iš 5 ir užbraukęs paskutinį skaitmenį, buvo gavęs 23, tai prieš paskutinio skaitmens užbraukimą jis galėjo būti gavęs arba 230, arba 235. Todėl prieš paskutinį dauginimą iš 5 jis galėjo turėti 46 arba 47. Todėl prieš pirmąjį užbraukimą jis galėjo turėti arba triženklį skaičių 46X, arba triženklį skaičių 47Y. Tačiau pastebėkime, kad neegzistuoja jokio pavidalo 47Y skaičiaus, kuris dalintųsi iš 13, nes vienintelis 46X pavidalo skaičius, kuris dalijasi iš 13, yra 468 (ir todėl sekantis tada jau būtų skaičius 468 + 13 = 481). Taigi Petriukas iš pradžių bus sugalvojęs skaičių 468 : 13 = 36. **Atsakymas. 36**

31. Uždavinys. Vilniaus miesto olimpiadoje dalyvavo 120 dalyvių, kuriems buvo pasiūlyta spręsti po 5 uždavinius. Patikrinus darbus paaiškėjo, kad 1/3 visų dalyvių išsprendė lygiai po 1 uždavinį, ¼ - lygiai po 2 ir 1/5 – lygiai po 3 uždavinius. Bendras išspręstų uždavinių skaičius pasirodė esąs lygus 277. Nustatykite, ar radosi toks olimpiados dalyvis, kuris buvo išsprendęs visus 5 uždavinius.

Sprendimas. Iš sąlygos seka, kad 40 dalyvių išsprendė lygiai po 1 uždavinį, 30 dalyvių – lygiai po 2 ir 24 dalyviai – lygiai po 3 uždavinius. Tokiu būdu tie 40 + 30 + 24 = 94 dalyviai išsprendė 40·1 + 30·2 + 24·3 = 172 uždavinius. Jeigu kiekvienas iš likusiųjų 120 – 94 = 26 mokinių būtų išsprendęs ne daugiau kaip po 4 uždavinius, tai bendras išspręstųjų uždavinių skaičius būtų buvęs nedidesnis kaip 172 + 4·26 = 276. O kadangi bendras išspręstųjų uždavinių skaičius yra 277, tai tuomet mažiausiai 1 dalyvis bus išsprendęs visus 5 uždavinius.

Atsakymas. Taip, toks dalyvis tikrai radosi.

32. Uždavinys. Lygybėje MAMA · TĖ = 10 · TĖTĖ skirtingoms raidėms atitinka skirtingi, o vienodoms raidėms atitinka vienodi skaitmenys. Nustatykite, kam tada yra lygi suma M + A.

Atsakymas. 1. Padalinę „stulpeliu“ skaičių TĖTĖ iš skaičiaus TĖ mes gautume, kad TĖTĖ = TĖ · 101. Todėl MAMA = 10 · TĖTĖ : TĖ = 10 · 101 = 1010, vadinasi, M + A = 1 + 0 = 1.

33. Uždavinys. Ar galima į kvadratinės lentelės 3 × 3 langelius surašyti visus skaičius nuo 1 iki 9 įrašant po vieną skaičių į kiekvieną langelį taip, kad visų eilučių ir visų stulpelių skaičių sumos būtų

A) Nelyginės B) Lyginės

Sprendimas. A) Užtenka pateikti pavyzdį – juo gali būti kad ir tokia lentelė:

5	7	9
3	4	6
1	2	8

Antruoju atveju tenka truputį pasamprotauti – pirmiausiai pastebėti, kad visų visos lentelės skaičių suma yra 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45, o tai yra nelyginis skaičius. Todėl jeigu visų trijų eilučių arba visų trijų stulpelių skaičių sumos galėtų būti lyginės, tai 45 *b*ūtų trijų lyginių skaičių suma, o taip tikrai negali būti (nes lyginių skaičių suma yra lyginė).

Atsakymas. A) Gali; B) Negali.

34. Uždavinys. Užbraukus vieną keturženklio skaičiaus skaitmenį ir pridėjus jį prie to skaičiaus gavome „metų skaičių“ 2021. Nuo kokio keturženklio skaičiaus mes galėjome pradėti?

Sprendimas. Pirmiausiai pastebėkime, kad mes užbraukėme patį paskutinį to keturženklio skaičiaus skaitmenį, nes kitu atveju mes negalėtume gauti 2021, nes tas skaičius yra nelyginis. Toliau mes parinkinėdami skaitmenis gautume, kad tas keturženklis skaičius tai yra skaičius 1838. Tikrai užbraukę paskutinį jo skaitmenį gauname skaičių 183 ir 1838 + 183 = 2021. **Atsakymas.** 1838.

35. Uždavinys. Yra žinoma, kad tam tikra skaičių seka $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ su bet kuriuo n tenkina sąlygą $a_1 + a_2 + ... + a_n = n^2$. Raskite a_{2021}.

Sprendimas. Užrašome dvi „gretimas“ lygybes $a_1 + a_2 + ... + a_{2020} = 2020^2$ ir $a_1 + a_2 + ... + a_{2021} = 2021^2$ ir atėmę pirmą lygybę iš antros gauname, kad $a_{2021} = 2021^2 - 2020^2 = 4041$. **Atsakymas.** 4041.

36. Uždavinys. Petras sudaugino keletą pirminių (nebūtinai skirtingų) skaičių ir gavo skaičių *X*. Paulius dviem sumažino visus Petro parašytuosius skaitmenis ir sudauginęs juos gavo skaičių *Y*. Pasirodė, kad *X* : *Y* = 707. Koks galėjo būti skaičius *X*?

Sprendimas. Kadangi *X* = 707 · *Y* ir 707 = 101·7 ir 7 ir 101 yra pirminiai skaičiai, tai ir 7, ir 101 yra Petro skaičiaus daugikliai ir, vadinasi, skaičiai 99 = 101 – 2 ir 5 = 7 – 2 yra Pauliaus skaičiaus daugikliai. Tada

$707 = \frac{X}{Y} = \frac{101 \cdot 7 \cdot x}{99 \cdot 5 \cdot y}$, kur x – likusiųjų Petro skaičiaus, o y – likusiųjų Pauliaus daugiklių sandauga .

Dabar reikia, kad prastinant trupmeną $\frac{X}{Y}$ skaičiai 99 ir 5 susiprastintų, Tai yra, $x = 99 \cdot 5 \cdot a = 11 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a$ ir tada atitinkamai $y = 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot b$, kur a ir b – tam tikri sveikieji skaičiai. Tada turime

$707=\frac{X}{Y}=\frac{101\cdot 7\cdot 11\cdot 5\cdot 3\cdot 3\cdot a}{99\cdot 5\cdot 9\cdot 3\cdot 1\cdot 1\cdot b}$. Kadangi $\frac{X}{Y}$ yra sveikasis skaičius, tai naujai atsiradę skaičiaus Y dalikliai, tai yra skaičiai 9 ir 3, turi susiprastinti su skaičiaus a daugikliais. Vadinasi, $a=9\cdot 3\cdot c=3\cdot 3\cdot 3\cdot c$ ir tada atitinkamai $b=1\cdot 1\cdot 1\cdot d$, kur c ir d – tam tikri natūralieji skaičiai. Vadinasi, gauname

$707=\frac{X}{Y}=\frac{101\cdot 7\cdot 11\cdot 5\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot c}{99\cdot 5\cdot 9\cdot 3\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot d}$. Po suprastinimo gauname $707=\frac{X}{Y}=\frac{707c}{d}$, taigi c = d. Jeigu c turėtų pirminių daugiklių, tai d turėtų atitinkamai lygiai tiek pat dviem vienetais mažesnių daugiklių ir tada lygybė $c = d$ būtų neįmanoma. Todėl c = 1 ir, vadinasi, $X=101\cdot 11\cdot 7\cdot 5\cdot 3^5=9449055$

Atsakymas. 9449055.

37. Uždavinys. Iš skaitmenų 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 panaudojus kiekvieną skaitmenį po vieną kartą buvo sudaryti penki dviženkliai skaitmenys, kurie vėliau buvo sudėti. Ar tų penkių skaičių suma gali būti lygi A) 250; B) 270?

Sprendimas. Įsivaizduokime, kad mes tuos penkis skaičius sudedame stulpeliu. Jeigu jų suma baigiasi 0, tai tas reiškia, kad skaitmenų vienetų skiltyje suma baigiasi skaitmeniu 0. Toji vienetų skilčių skaitmenų suma gali būti lygi arba 10, arba 20 arba 30 (nes penkių skaitmenų suma negali būti didesnė kaip 9+8+7+6+5 = 35. O kadangi visų dešimties skaitmenų suma 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5+ 6 + 7 + 8 + 9 = 45, tai tada skaitmenų dešimčių skiltyje suma bus atitinkamai lygi 45 – 10 = 35, 45 – 20 = 25 arba 45 – 30 = 15. Ir, vadinasi, duotųjų penkių skaičių suma bus atitinkamai lygi 350 + 10 = 360, 250 + 20 = 270, arba 150 + 30 = 180. Tokiu būdu rezultatas A) 250 yra negalimas. O suma 270 gali būti gauta. Tai rodytų kad ir toks pavyzdys: 30 + 41 + 52 + 68 + 79 = 270.

Atsakymas: A) negali; B) gali.

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Karabaso-Barabaso barzda sudaro 40 procentų jo bendrosios masės. Po to kai Buratinas nukirpo jam gerą tos barzdos dalį, likusioji lyrinio herojaus barzdos dalis tesudarė jau tik 10 procentų jo bendrosios masės. Kokią Karabaso-Barabaso barzdos dalį nukirpo Buratinas?

2. Išspręskite lygčių sistemą

$$\left(\begin{array}{l} 1+x_1^{\ 2}=2x_2 \\ 1+x_2^{\ 2}=2x_3 \\ 1+x_3^{\ 2}=2x_4 \\ 1+x_4^{\ 2}=2x_1 \end{array}\right]$$

3. Raskite patį mažiausią natūralųjį skaičių N tokį, kad skaičius N + 15 dalijasi be liekanos iš 22, o skaičius N + 22 dalijasi be liekanos iš 15.

4. Raskite natūraliuosius skaičius m ir n, jeigu yra žinoma, kad iš trijų sekančių lygybių lygiai dvi lygybės yra teisingos, o trečioji yra klaidinga:

1) $4m + 9n = 135$; 2) $9m + 4n = 135$; 3) $6m + 11n = 240$.

Atsakyme užrašykite jų sumą $m + n$.

5. Keturženkliai skaičiai *abcd* ir *dcba* susideda iš tų pačių skaitmenų a, b, c ir d, tik parašytų atvirkščia eile. Jeigu mes juos abu sudėtume, tai gautume 13552. Kam yra lygi tų skaičių skaitmenų suma $a + b + c + d$?

6. Programuotojai Jonas, Andrius ir Justas už programos surašymą gavo honorarą ir pasidalino jį atitinkamai santykiu 4:5:7. Jeigu jie būtų pasidalinę jį santykiu 3 : 4 : 6, tai vienas iš jų būtų gavęs pusantro tūkstančio eurų daugiau negu kad jis iš tikrųjų kad gavo. Kokia yra toji honoraro suma?

7. Duoti 7 skirtingi natūralieji skaičiai. Yra žinoma, kad lygiai penki iš jų dalijasi iš 2, lygiai 5 – iš 3 ir taip pat lygiai penki iš jų dalijasi be liekanos iš 5. Kokią pačią mažiausią reikšmę gali įgyti pats didžiausias iš tų 7 skaičių?

8. Iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir 9 buvo sudaryti trys triženkliai skaičiai tokiu būdu, kad kiekvienas skaitmuo buvo panaudotas po vieną kartą. Ar gali būti taip, kad tų trijų triženklių skaičių suma yra lygi: A) 1500; B) 1800.

9. Petriukas užrašė natūralųjį skaičių A. Tada jis nutrynė vieną jo skaitmenį ir gavo skaičių B. Pasirodė, kad $A + B = 627701$. Koks galėjo būti skaičius A? Nurodykite visas galimas jo reikšmes.

10. Raskite patį mažiausią iš 8 besidalijantį natūralųjį skaičių, kurio dešimtainiame užraše lygiai po du kartus dalyvauja tik skaitmenys 1, 2, 3, 4, 5 ir 6.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2021 m. kovo 5 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematikos metodikos centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: http://www.mif.vu.lt/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

(2019–2021)

1. Raskite visas natūraliųjų skaičių *x* ir *y* poras (*x; y*), kurios tenkina lygybę $x^2 + y^2 = 74$.

Sprendimas. Aišku, jei pora (*x*, *y*) yra lygties sprendinys, tai ir pora (*y*, *x*) taip pat jos sprendinys. Taigi užtenka nagrinėti atvejį $x \geq y$. Tuomet $x^2 \leq 74 \leq 2x^2$, taigi $6 < x < 9$. Kai $x = 7$, tai $y^2 = 74 - x^2 = 25$, todėl pora (7, 5) yra lygties sprendinys. Kai $x = 8$, tai $y^2 = 10$, bet 10 nėra jokio natūraliojo skaičiaus kvadratas. Taigi lygtis turi du sprendinius (7, 5) ir (5, 7).

Ats.: (7, 5) ir (5, 7)

2. Išspręskite lygtį $\dfrac{3}{x^2 + x + 1} + x^2 + x = 3.$

Sprendimas. $t = x^2 + x + 1.$ Tada $\dfrac{3}{t} + t = 4 \Rightarrow t^2 + 4t + 3 = 0 \Rightarrow (t - 2)^2 = 1 \Rightarrow t = 2 \pm 1 \Rightarrow t \in \{1; 3\}.$

Toliau:

1) $x^2 + x + 1 = 1 \Rightarrow x \in \{-1; 0\}.$

2) $x^2 + x + 1 = 3 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x \in \{-2; 1\}.$

Ats.: $x \in \{-2; -1; 0; 1\}.$

3. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} x^2 + xy + 3 = 0, \\ y - 3x - 7 = 0. \end{cases}$

Sprendimas. Iš antrosios lygties turime, kad $y = 3x + 7.$ Įrašę į pirmąją sistemos lygtį gauname, kad $x^2 + x(3x + 7) + 3 = 0,$ t. y. $4x^2 + 7x + 3 = 0.$ Ši lygtis turi du sprendinius $x_1 = -1,$ $x_2 = -\dfrac{3}{4}.$ Tuomet $y_1 = 3 \cdot (-1) + 7 = 4,$ $y_2 = 3 \cdot \left(-\dfrac{3}{4}\right) + 7 = \dfrac{19}{4}.$

Ats.: $(-1, 4), \left(-\dfrac{3}{4}, \dfrac{19}{4}\right).$

4. Dviratininkas 96 km atstumą nuvažiavo 2 h greičiau negu buvo numatęs, nes kas valandą nuvažiavo 1 km daugiau negu planavo nuvažiuoti per 1 h 15 min. Kokiu greičiu važiavo dviratininkas?

Sprendimas. Tegu *v* yra planuotas greitis (km/h). Pagal sąlygą,

$$\frac{96}{v} - \frac{96}{1{,}25v + 1} = 2.$$

Gauname lygtį $1{,}25v^2 - 11v - 48 = 0,$ o iš jos planuotą greitį $v = 12$ km/h.

Ieškomas greitis yra $1{,}25v + 1 = 16$ (km/h).

Ats.: 16 km/h.

5. Valgomosios druskos tirpalas gautas sumaišius tris skirtingos koncentracijos 20 kg, 50 kg ir 80 kg valgomosios druskos tirpalus. Pirmojo tirpalo druskos koncentracija yra 10 %, antrojo 2 %, trečiojo 15 %. Kokia gautojo tirpalo druskos koncentracija?

Sprendimas. $20 \cdot 0{,}1 = 2,$ $50 \cdot 0{,}2 = 1,$ $80 \cdot 0{,}15 = 12.$ Tuomet gautojo tirpalo koncentracija

$$\frac{15 \cdot 100}{150} = 10 \ \%.$$

Ats.: 10 %

6. Išspręskite nelygybę $|x-2|\cdot(x-1)>0$.

Sprendimas. Kadangi $|x-2|\geq 0,$ tai duotoji nelygybė yra ekvivalenti sistemai $x-2\neq 0,\ \ x-1>0.$ Iš čia gauname, kad nelygybės sprendinių aibė yra $(1,2)\cup(2,+\infty)$.

Ats.: $x\in(1;2)\cup(2;\infty)$.

7. . Skaičiai x ir y yra teigiami, be to $x+y=10$. Kokia mažiausia sumos $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ reikšmė?

Sprendimas. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{10}{x(10-x)}=\frac{10}{-x^2+10x}=\frac{10}{25-(x^2-10x+25)}=\frac{10}{25-(x-5)^2}\geq\frac{10}{25}=\frac{2}{5}.$ Akivaizdu, kad ši reikšmė įgyjama, kai $x=y=5$.

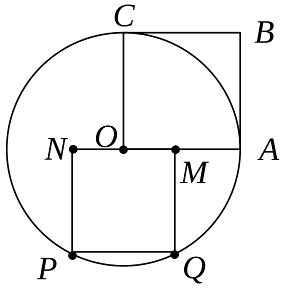
Ats.: $\frac{2}{5}$.

8. Skaičius $n+1$ dalijasi iš 3. Nustatykite, ar skaičius $4+7n$ dalijasi iš 3.

Sprendimas. $4+7n=(6n+3)+(n+1)=3(2n+1)+(n+1)$; abu dėmenys dalijasi iš 3, todėl ir jų suma dalijasi iš 3.

Ats.: Taip.

9. Apskritimo centras yra taškas O, kvadrato $OABC$ kraštinės OA ir OC yra to apskritimo spinduliai. Kitas kvadratas $MNPQ$ yra nubrėžtas taip, kad taškas M yra atkarpoje OA, taškas O yra kraštinės MN vidurio taškas, o P ir Q yra apskritimo taškai. Raskite kvadratų plotų santykį.

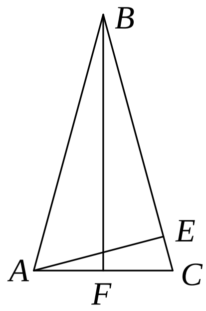


1 pav.

Sprendimas. Tarkime, kad (1 pav.) $OA=r,\ \ MN=x.$ Pagal sąlygą $OM=\frac{x}{2}$, todėl iš Pitagoro teoremos trikampiui OMQ turime $x^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=r^2$, taiga $x^2=\frac{4}{5}r^2$. Kadangi kvadratų plotai sutinka kaip jų kraštinių kvadratai, tai ieškomasis santykis lygus 4:5.

Ats.: 4:5.

10. Trikampis ABC yra lygiašonis, $AB=BC$, aukštinė BF yra du kartus ilgesnė už aukštinę AE. Raskite kampo prie pagrindo kosinusą.



2 pav.

Sprendimas. Statieji trikampiai ACE ir BCF turi bendrą kampą C, todėl jie yra panašieji (2 pav.). Iš čia gauname, kad $\frac{AE}{BF}=\frac{AC}{BC}$. Todėl $\cos\angle C=\frac{FC}{BC}=\frac{0{,}5AC}{BC}=0{,}5\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Ats.: $\frac{1}{4}$.

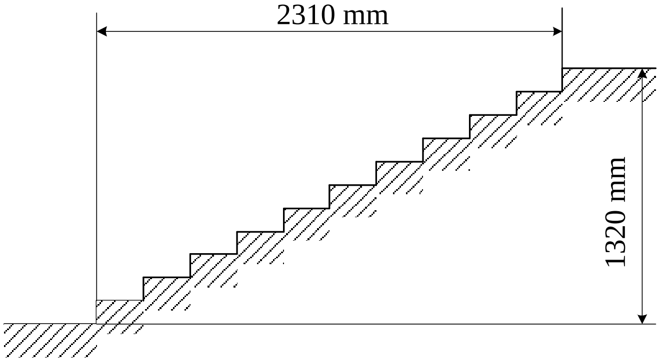
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA

L I E T U V O S J A U N Ų J Ų M A T E M A T I K Ų M O K Y K L A

PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

(2019–2021)

1. Paveiksle pateiktas mieste esančių laiptų skersinis pjūvis. Apskaičiuokite laiptų vienos pakopos aukštį ir plotį (gylį).



Sprendimas. Tai – „uždavinys pastabumui ir dėmesiui“. Paveiksle pateiktas vertikalusis matmuo apima vienuolika laiptų pakopų, o horizontalusis matmuo – dešimt laiptelių pločių (gylių).

Todėl laiptų vienos pakopos aukštis yra $1320:11=120$ (mm), o plotis (gylis) – $2310:10=231$ (mm).

Ats.: Laiptelių aukštis 120 mm, plotis (gylis) 231 mm.

2. Per tam tikrą laiką motociklininkas nuvažiavo iš kaimo į miestą. Jei jis važiuotų 4 km/h lėčiau, tai nuvažiuotų į miestą 1 h vėliau. Jei motociklininkas važiuotų 6 km/h greičiau, tai kelionė truktų tik 80 % to laiko, kurį jis važiavo. Raskite pradinį motociklininko greitį ir atstumą tarp kaimo ir miesto.

Sprendimas. I būdas. Tegu motociklininkas iš kaimo į miestą važiavo x km/h greičiu ir užtruko kelionėje t h. Tai atstumas tarp kaimo ir miesto yra tx km.

Pagal sąlygos pirmąją dalį sudarome lygtį:

$$(x-4)(t+1)=tx. \tag{1}$$

Pagal sąlygos antrąją dalį sudarome lygtį:

$$(x+6)\cdot 0{,}8t=tx. \tag{2}$$

Išsprendę (2) lygtį turime $x=24$ km/h. Tai įrašę į (1) lygtį gauname $t=5$ h. Vadinasi, atstumas tarp kaimo ir miesto yra $24\cdot 5=120$ (km).

II būdas. Sakykime, kad atstumas tarp kaimo ir miesto yra S km, motociklininko greitis – v km/h, tai motociklininko važiuotas laikas – $\frac{S}{v}$ h.

Pagal sąlygos pirmąją dalį,

$$\frac{S}{v-4}=\frac{S}{v}+1. \tag{1}$$

Pagal sąlygos antrąją dalį,

$$\frac{S}{v+6}=0{,}8\frac{S}{v}. \tag{2}$$

Sprendžiame (2) lygtį jos abi puses padalįję iš S $(S\neq 0)$:

$v=0{,}8v+4{,}8;\quad 0{,}2v=4{,}8;\quad v=24$ km/h.

Tai įrašę į (1) lygtį gauname $S=120$ km.

Ats.: 24 km/h, 120 km.

3. Raitelis ir pėstysis išvyko iš tos pačios vietovės A į vietovę B. Raitelis nuvykęs į B 50 minučių anksčiau už pėstyjį, tuojau pat grįžo atgal ir susitiko su pėsčiuoju už 2 km nuo B. Visą kelią iš A į B ir atgal raitelis nujojo per 1 h 40 min. Raskite atstumą tarp A ir B, raitelio ir pėsčiojo greičius.

Sprendimas. I būdas (algebrinis metodas). Tegu x km/h – raitelio greitis, y km/h – pėsčiojo greitis, S km – atstumas tarp vietovių A ir B.

Pagal sąlygą sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \frac{2S}{x} = 1\frac{2}{3}, \\ \frac{S}{y} - \frac{S}{x} = \frac{5}{6}, \\ \frac{S-2}{y} = \frac{S+2}{x}. \end{cases}$$

Iš sistemos pirmosios lygties akivaizdu, kad $S = \frac{5}{6}x$, o iš antrosios lygties gauname, kad $\frac{5}{6}\frac{x}{y} - \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$ arba $\frac{x}{y} - 1 = 1$, t. y. $x = 2y$. Vadinasi, $S = \frac{5}{3}y$.

Atsižvelgę į tai turime, kad $\frac{\frac{5}{3}y-2}{y} = \frac{\frac{5}{3}y+2}{2y}$ arba $\frac{5}{3} - \frac{2}{y} = \frac{5}{6} + \frac{1}{y}$. Todėl $\frac{3}{y} = \frac{5}{6}$; $5y = 18$; $y = 3{,}6$ km/h, o $x = 7{,}2$ km/h ir $S = 6$ km.

II būdas (aritmetinis metodas). Kadangi kol pėstysis pasiekė vietovę B, raitelis per tą laiką spėjo sugrįžti į vietovę A, tai reiškia, kad raitelio judėjimo greitis yra dvigubai didesnis už pėsčiojo greitį. Vadinasi, kai raitelis pasiekė vietovę B, o pėstysis buvo nuėjęs tik atstumo AB pusę, todėl, kai raitelis pasuko atgal, tarp jo ir pėsčiojo buvo atstumas lygus $\frac{1}{2}AB$.

Kai raitelis susitiko su pėsčiuoju, šis buvo nuėjęs trečdalį atstumo $\frac{1}{2}AB$, t. y. $\frac{1}{6}AB$, o raitelis nujojęs $\frac{2}{3}$ atstumo $\frac{1}{2}AB$, t. y. $\frac{1}{6}AB$, o raitelis nujojęs $\frac{2}{3}$ atstumo $\frac{1}{2}AB$, t. y. $\frac{2}{3}$ atstumo $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}AB = \frac{1}{3}AB$. Kadangi tai pagal sąlygą 2 km, vadinasi, atstumas AB lygus $2 : \frac{1}{3} = 6$ (km).

Raitelio greitis lygus 6 km : 50 min = 7,2 km/h, o pėsčiojo – 7,2 : 2 = 3,6 (km/h).

Ats.: 6 km, 7,2 km/h, 3,6 km/h.

4. *Senovinis uždavinys:* „Du žmonės išėjo iš vienos vietos, aplink miestą, ir vienas jų ėjo po 4 varstus per valandą, kitas po $3\frac{1}{3}$ varsto; o aplink tą miestą yra 15 varstų. Reikia sužinoti: po kiek valandų tie du žmonės susitiko ir kiek kartų kiekvienas jų apėjo miestą?“

Sprendimas. Einančių žmonių nutolimas/priartėjimas $4 - 3\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ varsto per valandą. Kadangi aplink miestą yra 15 varstų, tai žmonės susitiks pirmą kartą po $15 : \frac{2}{3} = 15 \cdot \frac{3}{2} = 22{,}5$ (h). Vienas jų (lėčiau einantis) per tą patį laiką apeis $\frac{3\frac{1}{3} \cdot 22{,}5}{15} = \frac{10 \cdot 22{,}5}{3 \cdot 15} = 5$ kartus, o kitas (greitesnysis) – $\frac{4 \cdot 22{,}5}{15} = 6$ kartus.

Ats.: Po 22,5 h; 6 kartus, 5 kartus.

5. Ratu, kurio ilgis 999 m, ta pačia kryptimi slenka du kūnai ir susitinka kas 37 minutės. Kas kiek laiko susitiktų šie kūnai, judėdami tuo pačiu ratu vienas priešais kitą, jeigu žinoma, kad vienas kūnas slenka 4 kartus greičiau už kitą.

Sprendimas. I būdas (algebrinis metodas). Tegu vieno kūno slinkimo greitis yra x m/min, tai kito – $4x$ m/min. Kūnų atsilikimo/nutolimo greitis $4x - x = 3x$ (m/min). Pagal sąlygą:

$$999:3x = 37; \quad 333:x = 37; \quad x = 9 \text{ (m/min)}.$$

Vadinasi, lėčiau slenkantis kūnas juda 9 m/min greičiu, o greičiau – $9 \cdot 4 = 36$ (m/min) greičiu.

Judėdami vienas priešais kitą kūnai per minutę priartėja $36 + 9 = 45$ ir susitinka kas $999:45 = 22{,}2$ (min).

II būdas (aritmetinis metodas). Kadangi vienas kūnas už kitą slenka 4 kartus greičiau, trigubai lėčiau slenkančio kūno greitis $999:37 = 27$ (m/min), tai jo greitis $27:3 = 9$ (m/min), o greičiau slenkančio kūno greitis $9 \cdot 4 = 36$ (m/min).

Judėdami vienas priešais kitą kūnai per minutę priartėja $36 + 9 = 45$ (m) ir susitinka kas $999:45 = 22{,}2$ (min).

Ats.: 22,2 min.

6. Ketvirtadalį kelio automobilis važiavo 60 km/h greičiu, trečdalį kelio – 80 km/h greičiu. Kokiu greičiu važiavo automobilis likusią kelio dalį, jeigu žinoma, kad visą kelią jis važiavo vidutiniu $77\frac{1}{7}$ km/h greičiu?

Sprendimas. Sakykime, kad likusią kelio dalį automobilis važiavo x km/h greičiu. Kadangi vidutinis greitis yra nuvažiuoto kelio ir laiko, per kurį šis kelias nuvažiuotas, santykis, tai jeigu kelio ilgis yra s km, tai automobilis:

- ketvirtadalį kelio nuvažiavo per $\frac{s}{4}:60 = \frac{s}{240}$ (h),
- trečdalį kelio nuvažiavo per $\frac{s}{3}:80 = \frac{s}{240}$ (h),
- likusią kelio dalį $s - \frac{s}{4} - \frac{s}{3} = \frac{5s}{72}$ nuvažiavo per $\frac{5s}{12}:x = \frac{5s}{12x}$ (h).

Vadinasi, automobilio kelionė truko $\frac{s}{240} + \frac{s}{240} + \frac{5s}{72} = \frac{s(2x+100)}{240x} = \frac{s(x+50)}{120x}$ h.

Pagal sąlygą:

$$s:\frac{s(x+50)}{120x} = 77\frac{1}{7} \quad \text{arba} \quad \frac{120x}{x+50} = \frac{540}{7}.$$

Iš čia $840x = 540x + 540 \cdot 50$ ir $x = 90$ km/h.

Ats.: 90 km/h.

7. Vyksta trijų skautų grupių 30 km turistinės varžybos. Kai finišavo pirmoji grupė, antroji buvo atsilikusi 3 km, o kai finišavo ši – trečioji grupė nuo jos buvo atsilikusi irgi 3 km. Kokiu atstumu nuo pirmos grupės, kai ši finišavo, buvo atsilikusi trečia grupė? Žinoma, kad grupės keliavo pastoviais greičiais.

Sprendimas. Kai finišavo pirmoji skautų grupė, antroji buvo nukeliavusi 27 km. Vadinasi, antrosios grupės judėjimo greitis buvo $\frac{27}{30} = \frac{9}{10}$ pirmosios grupės judėjimo greičio.

Analogiškai, trečiosios grupės judėjimo greitis sudarė $\frac{27}{30} = \frac{9}{10}$ antrosios grupės judėjimo greičio.

Todėl per tą laiką, kai finišavo pirmoji grupė, trečioji buvo įveikusi $30 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} = 24{,}3$ (km).

Vadinasi, trečioji skautų grupė nuo pirmosios grupės, kai ši finišavo, buvo atsilikusi $30 - 24{,}3 = 5{,}7$ (km).

Ats.: 5,7 km.

8. Akvilė, eidama žemyn eskalatoriumi, kuris irgi juda žemyn, suskaičiavo 40 laiptelių. Kiek laiptelių suskaičiuotų mergaitė eidama šiuo eskalatoriumi aukštyn, jeigu eidama nejudančiu suskaičiuotų 60 laiptelių?

Sprendimas. Tegu eskalatoriaus

- ilgis yra $s = 60$ laiptelių (pagal sąlygą),
- judėjimo greitis – u laiptelių per laiko vienetą.

Akvilės ėjimo greitis – v laiptelių per laiko vienetą $(v > u)$, o laiptelių, kuriuos suskaičiuotų mergaitė, eidama judančiu eskalatoriumi, skaičius yra x.

Akvilė eina eskalatoriumi žemyn $(v+u)$ greičiu, todėl s laiptelių atstumą nueina per tiek pat laiko, per kiek nueina 40 laiptelių, eidama v greičiu. Vadinasi,

$$\frac{s}{v+u}=\frac{40}{v}. \tag{1}$$

Aukštyn Akvilė eina $(v-u)$ greičiu, todėl s laiptelių atstumą nueina per tiek pat laiko, per kiek nueina x laiptelių, eidama v greičiu. Vadinasi,

$$\frac{s}{v-u}=\frac{x}{v}. \tag{2}$$

Padaliję (1) lygybę iš (2), gauname:

$$\frac{v-u}{v+u}=\frac{40}{x}. \tag{3}$$

Kadangi $s=60$ laiptelių, tai iš (1) lygybės turime:

$$\frac{60}{v+u}=\frac{40}{v}; \quad \frac{3}{v+u}=\frac{42}{v}; \quad v=2u.$$

Gautą išraišką įrašę į (3) lygybę turime:

$$\frac{2u-u}{2u+u}=\frac{40}{x}; \quad \frac{u}{3u}=\frac{40}{x}; \quad x=120.$$

Taigi eidama aukštyn žemyn judančiu eskalatoriumi, Akvilė suskaičiuotų 120 laiptelių.

Ats.: 120 laiptelių.

9. Mama šiandien vienu išėjimu iš namų nori apsilankyti penkeriose vietose: parduotuvėje, vaistinėje, bibliotekoje, banke ir teatro kasoje. Kiek iš viso mamai yra galimų šių objektų aplankymo maršrutų variantų, jeigu žinoma, kad parduotuvė ir vaistinė yra viename pastate?

Sprendimas. Pagal sąlygą akivaizdu, kad mamos norimi vienu išėjimu aplankyti penkeri objektai yra keturiuose pastatuose. Apsilankyti pirmame iš jų yra 4 galimybės, antrame – 3 galimybės, trečiame – dvi , o ketvirtame lieka viena. Taigi iš viso apsilankyti pastatuose yra $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ galimybės. Kadangi kiekvienoje iš jų yra dar du atvejai: viename iš pastatų pirmiau užeiti į parduotuvę, o tik po to – į vaistinę ir atvirkščiai. Vadinasi, mamai galimų penkiuose objektuose apsilankymo maršrutų yra $24\cdot2=48$ variantai.

Ats.: 48 maršrutų variantai.

10. Iš Seredžiaus Nemunu, kurio tėkmės greitis 3 km/h Jurbarko link pasroviui išplaukė kateris, kurio savasis greitis b km/h. Tuo pačiu metu iš A. panemunių miestelio pasitikti katerio išplaukė motorinė valtis, kurios savasis greitis c km/h $(c>5)$. Susitikimas įvyko B vietovėje, nutolusioje nuo Seredžiaus a km. Įsitikinkite, kad katerio ir valties plaukimo laikas iki susitikimo būtų tas pats, jeigu Nemuno tėkmės greitis šiame ruože būtų 4 km/h.

Sprendimas. Kai Nemuno tėkmės greitis 3 km/h, tai kateris ir valtis iki susitikimo plaukė $\frac{a}{b+3}$ h, o tarp Seredžiaus ir panemunių miestelio A yra

$$a+\frac{a}{b+3}\cdot(c-3)=a\left(1+\frac{c-3}{b+3}\right)=a\left(\frac{b+3+c-3}{b+3}\right)=\frac{a(b+c)}{b+3}\ \text{(km)}.$$

Jeigu Nemuno tėkmės greitis būtų 4 km/h, o katerio ir valties plaukimo laikas x h, tai iki susitikimo kateris nuplauktų $(b+4)x$ km, o valtis $(c-4)x$ km. Pagal sąlygą:

$$(b+4)x+(c-4)x=\frac{a(b+c)}{b+3},\ \text{todėl}\ x(b+4+c-4)=\frac{a(b+c)}{b+3}.$$

Vadinasi, $x=\frac{a(b+c)}{b+3}:(b+c)$ ir $x=\frac{a}{b+3}$ h.

Taigi katerio ir motorinės valties plaukimo iki susitikimo, išplaukus vienu laiku iš Seredžiaus ir panemunių miestelio A, laikai yra vienodi esant Nemuno tėkmės greičiui tiek 3 km/h, tiek ir 4 km/h.

Sprendimus parengė Kazimieras Pulmonas

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

(2019–2021)

1. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases} \tag{1}$$

Sprendimas. Iš antros lygties gauname, kad $x_3 = 2x_1 + x_2 - 1$. Įrašę šią išraišką į L_1 ir L_3, toliau spręskime dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais (x_1 ir x_2) sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2(2x_1 + x_2 - 1) = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + (2x_1 + x_2 - 1) = 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 = 5. \end{cases}$$

Aišku, kad ši sistema yra ekvivalenti tiesinei lygčiai $5x_1 + 3x_2 = 5$.

Pasirinkę $x_2 = t$, $t \in \mathbf{R}$, gauname, kad $x_1 = 1 - 0{,}6t$ ir $x_3 = 2(1 - 0{,}6t) + t - 1 = 1 - 0{,}2t$.

Taigi kiekvienas trejetas $(1 - 0{,}6t; t; 1 - 0{,}2t)$, $t \in \mathbf{R}$, yra (1) sistemos sprendinys.

Ats.: $(1 - 0{,}6t; t; 1 - 0{,}2t)$, $t \in \mathbf{R}$.

2. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 = 11. \end{cases} \tag{2}$$

Sprendimas. Iš L_1 gauname, kad $x_3 = x_1 + 2x_2 - 2$. Šią x_3 išraišką įrašę į L_2, L_3 ir L_4, gauname trijų lygčių su nežinomaisiais x_1 ir x_2 sistemą

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2(x_1 + 2x_2 - 2) = 9, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3(x_1 + 2x_2 - 2) = 7, \\ 4x_1 + 6x_2 + (x_1 + 2x_2 - 2) = 11, \end{cases}$$

o atlikę veiksmus – sistemą

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 = 13, \\ 5x_1 + 8x_2 = 13, \\ 5x_1 + 8x_2 = 13, \end{cases}$$

ekvivalenčią lygčiai $5x_1 + 8x_2 = 13$.

Pasirinkę $x_2 = t$, $t \in \mathbf{R}$, gausime, kad $x_1 = 2{,}6 - 1{,}6t$ ir $x_3 = (2{,}6 - 1{,}6t) + 2t - 2 = 0{,}6 + 0{,}4t$.

Taigi (2) sistema turi be galo daug sprendinių, kuriuos galima užrašyti pavidalu $(2{,}6 - 1{,}6t; t; 0{,}6 + 0{,}4t)$, $t \in \mathbf{R}$.

Ats.: $(2{,}6 - 1{,}6t; t; 0{,}6 + 0{,}4t)$, $t \in \mathbf{R}$.

3. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases} \tag{3}$$

Sprendimas. Iš L_1 gauname nežinomojo x_3 išraišką nežinomaisiais x_1 ir x_2: $x_3 = x_1 - x_2 - 2$. Įrašę ją į kitas sistemos lygtis, gausime:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + \ (x_1 - \ x_2 - 2) = 6, \\ \ x_1 - 2x_2 + 2(x_1 - \ x_2 - 2) = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3(x_1 - \ x_2 - 2) = 7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 8, \\ 3x_1 - 4x_2 = 7, \\ 6x_1 - 8x_2 = 13. \end{cases}$$

Aišku, kad ši sistema (taigi ir (3) sistema) neturi sprendinių, nes nėra tokios realiųjų skaičių x_1 ir x_2 poros, kad reiškinio $3x_1 - 4x_2$ reikšmė būtų lygi ir 8, ir 7.

Ats.: $\varnothing$.

4. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 7. \end{cases} \tag{4}$$

Sprendimas. Taikykime Gauso metodą.

Iš pradžių trečią lygtį L_3 pakeiskime tiesiniu dariniu $2L_2 - L_3$, o ketvirtą lygtį L_4 pakeiskime tiesiniu dariniu $-3L_1 + L_3$. Gausime ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 7. \end{cases} \tag{5}$$

Dabar (5) lygčių sistemos trečią lygtį pakeiskime tiesiniu dariniu $3L_2 - L_3$, o ketvirtą lygtį – tiesiniu dariniu $2L_2 + L_4$. Gausime ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ -x_3 + 4x_4 = 9. \end{cases} \tag{6}$$

Baigdami nežinomųjų eliminavimo procesą, (6) sistemos trečią lygtį pakeiskime ekvivalenčia lygtimi $\frac{1}{2}L_3$, o ketvirtą lygtį – tiesiniu dariniu $\frac{1}{2}L_3 + L_4$. Gausime ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_4 = 10. \end{cases}$$

Iš L_4 išplaukia, kad $x_4 = 2$. Tada iš L_3 gauname, kad $x_3 = -1$, o iš L_3 – $x_2 = 0$. Pagaliau iš L_1 apskaičiuojame $x_1 = 1$.

Taigi (4) sistema turi vienintelį sprendinį (1; 0; –1; 2).

Ats.: (1; 0; –1; 2).

5. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases} \tag{7}$$

Sprendimas. Taikydami Gauso metodą, eliminuokime nežinomąjį x_1 iš L_2, L_3 ir L_4. Tuo tikslu L_2 pakeiskime tiesiniu dariniu $-2L_1+L_2$, lygtį L_3 – tiesiniu dariniu L_1-2L_3, o lygtį L_4 – tiesiniu dariniu L_1-2L_4. Gausime ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2-\ x_3-2x_4=3, \\ \quad -3x_2+4x_3+3x_4=4, \\ \quad\ \ 6x_2-3x_3-8x_4=-5, \\ \qquad\quad -5x_3+2x_4=-3. \end{cases}$$

Dabar trečią šios sistemos lygtį pakeiskime tiesiniu dariniu $2L_2+L_3$ ir gausime ekvivalenčią lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2-\ x_3-2x_4=3, \\ \quad -3x_2+4x_3+3x_4=4, \\ \qquad\qquad 5x_3-2x_4=3, \\ \qquad\quad -5x_3+2x_4=-3. \end{cases} \tag{8}$$

Nežinomąjį x_3 galima eliminuoti iš L_4 pakeičiant ketvirtą lygtį tiesiniu dariniu L_3+L_4. Tačiau L_3+L_4 yra tapatybė $0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4=0$, todėl (8) sistema yra ekvivalenti trijų lygčių sistemai

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2-\ x_3-2x_4=3, \\ \quad -3x_2+4x_3+3x_4=4, \\ \qquad\qquad 5x_3-2x_4=3. \end{cases} \tag{9}$$

Tegu t, $t\in\mathbf{R}$, yra nežinomojo x_4 reikšmė ($x_4=t$, $t\in\mathbf{R}$). Tada nežinomųjų x_1, x_2 ir x_3 reikšmėms rasti (9) sistemą perrašykime trikampės sistemos pavidalu

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2-\ x_3=3+2t, \\ \quad -3x_2+4x_3=4-3t, \\ \qquad\qquad 5x_3=3+2t. \end{cases}$$

Iš jos ir gauname, kad

$$x_3=\frac{3+2t}{5},\ \ x_2=\frac{-8+23t}{15},\ \ x_1=\frac{43-28t}{15}.$$

Matome, kad (7) sistema turi be galo daug sprendinių, kuriuos galima užrašyti pavidalu

$$\left(\frac{43-28t}{15};\ \frac{-8+23t}{15};\ \frac{3+2t}{5};t\right),\ t\in\mathbf{R}.$$

Ats.: $\left(\frac{43-28t}{15};\ \frac{-8+23t}{15};\ \frac{3+2t}{5};t\right),\ t\in\mathbf{R}.$

6. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad +\ x_3+2x_4=4, \\ \qquad\quad x_2+x_3+3x_4=5, \\ 2x_1-\ x_2-2x_3+x_4=0, \\ -x_1+\ x_2+3x_3+x_4=4. \end{cases} \tag{10}$$

Sprendimas. Iš pradžių L_3 pakeiskime tiesiniu dariniu $2L_1-L_3$, o L_4 – tiesiniu dariniu L_1+L_4. Gausime ekvivalenčią lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad +\ x_3+2x_4=4, \\ \qquad x_2+\ x_3+3x_4=5, \\ \qquad x_2+4x_3+3x_4=8, \\ \qquad x_2+4x_3+3x_4=8. \end{cases}$$

Aišku, kad ši lygčių sistema yra ekvivalenti trijų lygčių sistemai

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 8. \end{cases}$$

Dabar L_3 pakeiskime tiesiniu dariniu $-L_2 + L_3$. Gausime ekvivalenčią lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 3x_3 \quad\quad = 3. \end{cases} \tag{11}$$

Iš L_3 išplaukia, kad $x_3 = 1.$ Vadinasi, (11) sistema ekvivalenti dviejų lygčių sistemai

$$\begin{cases} x_1 \quad + 2x_4 = 3, \\ x_2 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Tarę, kad $x_4 = t,\ t \in \mathbf{R}$, gauname, kad $x_1 = 3 - 2t$ ir $x_2 = 4 - 3t.$

Taigi (10) sistema turi be galo daug sprendinių, kuriuos galima užrašyti pavidalu

$$(3 - 2t;\ 4 - 3t;\ 1;\ t),\quad t \in \mathbf{R}.$$

Ats.: $(3 - 2t;\ 4 - 3t;\ 1;\ t),\ t \in \mathbf{R}.$

7. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \quad\quad = 9, \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 8. \end{cases} \tag{12}$$

Sprendimas. Iš pradžių sukeiskime vietomis pirmą ir antrą lygtį:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \quad\quad = 9, \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 8. \end{cases}$$

Dabar eliminuokime x_1 iš L_2, L_3 ir L_4 lygčių. Tuo tikslu antrą lygtį pakeiskime tiesiniu dariniu $-2L_1 + L_2$, trečią lygtį – tiesiniu dariniu $-3L_1 + L_3$, o ketvirtą lygtį – tiesiniu dariniu $-5L_1 + L_4$. Gausime ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 7, \\ -3x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -11, \\ -3x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -12, \\ -6x_2 - 10x_3 - 6x_4 = -27. \end{cases} \tag{13}$$

Aišku, kad antra ir trečia šios sistemos lygtys bendrų sprendinių neturi. Vadinasi, sprendinių neturi ne tik (13), bet ir (12) sistema.

Ats.: $\varnothing$.

8. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad\quad\quad = 5, \\ x_2 + 2x_3 \quad\quad = 4, \\ x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 \quad\quad\quad + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6. \end{cases} \tag{14}$$

Sprendimas. Tegu $x_4 = t,\ t \in \mathbf{R}$. Tada iš L_3 gauname, kad $x_3 = 5 - 2t$; iš L_2 gauname, kad $x_2 = 4 - 2(5 - 2t) = -6 + 4t$, o iš L_1 – $x_1 = 5 - 2(-6 + 4t) = 17 - 8t.$

Tada iš L_4 gauname:

$$2(17-8t)+t=4 \;\Rightarrow\; t=2.$$

Vadinasi, realiųjų skaičių rinkinys (1; 2; 1; 2) tenkina pirmąsias keturias (14) sistemos lygtis. Aišku, kad jis tenkina ir penktą sistemos lygtį.

Taigi (14) sistema turi vienintelį sprendinį (1; 2; 1; 2).

Ats.: (1; 2; 1; 2).

9. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} = 6, \\ \phantom{x_1+{}} x_2 + x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10. \end{cases} \tag{15}$$

Sprendimas. Pirmą lygtį pakeiskime tiesiniu dariniu $L_5 - L_1$, antrą lygtį – tiesiniu dariniu $L_5 - L_2$, trečią lygtį – tiesiniu dariniu $L_5 - L_3$, o ketvirtą lygtį pakeiskime tiesiniu dariniu $L_5 - L_4$. Gausime ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} x_4 = 4, \\ x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \end{cases}$$

kuri turi vienintelį sprendinį (1; 2; 3; 4).

Ats.: (1; 2; 3; 4).

10. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ x_2 - x_3 = 1, \\ x_3 - x_4 = 2, \\ x_4 - x_5 = -9, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 2, \end{cases} \tag{16}$$

Sprendimas. Tegu $x_5 = t,\ t \in \mathbf{R}$. Tada:

$$L_4 \;\Rightarrow\; x_4 = t-9;$$
$$L_3 \;\Rightarrow\; x_3 = 2+(t-9) = t-7;$$
$$L_2 \;\Rightarrow\; x_2 = t-6;$$
$$L_1 \;\Rightarrow\; x_1 = t-4.$$

Šias nežinomųjų išraiškas įrašę į L_5, gausime lygtį

$$t-4+2(t-6)+3(t-7)+4(t-9)+5t = 2,$$

iš kurios išplaukia, kad $t=5$.

Vadinasi, skaičių rinkinys (1; –1; –2; –4; 5) yra vienintelis (16) sistemos sprendinys.

Ats.: (1; –1; –2; –4; 5).

Sprendimus parengė dr. Antanas Apynis

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

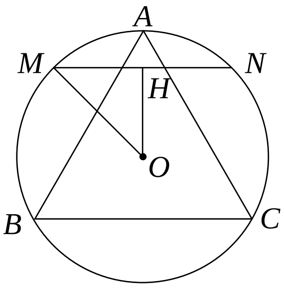
TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

(2019–2021)

1. Apskritimo styga, kurios ilgis 2, nuo apskritimo centro nutolusi atstumu 3. Į apskritimą įbrėžtas taisyklingasis trikampis. Raskite jo plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad apskritimo styga MN, kurios ilgis 2, nutolusi nuo jo centro O atstumu lygiu 3 (1 pav.). Nubrėžkime statmenį OH į tiesę MN, taškas H yra atkarpos vidurys, $MH = 1$, todėl iš stačiojo trikampio OMH išplaukia, kad apskritimo spindulys $OM = \sqrt{OH^2 + MH^2} = \sqrt{10}$. Pagal (1) formules taisyklingojo trikampio ABC, įbrėžto į šį apskritimą, kraštinė lygi $AB = 2OM\sin 60^0 = \sqrt{30}$. Taigi trikampio plotas $S = \frac{1}{2}AB^2\sin 60^0 = \frac{15\sqrt{3}}{2}$.

Ats.: $\frac{15\sqrt{3}}{2}$.

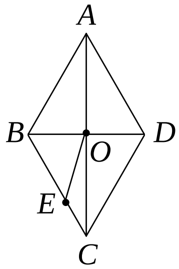


1 pav.

2. Rombo $ABCD$ kraštinės ilgis lygus 6, $\angle BAD = 60^0$, taške O susikerta rombo įstrižainės. Kraštinėje BC yra toks taškas E, kad $CE = 2$. Raskite atkarpos OE ilgį.

Sprendimas. Kadangi $AB = AD$ o $\angle BAD = 60^0$, tai trikampis ABD yra lygiakraštis, trikampis BCD taip pat (2 pav.). Lygiakraščio trikampio BDC kraštinėje CB yra taškas E, $CE = 2$, $EB = 4$, taškas O yra kraštinės BD vidurys, tai $OB = 3$. Trikampiui EOB taikome kosinusų teoremą ir turime $OE^2 = OB^2 + BE^2 - 2OB \cdot BE \cdot cos\, 60^0 = 13$, todėl $OE = \sqrt{13}$.

Ats.: $\sqrt{13}$.

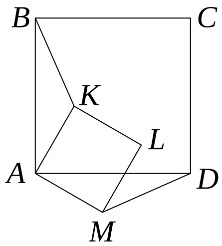


2 pav.

3. Kvadrato $ABCD$ viduje yra taškas K ir $BK = 12$. Nubrėžtas kvadratas $AKLM$, kurio viršūnė L yra kvadrato $ABCD$ viduje, o krsštinė LM kerta atkarpą AD. Raskite atkarpos MD ilgį.

Sprendimas. Kadangi $AB = AD, AK = AM$, o $\angle BAK = 90^0 - \angle DAK = \angle DAM$, tai trikampiai ABK ir ADM yra lygūs (3 pav.), todėl $MD = KB = 12$.

Ats.: 12.

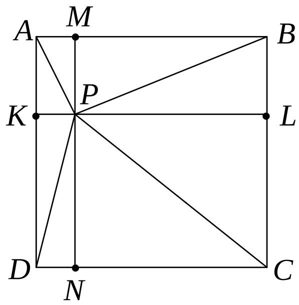


3 pav.

4. Kvadrato kraštinės ilgis lygus 6, jo viduje yra taškas, kuris nuo gretimų kvadrato viršūnių nutolęs atstumais 5 ir 3. Kokiais atstumais tas taškas yra nutolęs nuo kitų dviejų kvadrato viršūnių?

Sprendimas. Sakykime, kad kvadrato $ABCD$ viduje yra taškas P ir $PA = 5$, $PB = 3$ (4 pav.). Per tašką P nubrėžiame atkarpas $MN \perp AB$ ir $KL \perp AD$, čia $M \in AB, N \in CD, K \in AD, L \in BC$. Žymėdami $AM = x$, iš stačiųjų trikampių APM ir BPM turime $PM^2 = AP^2 - AM^2 = BP^2 - BM^2$. Išsprendę lygtį $5^2 - x^2 = 3^2 - (6 - x)^2$ gauname, kad $x = \frac{13}{3}$, taigi $AM = DN = \frac{13}{3}$, $BM = CN = 6 - \frac{13}{3} = \frac{5}{3}$. Tuomet $MP = BL = AK = \sqrt{AP^2 - AM^2} = \sqrt{9 - \frac{25}{9}} = \frac{2\sqrt{14}}{3}$, o $LC = PN = DK = AD - AK = \frac{18-2\sqrt{14}}{3}$. Iš stačiųjų trikampių PNC ir PND randame $PC = \sqrt{CN^2 + PN^2} = \sqrt{45 - 8\sqrt{14}}$, $PD = \sqrt{PN^2 + ND^2} = \sqrt{61 - 8\sqrt{14}}$.

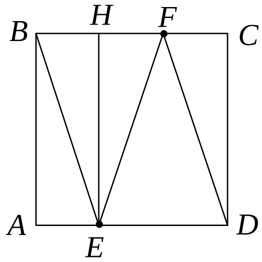
Ats.: $\sqrt{45 - 8\sqrt{14}}$ ir $\sqrt{61 - 8\sqrt{14}}$.



4 pav.

5. Taškas E yra kvadrato $ABCD$ kraštinėje AD, o taškas F – kraštinėje BC, be to, $BE = EF = FD = 30$. Raskite kvadrato kraštinės ilgį.

Sprendimas. Statieji trikampiai ABE ir CDF yra lygūs, nes lygūs jų statiniai $AB = CD$ ir įžambinės $BE = DF$. Todėl $AE = CF$, taigi ir $BF = ED$. (5 pav.). Nubrėžiame trikampio BEF aukštinę EH, kadangi keturkampis $AEHB$ yra stačiakampis, tai $AE = BH = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{3}BC$. Iš Pitagoro teoremos stačiajam trikampiui AEB gauname, kad $AB^2 + AE^2 = BE^2$, t. y. $AB^2 + (\frac{1}{3}AB)^2 = 900$. Iš čia $AB = 9\sqrt{10}$.

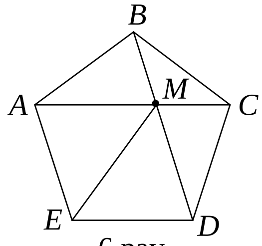


5 pav.

Ats.: $9\sqrt{10}$.

6. Taisyklingojo penkiakampio $ABCD$ kraštinės ilgis lygus 4, įstrižainės BD ir AC susikerta taške M. raskite atkarpos AM ilgį.

Sprendimas. Kaip įrodyta 4 pavyzdyje, taisyklingojo penkiakampio kampų didumai yra 108^0, trikampis BMC yra lygiašonis (6 pav.), kampas prie jo pagrindo lygus 36^0. Todėl $\angle ABM = 108^0 - 36^0 = 72^0$. Kadangi trikampis ABC taip pat lygiašonis, o jo kampas prie pagrindo taip pat lygūs 36^0, tai $\angle AMB = 180^0 - \angle MAB - \angle ABM = 72^0$. Kadangi kampai ABM ir AMB yra lygūs, trikampis ABM yra lygiašonis, taigi $AM = AB = 4$.

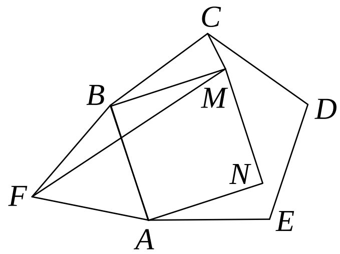


6 pav.

Ats.: 4.

7. Taisyklingojo penkiakampio $ABCDE$ išorėje nubrėžtas lygiakraštis trikampis ABF, o penkiakampio viduje – kvadratas $ABMN$. Raskite kampą FMC.

Sprendimas. Kadangi pagal sąlygą visų trijų daugiakampių kraštinės yra vienodo ilgio, tai trikampis FBM yra lygiašonis, $FB = BM$. Kadangi $\angle FBM = \angle ABF + \angle ABM = 60^0 + 90^0 = 150^0$, tai $\angle FMB = \frac{1}{2}(180^0 - \angle FBM) = 15^0$. Trikampis BMC taip pat lygiašonis, nes $BM = BC$. Kadangi $\angle MBC = \angle ABC - \angle ABM = 108^0 - 90^0 = 18^0$, tai $\angle BMC = \frac{1}{2}(180^0 - \angle MBC) = 81^0$. Todėl $\angle FMC = \angle FMB + \angle BMC = 96^0$.

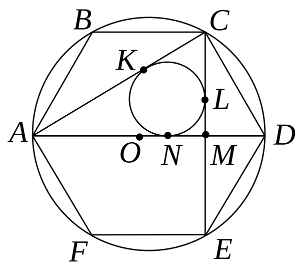


7 pav.

Ats.: 96^0.

8. Apie taisyklingąjį šešiakampį $ABCDEF$ apibrėžto apskritimo spindulys lygus 10, įstrižainės AD ir EC susikerta taške M. Raskite į trikampį ACM įbrėžto apskritimo spindulį

Sprendimas. Kaip matyti iš 6 pavyzdžio, stačiojo trikampio ACD įžambinė AD du kartus ilgesnė už statinį CD, todėl $\angle ACD = 30^0$. Kadangi $\angle ECD = \angle BAC = 30^0$, tai $\angle ACM = 90^0 - 30^0 = 60^0$, todėl $\angle AMC = 180^0 - 30^0 - 60^0 = 90^0$. Taigi trikampis ACM yra statusis, jo įžambinė $AC = \sqrt{3}R$, statinis CM yra prieš 30^0 laipsnių kampą, todėl $CM = \frac{\sqrt{3}}{2}R$, o kitas statinis $AM = \sqrt{AC^2 - CM^2} = \frac{3}{2}R$, čia $R -$ apibrėžto apie šešiakampį apskritimo spindulys. Jei r – įbrėžto į trikampį ACM apskritimo spindulys, o tas apskritimas taškuose K, L ir N liečia trikampio kraštines AC, CM ir AM (8 pav.), tai $MN = ML = r$, $AK = AN = AM - r = \frac{3}{2}R - r$, $KC = CL = MC - r = \frac{\sqrt{3}}{2}R - r$, tai iš lygybės $AK + KC = AC$ randame, kad $r = \frac{3-\sqrt{3}}{4}R = \frac{5}{2}(3 - \sqrt{3})$.

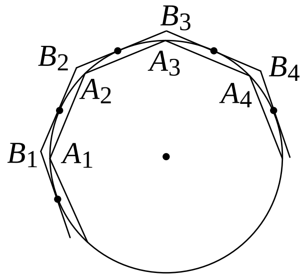


8 pav.

Ats.: $\frac{5}{2}(3 - \sqrt{3})$.

9. Taisyklingasis $n -$ kampis $A_1A_2 \dots A_n$ yra įbrėžtas į apskritimą, o taisyklingasis $n -$ kampis $B_1B_2 \dots B_n$ apibrėžtas apie tą patį apskritimą. Ar gali šių daugiakampių perimetrų santykis būti lygus 0,51?

Sprendimas. Sakykime, kad taškas O yra apskritimo centras, o jo spindulys lygus R (9 pav.), tuomet pagal (1) formules daugiakampio $A_1A_2 \dots A_n$ kraštinės ilgis $a_n = 2R\sin\frac{180^0}{n}$, o kadangi apskritimas yra įbrėžtas į daugiakampį $B_1B_2 \dots B_n$, tai jo kraštinė $b_n = 2R\,tg\,\frac{180^0}{n}$. Daugiakampių perimetrų santykis yra lygus jų kraštinių ilgių santykiui, todėl pagal sąlygą turime, kad $\frac{a_n}{b_n} = 0{,}51$. Įrašę kraštinių a_n ir b_n reikšmes gauname, kad daugiakampių kraštinių skaičius $n \geq 3$ turi tenkinti lygybę $\cos\frac{180^0}{n} = 0{,}51$. Kai $n = 3$, gauname $\cos 60^0 = \frac{1}{2} \neq 0{,}51$. Kai $n = 4$, tai $\cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0{,}51$. Kai $n > 4$, $\frac{180^0}{n} < 45^0$, todėl $\cos\frac{180^0}{n} > \cos 45^0 > 0{,}51$. Taigi daugiakampių, tenkinančių uždavinio sąlygą, negali būti.

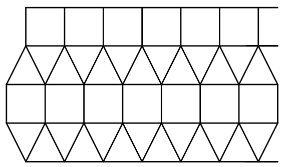


9 pav.

Ats.: negali.

10. Ar galima plokštumą padengti a) taisyklingaisiais trikampiais ir kvadratais? b) taisyklingaisiais penkiakampiais ir taisyklingaisiais trikampiais? Jei atsakymas teigiamas, nubraižykite tokio parketo fragmentą, o jei neigiamas, paaiškinkite, kodėl?

Sprendimas. Kai $n = 3, m = 4$, (2) lygybė tampa tokia $4k + 6l = 24$, t. y. $2k + 3l = 12$. Akivaizdu, kad $k = 3, l = 2$ yra šios lygties sprendinys. Taigi a) atveju parketas egzistuoja, o kiekviena viršūnė yra trijų trikampių ir dviejų kvadratų bendroji viršūnė (10 pav.). Kai $n = 5$, $m = 3$, iš (2) lygybės gauname, kad $9k + 5l = 30$. Iš čia $l = \frac{30-9k}{5}$. Kadangi l – natūralusis skaičius, tai turi būti $30 - 9k > 0$, t. y. $k < \frac{10}{3}$. Bet nei su $k = 1$, nei su $k = 2$, nei su $k = 3$ skaičius l nėra natūralusis. Taigi šiuo atveju parketas yra negalimas.


10 pav.

Ats.: a) galima (10 pav.); b) negalima.

Sprendimus parengė doc. Edmundas Mazėtis

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS
(2019–2021)

1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x-y=6, \\ x^3-y^3=126. \end{cases}$$

Sprendimas. Galime spręsti taip:

$$\begin{cases} x-y=6, \\ x^3-y^3=126 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=6, \\ (x-y)(x^2+xy+y^2)=126 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=6, \\ 6(x^2+xy+y^2)=126 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=x-6, \\ x^2+x(x-6)+(x-6)^2=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-6, \\ x^2+x^2-6x+x^2-12x+36=21 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=x-6, \\ 3x^2-18x+15=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-6, \\ x^2-6x+5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-6, \\ (x-3)^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=x-6, \\ x-3=\pm 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-6, \\ x=1 \text{ arba } x=5 \end{cases} \Rightarrow x=1, y=-5 \text{ arba } x=5,\ y=-1.$$

Taigi sistema turi du sprendinius: (1; –5) ir (5; –1).
Ats.: (1; –5), (5; –1).

2. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=91, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$$

Sprendimas. Ši lygčių sistema yra simetrinė, todėl nežinomuosius x ir y pakeiskime nežinomaisiais $u=x+y$ ir $v=xy.$ Tada

$$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+y^2)^2-(xy)^2=((x+y)^2-2xy)^2-(xy)^2=$$

$$=(u^2-2v)^2-v^2=(u^2-3v)(u^2-v),$$

$$x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3v=u^2-3v.$$

Įrašę šias išraiškas į sprendžiamą sistemą gausime:

$$\begin{cases} (u^2-3v)(u^2-v)=91, \\ u^2-3v=7; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} 7(u^2-v)=91, \\ u^2-3v=7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^2-v=13, \\ u^2-3v=7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^2=v+13, \\ u^2=3v+7; \end{cases} \Rightarrow 3v+7=v+13 \Rightarrow 2v=6 \Rightarrow v=3.$$

Belieka apskaičiuoti u:

$$u^2=3+13 \Rightarrow u=\pm 4.$$

Vadinasi, (1) sistema turi du sprendinius: (–4; 3) ir (4; 3).
Nežinomųjų x ir y reikšmių poroms (x; y) rasti reikia išspręsti dvi lygčių sistemas:

$$\begin{cases} x+y=-4, \\ xy=3 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} x+y=4, \\ xy=3. \end{cases}$$

Pagal Vijeto teoremą, pirmą sistemą atitinka kvadratinė lygtis $t^2+4t+3=0$ (jos sprendiniai yra –1 ir –3), o antrą – kvadratinė lygtis $t^2-4t+3=0$ (jos sprendiniai yra 1 ir 3).

Taigi skaičių poros (–1; –3) ir (–3; –1) yra pirmos sistemos sprendiniai, o skaičių poros (1; 3) ir (3; 1) yra antros sistemos sprendiniai.

Matome, kad pradinė lygčių sistema turi keturis sprendinius: (–1; –3), (–3; –1), (1; 3) ir (3; 1).

Ats.: (–1; –3), (–3; –1), (1; 3), (3; 1).

3. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ x+xy+y=5. \end{cases} \tag{2}$$

Sprendimas. Taikydami keitinius $u=x+y$ ir $v=xy$ gauname, kad

$$x^3+x^3y^3+y^3=(x^3+y^3)+(xy)^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)+(xy)^3=$$
$$=(x+y)((x+y)^2-3xy)+(xy)^3=u(u^2-3v)+v^3,$$
$$x+xy+y=u+v,$$

todėl vietoj (2) gausime lygčių sistemą

$$\begin{cases} u(u^2-3v)+v^3=17, \\ u+v=5, \end{cases} \tag{3}$$

kuri ekvivalenti lygčių sistemai

$$\begin{cases} u^3+v^3-3uv=17, \\ u+v=5. \end{cases}$$

Nežinomųjų u ir v atžvilgiu ji yra simetrinė, todėl spręsdami ją taikykime keitinius $t=u+v$ ir $p=uv$.

Kadangi $u^3+v^3=(u+v)(u^2-uv+v^2)=(u+v)((u+v)^2-3uv)=t(t^2-3p)$, tai vietoj (3) gausime lygčių sistemą

$$\begin{cases} t(t^2-3p)-3p=17, \\ t=5. \end{cases} \tag{4}$$

Įrašę $t=5$ į pirmą lygtį gauname:

$$5(25-3p)-3p=17 \Rightarrow 125-15p-3p=17 \Rightarrow p=6.$$

Taigi pora $t=5,\ \ p=6$ yra vienintelis (4) sistemos sprendinys.

Nežinomųjų u ir v poroms (u, v), tenkinančioms (3) sistemą, rasti reikia išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} u+v=5, \\ uv=6. \end{cases}$$

Taikydami Vijeto teoremą sudarome kvadratinę lygtį $t^2-5t+6=0$, kuri turi du sprendinius – skaičius 2 ir 3. Vadinasi, $u=2,\ \ v=3$ arba $u=3,\ \ v=2$.

Belieka išspręsti dvi lygčių sistemas:

$$\begin{cases} x+y=2, \\ xy=3 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} x+y=3, \\ xy=2. \end{cases}$$

Pirmą sistemą atitinka kvadratinė lygtis $t^2-2t+3=0$, kuri sprendinių neturi, o antrą – kvadratinė lygtis $t^2-3t+2=0$, kurios sprendiniai yra 1 ir 2.

Vadinasi, (2) lygčių sistema turi du sprendinius – skaičių x ir y poras (1; 2) ir (2; 1).

Ats.: (1; 2), (2; 1).

4. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{xy} = \dfrac{5}{2}, \\ x^2-y^2=3. \end{cases} \qquad (5)$$

Sprendimas. Kadangi

$$\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x}{y}+\frac{y}{x},$$

pažymėkime $t=\dfrac{y}{x}$ ir spręskime pirmą sistemos lygtį. Gausime:

$$\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{1}{t}+t=\frac{5}{2} \Rightarrow 2t^2-5t+2=0 \Rightarrow t=\frac{1}{2} \text{ arba } t=2.$$

Gauname du atvejus:

1) $y=\dfrac{1}{2}x$ ir 2) $y=2x$.

Jei $y=\dfrac{1}{2}x$, tai

$$x^2-y^2=3 \Rightarrow x^2-\frac{1}{4}x^2=3 \Rightarrow \frac{3}{4}x^2=3 \Rightarrow x=\pm 2.$$

Jei $y=2x$, tai lygtis $x^2-y^2=3$ sprendinių neturi.

Vadinasi, (5) lygčių sistema turi du sprendinius: (–2; –1) ir (2; 1).

Ats.: (–2; –1), (2; 1).

5. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y-1}-\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{x}, \\ y^2-x-5=0. \end{cases}$$

Sprendimas. Spręskime taip:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y-1}-\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{x}, \\ y^2-x-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{y^2-1}=\dfrac{1}{x}, \\ y^2-x-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2-1=2x, \\ y^2-1=x+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=x+4, \\ y^2=x+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4, \\ y^2=9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=4,\ y=-3 \text{ arba } x=4, y=3.$$

Taigi lygčių sistema turi du sprendinius – (4; –3) ir (4; 3).

Ats.: (4; –3), (4; 3).

6. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} (x+y)(x^2-y^2)=16, \\ (x-y)(x^2+y^2)=40. \end{cases} \qquad (6)$$

Sprendimas. Aišku, kad turi galioti lygybė

$$5(x+y)(x^2-y^2)=2(x-y)(x^2+y^2).$$

Nagrinėdami ją gauname:

$$5(x+y)^2(x-y)-2(x-y)(x^2+y^2)=0 \Rightarrow (x-y)(3x^2+10xy+3y^2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-y=0 \text{ arba } 3x^2+10xy+3y^2=0.$$

Nesunku įsitikinti, kad (6) sistema neturi sprendinių, tenkinančių sąlygą $x-y=0.$ Be to, pora (0; 0) taip pat nėra jos sprendinys.

Padaliję antrą lygybę iš x^2 $(x \neq 0)$ gauname:

$$3\left(\frac{y}{x}\right)^2+10\cdot\frac{y}{x}+3=0,$$

$$\frac{y}{x}=\frac{-10\pm\sqrt{64}}{6}=\frac{-5\pm4}{3}.$$

$$\frac{y}{x}=-3 \text{ arba } \frac{y}{x}=-\frac{1}{3}.$$

Vadinasi, $y=-3x$ arba $y=-\frac{1}{3}x$.

Įrašę į (6) pirmą lygtį gauname:

1) $\begin{cases} y=-3x, \\ (x-3x)(x^2-9x^2)=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-3x, \\ x^3=1 \end{cases} \Rightarrow x=1,\ y=-3;$

2) $\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x, \\ (x-\frac{1}{3}x)(x^2-\frac{1}{9}x^2)=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{3}x, \\ x^3=27 \end{cases} \Rightarrow x=3,\ y=-1.$

Taigi (6) sistema turi du sprendinius – (1; –3) ir (3; –1).
Ats.: (1; –3), (3; –1).

7. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2+2y^2=4, \\ 2xy=2y-5. \end{cases} \qquad (7)$$

Sprendimas. Aišku, kad turėtų galioti lygybė

$$(x^2+2y^2)+2xy=4+(2y-5).$$

Iš jos gauname:

$$(x+y)^2+y^2=2y-1 \Rightarrow (x+y)^2=-(y^2-2y+1) \Rightarrow (x+y)^2=-(y-1)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x+y=0 \text{ ir } y-1=0.$$

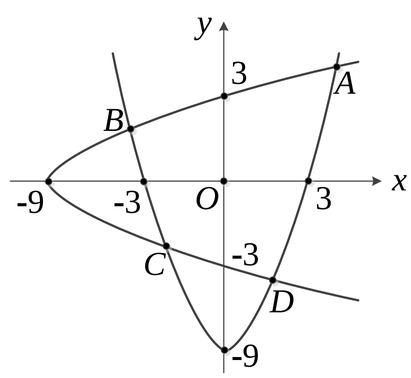
Vadinasi, (7) sistema gali turėti tik vieną sprendinį – skaičių porą (–1; 1). Bet ji netenkina nei pirmos, nei antros (7) sistemos lygties.

Lygčių sistema sprendinių neturi.
Ats.: $\varnothing$.

8. Raskite parabolių, kurių lygtys yra $y=x^2-9$ ir $x=y^2-9$, susikirtimo taškų koordinates.

Sprendimas. Iš paveikslo matyti, kad reikia rasti keturių abiejų parabolių susikirtimo taškų A, B, C ir D koordinates. Joms rasti reikia išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} y=x^2-9 \\ x=y^2-9. \end{cases} \qquad (8)$$



Iš lygybės $y-x=(x^2-9)-(y^2-9)$ gauname:

$$y-x=x^2-y^2 \Rightarrow (y-x)+(y-x)(y+x)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (y-x)(1+y+x)=0 \Rightarrow y=x \text{ arba } y=-x-1.$$

Jei $y=x$, tai

$$x=x^2-9 \Rightarrow x^2-x-9=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{37}}{2}.$$

Jei $y=-x-1$, tai

$$-x-1=x^2-9 \Rightarrow x^2+x-8=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2}.$$

Taigi (8) lygčių sistema turi 4 sprendinius: $\left(\frac{1-\sqrt{37}}{2};\frac{1-\sqrt{37}}{2}\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{37}}{2};\frac{1+\sqrt{37}}{2}\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{33}}{2};\frac{-1+\sqrt{33}}{2}\right)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{2};\frac{-1-\sqrt{33}}{2}\right)$.

Belieka išsiaiškinti, kuriuos taškus atitinka šie sprendiniai.

Ats.: A koordinatės $\left(\frac{1+\sqrt{37}}{2};\frac{1+\sqrt{37}}{2}\right)$, B koordinatės $\left(\frac{-1-\sqrt{33}}{2};\frac{-1+\sqrt{33}}{2}\right)$, C koordinatės $\left(\frac{1-\sqrt{37}}{2};\frac{1-\sqrt{37}}{2}\right)$, D koordinatės $\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{2};\frac{-1-\sqrt{33}}{2}\right)$.

9. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{5xy}{x+y}=6, \\ \dfrac{4xz}{x+z}=3, \\ \dfrac{3yz}{y+z}=2. \end{cases} \tag{9}$$

Sprendimas. Aišku, kad nė viena (9) sistemos sprendinio (x; y; z) komponenetė negali būti lygi nuliui. Todėl pirma lygtis yra ekvivalenti lygčiai $5=6\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)$, antra – lygčiai $4=3\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)$, o trečia lygtis yra ekvivalenti lygčiai $3=2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{y}\right)$. Pažymėję

$$a=\frac{1}{x},\ b=\frac{1}{y},\ c=\frac{1}{z}$$

gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} a+b \quad =\dfrac{5}{6}, \\ a \quad +c=\dfrac{4}{3}, \\ \quad b+c=\dfrac{3}{2}. \end{cases} \tag{10}$$

Sudėję visas tris lygtis gausime, kad

$$a+b+c=\frac{11}{6}.$$

Iš čia ir (10) išplaukia, jog

$$a=\frac{11}{6}-(b+c)=\frac{11}{6}-\frac{3}{2}=\frac{1}{3},$$
$$b=\frac{11}{6}-(a+c)=\frac{11}{6}-\frac{4}{3}=\frac{1}{2},$$
$$c=\frac{11}{6}-(a+b)=\frac{11}{6}-\frac{5}{6}=1.$$

Vadinasi, $x=3$, $y=2$, $z=1$, o trejetas (3; 2; 1) yra vienintelis (9) sistemos sprendinys.

Ats.: (3; 2; 1).

10. Raskite visus realiųjų skaičių x, y ir z trejetus (x; y; z), kad kiekvienas iš jų būtų lygus kitų dviejų skaičių sumos kvadratui.

Sprendimas. Pagal sąlygą, $x=(y+z)^2$, $y=(z+x)^2$ ir $z=(x+y)^2$. Taigi reikia išspręsti šią lygčių sistemą

$$\begin{cases} x=(y+z)^2, \\ y=(z+x)^2, \\ z=(x+y)^2. \end{cases} \tag{11}$$

Pirmiausia atkreipkime dėmesį į tai, kad būtinai $x \geq 0$, $y \geq 0$ ir $z \geq 0$.

Iš pirmos lygties atėmę antrą lygtį gausime:

$$\begin{aligned} &x-y=(y+z)^2-(z+x)^2; \\ &x-y=((y+z)-(z+x))((y+z)+(z+x)), \\ &x-y=(y-x)(x+y+2z), \\ &(x-y)+(x-y)(x+y+2z)=0, \\ &(x-y)(1+x+y+2z)=0. \end{aligned}$$

Iš čia išplaukia, kad $y=x$.

Iš pirmos lygties atėmę trečią lygtį analogiškais veiksmais gausime, kad $z=x$.

Vadinasi, turi būti $x=y=z$.

Tada iš pirmos lygties gausime:

$x=(x+x)^2 \Rightarrow 4x^2-x=0 \Rightarrow x(4x-1)=0 \Rightarrow x=0$ arba $x=\dfrac{1}{4}$.

Taigi (10) sistema turi du sprendinius – trejetus (0; 0; 0) ir $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$.

Ats.: (0; 0; 0), $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$.

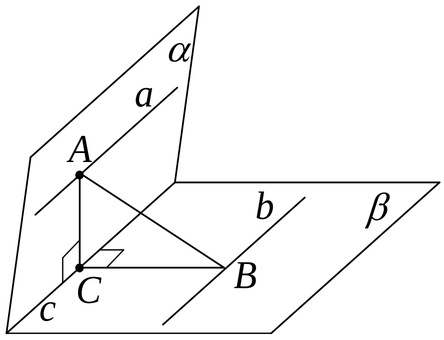
Sprendimus parengė dr. Antanas Apynis

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

(2019-2021)

1. Plokštumos α ir β sudaro 45^0 laipsnių dvisienį kampą, jų sankirtos tiesėje c pažymėtas taškas C, iš jo plokštumose α ir β iškelti statmenys tiesei c, juose atidėtos atkarpos CA plokštumoje α ir CB plokštumoje β taip, kad $CA = 2CB$. Per taškus A ir B nubrėžtos dvi lygiagrečios tiesės – tiesė a plokštumoje α ir tiesė b plokštumoje β. Atstumas tarp tiesių a ir b lygus d. Raskite atstumus nuo tiesės c iki tiesių a ir b.

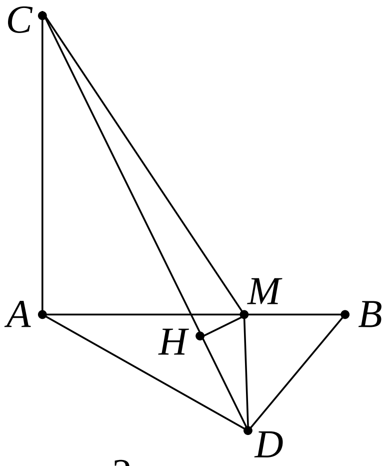


1 pav.

Sprendimas. Kaip įrodyta 1 pavyzdyje, tiesės a ir b yra lygiagrečios su plokštumų α ir β susikirtimo tiese c (1 pav.). Kadangi $CA \perp c$, $CB \perp c$, tai kampas ACB yra dvisienio kampo tarp plokštumų α ir β tiesinis kampas, taigi $\angle ACB = 45^0$. Tiesės AB ortogonalioji projekcija plokštumoje β yra tiesė CB. Kadangi tiesė CB yra statmena tiesei b, tai pagal trijų statmenų teoremą gauname, kad tiesė AB yra statmena tiesei b, taigi ji statmena ir tiesei a. Taigi atkarpa AB yra lygiagrečių tiesių a ir b bendras statmuo, o jos ilgis $AB = d$ yra duotasis atstumas tarp šių tiesių. Žymėdami $CB = x, CA = 2x$ trikampiui ABC taikome kosinusų teoremą ir gauname: $AB^2 = CB^2 + CA^2 - 2CB \cdot CA \cdot \cos\angle ACB$, t. y. $d^2 = x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \cos 45^0 = x^2(5 - 2\sqrt{2})$. Taigi $x^2 = \frac{d^2}{5-2\sqrt{2}} = \frac{d^2}{17}(5 + 2\sqrt{2})$.

Ats. $\sqrt{\frac{5+2\sqrt{2}}{17}}d$ ir $2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{2}}{17}}d$.

2. Iš atkarpos $AB = 6$ galų nubrėžti du spinduliai, kurie yra statmeni tarpusavyje ir statmeni atkarpai AB. Tuose spinduliuose atidėtos atkarpos $AC = 6$, $BD = 3$. Raskite atstumą nuo atkarpos AB vidurio taško iki tiesės CD.

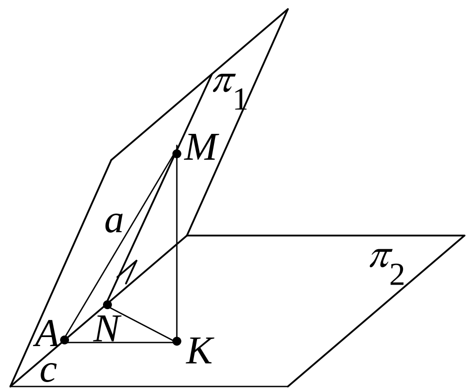


2 pav.

Sprendimas. Sakykime, kad taškas M yra atkarpos AB vidurio taškas (2 pav.), $AM = MB = 3$, tai iš uždavinio sąlygos išplaukia, kad ieškomasis atstumas yra trikampio CMD aukštinės MH, nubrėžtos iš viršūnės M ilgis. Taikydami Pitagoro teoremą statiesiems trikampiams ABD, ACD, ACM ir DBM, gauname, kad $AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{45}$, $CD = \sqrt{AC^2 + AD^2} = 9$, $CM = \sqrt{AC^2 + AM^2} = \sqrt{45}$, $DM = \sqrt{MB^2 + BD^2} = \sqrt{18}$. Kadangi CD yra ilgiausioji trikampio CMD kraštinė, tai aukštinės pagrindo taškas H yra kraštinėje CD. Todėl trikampio CMD aukštinės ilgį $MH = x$ rasime lygybėje $CH = CD - HD$ įrašę $CH = \sqrt{CM^2 - MH^2} = \sqrt{45 - x^2}$, $HD = \sqrt{DM^2 - x^2} = \sqrt{18 - x^2}$. Gauname lygtį $\sqrt{45 - x^2} = 9 - \sqrt{18 - x^2}$. Pakėlę abi puses kvadratu ir suprastinę, gauname, kad $\sqrt{18 - x^2} = 3$, taigi $x = 3$.

Ats.: 3.

3. Dvisienio kampo tarp plokštumų π_1 ir π_2 didumas lygus β, iš jų sankirtos tiesės c taško A nubrėžta tiesė a, esanti plokštumoje π_1 ir su tiese c sudaranti kampą α. Kokį kampą ta tiesė a sudaro su plokštuma π_2?



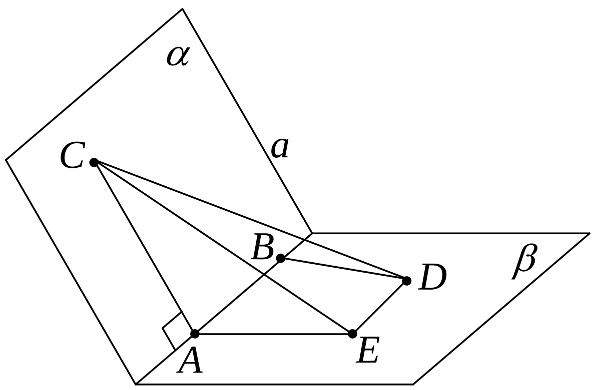
3 pav.

Sprendimas. Tiesėje a pasirinkime tašką M ir sakykime, kad $AM = m$ (3 pav.). Iš taško M nuleidžiame statmenį MN tiesei c ir statmenį MK plokštumai π_2. Tiesė AK yra tiesės a ortogonalioji projekcija plokštumoje π_2, todėl kampas MAK yra ieškomasis kampas tarp tiesės a ir plokštumos π_2. Iš stačiojo trikampio AMK turime, kad $\sin \angle MAK = \frac{MK}{AM}$. Kadangi tiesė a yra plokštumoje π_2 ir statmena tiesei MN, tai pagal trijų statmenų teoremą ji statmena ir tiesės MN projekcijai plokštumoje π_2, t. y. ji statmena tiesei NK. Iš čia išplaukia, kad kampas MNK yra dvisienio kampo tarp plokštumų π_1 ir π_2 tiesinis kampas, taigi $\angle MNK = \beta$. Iš stačiojo trikampio MNK turime, kad $MK = MNsin\ \angle MNK = MN \sin \beta$. Iš stačiojo trikampio AMN gauname, kad $MN = AM \sin \alpha = msin\ \alpha$, todėl $MK = m \sin \alpha \sin \beta$. Taigi $\sin \angle MAK = \frac{MK}{AM} = \frac{m \sin \alpha \sin \beta}{m} = \sin \alpha \sin \beta$.

Ats.: $\arcsin(\sin \alpha \sin \beta)$.

4. Plokštumos α ir β sudaro 120^0 kampą, jų sankirtos tiesėje yra atkarpa $AB = 5$. Iš taško A plokštumoje α iškeltas statmuo tiesei AB ir jame atidėta atkarpa $AC = 8$, iš taško B plokštumoje β iškeltas statmuo tiesei AB ir jame atidėta atkarpa $BD = 6$. Raskite atkarpos CD ilgį.

Sprendimas. Plokštumoje β iš taško A iškelkime statmenį tiesei AB ir jame atidėkime atkarpą $AE = BD = 6$ (4 pav.). Keturkampis $ABDE$ yra stačiakampis, $DE = AB = 5$. Kadangi $AC \perp AB$ ir $AE \perp AB$, tai kampas CAE yra dvisienio kampo tarp plokštumų α ir β tiesinis kampas, taigi $\angle CAE = 120^0$. Trikampiui ACE taikydami kosinusų teoremą gauname, kad $CE^2 = AC^2 + AE^2 - 2 \cdot AC \cdot AE \cdot \cos \angle CAE = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot (-\frac{1}{2}) = 148$. Tiesės CE ortogonalioji projekcija plokštumoje β yra tiesė AE, todėl pagal trijų statmenų teoremą tiesė DE yra statmena tiesės CE projekcijai, tai ji statmena ir tiesei CE, taigi kampas CED yra statusis. Stačiajam trikampiui CED taikome Pitagoro teoremą ir gauname, kad $CD = \sqrt{CE^2 + DE^2} = \sqrt{148 + 5^2} = \sqrt{173}$.

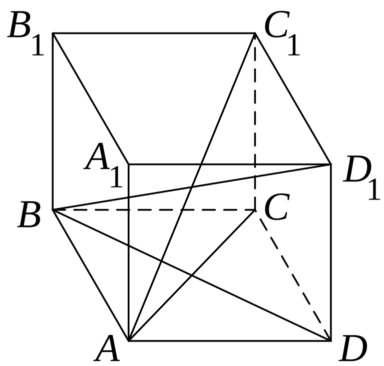


4 pav.

Ats.: $\sqrt{173}$.

5. Stačiojo gretasienio pagrindas yra lygiagretainis, kurio kraštinių ilgiai 3 ir 4, o kampas tarp jų lygus 120^0. Trumpesnioji gretasienio įstrižainė yra lygi ilgesniajai pagrindo įstrižainei. Raskite gretasienio tūrį.

Sprendimas. Sakykime, kad gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (5 pav.) pagrindas yra lygiagretainis $ABCD$, kuriame $AB = 3$, $AD = 4$, $\angle BAD = 120^0$, todėl $\angle ABC = 60^0$. Lygiagretainio įstrižainių ilgius rasime, trikampiams ABC ir ABD taikydami kosinusų teoremą: $AC^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 60^0 = 13$, $BD^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 120^0 = 37$, taigi ilgesnioji įstrižainė $BD = \sqrt{37}$. Iš stačiųjų trikampių DBD_1 ir ACC_1 pastebime, kad gretasienio įstrižainė AC_1 yra trumpesnė už įstrižainę BD_1, nes šių trikampių statiniai CC_1 ir DD_1 yra lygūs, o statinis AC trumpesnis už statinį BD. Taigi pagal sąlygą $AC_1 = BD = \sqrt{37}$, todėl gretasienio aukštinė $CC_1 = \sqrt{AC_1{}^2 - AC^2} = \sqrt{24}$. Kadangi pagrindo plotas $S = 3 \cdot 4 \cdot \sin 120^0 = 6\sqrt{3}$, tai gretasienio tūris $V = 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{24} = 36\sqrt{2}$.

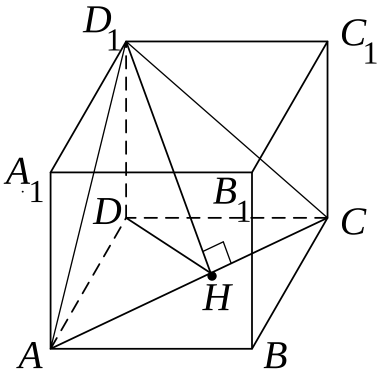


5 pav.

Ats.: $36\sqrt{2}$.

6. Per stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ viršūnes A, C ir D_1 nubrėžta plokštuma, kuri sudaro su pagrindo plokštuma 60^0 dvisienį kampą. Gretasienio pagrindo kraštinės lygios 3 ir 4. Raskite gretasienio tūrį.

Sprendimas. Plokštumoje, einančioje per stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ viršūnes A, C ir D_1 nubrėžkime statmenį D_1H iš viršūnės D_1 į tiesę AC (6 pav.). Pagal trijų statmenų teoremą tiesės D_1H ortogonalioji projekcija gretasienio pagrindo plokštumoje – tiesė DH yra statmena tiesei AC, taigi atkarpa DH yra stačiojo trikampio ADC aukštinė, nubrėžta į įžambinę. Kadangi $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5$, tai iš lygybės $AD \cdot DC = AC \cdot DH$ randame, kad $DH = \frac{AD \cdot DC}{AC} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$. Kadangi $D_1H \perp AC$, ir $DH \perp AC$, tai kampas D_1HD yra dvisienio kampo tarp plokštumos, nubrėžtos per viršūnes A, C ir D_1, ir gretasienio pagrindo plokštumos tiesinis kampas, taigi $\angle D_1HD = 60^0$. Iš stačiojo trikampio DD_1H randame gretasienio aukštinę $DD_1 = DH\, tg\, \angle D_1HD = \frac{12}{5}\sqrt{3}$. Todėl gretasienio tūris $V = AB \cdot AD \cdot DD_1 = \frac{144}{5}\sqrt{3}$.

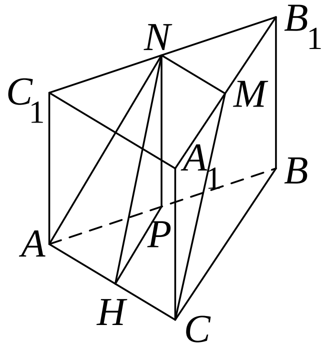


6 pav.

Ats.: $\frac{144}{5}\sqrt{3}$.

7. Taisyklingosios trikampės prizmės $ABCA_1B_1C_1$ pagrindo kraštinės ilgis lygus $\frac{8\sqrt{3}}{3}$, o šoninės briaunos ilgis lygus $2\sqrt{3}$. Per prizmės pagrindo kraštinę AC ir briaunos B_1C_1 vidurio tašką nubrėžta plokštuma. Raskite gautojo pjūvio plotą ir dvisienį kampą, kurį ši plokštuma sudaro su prizmės pagrindo plokštuma.

Sprendimas. Sakykime, kad taškas N yra briaunos B_1C_1 vidurio taškas (7 pav.), nubrėžkime per tašką N tiesę, lygiagrečią su tiese AC, kuri kerta briauną A_1B_1 taške M, tai pagal 6 teiginio rezultatą kertančioji plokštuma kerta prizmės pagrindą $A_1B_1C_1$ tiese MN, todėl trapecija $ACNM$ yra ieškomasis pjūvis. Atkarpa MN eina per trikampio $A_1B_1C_1$ kraštinės B_1C_1 vidurio tašką N ir lygiagreti su kraštine A_1C_1, taigi ji yra šio trikampio vidurinė linija, todėl $MN = \frac{1}{2}AC = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, o $A_1M = \frac{1}{2}AB = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Kadangi statieji trikampiai AA_1M ir CC_1N yra lygūs, tai ši trapecija lygiašonė, jos šoninės kraštinės ilgis $AM = \sqrt{{AA_1}^2 + A_1M^2} = \sqrt{\frac{52}{3}}$. Kertančiojoje plokštumoje nuleiskime statmenį $NH \perp AC$, atkarpa NH yra trapecijos aukštinė, $CH = \frac{1}{2}(AC - MN) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $NH = \sqrt{NC^2 - CH^2} = 4$. Taigi trapecijos plotas $S = \frac{AC+MN}{2} \cdot NH = 8\sqrt{3}$. Prizmės sienoje BCC_1B_1 iš taško N nuleiskime statmenį NP briaunai BC, tiesė HP yra tiesės NH ortogonalioji projekcija prizmės pagrindo plokštumoje, todėl pagal trijų statmenų teoremą $PH \perp AC$. Taigi kampas NHP yra ieškomojo dvisienio kampo tarp kertančiosios plokštumos ir prizmės pagrindo plokštumos tiesinis kampas. Iš stačiojo trikampio NPH randame, kad $\sin \angle NHP = \frac{NP}{NH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, todėl ieškomojo dvisienio kampo didumas yra 60^0.



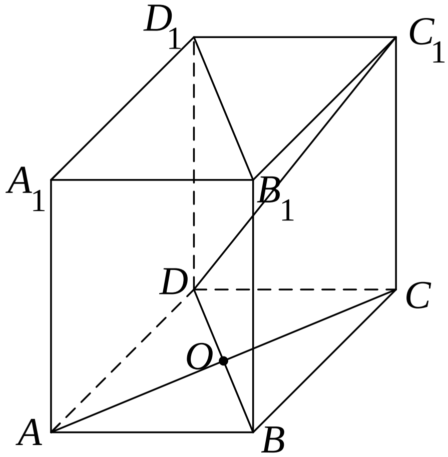
7 pav.

Ats.: $8\sqrt{3}$ ir 60^0.

8. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pagrindas yra kvadratas $ABCD$, kurio kraštinės ilgis lygus 4. Raskite atstumą tarp tiesių AA_1 ir B_1D.

Sprendimas. Nubrėžkime plokštumą, einančią per taškus B, B_1, D_1 ir D (8 pav.). Ji eina per tiesę B_1D ir lygiagreti su tiese AA_1. Kadangi kvadrato $ABCD$ įstrižainė AC yra statmena šiai plokštumai, tai ieškomasis atstumas yra lygus pusei įstrižainės AC ilgio, t. y. $2\sqrt{2}$.

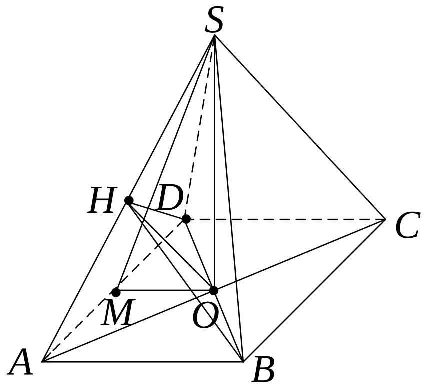
Ats.: $2\sqrt{2}$.



8 pav.

9. Taisyklingosios keturkampės piramidės visos šoninės sienos su pagrindo plokštuma sudaro kampus α. Raskite dvisienį kampą tarp gretimų piramidės šoninių sienų.

Sprendimas. Taisyklingosios keturkampės piramidės $SABCD$ pagrindas yra kvadratas $ABCD$, taške O susikerta jo įstrižainės, o pagal taisyklingosios piramidės apibrėžimą atkarpa SO yra jos aukštinė (9 pav.). Jei taškas M yra briaunų AD vidurio taškas, tai $SM \perp AD$ (nes trikampis SAD yra lygiašonis), o $OM \perp AD$, taigi kampas OMS yra dvisienio kampo tarp šoninės sienos SAD ir pagrindo plokštumos $ABCD$ tiesinis kampas, taigi $\angle OMS = \alpha$. Nubrėžiame trikampio ABS aukštinę BH, iš trikampių ABH ir ADH lygumo (AH – bendra kraštinė, $AB = AD, \angle BAH = \angle DAH$) išplaukia, kad atkarpa DH yra statmena briaunai AS, taigi kampas BHD yra dvisienio kampo tarp gretimų šoninių sienų ABS ir ADS tiesinis kampas. Žymėkime $AB = AD = a$, tuomet $BD = a\sqrt{2}$, $OM = \frac{a}{2}$, iš stačiojo trikampio SMO randame piramidės apotemą $SM = \frac{OM}{\cos\angle OMS} = \frac{a}{2\cos\alpha}$, tuomet iš trikampio AMS



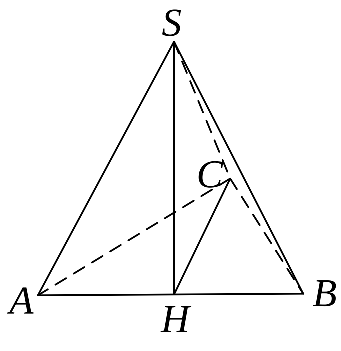
9 pav.

randame piramidės šoninės briaunos ilgį $AS = \sqrt{AM^2 + SM^2} = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2\cos\alpha})^2} = \frac{a}{2\cos\alpha}\sqrt{cos^2\alpha + 1}$. Trikampio ADS aukštinės DH ilgį rasime dvie būdais skaičiuodami jo plotą: $2S = AD \cdot SM = AS \cdot DH$. Iš čia $DH = BH = \frac{AD \cdot SM}{AS} = \frac{a}{\sqrt{cos^2\alpha+1}}$. Trikampiui BSD taikydami kosinusų teoremą rasime ieškomojo kampo BHD kosinusą: $\cos\angle BHD = \frac{BH^2+DH^2-BD^2}{2\cdot BH\cdot DH} = \frac{2\frac{a^2}{cos^2\alpha+1}-2a^2}{\frac{2a^2}{cos^2\alpha+1}} = \frac{1-cos^2\alpha-1}{2} = -cos^2\alpha$. Taigi ieškomasis kampas $\angle BHD = \pi - \arccos(cos^2\alpha)$.

Ats.: $\pi - \arccos(cos^2\alpha)$.

10. Trikampės piramidės visos šoninės briaunos lygios a, vienas plokščiasis kampas prie viršūnės yra statusis, kiti du lygūs po 60^0. Raskite piramidės tūrį.

Sprendimas. Sakykime, kad trikampės piramidės $SABC$ pagrindas yra trikampis ABC, plokščiasis kampas prie viršūnės ASB yra statusis, $\angle ACS = \angle BSC = 60^0$, $SA = SB = SC = a$ (10 pav.). Kadangi trikampiai SBC ir SAC yra lygiašoniai, o jų vienas kampas lygus 60^0, tai jie yra lygiakraščiai, todėl $AC = BC = a$. Iš stačiojo trikampio ASB surandame $AB = a\sqrt{2}$, o kadangi trikampyje ABC teisinga lygybė $AB^2 = AC^2 + BC^2$, tai šis trikampis yra statusis, $\angle ACB = 90^0$. Iš piramidės viršūnės nuleiskime statmenį SH į pagrindo plokštumą. Kadangi stačiųjų trikampių ASH, BSH ir CSH statinis CH yra bendras, o įžambinės lygios ($SA = SB = SC = a$), tai tie trikampiai yra lygūs, todėl $HA = HB = HC$. Taigi taškas H yra vienodai nutolęs nuo trikampio ABC viršūnių, todėl jis yra apie šį trikampį apibrėžto apskritimo centras. Bet apie statųjį trikampį apibrėžto apskritimo



10 pav.

centras yra įžambinės vidurio taškas, taigi taškas H yra briaunoje AB, $AH = HB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tuomet piramidės aukštinė $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, o jos tūris $V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}$.

Ats.: $\frac{a^3}{6\sqrt{2}}$.

Sprendimus parengė doc. Edmundas Mazėtis

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

6. LOGARITMAI

(2019–2021)

Sprendimai

1. Apskaičiuokite logaritminio reiškinio $\frac{1}{\log_5 3}+\frac{1}{\log_{125} 3}-\log_9 625-\log_3 225$ reikšmę.

Sprendimas. Reiškinyje pereikime prie logaritmų pagrindu 5:

$$\frac{1}{\log_5 3}+\frac{1}{\log_{125} 3}-\log_9 625-\log_3 225=\frac{1}{\log_5 3}+\frac{\log_5 125}{\log_5 3}-\frac{\log_5 625}{\log_5 9}-\frac{\log_5 225}{\log_5 3}=$$

$$\frac{1}{\log_5 3}+\frac{3}{\log_5 3}-\frac{4}{2\log_5 3}-\frac{2+2\log_5 3}{\log_5 3}=\frac{1}{\log_5 3}\left(1+3-2-2-2\log_5 3\right)=\frac{-2\log_5 3}{\log_5 3}=-2.$$

Ats. -2.

2. Apskaičiuokite $\lg\sqrt[3]{25}$, kai $\lg 64=m$.

Sprendimas. $\lg 64=m\Rightarrow \lg 2^6=m\Rightarrow 6\lg 2=m\Rightarrow \lg 2=\frac{m}{6}$; $\lg\sqrt[3]{25}=\lg 5^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\lg 5=\frac{2}{3}\lg\frac{10}{2}=\frac{2}{3}(1-\lg 2)$

$=\frac{2}{3}(1-\frac{m}{6})=\frac{6-m}{9}$.

Ats. $\frac{6-m}{9}$.

3. Įrodykite teiginį: jeigu $(ac)^{\log_a b}=c^2$, tai skaičiai $\log_a u, \log_b u$ ir $\log_c u$ su bet kuriuo teigiamu u yra aritmetinės progresijos nariai $(a>0, a\neq 1, b>0,\ b\neq 1, c>0, c\neq 1)$.

Įrodymas. Tam kad skaičiai $\log_a u, \log_b u$ ir $\log_c u$ būtų aritmetinės progresijos nariai, turi galioti lygybė $\log_a u+\log_c u=2\log_b u$ arba, perėjus prie logaritmų pagrindu *a*, lygybė $\log_a u+\frac{\log_a u}{\log_a c}=2\frac{\log_a u}{\log_a b}$. Abi šios lygybės puses padaliję iš $\log_a u$ gausime, kad reikia įrodyti lygybę $1+\frac{1}{\log_a c}=\frac{2}{\log_a b}$ arba $\log_a b\cdot(\log_a c+1)=2\log_a c$.

Nesunku įsitikinti, kad ši lygybė išplaukia iš sąlygos lygybės. Logaritmuojame pagrindu *a* abi lygybės $(ac)^{\log_a b}=c^2$ puses:

$$(ac)^{\log_a b}=c^2\Rightarrow \log_a (ac)^{\log_a b}=\log_a c^2\ \Rightarrow \log_a b\cdot\log_a (ac)=2\log_a c\Rightarrow \log_a b\cdot(1+\log_a c)=2\log_a c.$$

Teiginys įrodytas.

4. Išspręskite lygtį $\log_{0,5}^2 x-\log_{0,5} x^2=\log_{0,5}^2 3-1$.

Sprendimas. $\log_{0,5}^2 x-\log_{0,5} x^2=\log_{0,5}^2 3-1\Rightarrow \log_{0,5}^2 x-2\log_{0,5} x-(\log_{0,5}^2 3-1)=0$. Pažymėję $t=\log_{0,5} x$, gauname kvadratinę lygtį:

$$t^2-2t-(\log_{0,5}^2 3-1)=0\Rightarrow t_{1;2}=1\pm\sqrt{1+\log_{0,5}^2 3-1}\Rightarrow t_1=1+\log_{0,5} 3,\ t_2=1-\log_{0,5} 3.$$

Iš čia turėsime $\log_{0,5} x=1+\log_{0,5} 3\Rightarrow \log_{0,5} x=\log_{0,5}\frac{3}{2}\Rightarrow x_1=\frac{3}{2}$ arba

$\log_{0,5} x=1-\log_{0,5} 3\Rightarrow \log_{0,5} x=\log_{0,5}\frac{1}{6}\Rightarrow x_2=\frac{1}{6}$.

Ats. $\frac{3}{2};\frac{1}{6}$.

5. Išspręskite lygtį $\frac{2\lg x}{\lg(5x-4)}=1$.

Sprendimas. Lygties apibrėžimo sritis: $\begin{cases} 5x-4>0 \Rightarrow x>\frac{4}{5} \\ \lg(5x-4)\neq 0 \Rightarrow 5x-4\neq 1 \Rightarrow x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow x\in(\frac{4}{5};1)\cup(1;+\infty)$.

Sprendžiame lygtį: $\frac{2\lg x}{\lg(5x-4)}=1 \Rightarrow \lg x^2=\lg(5x-4) \Rightarrow x^2=5x-4 \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=4$. Kvadratinės lygties sprendinys $x=1$ nepriklauso nagrinėjamos lygties apibrėžimo sričiai, todėl duotosios lygties sprendinys yra $x=4$.

Ats. 4.

6. Išspręskite lygtį $\lg\sqrt{1+x}+3\lg\sqrt{1-x}=\lg\sqrt{1-x^2}$.

Sprendimas. Lygties apibrėžimo sritis: $\begin{cases} 1+x>0 \Rightarrow x>-1 \\ 1-x>0 \Rightarrow x<1 \end{cases} \Rightarrow x\in(-1;1)$. Sprendžiame lygtį:

$$\lg\sqrt{1+x}+3\lg\sqrt{1-x}=\lg\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \lg(\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{(1-x)}^3)=\lg\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \sqrt{1+x}\cdot\sqrt{(1-x)}^3=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+x)(1-x)^3-(1-x)(1+x)=0 \Rightarrow (1+x)(1-x)((1-x)^2-1)=0 \Rightarrow (1+x)\cdot(1-x)\cdot x\cdot(x-2)=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (1+x)\cdot(1-x)\cdot x\cdot(x-2)=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1,\ x_4=2$. Tik $x=0$ yra duotosios lygties sprendinys. Kitos reikšmės nepatenka į apibrėžimo sritį.

Ats. 0.

7. Išspręskite lygtį $x^{\log_{\sqrt{x}}(x-2)}=9$.

Sprendimas. Lygties apibrėžimo sritis: $x>2$. Po abiejų lygties pusių logaritmavimo pagrindu 3 gausime lygtį:

$$\log_{\sqrt{x}}(x-2)\cdot\log_3 x=2 \Rightarrow \frac{\log_3(x-2)\cdot\log_3 x}{\log_3\sqrt{x}}=2 \Rightarrow 2\log_3(x-2)=2 \Rightarrow \log_3(x-2)=1 \Rightarrow x-2=3 \Rightarrow x=5.$$

Ats. 5.

8. Išspręskite lygtį $\log_{3x}\frac{3}{x}+\log_3^2 x=1$.

Sprendimas. Lygties apibrėžimo sritis: $\begin{cases} x>0, \\ 3x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow x\in(0;\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3};\infty)$. Lygtyje pereikime prie logaritmų pagrindu 3. Gausime lygtį: $\frac{\log_3\frac{3}{x}}{\log_3(3x)}+\log_3^2 x=1 \Rightarrow \frac{1-\log_3 x}{1+\log_3 x}+\log_3^2 x=1$. Pažymėkime $t=\log_3 x$. Turėsime lygtį:

$$\frac{1-t}{1+t}+t^2=1 \Rightarrow t(t-1)(t+2)=0 \Rightarrow t_1=0,\ t_2=1,\ t_3=-2;$$

$$\log_3 x=0 \Rightarrow x=1,\ \log_3 x=1 \Rightarrow x=3,\ \log_3 x=-2 \Rightarrow x=\frac{1}{9}.$$

Ats. $\frac{1}{9};\ 1;\ 3$.

9. Išspręskite lygtį $\log_5 x\cdot\log_{16}25=1$.

Sprendimas. Lygties apibrėžimo sritis $x>0$. Lygtyje pereikime prie logaritmų pagrindu 5. Gausime:

$$\log_5 x\cdot\frac{\log_5 25}{\log_5 16}=1 \Rightarrow \log_5 x\cdot\frac{2}{2\log_5 4}=1 \Rightarrow \log_5 x=\log_5 4 \Rightarrow x=4.$$

Ats. 4.

10. Sudarykite dešimtainės logaritminės skalės intervalo [100; 950] eskizą atidėję šioje skalėje skaičius $x = 100, 150, 250, 350, ..., 950$ atitinkančias žymes.

Sprendimas.

Apskaičiuojame sąlygoje nurodytų skaičių dešimtainių logaritmų mantises (žr. lentelę dešinėje) ir gautas reikšmes atidedame skaičių tiesės atkarpoje (laikydami, kad pasiriktosios atkarpos ilgis lygus 1). Gauname dešimtainės logaritminės skalės atkarpą (žr. pav.), kurioje pažymėti skaičiai $x = 100, 150, 250, 350, ..., 950$.

x	$\{\lg x\}$
100	0
150	0,18
250	0,40
350	0,54
550	0,74
650	0,81
750	0,88
850	0,93
950	0,98

Sprendimus parengė E. Stankus

L I E T U V O S   J A U N Ų J Ų   M A T E M A T I K Ų   M O K Y K L A

7 tema. KOMBINATORIKA IR TIKIMYBĖS

(2019-2021)

Sprendimai

1. Iš aibės $A=\{a;b;c\}$ elementų sudarykite: a) visų derinių su pasikartojimais po 2 elementus aibę; b) visų derinių su pasikartojimais po 4 elementus aibę.

Sprendimas. Apskaičiuokime, kiek derinių su pasikartojimais turėtų būti abiem atvejais – pagal formulę $\overline{C}_n^m=C_{n+m-1}^m=\dfrac{(n+m-1)!}{m!\cdot(n-1)!}$ turėsime: a) $\overline{C}_3^2=C_4^2=\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6$; b) $\overline{C}_3^4=C_6^4=\dfrac{6!}{4!\cdot 2!}=15$.

Išvardinkime šiuos derinius:

a) $(a;a),(b;b),(c;c),(a;b),(a;c),(b;c)$;

b) $(a;a;a;a),(b;b;b;b),(c;c;c;c),(a;b;b;b),(a;a;b;b),(a;a;a;b),(a;c;c;c),(a;a;c;c),(a;a;a;c),(b;c;c;c),$ $(b;b;c;c),(b;b;b;c),(a;b;c;c),(a;b;b;c),(a;a;b;c)$.

2. Tegu $A=\{a;b;c;d;e\}$. Kiek iš šios aibės elementų galima sudaryti:

a) derinių be pasikartojimų po 3 elementus?
b) derinių su pasikartojimais po 3 elementus?
c) gretinių be pasikartojimų po 3 elementus?
d) gretinių su pasikartojimais po 3 elementus?
e) kėlinių be pasikartojimų?
f) kėlinių su pasikartojimais, kai elementas *a* įeina vieną kartą, *b* – du kartus, *c* – vieną kartą, *d* – du kartus, *e* – tris kartus?

Sprendimas. a) $C_5^3=\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}=10$; b) $\overline{C}_5^3=C_7^3=\dfrac{7!}{3!\cdot 4!}=35$; c) $A_5^3=5\cdot4\cdot3=60$; d) $\overline{A}_5^3=5^3=125$;

e) $P_5=5!=120$; f) $P(1,2,1,2,3)=\dfrac{9!}{1!\cdot2!\cdot1!\cdot2!\cdot3!}=15120$.

3. Kiek skirtingų penkiaženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 0, 3, 5, 7 ?

Sprendimas. Tegu šis penkiaženklis skaičius yra ABCDE. Raidžių B, C, D ir E pozicijas gali užimti bet kuris iš duotųjų skaitmenų – tokių galimybių yra 4^4. Pirmasis skaitmuo negali būti 0 – taigi A poziciją gali užimti 3 skaitmenys. Vadinasi, iš duotųjų skaitmenų galima sudaryti $3\cdot4^4=768$ penkiaženklius skaičius.

Ats.768.

4. Tegu *A*, *B* ir *C* – bet kurios aibės, turinčios elementų atitinkamai $|A|,|B|$ ir $|C|$. Išveskite formulę aibės $A\cup B\cup C$ elementų skaičiui $|A\cup B\cup C|$ ((8) formulės analogą trijų aibių sąjungai).

Sprendimas. Įrodydami naudojamės formule

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|. \quad (1)$$

Pagal ją turėsime

$$|A\cup B\cup C|=|A\cup(B\cup C)|=|A|+|B\cup C|-|A\cap(B\cup C)|. \quad (2)$$

Kadangi pagal (1) $|B\cup C|=|B|+|C|-|B\cap C|$ ir, be to, $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, įrašę tai į (2), gauname

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|B\cap C|-|(A\cap B)\cup(A\cap C)|. \quad (3)$$

Paskutiniam šios lygybės dėmeniui vėl taikome tą pačią (1) formulę:

$|(A\cap B)\cup(A\cap C)|=|A\cap B|+|A\cap C|-|(A\cap B)\cap(A\cap C)|=|A\cap B|+|A\cap C|-|A\cap B\cap C)|$.

Įrašę tai į (3), turėsime formulę aibės $A\bigcup B\bigcup C$ elementų skaičiui apskaičiuoti:

$$|A\bigcup B\bigcup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|.$$

5. Turistų grupėje – 100 žmonių, 70 iš jų kalba angliškai, 45 – prancūziškai, o 23 – kalba abiem kalbomis. Kiek turistų nekalba nei angliškai, nei prancūziškai?

Sprendimas. Šio uždavinio universalioji aibė E yra 100 turistų: $|E|=100$. Tarkime, A yra kalbančių angliškai turistų grupė, B – kalbančių prancūziškai. Turime, kad $|A|=70$, $|B|=45$, $|A\cap B|=23$. Reikia rasti $|\overline{A}\cap\overline{B}|$ (turistų, nekalbančių nei angliškai, nei prancūziškai, skaičių).

Pagal De Morgano dėsnį $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=E\setminus(A\cup B)$. Apskaičiuojame: $|A\bigcup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=$ $=70+45-23=92$. Tuomet $|\overline{A}\cap\overline{B}|=|E\setminus(A\cup B)|=100-92=8$.

Ats. 8 turistai nekalba nei angliškai, nei prancūziškai.

6. Vieną kartą metus lošimo tetraedrą, kurio sienelės sužymėtos skaičiais 1, 2, 3 ir 4, stebima ant kurios sienelės jis nukris. Kiek elementų sudaro šio bandymo įvykių erdvę? Išvardinkite šiuos įvykius.

Sprendimas. Lošimo tetraedro vieno metimo (stebint ant kurios sienelės jis nukris) baigčių aibė yra $E=\{e_1;e_2;e_3;e_4\}$; čia $e_i, i=1,2,3,4$, žymi bandymo baigtį – galimybę tetraedrui nukristi ant sienelės su skaičiumi *i*. Šio bandymo įvykių erdvę sudaro visi galimi aibės *E* poaibiai: po 1 baigtį – elementarieji įvykiai $\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}$ (4 įvykiai); po 2 baigtis ($C_4^2=6$ įvykiai) – $\{e_1;e_2\}, \{e_1;e_3\},\{e_1;e_4\}, \{e_2;e_3\}$, $\{e_2;e_4\}, \{e_3;e_4\}$; po 3 baigtis ($C_4^3=4$ įvykiai) – $\{e_1;e_2;e_3\}, \{e_1;e_2;e_4\},\{e_1;e_3;e_4\},\{e_2;e_3;e_4\}$; būtinasis įvykis *E*; negalimasis įvykis $\varnothing$. Susumavę gauname, kad šio bandymo įvykių erdvę sudaro 16 įvykių.

7. Vieną kartą metami du simetriški šešiasieniai lošimo kauliukai, kurių sienelės sužymėtos skaičiais 1, 2, 3, 4, 5, 6. Raskite tikimybę, kad ant atsivertusių sienelių užrašytų skaičių sandauga bus lygi 10 arba 12.

Sprendimas. Aibė $E=\{e_i;e_j\},\ i=1,2,\ldots 6,\ j=1,2,\ldots 6$ (šio bandymo vienodai galimų baigčių aibė) yra sudaryta iš 36 elementų. Palankios nagrinėjamam įvykiui yra tos baigtys, su kuriomis $i\cdot j=10$ arba $i\cdot j=12$. Tokių baigčių yra šešios: $\{e_2;e_5\},\{e_5;e_2\},\{e_2;e_6\},\{e_6;e_2\},\{e_3;e_4\},\{e_4;e_3\}$. Vadinasi, ieškomoji tikimybė yra $p=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

Ats. $\frac{1}{6}$.

8. Dėžėje 15 vienodų, besiskiriančių tik spalvomis, rutulių: 4 geltoni, 5 žali ir 6 raudoni. Iš jos atsitiktinai išimami 3 rutuliai. Apskaičiuokite tikimybę, kad bus ištraukti: a) tos pačios spalvos rutuliai; b) skirtingų spalvų rutuliai.

Sprendimas. Vienodai galimų baigčių iš viso yra $C_{15}^3=\frac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3}=455$.

a) Palankių nagrinėjamam įvykiui (visi trys rutuliai – tos pačios spalvos) baigčių skaičius yra $C_4^3+C_5^3+C_6^3=C_4^1+C_5^2+C_6^3=4+\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}+\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}=4+10+20=34$. Taigi tikimybė, kad bus ištraukti tos pačios spalvos rutuliai lygi $\frac{34}{455}\approx 0,075$.

b) Palankių įvykiui „ištraukti skirtingų spalvų rutulius“ baigčių skaičius yra $4\cdot 5\cdot 6=120$. Todėl šio įvykio tikimybė yra $\frac{120}{455}\approx 0,264$.

Ats. a) $p=\frac{34}{455}\approx 0,075$; b) $p=\frac{120}{455}\approx 0,264$.

9. Detektyvų mėgėjo biblioteka gavo devynių šiuolaikinio norvegų rašytojo Jo Nesbo knygų siuntą. Šios knygos buvo sudėtos į lentyną atsitiktiniu būdu. Kokia tikimybė, kad knygos „Troškulys“ ir „Policija“ bus padėtos greta viena kitos.

Sprendimas. Šio bandymo vienodai galimų baigčių aibę sudaro kėlinių iš 9 knygų aibė, kurios elementų skaičius yra $9!$.

Iš jų palankių nagrinėjamam įvykiui baigčių bus $2 \cdot 8 \cdot 7!$, nes minėtos dvi konkrečios knygos būdamos greta gali būti sukeistos vietomis, jų pora gali užimti bet kurią iš galimų 8 pozicijų, o kitos 7 gali būti perstatytos bet kuria tvarka. Gauname, kad nagrinėjamo įvykio tikimybė lygi $\frac{2 \cdot 8 \cdot 7!}{9!} = \frac{2}{9} \approx 0,222$.

Ats. $p = \frac{2}{9} \approx 0,222$.

10. Iš sekos 1, 2, ..., n atsitiktinai renkamės du skaičius. Apskaičiuokite tikimybę, kad vienas iš pasirinktųjų skaičių bus mažesnis už *k*, o kitas – didesnis už *k*. Čia *k* yra bet kuris natūralusis skaičius, $1 < k < n$.

Sprendimas. Pagal sąlygą iš sekos $1, 2, \ldots, k-1, k, k+1, \ldots, n$ renkamės 2 skaičius – galimybių pasirinkti 2 skaičius yra $C_n^2 = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ (derinių be pasikartojimų iš *n* elementų po 2 elementus skaičius).

Palankių nagrinėjamam įvykiui baigčių skaičius yra $2 \cdot (k-1) \cdot (n-k)$ (vienas skaičius turi būti mažesnis negu *k*, o kitas – didesnis už *k*, arba atvirkščiai). Vadinasi, nagrinėjamo įvykio tikimybė yra $\frac{2 \cdot (k-1) \cdot (n-k)}{C_n^2} = \frac{4(k-1)(n-k)}{n(n-1)}$.

Ats. $p = \frac{2 \cdot (k-1) \cdot (n-k)}{C_n^2} = \frac{4(k-1)(n-k)}{n(n-1)}$.

Sprendimus parengė E. Stankus

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1.Karabaso-Barabaso barzda sudaro 40 procentų jo bendrosios masės. Po to kai Buratinas nukirpo jam gerą tos barzdos dalį, likusioji lyrinio herojaus barzdos dalis tesudarė jau tik 10 procentų jo bendrosios masės. Kokią Karabaso-Barabaso barzdos dalį nukirpo Buratinas?

Sprendimas. Pačioje pradžioje padėtis yra tokia, kad Karabaso-Barabaso svoris yra lygus S, tai jo barzda sveria 0,4S, o likusioji dalis 0,6S yra tai, kiek jis svertų „nuskaičiavus barzdos svorį". Nukirpus barzdos dalį, tie 0,6S sudaro jau 90 procentų Karabaso-Barabaso masės. Vadinasi „grynajai" barzdai lieka 0,6S:9= $\frac{6S}{10\cdot 9}=\frac{6S}{90}=\frac{S}{15}$.

Todėl buvo nukirpta 0,4S - $\frac{S}{15}=\frac{2S}{5}-\frac{S}{15}=\frac{6S-S}{15}=\frac{5S}{15}=\frac{S}{3}$ svorio.

Vadinasi, tai sudaro $\frac{\frac{S}{3}}{\frac{2S}{5}}=\frac{5}{2\cdot 3}=\frac{5}{6}$ barzdos dalies.

Atsakymas: $\frac{5}{6}$.

2. Išspręskite lygčių sistemą

$$\left(\begin{array}{l} 1+x_1^2=2x_2 \\ 1+x_2^2=2x_3 \\ 1+x_3^2=2x_4 \\ 1+x_4^2=2x_1 \end{array}\right]$$

Sprendimas. Sudėkime visas sistemos lygtis ir gaukime lygybę

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+4=2(x_1+x_2+x_3+x_4).$$

Dabar sukelkime visus narius į vieną pusę ir sugrupuokime juos truputį kitaip:

$$x_1^2-2x_1+1+x_2^2-2x_2+1+x_3^2-2x_3+1+x_4^2-2x_4+1=0.$$

Tai yra tas pats kaip

$$(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+(x_3-1)^2+(x_4-1)^2=0.$$

O tai reiškia, kad keturių kvadratų suma yra lygi nuliui ir todėl visi tie kvadratai yra lygūs nuliui arba, kitaip sakant, kad visi tie nežinomieji yra lygūs 1. Kitais žodžiais tariant,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1;1;1;1).$$

Atsakymas: (1; 1; 1; 1).

3. Raskite patį mažiausią natūralųjį skaičių N tokį, kad skaičius $N + 15$ dalijasi be liekanos iš 22, o skaičius $N + 22$ dalijasi be liekanos iš 15.

Sprendimas. Užrašykime, kad $N + 15 = 22P$, o $N + 22 = 15T$, tada sulyginus bus

$$22P - 15 = 15T - 22.$$

Iš čia gauname

$$15T - 22P = 7.$$

Perrašę lygybę kaip

$$15T = 22P + 7$$

suprantame, kad $15T$ yra nelyginis skaičius, todėl jis baigiasi 5, vadinasi skaičius $22P$ turi baigtis 8, o tada pats P baigiasi arba 4, arba 9. Todėl bandome iš eilės 4, 9, 14, 19 ir matome, kad tada $15T$ būtų 95, 205, 315, 425,..... Kadangi 315 jau dalijasi iš 15, tai $T = 21$ ir

$$N = 15 \cdot 21 - 22 = 293$$

ir yra pats mažiausias toks skaičius, kuris tenkina uždavinio sąlygas.

Kitas sprendimas galėtų būti toksai – pastebėkime, kad skaičius $N + 15 + 22$ dalijasi ir iš 22, ir iš 15. Kadangi tie du skaičiai yra tarpusavyje pirminiai – tai reiškia, jog jie neturi didesnių už vienetą bendrų daliklių, tai tas reiškia, jog $N + 15 + 22 = N + 37$ dalijasi iš jų sandaugos $22 \cdot 15 = 330$. Pabandžius $N + 37$ imti lygiu 330 vėl gauname, jog N = 293.

Atsakymas: 293.

4. Raskite natūraliuosius skaičius m ir n, jeigu yra žinoma, kad iš trijų sekančių lygybių lygiai dvi lygybės yra teisingos, o trečioji yra klaidinga:

1) $4m + 9n = 135$; 2) $9m + 4n = 135$; 3) $6m + 11n = 240$.

Atsakyme užrašykite jų sumą $m + n$.

Sprendimas.

Jeigu būtų teisingos pirmosios dvi lygybės, tai, jas sudėję, gautume, kad $13m + 13n = 270$, arba, kad $13(m + n) = 270$. Tačiau tada $m + n$ negalėtų būti sveikasis skaičius, nors ir turėtų tokiu būti, jeigu m ir n galėtų būti sveikieji skaičiai, nes juk 270 iš 13 nesidalina.

Taip pat vienu metu negali būti teisingos pirmoji ir trečioji lygybės, nes jas sudėjus gautume $10m + 20n = 375$, kuri taip pat su jokiais natūraliaisiais skaičiais m ir n negali būti teisinga, nes viena lygties pusė dalijasi iš 10, o kita tikrai nesidalina. Todėl teisingos vienu metu tegalėtų būti tik antroji ir trečioji lygybės. Ir tikrai jos turi sprendinį $m = 7$, o $n = 18$. Todėl atsakymas būtų $m + n = 7 + 18 = 25$.

Atsakymas. $\boldsymbol{m + n = 25}$

5. Keturženkliai skaičiai *abcd* ir *dcba* susideda iš tų pačių skaitmenų *a, b, c* ir *d*, tik parašytų atvirkščia eile. Jeigu mes juos abu sudėtume, tai gautume 13552. Kam yra lygi tų skaičių skaitmenų suma $a + b + c + d$?

Sprendimas

$$\begin{array}{r} abcd \\ \underline{dcba} \\ 13552 \end{array}$$

Pirmiausiai mes pastebime, kad vienetų skiltyje įvyksta vieneto perkėlimas į aukštesniąją dešimčių skiltį, nes kitaip, jeigu $d + a$ būtų lygus 2, tai nebūtų ir vieneto pernešimo kitame skaičiaus krašte, kur tūkstančių skiltyje irgi susiduria $a + d$. Todėl $a + d = 12$**.** Dabar dešimčių skiltyje susiduria skaitmenys c ir d ir kadangi buvo vieneto pernešimas iš vienetų skilties, tai tada arba $c + b = 4$, arba $c + b = 14$. Dabar jeigu $c + b = 4$, tai nėra vieneto perkėlimo į šimtų skiltį ir tuomet ten šimtų skiltyje negalime gauti skaitmens 5. Todėl $c + b = 14$ ir $a + b + c + d = 12 + 14 = 26$.

Atsakymas. $\boldsymbol{a + b + c + d = 26}$

6. Programuotojai Jonas, Andrius ir Justas už programos surašymą gavo honorarą ir pasidalino jį atitinkamai santykiu 4:5:7. Jeigu jie būtų pasidalinę jį santykiu 3 : 4 : 6, tai vienas iš jų būtų gavęs pusantro tūkstančio eurų daugiau negu kad jis iš tikrųjų kad gavo. Kokia yra toji honoraro suma?

Sprendimas

Jeigu X yra honoraro didumas, tai Jonas, Andrius ir Justas gavo atitinkamai $\frac{4}{16}X, \frac{5}{16}X, \frac{7}{16}X$ pinigų. Jeigu jie būtų pasidalinę honorarą antruoju būdu, tai jie būtų gavę atitinkamai $\frac{3}{13}X, \frac{4}{13}X, \frac{6}{13}X$

pinigų. Kadangi $\frac{4}{16}X > \frac{3}{13}X, \frac{5}{16}X > \frac{4}{13}X$, o $\frac{7}{16}X < \frac{6}{13}X$, tai dalijantis honorarą antruoju būdu būtent Justas būtų gavęs daugiau pinigų ir būtent būtų gavęs $\frac{6}{13}X - \frac{7}{16}X = \frac{5}{208}X$ daugiau. Pagal sąlygą $\frac{5}{208}X = 15 \cdot 10^2$, iš čia $X = 208 \cdot 15 \cdot 10^2 : 5 = 62400$ eurų.

7. Duoti 7 skirtingi natūralieji skaičiai. Yra žinoma, kad lygiai penki iš jų dalijasi iš 2, lygiai 5 – iš 3 ir taip pat lygiai penki iš jų dalijasi be liekanos iš 5. Kokią pačią mažiausią reikšmę gali įgyti pats didžiausias iš tų 7 skaičių?

Sprendimas. Pirmiausiai pabraukime visus iš tų 7 skaičių, kurie dalijasi iš 3 ir po to taip pat ir tuos, kurie dalijasi iš 5. Kadangi atlikta 10 pabraukimų, o skaičiai buvo 7, tai iš tų 7 skaičių mažiausiai 3 bus pabraukti du kartus. Vadinasi, bent trys iš tų skaičių dalijasi ir iš 3, ir 5, o tai reiškia, kad ir iš 15. Taigi tie trys skaičiai yra nemažesni kaip $15\cdot1$, $15\cdot2$ ir $15\cdot3$. Todėl pats didžiausias iš tų skaičių yra nemažesnis kaip $15\cdot3 = 45$. Belieka dabar sukonstruoti tokį septynių skaičių pavyzdį, kur pats didžiausias skaičius tikrai būtų 45. Tinka pavyzdys

$$10, 12, 15, 18, 20, 30, 45.$$

Atsakymas: 45.

8. Iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir 9 buvo sudaryti trys triženkliai skaičiai tokiu būdu, kad kiekvienas skaitmuo buvo panaudotas po vieną kartą. Ar gali būti taip, kad tų trijų triženklių skaičių suma yra lygi: A) 1500; B) 1800.

Sprendimas. Įsivaizduokime, kad mes sudėjinėjame tuos tris skaičius stulpeliu. Jeigu ta suma baigiasi 0, tai tada ir skaitmenų suma vienetų skiltyje irgi baigiasi 0. Tada ta skaitmenų vienetų skiltyje suma gali būti lygi arba 10 arba 20 (nes trijų skirtingų skaitmenų suma negali būti didesnė kaip $9 + 8 + 7 = 24$). Jeigu ir trijų skaitmenų dešimčių skiltyje suma turi būti lygi 0, tai ji yra (atsižvelgiant į skaitmens pernešimą iš vienetų skilties) atitinkamai lygi 9, 19 arba 8, 18. Kadangi visų devynių skaitmenų suma yra $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, tai tada skaitmenų šimtų skiltyje suma bus atitinkamai lygi $45 – 10 – 9 = 26$, $45 – 10 – 19 = 26$ arba $45 – 20 – 8 = 17$, $45 – 20 – 18 = 7$. Ir, vadinasi, duotųjų trijų triženklių skaitmenų suma bus atitinkamai lygi $2600 + 100 = 2700$, $1600 + 200 = 1800$, arba $1700 + 100 = 1800$, $700 + 200 = 900$. Tokiu būdu rezultatas A) 1500 yra negalimas. O suma B) 1800 gali gautis. Tai rodytų sekantis (ne vienintelis) pavyzdys: $713 + 459 + 628 = 1800$.

Atsakymas. A) negali gautis; B) gali gautis.

PASTABA Šį uždavinį galima išspręsti ir kitaip, parodant, kad tokiu būdu sudarytų 3-jų triženklių skaičių suma visada dalijasi iš 9. Tikrai paimkime tuos tris skaičius ir išnagrinėkime jų sumą

$$100a + 10b + c + 100d + 10e + f + 100h + 10i + j = a + b + c + d + e + f + h + i + j +$$

$$99a + 99d + 99h + 9b + 9e + 9i = 45 + 9(b + e + i) + 99(a + d + h)$$

ir mes matome, kad toji suma tikrai dalijasi iš 9. Todėl mes suprantame, kad suma 1500 tikrai negali būti tokiu būdu gauta, o kad suma 1800 gali būti gauta (kaip ir bet kuri kita iš 9-ių besidalinanti suma), tam yra reikalingas pavyzdys. Ir jis, beje, visada atsirastų.

9. Petriukas užrašė natūralųjį skaičių A. Tada jis nutrynė vieną jo skaitmenį ir gavo skaičių B. Pasirodė, kad $A + B = 627701$. Koks galėjo būti skaičius A? Nurodykite visas galimas jo reikšmes.

Sprendimas. Kadangi $A + B$ suma yra nelyginė, tai tada Petriukas bus nutrynęs paskutinį skaičiaus A skaitmenį. Todėl jei $A = abcdef$, tai $B = abcde$ ir $A = 10B + f$ ir tada pagal sąlygą

$627701 = A + B = 11B + f$. Vadinasi, $627701 - f$ dalijasi iš 11. Kadangi skaičiaus 627701 dalybos iš 11 liekana yra 8, tai $f = 8$ ir tada $11B$ = **627693.** Iš čia $B = 57063$, o $A = 570638$.

Atsakymas $\boldsymbol{A}$ **= 570638.**

10. Raskite patį mažiausią iš 8 besidalijantį natūralųjį skaičių, kurio dešimtainiame užraše lygiai po du kartus dalyvauja tik skaitmenys 1, 2, 3, 4, 5 ir 6.

Sprendimas. Apskritai pats mažiausias skaičius, kuriame po 2 kartus dalyvauja išskirtinai tiktai skaitmenys 1, 2, 3, 4, 5 ir 6 yra skaičius 112233445566. Tačiau jis nesidalina net iš 4, nes jo paskutinieji du skaitmenys sudaro skaičių 66, kuris nesidalija iš 4. Vadinasi, vienas 6-tas turi stovėti mažiausiai šimtų skiltyje. Toks pakeitimas gali duoti vieną iš dviejų skaičių 112233445656 arba 112233445665. Mažesnis iš jų yra pirmasis skaičius ir, kaip lengva matyti, jis tikrai dalijasi iš 8 ir todėl jis ir yra ieškomasis skaičius. Taip ir gauname skaičių 112233445656.

Atsakymas 112233445656.