

**PENKTOJI VILNIAUS UNIVERSITETO
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO
MATEMATIKOS OLIMPIADA**

Vilnius, 2022 m. kovo 19 d.

IX klasė

1. Raskite visus realiųjų skaičių trejetus (x, y, z) , tenkinančius lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 + 9 = 4y, \\ y^2 + 1 = 6z, \\ z^2 + 4 = 2x. \end{cases}$$

2. Nustatykite, ar įmanoma į 4×4 lentelės langelius taip įrašyti po natūraliųjų skaičių, ne didesnių už 30, kad visi 16 skaičių būtų skirtingi, o aštuonios sandaugos, gaunamos sudauginus bet kurios eilutės arba bet kurio stulpelio keturis skaičius, būtų lygios.
3. Trapecijos $ABCD$ pagrindų BC ir AD bei šoninių kraštinių AB ir CD vidurio taškai atitinkamai pažymėti K, L, M, N . Raskite pagrindų BC ir AD ilgius, jei $\angle DAB = 70^\circ$, $\angle CDA = 20^\circ$, $KL = 2$, $MN = 4$.
4. Jei išbrauksime natūraliojo penkiaženklį skaičiaus n vidurinį (t. y. trečiąjį) skaitmenį, tai gausime skaičiaus n keturženklį daliklį. Raskite visas galimas skaičiaus n reikšmes.

**PENKTOJI VILNIAUS UNIVERSITETO
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO
MATEMATIKOS OLIMPIADA**

Vilnius, 2022 m. kovo 19 d.

X klasė

1. Raskite visus lygties

$$x + \left[\frac{x}{6} \right] = \left[\frac{2x}{3} \right] + \left[\frac{x}{2} \right]$$

realiuosius sprendinius x . (Čia $[y]$ žymi skaičiaus y sveikąją dalį, t. y. didžiausią sveikąjį skaičių, ne didesnę už y .)

2. Nustatykite, ar įmanoma į 4×4 lentelės langelius taip įrašyti po natūralių skaičių, ne didesnių už 30, kad visi 16 skaičių būtų skirtingi, o aštuonios sandaugos, gaunamos sudauginus bet kurios eilutės arba bet kurio stulpelio keturis skaičius, būtų lygios.
3. Trikampio ABC kraštinėse AB ir AC atitinkamai pažymėti tokie taškai M ir N , kad $MC = AC$, $NB = AB$. Taškai A ir P yra simetriški tiesės BC atžvilgiu. Įrodykite, kad tiesė PA dalija kampą MPN pusiau.
4. Jei išbrauksime natūraliojo penkiaženklį skaičiaus n vidurinį (t. y. trečiąjį) skaitmenį, tai gausime skaičiaus n keturženklį daliklį. Raskite visas galimas skaičiaus n reikšmes.

**PENKTOJI VILNIAUS UNIVERSITETO
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO
MATEMATIKOS OLIMPIADA**

Vilnius, 2022 m. kovo 19 d.

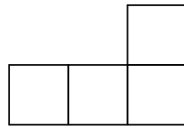
XI ir XII klasės

1. Raskite visus lygties

$$x + \left[\frac{x}{6} \right] = \left[\frac{2x}{3} \right] + \left[\frac{x}{2} \right]$$

realiuosius sprendinius x . (Čia $[y]$ žymi skaičiaus y sveikąją dalį, t. y. didžiausią sveikąjį skaičių, ne didesnę už y .)

2. Kvadratinė lenta padalyta į $n \times n$ vienetinių langelių. Ant lentos dedamos vienodos figūros – tokie keturių vienetinių langelių „kampučiai“, kaip parodyta paveikslėlyje.



Figūras galima bet kaip pasukti ir apversti kita puse. Kiekvienos dedamos figūros kiekvienas langelis turi pilnai uždengti kurį nors lentos arba jau padėtos figūros langelį. Gautas toks lentos denginys, kad virš kiekvieno lentos langelio yra lygiai k padėtųjų figūrų. Čia n ir k yra natūralieji skaičiai.

Raskite visas galimas skaičiaus n reikšmes ir kiekvienai iš jų nurodykite atitinkamą mažiausią galimą skaičiaus k reikšmę.

3. Trikampio ABC kraštinėse AB ir AC atitinkamai pažymėti tokie taškai M ir N , kad $MC = AC$, $NB = AB$. Taškai A ir P yra simetriški tiesės BC atžvilgiu. Įrodykite, kad tiesė PA dalija kampą MPN pusiau.
4. Raskite visus tokius teigiamų racionaliųjų skaičių trejetus (x, y, z) , kuriems skaičiai

$$a = x + \frac{1}{y}, \quad b = y + \frac{1}{z}, \quad c = z + \frac{1}{x}$$

yra natūralieji.