LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Jaunajam matematikui

23

2020–2022 metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Užduotys

A. Apynis, E. Mazėtis, E. Stankus. STOJAMOJI UŽDUOTIS (2, 52-54 psl.)

I. **K. Pulmonas.** DARBO UŽDAVINIAI (3-8, 55-59 psl.)

II. **E. Mazėtis.** TRIKAMPIŲ PANAŠUMAS IR TALIO TEOREMA (9-12, 60-63 psl.)

III. **A. Apynis, A. Apynis.** LYGČIŲ SISTEMOS (13-17, 64-67 psl.)

IV. **E. Stankus.** NIUTONO BINOMAS (18-22, 68-70 psl.)

V. **E. Mazėtis.** VEKTORINIO METODO TAIKYMAI (23-28, 71-74 psl.)

VI. **A. Apynis, R. Rudalevičienė.** ĮRODYMO UŽDAVINIAI (29-32, 75-77 psl.)

VII. **R. Kašuba.** NESTANDARTINĖS LYGTYS IR NELYGYBĖS (33-42, 78-82 psl.)

VIII. **A. Apynis.** RIBŲ SKAIČIAVIMO UŽDAVINIAI (43-50, 83-86 psl.)

A. Apynis, E. Mazėtis, E. Stankus. BAIGIAMOJI UŽDUOTIS (51, 87 psl.)

STOJAMOJI UŽDUOTIS

1. Du darbininkai turėjo nušienauti pievą – po pusę pievos kiekvienas. Abu darbininkai šienavo vienodu tempu. Pirmasis darbininkas darbą pradėjo 2 h. 16 min. anksčiau už antrąjį. Iki 12 h jie nušienavo 40 procentų pievos, tada pusantros valandos pietavo ir ilsėjosi. Pirmasis darbininkas darbą baigė 17 h 54 min, o antrasis – 20 h 10 min. Kokį laiką rodė laikrodis, kai šienauti pievą pradėjo pirmasis darbininkas?

2. Sunkvežimis su pavojingu kroviniu 40 km/h greičiu išvyko iš Kauno į Palangą. Atstumas tarp šių miestų yra 240 km. Tuo pačiu metu iš Palangos į Kauną išvyko motociklininkas. Motociklininkas susitiko sunkvežimį, kai jam iki Kauno buvo likę pusvalandis kelio. Atvykęs į Kauną motociklininkas iš karto vėl išvyko į Palangą. Kokiu greičiu turėtų važiuoti motociklininkas, kad jis į Palangą atvyktų greičiau negu sunkvežimis?

3. Šachmatų turnyre dalyvavo du dešimtos klasės mokiniai ir mažiau nei 10 vienuoliktokų. Abu dešimtokai kartu surinko 8 taškus, o kiekvienas vienuoliktokas surinko po vienodą taškų skaičių. Kiekvienas dalyvis sužaidė po vieną partiją su visais kitais dalyviais. Šachmatų turnyre už laimėtą partiją žaidėjas gauna 1 tašką, pralaimėjęs - nulį, o lygiųjų atveju abu gauna po pusę taško. Kiek mokinių iš viso dalyvavo turnyre?

4. Iškilojo daugiakampio įstrižainių skaičius yra 230. Kiek kraštinių turi šis daugiakampis?

5. Natūraliojo skaičiaus a dalybos iš 3 liekana yra lygi 2. Raskite skaičiaus $a^2 + 2a$ dalybos iš 3 liekaną.

6. Kokiame intervale turi būti parametro m reikšmės, kad kvadratinės lygties
$$x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$$
sprendiniai būtų intervale $(-2, 4)$?

7. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} x^2 - y = 23, \\ x^2 y = 50. \end{cases}$

8. Apskaičiuokite $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$, kai $x + \dfrac{1}{x} = a$.

9. Stačiakampio $ABCD$ kraštinių santykis $AD{:}\,AB = \sqrt{2},$ taškas K yra kraštinės AD vidurio taškas. Raskite kampą tarp tiesių AC ir BK.

10. Atkarpa AD yra lygiašonio trikampio $ABC,\ AB = AC$ aukštinė, atkarpa DE yra trikampio ABD pusiaukraštinė, o atkarpa AF – trikampio ADE aukštinė, be to $\angle EAF = \angle DAF$. Raskite trikampio ABC kampus.

I. DARBO UŽDAVINIAI

Teorinę medžiagą parengė bei pirmąją užduotį sudarė mokytojas ekspertas Kazimieras Pulmonas

Darbai, darbeliai... Kiekvieno žmogaus gyvenime svarbią vietą užima darbas. Apskritai – darbinė veikla. Gal todėl nemažą įvairių gyvenimiškų problemų sprendimo dalį, mokantis matematikos, sudaro taip vadinami darbo uždaviniai. Nors neretai jų siužetai nebūtinai susieti su fiziniu darbu, o labiau su veikla, t. y. vyksmu laike ir to vyksmo rezultatais.

1 pavyzdys. Sodo nameliui pastatyti per 50 dienų reikia aštuonių žmonių. Kiek reikia taip pat sparčiai dirbančių žmonių, kad namelis būtų pastatytas per 40 dienų?

Sprendimas. *1 būdas.* Tam tikram darbui padaryti žmonių ir dienų skaičiai yra atvirkščiai proporcingi. Todėl:

50 dienų – 8 žmonės,
40 dienų – x žmonės; $\Rightarrow \dfrac{x}{8}=\dfrac{50}{40}$ ir $40x=50\cdot 8,\quad x=10.$

Vadinasi, kad namelis būtų pastatytas per 40 dienų, reikia 10 taip pat sparčiai dirbančių žmonių.

2 būdas. Sodo namelio statybos apimtis yra $8\cdot 50=400$ dienų. Kad šių darbų apimtį atliktų per 40 dienų, reikia $400:40=10$ taip pat sparčiai dirbančių žmonių.

Kartais sprendžiant darbo tipo uždavinius naudojama formulė: $A=N\cdot t$, čia A – darbas, N – darbo našumas (spartumas), t – darbo atlikimo laikas.

Todėl $N=\dfrac{A}{t}$ arba $t=\dfrac{A}{N}$. Vadinasi, *darbo našumas* (spartumas) yra darbo apimtis (kiekis) atliekama(s) per laiko vienetą, o *laikas* yra darbo apimties (kiekio) ir darbo našumo (spartumo) santykis.

2 pavyzdys. Darbininkų brigada pagal sutartį turėjo pagaminti 300 detalių. Kasdien pagamindama po 4 detales daugiau negu buvo numatyta, brigada užduotį atliko viena diena anksčiau. Per kiek dienų brigada įvykdė užduotį?

Sprendimas. *1 būdas.* Sakykime, kad brigada įvykdė užduotį per x dienų, o planavo įvykdyti per $(x+1)$ dieną.

Per 1 dieną brigada pagamino $\dfrac{360}{x}$ detalių, o planavo pagaminti $\dfrac{360}{x+1}$ detalių.

Pagal sąlygą: $\dfrac{360}{x}-\dfrac{360}{x+1}=4.$

$\dfrac{360x+360-360x}{x(x+1)}=4,\quad \dfrac{360}{x(x+1)}-4=0,\quad \dfrac{360-4x^2-4x}{x(x+1)}=0,$ tai $4x^2+4x-360=0$ ir $x^2+x-90=0;$

turime $x_1=-10$ (netinka), $x_2=9$. Patikrinimu įsitikiname, kad brigada įvykdė užduotį per 9 dienas.

Vietoj sprendimo aprašymo ar komentavimo kartais naudojama ir lentelė

	Darbo apimtis	Dienų skaičius	Darbo našumas
Faktinis darbas	360	x	$\dfrac{360}{x}$
Darbas pagal planą	360	$x+1$	$\dfrac{360}{x+1}$

Pagal sąlygą sudarome lygtį: $\dfrac{360}{x}-\dfrac{360}{x+1}=4.$

Išsprendę ją turime, kad brigada įvykdė užduotį per 9 dienas.

Paprastai darbas ar veikla susiję su atlyginimu. Dažnai jis susijęs su darbuotojo užimamomis pareigomis, darbo stažu, kompetencijomis ir dar daug su kuo... Nors nepriimta skaičiuoti svetimus pinigus, tačiau šį kartą pasmalsaukime:

3 pavyzdys. Du darbininkai gavo kartu 557 eurus. Pirmasis dirbo 10 valandų, o antrasis – 12 valandų. Jei pirmasis būtų gavęs už valandą 1,5 euro mažiau, o antrasis – 10 % mažiau, tai antrasis už 12 valandų būtų gavęs 50,8 eurų daugiau, negu pirmasis už 10 valandų. Kiek gavo kiekvienas darbininkas už darbo valandą?

Sprendimas. Pasirenkame iš įvairių galimų sprendimo apipavidalinimo būdų, pavyzdžiui, komentuojamąjį:

x Eur – I darbininko valandinis atlygis,
y Eur – II darbininko valandinis atlygis.
Pagal sąlygą: $10x+12y=557$.

Naujoje situacijoje
$(x-1{,}5)$ Eur – I darbininko uždarbis per valandą,
$0{,}9y$ Eur – II darbininko uždarbis per valandą,
Pagal sąlygą:

$$0{,}9y\cdot 12-(x-1{,}5)\cdot 10=50{,}8.$$

Iš lygčių sudarome sistemą:

$$\begin{cases}10x+12y=557,\\ 10{,}8y-10x=35{,}8;\end{cases}$$

Panariui sudėję sistemos lygtis turime $22{,}8y=592{,}8$ ir $y=26$.

Vadinasi, $10x=557-312$ ir $x=24{,}5$.

Patikrinimu įsitikiname, kad pirmojo darbininko valandinis atlygis yra 24,5 Eur, o antrojo – 26 Eur.

Paprastai įprasta darbo uždaviniuose visą darbą prilyginti 1 (vienetu). Todėl kartais darbo uždaviniai priskiriami vieneto ir dalių uždavinių tipui.

4 pavyzdys. Janė savo užduotį gali atlikti per 15 h, o Paulės užduotį – per 30 h. Paulė savo užduotį gali atlikti per 25 h.

a) Kiek kartų Paulė dirba našiau (sparčiau) už Janę?
b) Per kiek laiko Paulė atliktų Janės užduotį?
c) Per kiek laiko Janė ir Paulė, dirbdamos kartu, gali atlikti abu tuos darbus?

Sprendimas. Sakykime, kad Paulės užduoties apimtis yra 1. Tai per 1 h Janė padaro $\frac{1}{30}$ šios užduoties, o Paulė – $\frac{1}{25}$ užduoties.

a) Paulė dirba našiau (sparčiau) už Janę $\frac{1}{25}:\frac{1}{30}=1{,}2$ karto.

b) Kadangi Janė savo užduotį atlieka per 15 h, tai Paulė galėtų ją atlikti per $15:1{,}2=12{,}5$ valandos.

c) *1 būdas (aritmetinis).*

Per 1 h

Janė atlieka savo užduoties $\frac{1}{15}$ dalį,

Paulė atlieka savo užduoties $\frac{1}{25}$ dalį,

Janė ir Paulė atlieka kartu $\frac{1}{15}+\frac{1}{25}=\frac{10+6}{150}=\frac{16}{150}=\frac{8}{75}$ dalį savo užduočių.

Kadangi Janės ir Paulės užduočių apimtis $1+1=2$, tai abi užduotys bus atliktos per $2:\frac{8}{75}=\frac{150}{8}=18{,}75\ (h)$.

2 būdas (algebrinis).

Janės darbo našumas $\frac{1}{15}$, Paulės darbo našumas $\frac{1}{25}$, o abiejų merginų kartu $\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{25}\right)$.

Sakykime, kad kartu merginos dirba t valandų, tai:

$$\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{25}\right)\cdot t=2,\quad \frac{8}{75}\cdot t=2,\quad \text{tai}\quad t=2:\frac{8}{75}=18{,}75\ \text{(h)}.$$

Vadinasi, a) 1,2 karto; b) 12,5 h; c) 18,75 h.

Pastaba. Beje, skaičius 18,75 yra skaičių 15 ir 25 harmoninis vidurkis. (Dviejų teigiamų skaičių a ir b *harmoniniu* vidurkiu vadinamas toks skaičius *H*, kuriam atvirkštinis skaičius $\frac{1}{H}$ yra lygus skaičiams *a* ir *b* atvirkštinių skaičių $\frac{1}{a}$ ir $\frac{1}{b}$ aritmetiniam vidurkiui, t. y. $\frac{1}{H} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) : 2.$ Pertvarkę gauname $H = \frac{2ab}{a+b}.$

5 pavyzdys. Trim vamzdžiais baseinas pripildomas per 2 h. Vienu vamzdžiu baseiną būtų galima pripildyti per 5 h, antru – per 6 h. Per kiek laiko baseiną būtų galima pripildyti trečiu vamzdžiu?

Per 1 h
- pirmas vamzdis pripildo $\frac{1}{5}$ baseino,
- antras vamzdis pripildo $\frac{1}{6}$ baseino,
- trečias vamzdis pripildo $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{11}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$ baseino.

Trečias vamzdis pripildo baseiną per $1 : \frac{2}{15} = 7{,}5$ (h).

2 būdas (algebrinis).

	Laikas, h	Našumas
I vamzdis	5	$\frac{1}{5}$
II vamzdis	6	$\frac{1}{6}$
III vamzdis	x	$\frac{1}{x}$

Sudarome lygtį:

$$\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{x}\right) \cdot 2 = 1, \quad \frac{11x+30}{30x} \cdot 2 = 1, \quad \frac{11x+30}{15x} = 1.$$

Trupmena lygi 1, kai skaitiklis ir vardiklis yra lygūs:

$$11x + 30 = 15x, \quad 4x = 30, \quad x = 7{,}5.$$

Patikrinimu įsitikiname, kad trečias vamzdis pripildo baseiną per 7,5 h.

6 pavyzdys. Gatvę valė iš pradžių viena mašina, o po 15 min į darbą stojo antra mašina, ir po to abi mašinos baigė valyti gatvę per 18 min. Jei antroji mašina būtų pradėjusi darbą praslinkus pusvalandžiui nuo pirmosios mašinos darbo pradžios, tai abi mašinos, dirbdamos kartu, būtų baigusios valyti gatvę per 12 min. Per kiek laiko kiekviena mašina, dirbdama viena, galėjo išvalyti gatvę?

Sprendimas. Sakykime, kad pirmoji mašina, dirbdama viena, gali išvalyti gatvę per *x* min, o antroji – per *y* min. Tuomet pirmosios mašinos darbo našumas $\frac{1}{x}$, o antrosios – $\frac{1}{y}$.

Vienu atveju pirmoji mašina valė gatvę $15 + 18 = 33$ (min), o antroji – 18 min.

Pagal sąlygą: $\frac{33}{x} + \frac{18}{y} = 1.$

Kitu atveju pirmoji mašina valė gatvę $30 + 12 = 42$ (min), o antroji – 12 min.

Pagal sąlygą: $\frac{42}{x} + \frac{12}{y} = 1.$

Turime lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \frac{33}{x} + \frac{18}{y} = 1, & | \cdot 2 \\ \frac{42}{x} + \frac{12}{y} = 1; & | \cdot 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{66}{x} + \frac{36}{y} = 2, & (1) \\ \frac{126}{x} + \frac{36}{y} = 3; & (2) \end{cases}$$

Iš antrosios lygties atėmę pirmąją turime: $\frac{60}{x}=1$ ir $x=60$. Nesunkiai įsitikiname, kad $y=40$.

Taigi pirmoji mašina gali išvalyti gatvę per 60 min, o antroji per 40 min.

7 pavyzdys. Du darbininkai, dirbdami kartu, gali atlikti darbą 9 dienomis greičiau, negu jį atliktų vienas pirmasis, ir 7 dienomis greičiau, negu jį atliktų vienas antrasis. Per kiek dienų šį darbą gali atlikti kiekvienas darbininkas, dirbdamas atskirai?

Sprendimas. Tegul x dienų – I darbininko darbo laikas,

y dienų – II darbininko darbo laikas,

$\frac{1}{x}$ – I darbininko darbo našumas,

$\frac{1}{y}$ – II darbininko darbo našumas,

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$ – abiejų darbininkų darbo našumas.

Tai visą darbą abu darbininkai kartu gali atlikti per $1:\frac{x+y}{xy}=\frac{xy}{x+y}$ dienų.

Pagal sąlygą

$$\begin{cases} x-\dfrac{xy}{x+y}=9, \\ y-\dfrac{xy}{x+y}=4; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{x+y}=9, & (1) \\ \dfrac{y^2}{x+y}=4; & (2) \end{cases}$$

(1) lygtį padalijęs iš (2) turime:

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{9}{4}, \quad \frac{x}{y}=\frac{3}{2} \quad \text{ir} \quad x=1{,}5y.$$

Įrašę x reikšmę į (2) lygtį gauname:

$$\frac{y^2}{1{,}5y+y}=4, \quad \frac{y}{2{,}5}=4. \quad \text{Todėl} \quad y=10 \ \text{ir} \ x=15.$$

Vadinasi, I darbininkas gali atlikti darbą per 15 dienų, o II-asis – per 10 dienų.

Kartais pasitaiko spręsti problemas, kurių siužetas atrodo visai nesusijęs su darbu. O sprendimui taikome šių uždavinių sprendimo metodus.

8 pavyzdys. Iš vietovių A ir B tuo pačiu keliu vienas priešais kitą pastoviais greičiais išvažiavo du motociklininkai. Motociklininkas iš A išvažiavo 8 valandą 35 minutės ir į B atvažiavo 13 valandą 11 minučių, o motociklininkas iš B išvažiavo 8 valandą 47 minutės ir į A atvažiavo 14 valandą 32 minutės. Kuriuo laiku motociklininkai prasilenkė kelyje?

Sprendimas. Motociklininko kelionė iš A į B truko 13 val. 11 min. – 8 val. 35 min = 4 h 36 min = $4\frac{3}{5}$ h, o motociklininko kelionė iš B į A truko 14 val. 32 min – 8 val. 47 min = 5 h 45 min = $5\frac{3}{4}$ h. Motociklininko iš A važiavimo spartumas $1:4\frac{3}{5}=\frac{5}{23}$, o motociklininko iš B - $1:5\frac{3}{4}=\frac{4}{23}$.

Motociklininkų vieno prie kito priartėjimo kelyje spartumas yra $\frac{5}{23}+\frac{4}{23}=\frac{9}{23}$.

Per 12 min = $\frac{1}{5}$ h (8 val. 47 min – 8 val. 35 min = 12 min), kol motociklininkas iš B nebuvo pradėjęs važiuoti, motociklininkas iš A nuvažiavo $\frac{5}{23}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{23}$ kelio, todėl kai pradėjo važiuoti motociklininkas iš B, atstumas tarp jų buvo $1-\frac{1}{23}=\frac{22}{23}$ kelio.

Vadinasi, po abiejų motociklininkų važiavimo kartu jie prasilenkė praėjus $\frac{22}{23}:\frac{9}{23}=\frac{22}{9}=2\frac{4}{9}$ (h). Tai įvyko 8 val. 47 min +2 h $26\frac{2}{3}$ min = 11 val. $13\frac{2}{3}$ min.

9 pavyzdys. Keletas vienodai sparčiai dirbančių žmonių gali nuravėti daržą per 30 minučių. Tačiau jie pradėjo darbą vienas po kito vienodais laiko tarpais, o baigė ravėti daržą kartu. Kiek laiko užtruko daržo ravėjimas, jeigu pirmasis žmogus, pradėjęs ravėjimą, dirbo k kartų ilgiau nei paskutinysis?

Sprendimas. Sakykime daržą ravėjo a žmonių, tai daržo ravėjimo apimtis $30a$ minučių. Tegul paskutinysis ravėjo daržą x minučių, tai pirmasis, pradėjęs daržo ravėjimą dirbo kx minučių. Beje, tiek ir užtruko viso daržo ravėjimas.

Kadangi žmonės pradėjo darbą vienas po kito vienodais laiko tarpais, tai visų jų ravėjimo laikai sudaro aritmetinę progresiją, kurios pirmasis narys atitinka pirmojo žmogaus laiką kx minučių, o šios p[progresijos narių skaičius yra a žmonių.

Pasinaudoję aritmetinės progresijos pirmųjų n narių sumos formule $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ turime:

$$\frac{kx+x}{2}\cdot a=30a \text{ arba } \frac{x(k+1)}{2}=30, \text{ t. y. } x=\frac{60}{k+1}.$$

Vadinasi, daržo ravėjimas truko $k\cdot\frac{60}{k+1}=\frac{60k}{k+1}$ minučių.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Namui suremontuoti buvo pasamdyti keli darbininkai, galintys tą darbą atlikti per tam tikrą dienų skaičių. Jei būtų pasamdyta 3 darbininkais mažiau, tai darbas truktų 6 dienomis ilgiau, o jei būtų pasamdyta 2 darbininkais daugiau, tai darbas būtų baigtas 2 dienomis anksčiau sutarto laiko. Kiek buvo pasamdyta darbininkų ir per kiek dienų buvo sutarta baigti namo remontą?

2. Rimas savo užduotį gali atlikti per 15 h, o Simo užduotį – per 25 h. Simas savo užduotį atlieka per 20 h. Per kiek laiko Simas gali padaryti Rimo užduotį?

3. Ritos mobilaus telefono baterijos įkrovos pakanka 4 valandoms pokalbių arba x ryšio laukimo valandoms. Kokia yra x reikšmė, jei žinoma, kad per užsitęsusį Ritos pokalbį visiškai įkrauta telefono baterija išsikrovė per 3 h $51\frac{1}{9}$ min?

4. Vandens bake yra du čiaupai: vienu čiaupu vanduo įteka į baką, o antru išteka iš bako. Jei atidarytume kartu abu čiaupus, tai tuščias bakas prisipildytų per 36 min. Kartą esant tuščiam bakui, buvo atidaryti abu čiaupai 6 minutėms, o po to čiaupas, kuriuo vanduo išteka, buvo uždarytas ir bakas prisipildė per 10 min. Per kiek minučių baką pripildytų pirmasis čiaupas, jei antrasis būtų uždarytas?

5. Dvi statybininkų brigados statė objektą. Po 5 bendro darbo dienų antroji brigada buvo pasiųsta į kitą aikštelę ir darbą baigė viena pirmoji brigada dar po 9 dienų. Per kiek dienų galėtų atlikti visą darbą kiekviena brigada, dirbdama atskirai, jei antrajai brigadai atlikti šį darbą reikia 12 dienų mažiau?

6. Iš vietovių *A* ir *B* vienu keliu vienas priešais kitą pastoviais greičiais išvažiavo du dviratininkai. Pirmasis iš *A* išvažiavo 8 val. 24 min ir į *B* atvyko 12 val. 36 min, o antrasis iš *B* išvažiavo 8 val. 36 min ir į *A* atvyko 13 val. 51 min. Kuriuo laiku dviratininkai kelyje prasilenkė?

7. (Levo Tolstojaus uždavinys.) Į lauką išvyko šienpjovių artėlė. Čia ji turėjo nupjauti dvi pievas, kurių viena buvo dvigubai didesnė už kitą. Pusę dienos artėlė pjovė didesniąją pievą, o antrą dienos pusę ji susiskirstė į dvi lygias grupes, kurių viena turėjo baigti šienauti didesniąją pievą, o antroji ėmė pjauti mažesniąją. Iki vakaro didesnioji buvo nupjauta, o mažesniosios pievos liko sklypas, kurį kitą dieną nupjovė vienas šienpjovys, dirbdamas ištisą dieną. Kiek šienpjovių buvo artėlėje?

8. Penki vienodo galingumo ekskavatoriai, dirbdami kartu, gali iškasti duobę per 24 valandas. Tačiau jie pradėjo dirbti vienas po kito vienodais laiko tarpais, o duobę baigė kasti kartu. Kiek laiko dirbo kiekvienas ekskavatorininkas, jei pirmasis, pradėjęs darbą, dirbo 3 kartus ilgiau, negu paskutinysis įsijungęs į darbą?

9. Petras, dirbdamas vienas, visą darbą atliktų per m valandų. Jonas, dirbdamas vienas, šį darbą atliktų per n valandų. Dirbdami abu, jie dvigubai didesnės apimties darbą atliktų per T valandų. Įsitikinkite, kad T yra skaičių m ir n harmoninis vidurkis.

10. **(**Vienas iš keturių uždavinių, pateiktas 1932 metais Kauno jėzuitų humanitarinėje gimnazijoje per abitūros egzaminus.) Vienam staliui buvo užmokėta 48 Lt, kitam, kuris dirbo 6 val. mažiau, – 27 Lt. Jei pirmasis stalius būtų dirbęs tiek valandų kiek antrasis, antrasis tiek kiek pirmasis, tai būtų uždirbę po lygiai. Po kiek valandų dirbo staliai?

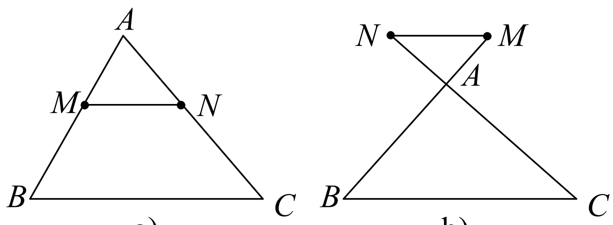
II. TRIKAMPIŲ PANAŠUMAS IR TALIO TEOREMA

Teorinę medžiagą parengė ir antrąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Edmundas Mazėtis

1. Atkarpos AB ir CD yra vadinamos proporcingomis atkarpoms MN ir PQ, jei joms yra teisinga lygybė $\frac{AB}{MN} = \frac{CD}{PQ}$. Analogiškai apibrėžiamas ir didesnio skaičiaus atkarpų proporcingumas.

1 teorema (Talio teorema, Talis iš Mileto, (apie 624 – 548 per. Kr.) – senovės graikų matematikas). Lygiagrečios tiesės, kertančios kampo kraštines (arba jų tęsinius) atkerta jose proporcingas atkarpas.

1 pav. tiesės BC ir MN yra lygiagrečios, todėl atkarpos AM ir AN yra proporcingos atkarpoms AB ir AC, t. y. $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

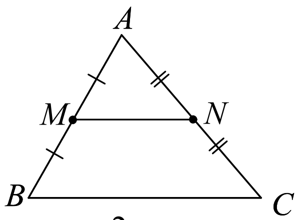


a) b)
1 pav.

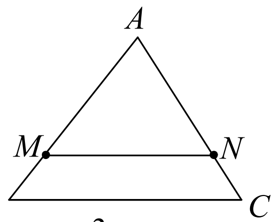
1 išvada. Jei tiesės AB ir MN yra lygiagrečios, tai $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB}$ (1 pav.).

2 išvada. Jei lygiagrečios tiesės kerta kampo kraštines ir vienoje jų iškerta lygias atkarpas, tai ir kitoje kraštinėje jos iškerta lygias atkarpas (2 pav.).

3 išvada (Talio teoremai atvirkštinė teorema) Jei tiesė MN kerta trikampio ABC kraštines AB ir AC taškuose M ir N taip, kad yra teisinga lygybė $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, tai tiesės BC ir MN yra lygiagrečios (3 pav.).



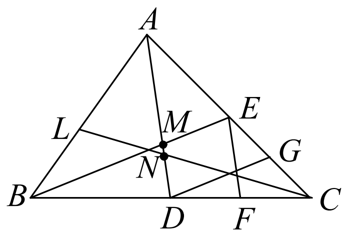
2 pav.



3 pav.

1 pavyzdys. Taikydami Talio teoremą įrodysime, kad trikampio pusiaukraštinės kertasi viename taške, kuriame jos dalijamos santykiu $2:1$ skaičiuojant nuo viršūnės.

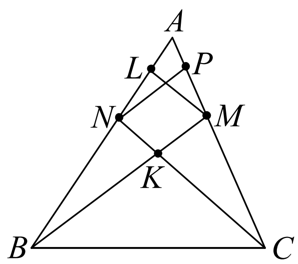
Įrodymas. Sakykime, kad trikampio ABC pusiaukraštinės AD ir BE susikerta taške M, o tiesė EF yra lygiagreti su tiese AD (4 pav.). Kadangi $AE = EC$, tai pagal 2 Talio teoremos išvadą iš čia išplaukia, kad $DF = FC = \frac{1}{4}BC$, taigi $BD:DF = \left(\frac{1}{2}BC\right):(\frac{1}{4}BC) = 2:1$. Pagal Talio teoremą iš sąlygos $AD \parallel EF$ gauname, kad $BM:ME = BD:DF = 2:1$. Analogiškai nubrėžę $DG \parallel BE$ įrodome, kad $AM:MD = AE:EG = 2:1$. Tarę, kad pusiaukraštinės AD ir CL kertasi taške N, lygiai taip pat įrodome, kad $CN:NL = AN:ND = 2:1$. Bet atkarpoje AD yra vienintelis taškas, kuris dalija ją santykiu $2:1$, skaičiuojant nuo viršūnės, todėl taškai M ir N sutampa.



4 pav.

2 pavyzdys. Trikampio ABC kraštinėje AB yra taškas N, o kraštinėje AC – taškas M taip, kad $AN:NB = 2:5$, $AM:MC = 3:4$. Atkarpos BM ir CN susikerta taške K. Rasime santykius $BK:KM$ ir $CK:KN$.

Sprendimas. Per tašką M nubrėžkime tiesę lygiagrečią su tiese CN, kuri kerta kraštinę AB taške L (5 pav.). Pagal Talio teoremą $AL:LN = AM:MC = 3:4$, taigi $LN = \frac{3}{7}AN = \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{7}AB = \frac{6}{49}AB$. Kadangi $ML \parallel KN$, tai vėl pagal Talio teoremą $BK:KM = BN:NL = \frac{5}{7}AB:\frac{6}{49}AB = \frac{35}{6}$. Analogiškai nubrėžę $NP \parallel BM$ turime $AP:PM = AN:NB = 2:5$, $PM = \frac{5}{7}AM = \frac{5}{7}\cdot\frac{3}{7}AC = \frac{15}{49}AC$, $CK:KN = CM:MP = \frac{3}{7}AC:\frac{15}{49}AC = \frac{7}{5}$.



5 pav.

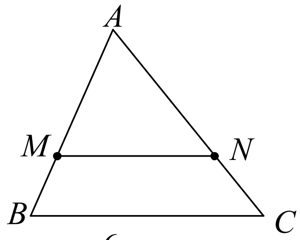
2. Trikampiai yra vadinami panašiaisiais, jei jų atitinkami kampai yra lygūs o prieš lygius kampus esančios kraštinės yra proporcingos. Taigi trikampiai ABC ir $A'B'C'$ yra panašieji, jei $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, o $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$, žymima $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

2 teorema (trikampių panašumo pagal du lygius kampus požymis). Trikampiai yra panašieji, jei vieno trikampio du kampai lygūs dviems kito trikampio kampams.

3 teorema (trikampių panašumo pagal vieną lygų kampą ir dvi proporcingų kraštinių poras). Trikampiai yra panašieji, jei vieno trikampio dvi kraštinės proporcingos kito trikampio dviems kraštinėms, o kampai tarp šių kraštinių yra lygūs.

4 teorema (trikampių panašumo pagal tris proporcingas kraštines). Trikampiai yra panašieji, jei vieno trikampio trys kraštinės yra proporcingos kito trikampio trims kraštinėms.

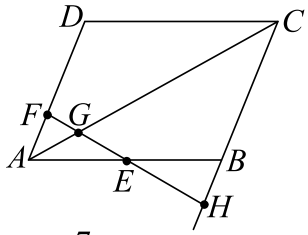
5 teorema. Jei trikampio ABC kraštinėse AB ir AC ar jų tęsiniuose yra taškai M ir N tokie, kad tiesės BC ir MN yra lygiagrečios, tai trikampiai ABC ir AMN yra panašieji (6 pav.).



6 pav.

3 pavyzdys. Taškas E yra lygiagretainio $ABCD$ kraštinės AB vidurio taškas, taškas F yra kraštinėje AD ir $\frac{AF}{FD}=\frac{1}{3}$. Tiesė EF kerta įstrižainę AC taške G. Rasime santykį $AG: GC$.

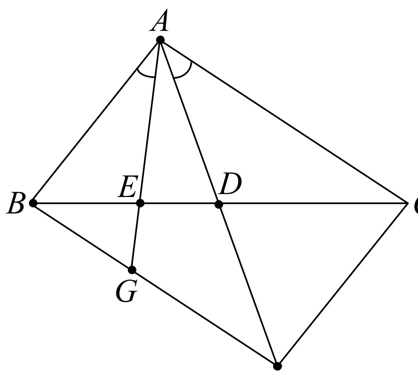
Sprendimas. Sakykime, kad tiesės EF ir BC kertasi taške H (7 pav.). Kadangi $AF \parallel BC$, tai trikampiai AEF ir BEH yra panašieji (5 teorema), todėl $\frac{AF}{BH}=\frac{AE}{EB}$, o kadangi $AE=EB$, tai $AF=BH=\frac{1}{4}AD$, todėl $CH=CB+BH=\frac{5}{4}AD$. Kadangi $CH \parallel AF$, tai $\Delta AFG \sim \Delta CHG$, todėl $\frac{AF}{CH}=\frac{AG}{GC}$. Iš čia $\frac{AG}{GC}=\frac{\frac{1}{4}AD}{\frac{5}{4}AD}=\frac{1}{5}$.



7 pav.

4 pavyzdys. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB=13$, $BC=15$, $AC=14$. Taškai D ir E yra kraštinėje BC, $CD=6$, o $\angle BAE=\angle CAD$. Rasime atkarpos BE ilgį.

Sprendimas. Per tašką B nubrėžiame tiesę lygiagrečią su tiese AC, kuri tiesę AD kerta taške F, o tiesę AE – taške G (8 pav.). Kadangi $AC \parallel BF$, tai $\Delta ADC \sim \Delta FDB$, todėl $\frac{AC}{FB}=\frac{DC}{DB}$, taigi $FB=\frac{AC\cdot DB}{DC}=\frac{14\cdot(15-6)}{6}=21$. Kadangi $\angle BAG=\angle CAD=\angle BFD$, tai trikampiai ABG ir FBA yra panašieji, todėl $\frac{AB}{FB}=\frac{BG}{BA}$, taigi $BG=\frac{AB^2}{FB}=\frac{169}{21}$. Kadangi $AC \parallel BF$, tai $\Delta BGE \sim \Delta CAE$, todėl $\frac{BG}{AC}=\frac{BE}{CE}$. Žymime $BE=x$, tuomet $CE=15-x$, todėl $\frac{\frac{169}{21}}{14}=\frac{x}{15-x}$. Iš čia gauname, kad $x=EB=\frac{2535}{463}$.

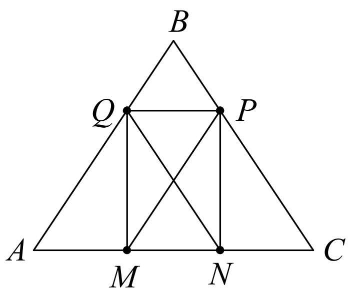


8 pav.

5 pavyzdys. Trikampio kraštinės $AB=9$, $BC=15$, į jį įbrėžtas lygiagretainis taip, kad viena jo kraštinė, kurios ilgis lygus 6, yra trikampio kraštinėje AC, o lygiagretainio įstrižainės lygiagrečios su trikampio kraštinėmis AB ir BC. Rasime kitos lygiagretainio kraštinės ir trikampio kraštinės AC ilgius.

Sprendimas. Sakykime, kad $MNPQ$ yra lygiagretainis, kurio kraštinė $MN=6$ yra trikampio kraštinėje AC, viršūnės P ir Q yra atitinkamai trikampio kraštinėse BC ir AB, tiesė PQ yra lygiagreti su tiese AC, tiesės QN ir PM yra lygiagrečios atitinkamai su trikampio kraštinėmis BC ir AB (9 pav.). Keturkampiai $AMPQ, MNPQ$ ir $NCPQ$ yra lygiagretainiai, todėl $AM=PQ=CN=MN=6$, tai $AC=3MN=18$. Kadangi $PQ \parallel AC$, tai pagal Talio teoremą $\frac{BQ}{BA}=\frac{BP}{BC}$, todėl $\frac{BQ}{BP}=\frac{BA}{BC}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$. Žymime

$BQ=3x$, $BP=5x$. Kadangi $PM \parallel AB$, tai trikampiai ABC ir MPC yra panašieji, todėl $\frac{BC}{AB}=\frac{PC}{PM}=\frac{BC-B}{AQ}$, taigi $\frac{15}{9}=\frac{15-5x}{9-3x}$. Iš čia $x=1$, taigi $BQ=3$, $BP=5$, $AQ=6$. Lygiagretainio $MNPQ$ kraštinę QM rasime trikampiams ABC ir AMQ taikydami kosinusų teoremą: $\cos\angle BAC=$

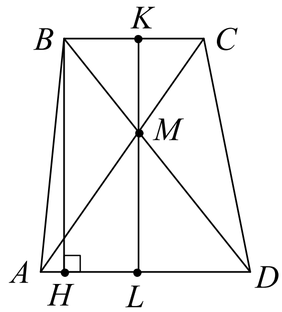


9 pav.

$\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC} = \frac{5}{9}$, todėl $MQ^2 = AQ^2 + AM^2 - 2 \cdot AQ \cdot AM \cdot \cos\angle BAC = 32$, taigi $MQ = 4\sqrt{2}$.

6 pavyzdys. Trapecijos pagrindai lygūs 9 ir 6, aukštinė lygi 10. Rasime atstumus nuo trapecijos įstrižainių susikirtimo taško iki trapecijos pagrindų.

Sprendimas. Sakykime, kad trapecijos $ABCD$ pagrindai $AD = 9, BC = 6$, aukštinė $BH = 10$, o įstrižainės AC ir BD kertasi taške M (10 pav.). Kadangi $AD \parallel BD$, tai trikampiai AMD ir CMB yra panašieji, taigi $\frac{AM}{MC} = \frac{AD}{CB} = \frac{3}{2}$. Nubrėžkime trikampių AMD ir BMC aukštines $ML \perp AD$, $MK \perp BC$. Trikampiai AML ir CMK yra taip pat panašieji, todėl $\frac{ML}{MK} = \frac{AM}{CM} = \frac{3}{2}$, taigi $ML = 3x$, $MK = 2x, ML + MK = BH$, todėl $3x + 2x = 10, x = 2, ML = 6$, $MK = 4$.

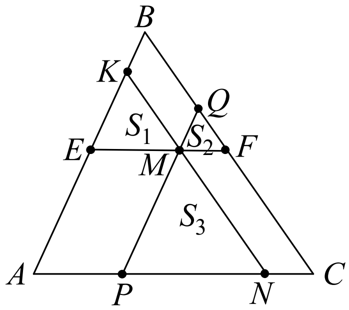


10 pav.

3. Kaip žinome, panašiųjų trikampių plotų santykis lygus jų atitinkamų kraštinių santykio kvadratui: jei $\Delta ABC \sim \Delta NMP$, tai $S_{ABC}: S_{NMP} = AB^2: NM^2 = AC^2: NP^2 = BC^2: MP^2$.

7 pavyzdys. Per trikampio ABC viduje esantį tašką M nubrėžtos trys tiesės, lygiagrečios su trikampio kraštinėmis. Trijų sudaromų trikampių plotai lygūs S_1, S_2 ir S_2 (11 pav.). Rasime trikampio ABC plotą.

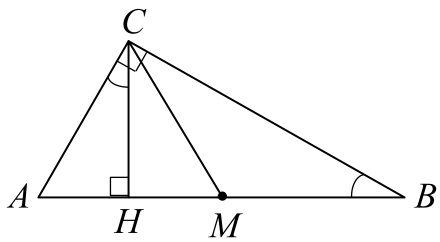
Sprendimas. Sakykime, kad $EF \parallel AC$, $PQ \parallel AB$, $KN \parallel BC$. Trikampiai EKM, MQF, PMN ir ABC yra panašieji. Jei trikampio ABC plotas lygus S, tai pagal panašiųjų trikampių plotų santykio savybę yra teisingos lygybės $\frac{S_1}{S} = \frac{EM^2}{AC^2}$, $\frac{S_2}{S} = \frac{MF^2}{AC^2}$, $\frac{S_3}{S} = \frac{PN^2}{AC^2}$. Iš šių lygybių išplaukia, kad $EM = \sqrt{\frac{S_1}{S}}AC$, $MF = \sqrt{\frac{S_2}{S}}AC$, $PN = \sqrt{\frac{S_3}{S}}AC$. Kadangi $EM = AP, MF = NC$, tai $EM + PN + MF = AP + PN + NC = AC$, tai įrašę EM, PN ir MF reikšmes turime $\left(\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}}\right)AC = AC$, todėl $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$. Taigi trikampio ABC plotas $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.



11 pav.

8 pavyzdys. Atkarpos CH ir CM yra stačiojo trikampio ABC aukštinė ir pusiakraštinė, nubrėžtos į įžambinę (12 pav.), taškas H yra tarp taškų A ir M, o $CM: CH = 5: 4$. Rasime santykį $AH: AM$.

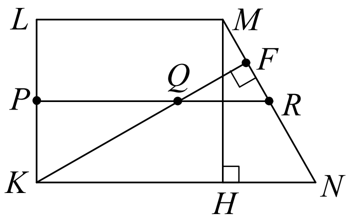
Sprendimas. Žymėkime $AB = c$, $AH = x$, tuomet $BH = c - x$. Stačiojo trikampio pusiaukraštinė, nubrėžta į įžambinę lygi įžambinės pusei, todėl $CM = MA = MB = \frac{c}{2}$, o $CH = \frac{4}{5}CM = \frac{2c}{5}$. Kadangi $\angle ACH = \angle CBH = 90^0 - \angle BAC$, tai statieji trikampiai ACH ir CBH yra panašieji, todėl $\frac{CH}{AH} = \frac{BH}{CH}$, t. y. $CH^2 = AH \cdot BH$. Iš čia gauname, kad $\frac{4}{25}c^2 = x(c - x)$. Šios lygties sprendiniai $x = \frac{1}{5}c$, ir $x = \frac{4}{5}c$, kadangi pagal sąlygą $AH < AM = \frac{c}{2}$, tai antrasis sprendinys netinka. Taigi $AH: AM = \frac{1}{5}c: \frac{1}{2}c = 2: 5$.



12 pav.

9 pavyzdys. Trapecijos $KLMN$ pagrindų ilgiai $KN = 6$, $LM = 4$, $KL \perp KN$, atkarpa PR yra trapecijos vidurinė linija, taškas P yra kraštinės KL vidurio taškas. Atkarpoje PR yra taškas Q toks, kad $PQ: QR = 4: 1$, o tiesės KQ ir MN yra statmenos. Rasime trapecijos $KLMN$ plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad tiesės KQ ir MN susikerta taške F ir nubrėžkime trapecijos aukštinę MH (13 pav.). Kadangi trapecijos pagrindai yra 4 ir 6, tai vidurinė linija $PR = 5$, taigi $PQ = 4$, $QR = 1$. Akivaizdu, kad $KH = LM = 4$, todėl $HN = 2$. Statieji trikampiai KFN ir QFR yra panašieji, todėl $\frac{FN}{FR} = \frac{KN}{QR} = \frac{6}{1} = 6$. Kadangi $FN = FR + RN = FR + \frac{1}{2}MN$, tai $FR + \frac{1}{2}MN = 6FR$, t. y. $MN = 10FR$. Kita vertus, statieji trikampiai QFR ir MHN irgi panašieji (nes $\angle QRF = \angle MNH$), todėl $\frac{FR}{HN} = \frac{QR}{MN}$. Iš čia $FR = \frac{HN \cdot QR}{MN} = \frac{2}{MN}$. Iš lygybių $MN = 10FR$ ir $FR = \frac{2}{MN}$ gauname, kad $MN = \sqrt{20}$. Dabar lengvai randame trapecijos aukštinę $MH = \sqrt{MN^2 - HN^2} = 4$, ir trapecijos plotą $S = \frac{4+6}{2} \cdot 4 = 20$.



13 pav.

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Trikampio vidurinė linija EF dalija trikampį ABC į trapeciją $BCNM$ ir trikampį AMN. Raskite trapecijos BCNM ir trikampio AMN vidurinių linijų ilgių santykį.

2. Smailiojo trikampio kraštinių AB ir BC ortogonaliųjų projekcijų tiesėje AC ilgiai lygūs 6 ir 4. Raskite trikampio pusiaukraštinių ortogonaliųjų projekcijų tiesėje AC ilgius.

3. Taškas K yra trikampio ABC pusiaukraštinės AM vidurio taškas, tiesė BK kraštinę AC kerta taške L, o tiesė CK kraštinę AB kerta taške N. Raskite santykį $NL : BC$.

4. Taškas N yra trikampio ABC kraštinėje AC, jis tenkina sąlygą $AN : NC = 5$. Raskite kokiu santykiu trikampio pusiaukraštinė AM dalija atkarpą BN.

5. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinės AD tęsinyje už taško D pažymėtas taškas P, tiesė PB kerta lygiagretainio kraštinę CD taške Q, o įstrižainę AC – taške R. Raskite atkarpos RB ilgį, jei $PQ = 25$, $QR = 6$.

6. Į trikampį ABC įbrėžtas lygiagretainis, kurio kraštinių ilgiai 3 ir 5, o vienos įstrižainės ilgis lygus 6. Lygiagretainio įstrižainės yra lygiagrečios su trikampio kraštinėmis AB ir AC, o jo trumpesnioji kraštinė yra trikampio kraštinėje BC. Raskite trikampio ABC kraštinių ilgius.

7. Lygiašonio trikampio kampas prie pagrindo lygus 72^0, kampo prie pagrindo pusiaukampinės ilgis lygus 1. Raskite trikampio šoninės kraštinės ilgį.

8. Trapecijos pagrindų ilgiai yra 4 ir 12. Tiesė lygiagreti trapecijos pagrindams, eina per jos įstrižainių susikirtimo tašką. Raskite tos tiesės atkarpos, esančios tarp trapecijos šoninių kraštinių, ilgį.

9. Stačiojo trikampio ABC įžambinėje AB yra taškas D, iš jo nubrėžti statmenys DE ir DF atitinkamai į statinius BC ir AC. Trikampio ADF plotas lygus 9, o trikampio BDE plotas lygus 16. Raskite trikampio ABC plotą.

10. Trapecijos $ABCD$ kampai A ir B yra statieji, pagrindų ilgiai $AD = 14, BC = 10$, taškai M ir N yra šoninių kraštinių AB ir CD vidurio taškai. Iš viršūnės A nuleistas statmuo kraštinei CD kerta atkarpą MN taške K ir $MK : KN = 2 : 1$. Raskite trapecijos $ABCD$ plotą.

III. LYGČIŲ SISTEMOS

Teorinę medžiagą parengė ir trečiąją užduotį sudarė doc. dr. Antanas Apynis (Vilniaus universitetas) ir matematikos mokytojas ekspertas Antanas Apynis (Vilniaus Mykolo Biržiškos gimnazija)

Lengviausios yra tiesinių lygčių sistemos, aišku, su dviem nežinomaisiais. Daug sunkesnių galvosūkių pasitaiko sprendžiant netiesinių lygčių – netgi su dviem nežinomaisiais – sistemas. Narpliojant juos labai praverčia ne tik jau įgytos teorinės žinios, bet ir sukaupta konkrečių uždavinių sprendimo patirtis.

Iš pat pradžių kviečiame kartu pagvildenti kelis netiesinių lygčių sistemų sudarymo bei sprendimo uždavinius. Nagrinėjant pavyzdžius galbūt labiau išryškės vieno ar kito sprendimo būdo pranašumas konkrečiu atveju, gal pasidarys lengviau sugalvoti kokią nors gudrybę (nestandartinę strategiją), daug greičiau atvesiančią uždavinio sprendimą iki atsakymo.

1 pavyzdys. Tuo pačiu metu pirmas dviratininkas išvažiavo iš *M* į *N*, o antras dviratininkas – iš *N* į *M*. Prasilenkę taške *K*, jie važiavo toliau. Pirmas dviratininkas atkarpą *KN* įveikė per 72 minutes, o antras atkarpą *KM* – per 50 minučių.

Apskaičiuokime, keliais procentais antro dviratininko greitis (km/h) didesnis už pirmo dviratininko greitį.

Sprendimas. Tegu s yra atstumas (km) tarp M ir N; t – laikas (min), per kurį dviratininkai nuvažiavo kelio dalį iki prasilenkimo taško K; v_1 ir v_2 – atitinkamai pirmo ir antro dviratininko važiavimo greitis (km/h).

Pagal uždavinio sąlygą,

$$s = v_1 \cdot \frac{t}{60} + v_2 \cdot \frac{t}{60} = (v_1 + v_2) \cdot \frac{t}{60}; \tag{1}$$

$$s = v_1 \cdot \frac{72}{60} + v_2 \cdot \frac{50}{60} = \frac{6}{5} v_1 + \frac{5}{6} v_2; \tag{2}$$

$$s = v_1 \cdot \frac{t}{60} + v_1 \cdot \frac{72}{60} = \frac{t+72}{60} \cdot v_1; \tag{3}$$

$$s = v_2 \cdot \frac{t}{60} + v_2 \cdot \frac{50}{60} = \frac{t+50}{60} \cdot v_2. \tag{4}$$

Turime keturių lygčių su keturiais nežinomaisiais (s, t, v_1 ir v_2) sistemą.

Iš (1) ir (3) gauname lygtį $(v_1 + v_2)t = (t+72)v_1$, o iš (1) ir (4) – lygtį $(v_1 + v_2)t = (t+50)v_2$.

O tada:

$$\begin{cases} (v_1 + v_2)t = (t+72)v_1, \\ (v_1 + v_2)t = (t+50)v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 72 \cdot \dfrac{v_1}{v_2}, \\ t = 50 \cdot \dfrac{v_2}{v_1} \end{cases} \Rightarrow 72 \cdot \frac{v_1}{v_2} = 50 \cdot \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 = \frac{36}{25} \Rightarrow v_2 = 1{,}2 v_1.$$

Taigi antro dviratininko greitis 20 % didesnis už pirmo dviratininko greitį.

Ats.: 20 %.

Atkreipkime dėmesį į tai, kad (2) sistemos lygtis taip ir liko nepanaudota, nes rezultatui gauti pakako (1), (3) ir (4) lygčių. Tos lygties lyg ir turėjome net nerašyti, bet iš kur galėjome žinoti, kad bus galima apsieiti ir be jos.

2 pavyzdys. Išspręskime lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} y^2 - 3xy = 2, \\ x^2 - 4xy + y^2 = 3. \end{cases} \tag{5}$$

Sprendimas. Matome, kad

$$x^2 - 4xy + y^2 = x^2 - xy + (y^2 - 3xy),$$

todėl pabandykime šią sistemą spręsti taip:

$$\begin{cases} y^2 - 3xy = 2, \\ x^2 - 4xy + y^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 3xy = 2, \\ x^2 - xy + (y^2 - 3xy) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 3xy = 2, \\ x^2 - xy + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 3xy = 2, \\ xy = x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 3xy = 2, \\ y = x - \dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-3x\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=2,\\ y=x-\dfrac{1}{x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-2+\dfrac{1}{x^2}-3x^2+3=2,\\ y=x-\dfrac{1}{x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x^4+x^2-1=0,\\ y=x-\dfrac{1}{x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=\dfrac{1}{2},\\ y=x-\dfrac{1}{x}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ y=x-\dfrac{1}{x}\end{cases}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2},\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{arba}\ x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Taigi lygčių sistema turi du sprendinius: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ir $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Dabar į (5) lygčių sistemą pasižiūrėkime kitaip. Pirmą lygtį padauginę iš 3, o antrą lygtį – iš (–2), sudėję dešinėje pusėje gautume nulį, o kairėje pusėje – reiškinį

$$3(y^2-3xy)-2(x^2-4xy+y^2)=y^2-xy-2x^2.$$

Taigi vieną lygtį, sakykim antrą, galėtume pakeisti *homogenine* lygtimi

$$y^2-xy-2x^2=0$$

ir toliau spręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases}y^2-3xy=2,\\ y^2-xy-2x^2=0.\end{cases}\tag{6}$$

Žinome, kad homogeninė lygtis gali būti paranki santykiui tarp y ir x rasti taikant keitinį

$$t=\frac{y}{x},\ x\neq 0.\tag{7}$$

Spręsdami homogeninę lygtį $y^2-xy-2x^2=0,$ gautume:

$$t^2-t-2=0\Rightarrow t=-1\ \text{arba}\ t=2.$$

Vadinasi, $y=-x$ arba $y=2x.$

Na, o toliau (6) sistemą galima spręsti taip:

1) $\begin{cases}y=-x,\\ (-x)^2-3x(-x)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-x,\\ x^2=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ arba $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2};$

2) $\begin{cases}y=2x,\\ (2x)^2-3x(2x)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2x,\\ -2x^2=2\end{cases}\Rightarrow\ \varnothing.$

Ats.: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right).$

Sprendžiant (5) lygčių sistemą svarbu atkreipti dėmesį į tai, kad ji neturi nė vieno sprendinio, kurio komponentė x lygi nuliui (įrašę į (5) $x=0,$ gautume sprendinių neturinčią lygčių $y^2=2$ ir $y^2=3$ sistemą), nes buvo dalijama iš x.

3 pavyzdys. Išspręskime lygčių sistemą su trimis nežinomaisiais

$$\begin{cases}x^2+y^2+4z^2=12,\\ xy+2yz+2zx=12.\end{cases}\tag{8}$$

Sprendimas. Iš pradžių prisiminkime trijų dėmenų sumos kvadrato formulę

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca).$$

Iš jos gauname, kad

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca),$$

$$ab+bc+ca=\frac{1}{2}((a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)).$$

Vadinasi, (8) sistemos pirmą lygtį galėtume pakeisti lygtimi

$$(x+y+2z)^2-2(xy+2yz+2zx)=12$$

arba antrą lygtį pakeisti lygtimi

$$(x+y+2z)^2-(x^2+y^2+4z^2)=24.$$

Pakeiskime antrą. Tada gausime:

$$\begin{cases} x^2+y^2+4z^2=12, \\ (x+y+2z)^2-(x^2+y^2+4z^2)=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+4z^2=12, \\ (x+y+2z)^2-12=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+4z^2=12, \\ x+y+2z=\pm 6. \end{cases}$$

Toliau:

1) $\begin{cases} x^2+y^2+4z^2=12, \\ x+y+2z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2+y^2+4z^2)-4(x+y+2z)=-12, \\ x+y+2z=6 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x^2-4x+4)+(y^2-4y+4)+(4z^2-8z+4)=0, \\ x+y+2z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2+(y-2)^2+4(z-1)^2=0, \\ x+y+2z=6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2,\ y=2,\ z=1 \\ x+y+2z=6 \end{cases} \Rightarrow x=2,\ y=2,\ z=1;$$

2) $\begin{cases} x^2+y^2+4z^2=12, \\ x+y+2z=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2+y^2+4z^2)+4(x+y+2z)=-12, \\ x+y+2z=-6 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+2)^2+(y+2)^2+4(z+1)^2=0, \\ x+y+2z=-6 \end{cases} \Rightarrow x=-2,\ y=-2,\ z=-1.$$

Taigi (8) lygčių sistema turi du sprendinius: (2; 2; 1) ir (–2; –2; –1),

O dabar prisiminkime, kad dviejų dėmenų sumos kvadratas užrašomas formule

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

iš kurios išplaukia, jog

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab,$$

$$ab=\frac{1}{2}((a+b)^2-(a^2+b^2)),$$

ir sugrįžkime prie (8) lygčių sistemos. Pabandykime ją išspręsti taip:

$$\begin{cases} x^2+y^2+4z^2=12, \\ xy+2yz+2zx=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2+y^2)+(y^2+4z^2)+(4z^2+x^2)=24, \\ xy+2yz+2zx=12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x^2-2xy+y^2)+(y^2-4yz+4z^2)+(4z^2-4zx+x^2)=0, \\ xy+2yz+2zx=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)^2+(y-2z)^2+(2z-x)^2=0, \\ xy+2yz+2zx=12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=y=2z, \\ xy+2yz+2zx=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y=2z, \\ 4z^2+4z^2+4z^2=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y=2z, \\ z^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y=2z, \\ z=\pm 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x=2,\ y=2,\ z=1$ arba $x=-2,\ y=-2,\ z=-1.$

Ats.: (2; 2; 1), (–2; –2; –1).

Matome, kad (8) sistemos sprendimas yra gana paprastas, nors kartu ir labai problemiškas, nes lyg ir nesimato, nuo ko pradėti. Tuo labiau, kad ir nežinomųjų trys, o lygtys tik dvi.

Vis dėlto gerai įsidėmėkime vieną, gana paprastą teiginį – gal pravers ir kitą kartą:

Jeigu tarp dviejų, trijų ar daugiau dėmenų nėra nė vieno teigiamo arba nė vieno neigiamo, tai jų suma lygi nuliui tik kai kiekvienas dėmuo lygus nuliui.

4 pavyzdys. Išspręskime lygčių su trimis nežinomaisiais (x, y ir z) sistemą

$$\begin{cases} 3[x]-\{y\}+z=20{,}3, \\ 3[y]+5\{z\}-\{x\}=15{,}1, \\ \{y\}+\{z\}=0{,}9, \end{cases} \qquad (9)$$

jei $x > 0$, $y > 0$ ir $z > 0$; čia $[a]$ yra sveikoji, o $\{a\}$ – trupmeninė skaičiaus a dalis.

Sprendimas. Prisiminkime, kad kiekvienas realusis skaičius a užrašomas formule $a = [a] + \{a\}$ ir kad visada $0 \le \{a\} < 1$. Štai, pavyzdžiui, $[7{,}3] = 7$, $\{7{,}3\} = 0{,}3$; $[-2{,}4] = -3$, $\{-2{,}4\} = 0{,}6$.

Sudėję pirmą ir trečią lygtis, gausime:

$$3[x] + z + \{z\} = 21{,}2 \Rightarrow 3[x] + [z] + 2\{z\} = 21{,}2.$$

Vadinasi, tėra dvi galimybės:

1) $2\{z\} = 0{,}2 \;\Rightarrow\; \{z\} = 0{,}1$;
2) $2\{z\} = 1{,}2 \;\Rightarrow\; \{z\} = 0{,}6$.

Jei būtų $\{z\} = 0{,}1$, tai iš trečios lygties gautume, kad $\{y\} = 0{,}8$, o iš antros lygties galėtume pabandyti rasti $\{x\}$ ir $[y]$:

$$3[y] + 5 \cdot 0{,}1 - \{x\} = 15{,}1 \;\Rightarrow\; 3[y] - \{x\} = 14{,}6 \;\Rightarrow\; \{x\} = 0{,}4, [y] = 5.$$

Įrašę į pirmą lygtį žinomus rezultatus, gautume:

$$3[x] - 0{,}8 + [z] + 0{,}1 = 20{,}3 \;\Rightarrow\; 3[x] + [z] = 21 \;\Rightarrow\; [x] = 7, [z] = 0; [x] = 6, [z] = 3; [x] = 5, [z] = 6;$$
$$[x] = 4, [z] = 9; [x] = 3, [z] = 12; [x] = 2, [z] = 15; [x] = 1, [z] = 18; [x] = 0, [z] = 21.$$

Taigi gauname aštuonis (9) sistemos sprendinius: (7,4; 5,8; 0,1), (6,4; 5,8; 3,1), (5,4; 5,8; 6,1), (4,4; 5,8; 9,1), (3,4; 5,8, 12,1), (2,4; 5,8; 15,1), (1,4; 5,8; 18,1), (0,4; 5,8; 21,1).

Jei būtų $\{z\} = 0{,}6$, iš antros lygties gautume: $3[y] + 5 \cdot 0{,}6 - \{x\} = 15{,}1 \;\Rightarrow\; 3[y] = 12{,}1 + \{x\}$.

Aišku, kad pastaroji lygtis sprendinių neturi, todėl atvejį $\{z\} = 0{,}6$ turime atmesti.

Ats.: (7,4; 5,8; 0,1), (6,4; 5,8; 3,1), (5,4; 5,8; 6,1), (4,4; 5,8; 9,1), (3,4; 5,8, 12,1), (2,4; 5,8; 15,1), (1,4; 5,8; 18,1), (0,4; 5,8; 21,1).

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Pirmas žygeivis iš *A* į *B* nueitų per 132 minutes, o antras žygeivis iš *B* į *A* nueitų per 110 minučių. Po kelių minučių pirmas žygeivis susitiktų su antru žygeiviu, jei pastarasis išeitų 22 minutėmis vėliau už pirmą.

2. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 8x^2 + 2y^2 - 17, \\ x^2 = -4y(x + y). \end{cases}$$

3. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - x + 3y = 4. \end{cases}$$

4. Apskaičiuokite $\dfrac{x^3}{y^3}$, jei $2(x^2 + y^2) = y(4y - 3x)$ ir $3(y^2 - x^2) = x(7y - 5x)$.

5. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + \dfrac{yz}{y + z} = 2, \\ y + \dfrac{zx}{z + x} = 2 \\ z + \dfrac{xy}{x + y} = 1. \end{cases}$$

6. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^3 + y^3 + z^3 = x^4 + y^4 + z^4. \end{cases}$$

7. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{x}{yz}+\dfrac{y}{zx}+\dfrac{z}{xy}=\dfrac{3}{xyz}, \\ xy+yz+zx=3. \end{cases}$$

8. Raskite visus realiųjų skaičių trejetus (a; b; c), kurių kiekvienas skaičius yra lygus kitų dviejų skaičių skirtumo kvadratui.

9. Raskite visas realiųjų skaičių x ir y poras (x; y), tenkinančias lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+[y]+\{x\}=5{,}6\ , \\ [x]+y+\{y\}=5{,}2\ , \\ \{x\}+2\{y\}=2; \end{cases}$$

čia $[a]$ yra sveikoji, o $\{a\}$ – trupmeninė skaičiaus a dalis.

10. Raskite visus lygčių sistemos

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=1{,}2\ , \\ \{x\}+y+[z]=3{,}4\ , \\ [x]+\{y\}+z=4{,}6 \end{cases}$$

sprendinius (x; y; z), jei $x>0$, $y>0$, $z>0$.

IV. NIUTONO BINOMAS

Teorinę medžiagą parengė bei ketvirtąją užduotį sudarė prof. dr. Eugenijus Stankus

Izaoko Niutono (Isaac Newton – anglų fizikas, matematikas, astronomas, alchemikas, filosofas, 1643-1727) pavarde pavadinti fizikos dėsniai, žinomi kaip pirmasis, antrasis ir trečiasis Niutono dėsniai, jėgos matavimo vienetas. Niutonas atliko tyrinėjimus optikos, šiluminės fizikos, matematikos, chemijos, geografijos, istorijos srityse.

Niutonui priskiriama ir formulė dvinario n-tajam laipsniui $(x+y)^n$, $n=1,2,\ldots$, apskaičiuoti, kuri vadinama Niutono binomu. Paprasčiausius tokios formulės atvejus, kai $n=1,2,3,$ žinome:

$$(x+y)^1 = x+y,\ (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2,\ (x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3.$$

Pasinaudodami šiomis formulėmis galėtume apskaičiuoti $(x+y)^4$, $(x+y)^5$ ir aukštesnius laipsnius. Tik toks skaičiavimo būdas nelabai patogus, nes norint apskaičiuoti, pavyzdžiui, $(x+y)^{15}$ reikėtų gerokai padirbėti. Šios temos tikslas – išvesti reiškinio $(x+y)^n$ apskaičiavimo bendrą formulę (Niutono binomo), galiojančią su bet kuriuo laipsnio rodikliu $n=1,2,\ldots$. Taip pat panagrinėsime kai kuriuos uždavinius, susijusius su Niutono binomu.

Įrodinėdami šios temos teiginius naudosimės matematinės indukcijos metodu. Reikės ir kai kurių kombinatorikos žinių.

Matematinės indukcijos metodas. Principas, kai nuo atskirojo teiginio pereinama prie bendrojo, vadinamas *indukcija*. Tačiau teiginys būdamas teisingas atskirais atvejais gali negalioti visais atvejais. Toks pavyzdys galėtų būti teiginys apie kvadratinį trinarį $f(x)=x^2+x+5$ – apskaičiavę $f(1)=7$, $f(2)=11$, $f(3)=17$, suklysime teigdami, kad $f(n)$ su visais natūraliaisiais skaičiais n yra pirminis skaičius, nes $f(4)=25$, $f(5)=35$ nėra pirminiai. O kaip nesuklysti? Kada galima teigti, kad iš teiginio teisingumo atskirais atvejais išplaukia jo teisingumas bendruoju atveju? Atsakyti į šį klausimą kartais pavyksta *matematinės indukcijos metodu.* Šis metodas remiasi *matematinės indukcijos principu*, kuris formuluojamas taip.

Tarkime, kad: 1) *teiginys teisingas su* $n=1$, 2) *jei teiginys teisingas su* $n=k$ $(k\ge 1)$, *tai jis teisingas ir su* $n=k+1$. *Tuomet teiginys teisingas su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi n.*

Pastaba. Kartais, priklausomai nuo nagrinėjamo uždavinio, teiginys galioja nebūtinai pradedant $n=1$. Šis pradinis numeris gali būti $n=0$, $n=2$ arba $n=3$, arba bet kuris kitas natūralusis, netgi sveikasis, skaičius.

Derinių iš *n* elementų po *m* elementų skaičius. Išvedant Niutono binomo formulę mums prireiks išmokti apskaičiuoti baigtinės aibės A, turinčios $n\ge 1$ elementų, poaibių iš m elementų ($0\le m\le n$) skaičių. Šis skaičius žymimas C_n^m ir vadinamas *derinių iš n elementų po m elementų skaičiumi*. Dar C_n^m vadinami *binominiais koeficientais*, nes šie skaičiai, kaip toliau matysime, įeina į Niutono binomo formulę. Taip pat jie naudojami ir daugelyje kitų matematikos formulių.

Aibės A elementų skaičių toliau žymėsime $|A|$. Kad rastume C_n^m, fiksuokime kurį nors aibės A, $|A|=n$, elementą $a\in A$. Visų aibės A poaibių, turinčių po m elementų, aibę P ($|P|=C_n^m$) suskaidykime į dvi klases P_1 ir P_2. Klasei P_1 priskirkime tuos poaibius, turinčius po m elementų, kuriems priklauso elementas a, o klasei P_2 – tuos poaibius (turinčius po m elementų), kuriems nepriklauso elementas a. Kadangi $P=P_1\cup P_2$ ir $P_1\cap P_2=\varnothing$, tai

$$C_n^m = |P| = |P_1| + |P_2|. \tag{1}$$

Visus klasės P_1 poaibius galima gauti iš aibės $A\setminus\{a\}$ (aibė A be elemento a, $|A\setminus\{a\}|=n-1$) poaibių po $m-1$ elementą prie jų prijungus elementą a. Todėl $|P_1|=C_{n-1}^{m-1}$. Klasė P_2 sutampa su aibių, sudarytų iš aibės $A\setminus\{a\}$ elementų po m elementų, aibe, taigi $|P_2|=C_{n-1}^m$. Įrašę gautąsias išraiškas į (1) formulę, gauname

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m. \tag{2}$$

Ši lygybė vadinama Paskalio (Blaise Pascal - prancūzų filosofas, matematikas, fizikas, 1623-1662) lygybe, kuri dažnai iliustruojama vadinamuoju Paskalio trikampiu (žr. LJMM 2003-2005 m. m. 4 temą, autorius V. Stakėnas). Žinoma, kad Paskalio trikampis ir jo sudarymo (2) formulė buvo žinoma senovės Indijoje apie II amžių pr. Kr., o binominių koeficientų iki 8-o laipsnio lentelę 1303 m. sudarė kinų matematikai. Binominių koeficientų žymuo C_n^m atsirado 19 amžiuje, jis, kaip matėme, skirtas žymėti derinių skaičiui iš n elementų po m elementų. Binominiams koeficientams žymėti naudojamas ir kitas žymuo, įvestas anksčiau, t. y. $C_n^m = \binom{n}{m}$. Šio žymens autorius – Oileris (Leonhard Euler – šveicarų matematikas ir fizikas, 1707-1783).

Aptarkime „kraštinius“ binominių koeficientų atvejus.

Kai $n=1$ ($A=\{a\}$), tai m reikšmės galėtų būti $m=0$ ir $m=1$. Akivaizdu, kad $C_1^1=1$ ir $C_1^0=1$ (iš viso yra du poaibiai – vienas iš vieno elemento, kitas – tuščioji aibė). Kai $n=2$, tai aibės $A=\{a_1,a_2\}$ poaibių skaičius yra 4, t. y. jis lygus $C_2^0+C_2^1+C_2^2=1+2+1$.

Naudodamiesi Paskalio formule galime apskaičiuoti ir tolesnes C_n^m reikšmes ar duotosios aibės visų poaibių skaičių. Tik tenka susitarti, kad

$$C_n^m=0 \text{ su visais } n=1,2,\ldots, \text{ kai } m<0 \text{ arba kai } m>n, \text{ ir } C_n^0=1. \qquad (3)$$

Pastaroji lygybė reiškia, kad visuomet turime vieną poaibį be elementų (tai tuščioji aibė $\varnothing$ – ji irgi laikoma poaibiu). Natūralu, kad taip pat yra tik vienas poaibis, turintis n elementų – tai pati aibė A, todėl $C_n^n=1$.

Matematikoje bei taikant ją, binominių koeficientų apibrėžimas kartais išplečiamas. Vietoje n įrašomas realusis (arba kompleksinis) skaičius α - tuomet turi prasmę ir simbolis $\binom{\alpha}{m}$. Tik dabar šis dydis jau negali būti interpretuojamas derinių skaičiumi, o yra apibrėžiamas formule, kurią išvesime toliau.

Sandaugą $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, kaip įprasta, žymėsime skaičiaus $n\ge 1$ *faktorialu*: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, $0!=1$. Faktorialo sąvoką 1808 m. įvedė Krampas (Christian Kramp – prancūzų matematikas, 1760-1826).

Derinių iš *n* elementų po *m* elementų skaičiaus formulės įrodymas. Taikydami matematinės indukcijos metodą, išvesime formulę binominiams koeficientams C_n^m apskaičiuoti.

Aukščiau matėme, kad $C_1^m=1$, kai $m=0,1$. Naudojant faktorialo žymenį šias lygybes galima užrašyti formule

$$C_1^m=1=\frac{1!}{m!\cdot(1-m)!}, \text{ kai } m=0,1.$$

Įrodysime, kad formulė

$$C_n^m=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}, \text{ kai } m=0,1,2,\ldots,n, \qquad (4)$$

teisinga su visais $n\ge 1$.

Tuo tikslu tarkime, kad galioja formulė

$$C_{k-1}^m=\frac{(k-1)!}{m!\cdot(k-1-m)!}, \text{ kai } m=0,1,2,\ldots,k-1. \qquad (5)$$

Tuomet, pasinaudoję Paskalio (2) formule ir (5) prielaida (vadinama *indukcine prielaida*), gausime:

$$C_k^m=C_{k-1}^m+C_{k-1}^{m-1}=\frac{(k-1)!}{m!\cdot(k-1-m)!}+\frac{(k-1)!}{(m-1)!\cdot(k-1-m+1)!}=\frac{k!}{m!\cdot(k-m)!}, \text{ kai } m=1,2,\ldots,k-1.$$

Kadangi formulė $C_k^m=\dfrac{k!}{m!\cdot(k-m)!}$ galioja ir su $m=0$ ir $m=k$, tai $C_k^m=\dfrac{k!}{m!\cdot(k-m)!}$, kai $m=0,1,\ldots,k$.

Remdamiesi matematinės indukcijos principu galime teigti, kad (4) formulė derinių skaičiui C_n^m surasti galioja su visais $n\ge 1$.

Pastaba. Skaičiuojant koeficientus C_n^m dažnai naudojamasi formule

$$C_n^m = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}, \text{ kai } m = 0,1,2,\ldots,n\,, \tag{6}$$

kuri nesunkiai išvedama iš (4)-osios išskleidus faktorialus ir suprastinus. Beje, pastaroji išraiška naudojama apibrėžiant aukščiau minėtus apibendrintuosius binominius koeficientus:

$$\binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-m+1)}{m!}\,.$$

Atkreipkime dėmesį, kad iš (4) formulės išplaukia svarbi binominių koeficientų savybė

$$C_n^m = C_n^{n-m},\ m = 0,1,2,\ldots,n \tag{7}$$

(įsitikinkite jos teisingumu savarankiškai).

Niutono binomo formulė. Vėl naudodamiesi matematinės indukcijos metodu įrodysime, kad su visais $n \geq 1$ galioja Niutono binomo formulė

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n y^0 + C_n^1 x^{n-1} y^1 + \ldots + C_n^{n-1} x^1 y^{n-1} + C_n^n x^0 y^n\,, \tag{8}$$

kuri, vartojant sumavimo simbolį $\sum_{i=1}^{k} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, gali būti užrašyta taip:

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^{n-m} y^m\,. \tag{9}$$

Niutono binomo (8) ir (9) lygybių dešines puses toliau vadinsime binomo $(x+y)^n$ *skleidiniu*, o skleidinio (m+1)-ąjį narį žymėsime $T_{m+1} = C_n^m x^{n-m} y^m,\ m = 0,1,\ldots,n$. Taigi binomo skleidinį sudaro $n+1$ nario suma.

Niutono binomo formulės įrodymas.

Kai $n = 1$, (9) formulė teisinga: $(x+y)^1 = \sum_{m=0}^{1} C_1^m x^{1-m} y^m = C_1^0 x^1 y^0 + C_1^1 x^0 y^1 = x + y$.

Darome indukcinę prielaidą

$$(x+y)^{k-1} = \sum_{m=0}^{k-1} C_{k-1}^m x^{k-1-m} y^m,\quad k \geq 2\,.$$

Tuomet

$$(x+y)^k = (x+y)\cdot(x+y)^{k-1} = (x+y)\cdot\sum_{m=0}^{k-1} C_{k-1}^m x^{k-1-m} y^m = \sum_{m=0}^{k-1} C_{k-1}^m x^{k-m} y^m + \sum_{m=0}^{k-1} C_{k-1}^m x^{k-1-m} y^{m+1} =$$

$$= \sum_{m=0}^{k-1} C_{k-1}^m x^{k-m} y^m + \sum_{m=0}^{k-1} C_{k-1}^m x^{k-1-m} y^{m+1} = \sum_{m=0}^{k} C_{k-1}^m x^{k-m} y^m + \sum_{m=0}^{k} C_{k-1}^{m-1} x^{k-m} y^m = \sum_{m=0}^{k} (C_{k-1}^m + C_{k-1}^{m-1}) x^{k-m} y^m =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} C_k^m x^{k-m} y^m\,.$$

Čia pakeisdami sumavimą pasinaudojome (3) lygybėmis, o paskutiniame žingsnyje – Paskalio (2) lygybe. Gavome, kad

$$(x+y)^{k-1} = \sum_{m=0}^{k-1} C_{k-1}^m x^{k-1-m} y^m \Rightarrow (x+y)^k = \sum_{m=0}^{k} C_k^m x^{k-m} y^m\,.$$

Pagal matematinės indukcijos principą galime teigti, kad Niutono binomo formulė ((8) ir (9) lygybės) galioja su visais natūraliaisiais skaičiais $n \geq 1$.

Uždavinių, susijusių su Niutono binomo formule, pavyzdžiai.

1 *pavyzdys*. Tarkime, aibė A sudaryta iš n elementų. Apskaičiuokime, kiek iš viso poaibių, įskaitant tuščią ir pačią aibę, galima sudaryti iš jos elementų.

Aišku, kad šis skaičius yra $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n$. Pagal Niutono binomo formulę gauname, kad

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = (1+1)^n = 2^n\,. \tag{10}$$

Taigi aibės A poaibių skaičius yra 2^n.

2 *pavyzdys*. Binominiai koeficientai tenkina lygybę

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n = 0. \qquad (11)$$

Įrodymas. Įrašę į Niutono binomo (8) formulę $x = 1$ ir $y = -1$, gauname:

$$0 = (1 + (-1))^n = C_n^0 + C_n^1 \cdot (-1) + C_n^2 \cdot (-1)^2 + ... + C_n^{n-1}(-1)^{n-1} + C_n^n(-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n.$$

Taigi (11) formulė galioja.

3 *pavyzdys*. Apskaičiuokime sumą $S_n = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n$.

Sprendimas. Pasinaudoję (7) formule galime rašyti:

$$C_n^1 = C_n^{n-1},\ C_n^2 = C_n^{n-2},\ C_n^3 = C_n^{n-3},\ ...,\ C_n^{n-1} = C_n^1, C_n^n = C_n^0.$$

Tuomet $S_n = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = C_n^{n-1} + 2C_n^{n-2} + 3C_n^{n-3} + ... + (n-1)C_n^1 + nC_n^0$.

Iš čia gauname: $2\,S_n = (C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + (n-2)C_n^{n-2} + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n) +$

$+(nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 + (n-3)C_n^3 + ... + 2C_n^{n-2} + C_n^{n-1}) =$

$= n(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n) = n \cdot 2^n \Rightarrow S_n = n \cdot 2^{n-1}.$ *Ats.*: $S_n = n \cdot 2^{n-1}$.

4 *pavyzdys*. Raskime natūralųjį skaičių *n*, su kuriuo $\dfrac{C_{n+2}^4}{C_n^2} = 11$.

Sprendimas. $\dfrac{C_{n+2}^4}{C_n^2} = 11 \Rightarrow \dfrac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot 1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot n\cdot(n-1)} = 11 \Rightarrow \dfrac{(n+2)\cdot(n+1)}{12} = 11 \Rightarrow n^2 + 3n + 2 = 132 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 + 3n - 130 = 0 \Rightarrow n = 10.$ *Ats.*: $n = 10$.

5 *pavyzdys*. Rasime Niutono binomo $\left(3x + \dfrac{1}{3x^2}\right)^6$ skleidinio narį, kurio reikšmė yra pastovi su visomis realiosiomis kintamojo *x* reikšmėmis.

Sprendimas. Tarkime, kad ieškomasis skleidinio narys yra $T_{m+1} = C_6^m (3x)^{6-m} (\dfrac{1}{3x^2})^m = C_6^m 3^{6-2m} x^{6-3m}$.

Kai $6 - 3m = 0$, šio nario reikšmė bus pastovi nepriklausomai nuo *x* reikšmės. Iš čia $m = 2$ ir ieškomasis narys yra $T_3 = C_6^2 \cdot 3^2 \cdot x^0 = 15 \cdot 9 = 135$. *Ats.*: $T_3 = 135$.

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Naudodamiesi derinių skaičiaus formule $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$, kai $m = 0, 1, 2, \ldots, n$, įrodykite Paskalio lygybę $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$.

2. Įrodykite binominių koeficientų savybę $C_n^m \cdot C_m^p = C_n^p \cdot C_{n-p}^{m-p}$, čia $p \le m \le n$.

3. Matematinės indukcijos metodu įrodykite nelygybę $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, kai $n \ge 2$.

4. Tegu *n* – lyginis natūralusis skaičius ($n = 2k$). Nustatykite, kuris iš binominių koeficientų C_n^m, $m = 0, 1, 2, \ldots, n$, yra didžiausias.

5. Naudodamiesi (10) ir (11) formulėmis apskaičiuokite sumą $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... + C_n^{n-2} + C_n^n$, kai *n* – lyginis natūralusis skaičius.

6. Raskite natūralųjį skaičių *n*, su kuriuo $C_{2n}^{2n-1} \cdot C_{2n+1}^{2n} = 20$.

7. Binomo $\left(a\sqrt{a}+\frac{1}{a^4}\right)^n$ skleidinio trečiojo nario koeficientas yra 44 didesnis negu antrojo nario koeficientas. Raskite nario, į kurį neįeina kintamasis *a*, koeficientą.

8. Kelintas binomo $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}+\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$ skleidinio narys turi daugiklį a^7?

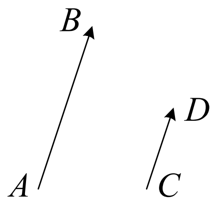
9. Raskite binomo $(3-\sqrt[5]{3})^{15}$ skleidinio racionaliuosius narius.

10. Raskite reiškinio $R(x)=(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5+\ldots+(1+x)^{15}$ nario su daugikliu x^3 koeficientą.

V. VEKTORINIO METODO TAIKYMAI

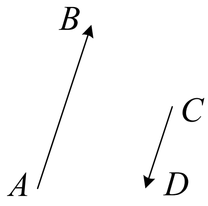
Teorinę medžiagą parengė ir penktąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Edmundas Mazėtis

Sakoma, kad atkarpa AB yra *orientuotoji atkarpa* (arba kryptinė atkarpa), jei yra nurodyta, kuris iš taškų A ir B yra orientuotosios atkarpos pradžios taškas, tuomet kitas iš atkarpos galų yra jos pabaigos taškas. Orientuotosios atkarpos yra vadinamos *vektoriais*. Tekste vektoriai žymimi arba viena raide su rodykle $\vec{a}$, arba dviem didžiosiomis raidėmis su rodykle $\overrightarrow{AB}$, pirmoje vietoje rašant vektoriaus pradžios tašką. Vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ yra vadinami a) *vienakrypčiais* (žymima $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$), jei spinduliai AB ir CD yra vienodos krypties (1a pav.), b) *priešpriešiais* (žymima $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$), jei spinduliai AB ir CD yra priešingų krypčių (1b pav.), c) *kolineariaisiais* (žymima $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$), jei tiesės AB ir CD lygiagrečios. Kolinearieji vektoriai yra arba vienakrypčiai, arba priešpriešiai. Vektoriaus $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *ilgiu* (arba *moduliu*) vadinamas atkarpos AB ilgis; vektoriaus $\vec{a}$ modulis žymimas $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$. Vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ yra vadinami *lygiais*, jei jų moduliai lygūs, o kryptys sutampa, žymima $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Iš šio apibrėžimo išplaukia, kad, jei vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ nėra vienoje tiesėje, tai vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ yra lygūs tada ir tik tada, kai keturkampis $ABDC$ yra lygiagretainis.



$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$

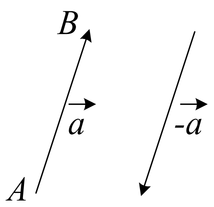
1a pav.



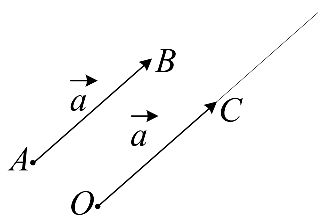
$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$

1b pav.

Nuliniu vektoriumi $\vec{0}$ vadinamas toks vektorius, kurio pradžios ir galo taškai sutampa. Nulinis vektorius yra kolinearusis su bet kuriuo vektoriumi. Nulinio vektoriaus modulis lygus nuliui. Vektoriai, kurių moduliai lygūs, o kryptys priešingos, yra vadinami *priešingaisiais vektoriais*. Vektoriui $\vec{a}$ priešingasis vektorius žymimas $-\vec{a}$. Akivaizdu, kad $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ (2 pav.).

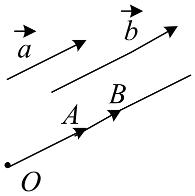


2 pav.



3 pav.

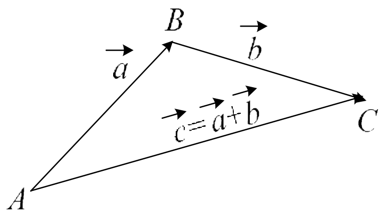
Sakykime, kad $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ – duotasis vektorius, O – bet kuris plokštumos taškas. Nubrėžkime spindulį OM, vienkryptį su spinduliu AB ir jame raskime vienintelį tašką C, kad atkarpos AB ir OC būtų vienodo ilgio (3 pav.). Tuomet vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{OC}$ yra lygūs. Sakoma, kad vektorius $\vec{a}$ yra atidedamas nuo taško O. Akivaizdu, bet kuris vektorius vieninteliu būdu yra atidedamas nuo bet kurio taško. Jei $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ – kolinearieji vektoriai, tai atidėti nuo vieno taško, jie yra vienoje tiesėje (4 pav.). Jei du vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ atidėti nuo vieno taško O ($\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b}$), tai kampas AOB yra vadinamas *kampu tarp vektorių* $\vec{a}$ ir $\vec{b}$; šis kampas yra intervale $[0^0, 180^0]$. Jei $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, tai kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ lygus 0°, o jei $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ – tai kampas tarp jų lygus 180°.



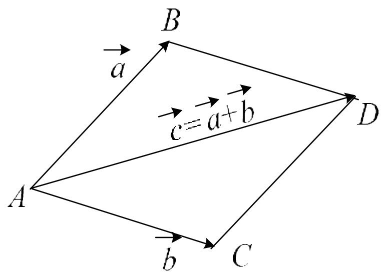
$$\vec{a} \parallel \vec{b},\ \overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b}.$$

4 pav.

Sakykime, kad $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ – du vektoriai. Parinkime tašką A ir atidėkime nuo jo vektorių $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, o nuo taško B - vektorių $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ (5 pav.). Tuomet vektorius $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ yra vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *suma*: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, arba $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (vektorių sudėties trikampio taisyklė).



5 pav.



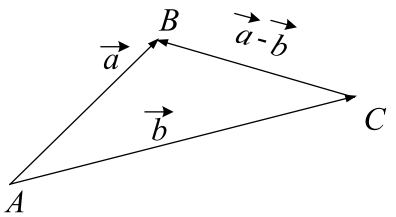
6 pav.

Jei vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nekolinearieji, tai atidėję nuo taško A vektorius $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ir $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, nubrėžiame lygiagretainį *ABDC* (6 pav.). Tuomet $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (vektorių sudėties lygiagretainio taisyklė).

Vektorių sudėtis pasižymi šiomis savybėmis:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,
2. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$,
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$,
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

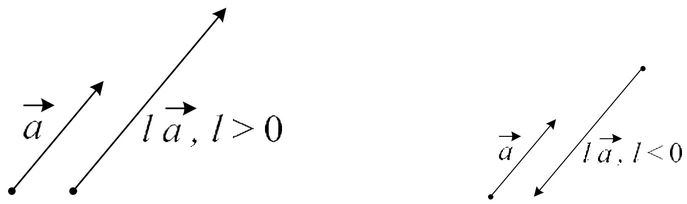
Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *skirtumu* vadinamas toks vektorius $\vec{x}$, kad $\vec{x} + \vec{b} = \vec{a}$, žymime $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$. Akivaizdu, kad $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ (7 pav.). Jei $\vec{a} = \overrightarrow{AB},\ \vec{b} = \overrightarrow{AC}$, tai $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.



7 pav.

Skaičiaus *l* ir vektoriaus $\vec{a}$ *sandauga* vadinamas vektorius $\vec{b}$, nustatomas šiomis sąlygomis:

1) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, jei $l > 0$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, jei $l < 0$;
2) $\left|\vec{b}\right| = |l| \cdot |\vec{a}|$ (8 pav.).



8 pav.

Skaičiaus 0 ir vektoriaus $\vec{a}$ sandauga yra nulinis vektorius. Skaičiaus l ir vektoriaus $\vec{a}$ sandauga žymima $\vec{b} = l \cdot \vec{a}$ (arba $\vec{b} = l\vec{a}$).

Vektoriaus daugyba iš skaičiaus pasižymi tokiomis savybėmis:

1) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a},\ -1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$,
2) $(lk) \cdot \vec{a} = l \cdot (k \cdot \vec{a})$,
3) $(l + k) \cdot \vec{a} = l \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{a}$,
4) $l \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = l \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b}$.

Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearieji tada ir tik tada, kai yra toks skaičius l, kad $\vec{b} = l \cdot \vec{a}$. Jei $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, tai $l = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, o jei $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, tai $l = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

1 pavyzdys. Nenuliniai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra nekolinearieji. Rasime tokią x reikšmę, kad vektoriai $\vec{c} = (x - 2)\vec{a} + \vec{b}$ ir $\vec{d} = (2x + 1)\vec{a} - \vec{b}$ būtų kolinearieji.

Sprendimas. Vektoriai $\vec{c}$ ir $\vec{d}$ yra kolinearieji tada ir tik tada, kai yra toks skaičius y, kuriam yra teisinga lygybė $\vec{d} = y\vec{c}$. Taikydami vektoriaus daugybos iš skaičiaus ir vektorių sudėties savybes iš šios lygybės gauname, kad $(2x + 1)\vec{a} - \vec{b} = y\left((x - 2)\vec{a} + \vec{b}\right)$, $(2x + 1)\vec{a} - \vec{b} = (xy - 2y)\vec{a} + y\vec{b}$. Iš vektorių atimties savybių išplaukia, kad vektoriai gali būti perkeliami iš vienos lygybės pusės į kitą, keičiant ženklus. Todėl iš paskutiniosios lygybės turime

$$(2x + 1 - xy + 2y)\vec{a} = (1 + y)\vec{b}. \qquad (*)$$

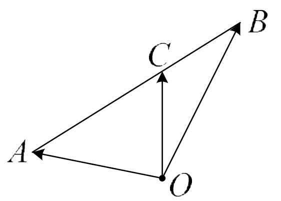
Jei $y + 1 \neq 0$, tai iš jo padalįję gauname, kad $\vec{b} = \frac{2x+1+xy+2y}{y+1}\vec{a}$, taigi vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearieji, o tai prieštarauja uždavinio sąlygai. Taigi $y + 1 = 0$, todėl (*) lygybės dešinioji pusė lygi nuliniam vektoriui. Iš čia gauname, kad $(2x + 1 - xy + 2y)\vec{a} = \vec{0}$. Kadangi vektorius $\vec{a}$ yra nenulinis, tai ši lygybė teisinga tik kai $2x + 1 - xy + 2y = 0$. Taigi tam, kad vektoriai $\vec{c}$ ir $\vec{d}$ būtų kolinearieji, turi galioti lygybės $2x + 1 - xy + 2y = 0$ ir $y + 1 = 0$. Iš jų randame, kad $y = -1$, $x = \frac{1}{3}$. Patikrinus gauname, kad $\vec{c} = \left(\frac{1}{3} - 2\right)\vec{a} + \vec{b} = -\frac{5}{3}\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = \left(2 \cdot \frac{1}{3} + 1\right)\vec{a} - \vec{b} = \frac{5}{3}\vec{a} - \vec{b}$, taigi $\vec{c}$ ir $\vec{d}$ – priešingieji vektoriai.

Atsakymas: $x = \frac{1}{3}$.

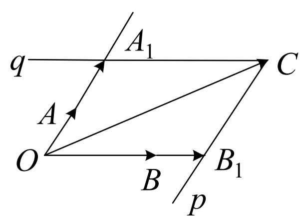
2 pavyzdys. Sakykime, kad atkarpoje *AB* yra taškas *C* ir $AC : CB = \alpha : \beta$, čia α ir β – du duotieji skaičiai. Tuomet bet kuriam taškui *O* yra teisinga lygybė $\overrightarrow{OC} = \frac{\beta\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OB}}{\alpha + \beta}$.

Sprendimas. Sakykime, kad $AC : CB = \alpha : \beta$ (9 pav.). Tuomet $\overrightarrow{AC} = \frac{\alpha}{\beta}\overrightarrow{CB}$. Jei *O* – bet kuris plokštumos taškas, tai $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, t. y. $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \frac{\alpha}{\beta}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$. Iš čia gauname, kad $(\alpha + \beta)\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OB} + \beta\overrightarrow{OA}$, ką ir reikėjo įrodyti.

1 teorema. Sakykime, kad $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ – du plokštumos nekolinearieji vektoriai. Tuomet bet kuris plokštumos vektorius $\vec{c}$ vienareikšmiškai išreiškiamas vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ t. y. egzistuoja skaičiai l ir m, kad būtų teisinga lygybė $\vec{c} = l\vec{a} + m\vec{b}$.



9 pav.

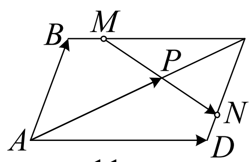


10 pav.

Įrodymas. Atidėkime duotuosius vektorius nuo pasirinkto plokštumos taško O: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ (10 pav.). Kadangi vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra nekolinearieji, tai taškai A, B ir C nėra vienoje tiesėje. Per tašką C nubrėžiame tieses $p \parallel OA$ ir $q \parallel OB$. Sakykime, kad tiesės p ir OB kertasi taške B_1, o tiesės q ir OA – taške A_1. Kadangi vektoriai $\overrightarrow{OA_1}$ ir $\overrightarrow{OA}$ kolinearieji, tai egzistuoja skaičius l, kad $\overrightarrow{OA_1} = l \cdot \overrightarrow{OA} = l \cdot \vec{a}$. Analogiškai vektoriai $\overrightarrow{OB_1}$ ir $\overrightarrow{OB}$ kolinearieji, tai egzistuoja skaičius m, kad $\overrightarrow{OB_1} = m \cdot \overrightarrow{OB} = m \cdot \vec{b}$. Kadangi $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$, tai $\vec{c} = l\vec{a} + m\vec{b}$. Jei $l' \neq l$, ir $m' \neq m$ – kiti skaičiai, su kuriais teisinga lygybė $\vec{c} = l'\vec{a} + m'\vec{b}$, tai atėmę vieną lygybę iš kitos, gauname, kad $(l - l')\vec{a} + (m - m')\vec{b} = \vec{0}$ t. y. $\vec{a} = \frac{m-m'}{n-n'}\vec{b}$, taigi $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Gavome prieštarą teoremos sąlygai, taigi $l' = l$, $m' = m$, ir teorema įrodyta.

3 pavyzdys. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėje BC yra taškas M toks, kad $BM : MC = 1:4$, o kraštinėje CD yra taškas N toks, kad $CN : ND = 3:2$. Rasime, kokiu santykiu atkarpa MN dalija įstrižainę AC.

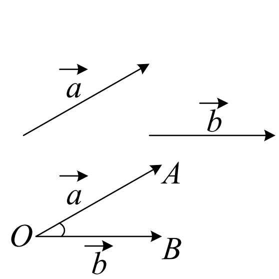
Sprendimas. Tokių uždavinių sprendime taikome 1 teoremoje įrodytą teiginį. Tuo tikslu pasirenkame kurį nors vektorių ir jį du kartus išreiškiame dviem nekolineariaisiais vektoriais. Sakykime, kad atkarpos MN ir AC kertasi taške P (11 pav.). Vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$ yra nekolinearieji, todėl pasirinkę vektorių $\overrightarrow{AP}$ jį išreikškime šiais vektoriais dviem būdais – t. y. taikydami du skirtingus uždavinio sąlygos teiginius. Visų pirma pastebime, kad vektoriai $\overrightarrow{AP}$ ir $\overrightarrow{AC}$ yra kolinearieji, todėl egzistuoja skaičius x, kad $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AC}$. Kadangi pagal vektorių sudėties lygiagretainio taisyklę $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, tai $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD}$ (1). Kita vertus, taškas P yra atkarpoje MN, taigi vektoriai $\overrightarrow{MP}$ ir $\overrightarrow{MN}$ yra kolinearieji, todėl egzistuoja toks skaičius y, kad yra teisinga lygybė $\overrightarrow{MP} = y\overrightarrow{MN}$, o tai reiškia – ir lygybė $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{MN}$. Išreikšime šios lygybės dešniojoje pusėje esančius vektorius pasirinktais vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$. Turime, kad $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{5}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AD}$. Iš čia turime $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AD} + y\left(-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AD}\right)$, taigi gauname dar vieną vektoriaus $\overrightarrow{AP}$ išraišką: $\overrightarrow{AP} = \left(1 - \frac{3y}{5}\right)\overrightarrow{AB} + (\frac{1}{5} + \frac{4y}{5})\overrightarrow{AD}$ (2). Kadangi pagal 1 teoremą vektorius $\overrightarrow{AP}$ nekolineariaisiais vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$ išreiškiamas vieninteliu būdu, tai (1) ir (2) lygybės turi sutapti, t. y. koeficientai prie tų pačių vektorių turi būti vienodi. Taigi gauname sistemą $x = 1 - \frac{3y}{5}$, $x = \frac{1}{5} + \frac{4y}{5}$. Iš šios sistemos surandame $y = \frac{4}{7}$, $x = \frac{23}{35}$. Taigi $\overrightarrow{AP} = \frac{23}{35}\overrightarrow{AC}$, todėl ieškomasis santykis $AP : PC = 23:12$.



11 pav.

Atsakymas: 23 :12.

Sakykime, kad duoti du vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$. Atidėkime juos nuo vieno taško O, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (12 pav.). Tuomet kampas AOB yra kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$. Skaičius, lygus vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ modulių sandaugai, padaugintai iš kampo tarp jų kosinuso, vadinamas vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *skaliarine sandauga.* Jei $\vec{a}$ ir $\vec{b}$. – duotieji vektoriai, kampas tarp jų lygus φ, tai jų skaliarinė sandauga $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$. Iš skaliarinės sandaugos apibrėžimo išplaukia, kad nenuliniai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ statmeni tada ir tik tada, kai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui.



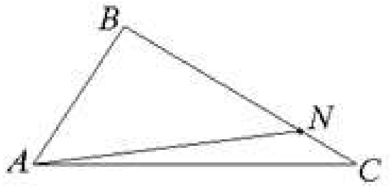
12 pav.

Skaliarinė sandauga pasižymi šiomis savybėmis:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
3. $(l \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = l \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$;
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \geq 0$, $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ tik kai $\vec{a} = \vec{0}$.

Pagal skaliarinės daugybos apibrėžimą ir ketvirtąją savybę kampas φ tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ apskaičiuojamas pagal formulę $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$, o vektoriaus $\vec{a}$ modulis – pagal formulę $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

4 **pavyzdys.** Trikampio ABC kraštinės AB ir AC lygios atitinkamai 4 ir 8, kampas A lygus 60^0, taškas N dalija kraštinę BC santykiu $BN : NC = 3 : 1$. Rasime atkarpos AN ilgį (13 pav.).



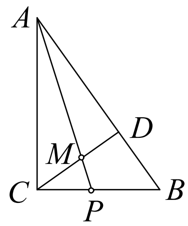
13 pav.

Sprendimas. Kadangi $BN : NC = 3 : 1$, tai pagal 2 pavyzdžio lygybę $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC})$. Pakėlę šią lygybę skaliariškai kvadratu, gauname $\overrightarrow{AN}^2 = \frac{1}{16}(\overrightarrow{AB}^2 + 6\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + 9\overrightarrow{AC}^2)$. Kadangi $\overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = 16$, $\overrightarrow{AC}^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 = 64$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\angle\mathrm{A} = 4\cdot 8\cdot\frac{1}{2} = 16$, tai $\overrightarrow{AN}^2 = \frac{1}{16}(16 + 6\cdot 16 + 9\cdot 64) = 43$, todėl $AN = \sqrt{\overrightarrow{AN}^2} = \sqrt{43}$.

Atsakymas: $\sqrt{43}$.

5 pavyzdys. Stačiajame trikampyje $ABC, \angle\mathrm{C} = 90^0$, nubrėžta aukštinė $CD,$ taškas M – jos vidurio taškas, tiesė AM kerta statinį CB taške P. Įrodysime, kad $CP : PB = cos^2\angle\mathrm{A}$.

Sprendimas. Sakykime, kad stačiajame trikampyje ABC $AC = b,$ $BC = a,$ $AB = c$ (14 pav.). Vektorių $\overrightarrow{CD}$ išreikšime nekolineariaisiais vektoriais $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$ ir $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$. Tarkime, kad $\overrightarrow{CD} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Kadangi $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$, vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra statmeni, o $\vec{a}^2 = a^2,$ $\vec{b}^2 = b^2,$ tai vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ statmenumo sąlyga yra tokia: $(\vec{a} - \vec{b})(x\vec{a} + y\vec{b}) = 0$. Iš čia gauname, kad $xa^2 - yb^2 = 0.$ Kadangi taškas D yra atkarpoje $AB,$ tai vektoriai $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{AB}$ yra kolinearieji, taigi yra toks skaičius $z,$ kad $\overrightarrow{AD} = z\overrightarrow{AB}$.



14 pav.

Iš lygybės $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} = x\vec{a} + (y-1)\vec{b}$ išplaukia, kad $x\vec{a} + (y-1)\vec{b} = z\vec{a} - z\vec{b}$. Kadangi $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra nekolinearieji vektoiriai, tai ši lygybė yra teisinga, kai $x = z,$ $y - 1 = -z$. Iš čia $x = 1 - y,$ todėl $(1-y)a^2 - yb^2 = 0.$ Taigi $y = \frac{a^2}{a^2+b^2},$ $x = 1 - y = \frac{b^2}{a^2+b^2}$, todėl gavome tokią vektoriaus $\overrightarrow{CD}$ išraišką $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{a^2+b^2}(b^2\vec{a} + a^2\vec{b})$. Tuomet $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2(a^2+b^2)}(b^2\vec{a} + a^2\vec{b})$, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2(a^2+b^2)}(b^2\vec{a} + a^2\vec{b}) - \vec{b} = \frac{1}{2(a^2+b^2)}(b^2\vec{a} - (a^2 + 2b^2)\vec{b})$. Kadangi vektoriai $\overrightarrow{CP}$ ir $\overrightarrow{CB}$ yra kolinearieji, tai yra toks skaičius $k,$ kad $\overrightarrow{CP} = k\vec{a}$. Vektoriai $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CA} = k\vec{a} - \vec{b}$ ir $\overrightarrow{AM}$ irgi yra kolinearieji, todėl yra toks skaičius l, kad $\overrightarrow{AM} = l\overrightarrow{AP}$, taigi $\frac{1}{2(a^2+b^2)}(b^2\vec{a} - (a^2 + 2b^2)\vec{b}) = lk\vec{a} - l\vec{b}$. Kadangi vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra nekolinearieji, tai ši lygybė teisinga, kai $l = \frac{a^2+2b^2}{2(a^2+b^2)}$, $k = \frac{b^2}{2(a^2+b^2)} : l = \frac{b^2}{a^2+2b^2}$. Taigi $\overrightarrow{CP} = \frac{b^2}{a^2+2b^2}\overrightarrow{CB}$, todėl $CP : PB = \frac{b^2}{a^2+2b^2} : \left(1 - \frac{b^2}{a^2+2b^2}\right) = \frac{b^2}{a^2+b^2} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 = cos^2\angle\mathrm{A}$.

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. $ABCDEF$ — taisyklingasis šešiakampis. Vektorius $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{BD}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AF}$.

2. Taškai M ir N yra trikampio ABC kraštinių AB ir AC vidurio taškai. Vektorius $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{MN}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{BN}$ ir $\overrightarrow{CM}$.

3. Nenuliniai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra nekolinearieji. Raskite tokias x ir y reikšmes, kad vektoriai $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ ir $\vec{d} = (y+1)\vec{a} + (2-x)\vec{b}$ būtų lygūs.

4. Taškas M yra trikampio ABC kraštinėje AB, taškas N yra jo kraštinėje BC ir $AM : MB = 3 : 4$, $CN : NB = 5 : 2$. Kokiu santykiu atkarpa MN dalija trikampio pusiaukraštinę BD?

5. Trikampio ABC kraštinėje AB yra taškas N, o kraštinėje AC – taškas M taip, kad $AN{:}NB = 2{:}5$, $AM{:}MC = 3{:}4$. Atkarpos BM ir CN susikerta taške K. Raskite santykius $BK{:}KM$ ir $CK{:}KN$.

6. Trikampio PKH kraštinių PK ir PH ilgiai $PH = 2\sqrt{2}$, $PK = 2$, kampas HPK lygus 135^0. Kraštinėje KH yra pažymėtas toks taškas O, kad $HO : OK = 1 : 3$. Raskite atkarpos PO ilgį.

7. Stačiojo trikampio ABC, $\angle C = 90^0$, smailiojo kampo A kosinusas lygus $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Raskite kampą tarp šio trikampio pusiaukraštinių CD ir BE.

8. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB = 3$, $AC = 5$, kampo BAC didumas yra 120^0. Raskite jo pusiaukampinės AD ilgį.

9. Kvadrato $ABCD$ kraštinėse AB ir BC yra taškai $P \in AB$ ir $Q \in BC$ tokie, kad $BP = BQ$. Nubrėžta trikampio BPC aukštinė BH. Raskite kampo QHD didumą.

10. Stačiakampio $ABCD$ kraštinių ilgiai $AB = 4$, $AD = 6$, taškas M yra kraštinės BC vidurio taškas. Nubrėžtas kitas stačiakampis $MCEN$, taškas E yra kraštinės DC tęsinyje už taško C ir $CE = 5$. Raskite kampą tarp tiesių, kuriose yra stačiakampių įstrižainės DB ir ME.

VI. ĮRODYMO UŽDAVINIAI

Teorinę medžiagą parengė bei šeštąją užduotį sudarė doc. dr. Antanas Apynis (Vilniaus universitetas) ir Palaimintojo Teofiliaus Matulionio gimnazijos matematikos mokytoja ekspertė Regina Rudalevičienė

Bet kurio matematinio teiginio teisingumo ar jo paneigimo pagrindimas taip pat yra tam tikras matematinis uždavinys, kurį reikia išspręsti. Dažniausiai tokio uždavinio sprendimo procesas bei jo aprašymas vadinamas įrodymu. Nesileisdami į bent kiek gilesnius filosofinius pamąstymus vieną kitą įrodymo uždavinių sprendimo galimybę ar būdą pabandysime atskleisti nagrinėdami konkrečius uždavinius.

1 pavyzdys. Įrodykime, kad esant bet kuriam realiajam skaičiui a galioja nelygybė $\dfrac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}} \geq 2.$

Įrodymas. Kadangi $a^2+a+1=\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0,$ kai $a \in (-\infty; \infty)$, tai reiškinys $\dfrac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}}$ yra apibrėžtas visoje realiųjų skaičių aibėje.

Teiginiui įrodyti pakaktų įsitikinti, kad skirtumas $\dfrac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}}-2$ nėra neigiamas esant bet kuriam skaičiui a. Tą skirtumą nagrinėkime taip:

$$\frac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}}-2=\frac{a^2+a+1}{\sqrt{a^2+a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+a+1}}-2=\sqrt{a^2+a+1}-2+\frac{1}{\sqrt{a^2+a+1}}=$$

$$=\left(\sqrt[4]{a^2+a+1}-\frac{1}{\sqrt[4]{a^2+a+1}}\right)^2 \geq 0. \qquad (1)$$

Taigi visada $\dfrac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}}-2 \geq 0,$ todėl visada (kitaip sakant, jei $a \in (-\infty; \infty)$) galioja nelygybė $\dfrac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}} \geq 2.$

Atkreipkime dėmesį į tai, kad iš (1) nelygybės išplaukia, jog lygybė galima tik kai $\sqrt[4]{a^2+a+1}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^2+a+1}}$. Taigi kai $a^2+a+1=1$. Gauname dvi a reikšmes – $a=0$ ir $a=-1$. Visuose kituose realiųjų skaičių tiesės taškuose galioja griežta nelygybė

$$\frac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}}>2.$$

2 pavyzdys. Įrodykime, kad esant bet kuriam realiajam skaičiui x galioja nelygybė

$$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10>0.$$

Įrodymas. Kadangi

$$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)=((x-1)(x-6))\cdot((x-3)(x-4))=(x^2-7x+6)(x^2-7x+12)=$$

$$=((x^2-7x)+6)((x^2-7x)+12)=(x^2-7x)^2+18(x^2-7x)+72=((x^2-7x)+9)^2-9,$$

tai

$$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10=(x^2-7x+9)^2+1>0, \text{ kai } x \in (-\infty; \infty).$$

Matome, kad ir pirmame, ir antrame pavyzdyje pasisekė pritaikyti gerai žinomą iš realiųjų skaičių daugybos apibrėžimo išplaukiančią nelygybę $r^2=r\cdot r \geq 0,$ $r \in (-\infty; \infty)$. Beje, taikant šią nelygybę galima įrodyti labai svarbią sprendžiant įrodymo uždavinius nelygybę $A_n \geq G_n$, $n=2, 3, \ldots;$ čia

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

yra neneigiamų realiųjų skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *aritmetinis vidurkis*, o

$$G_n=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$$

yra tų pačių skaičių *geometrinis vidurkis*.

Sustokime tik prie nelygybių

$$A_2 \geq G_2,\ \ A_4 \geq G_4 \ \text{ ir } \ A_3 \geq G_3$$

įrodymo.

3 pavyzdys. Įrodykime, kad realiųjų skaičių $a_1 \geq 0$ ir $a_2 \geq 0$ aritmetinį vidurkį $A_2 = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$ ir jų geometrinį vidurkį $G_2 = \sqrt{a_1 a_2}$ sieja nelygybė $A_2 \geq G_2$.

Įrodymas. Tegu $a_1 \geq 0$ ir $a_2 \geq 0$. Tada

$$A_2 - G_2 = \frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2}{2} = \frac{\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2}{2} \geq 0.$$

Vadinasi, $A_2 \geq G_2$, jei a_1 ir a_2 yra bet kurie neneigiami realieji skaičiai, o lygybė galioja tik kai $a_1 = a_2$.

4 pavyzdys. Įrodykime, kad neneigiamų realiųjų skaičių a_1, a_2, a_3 ir a_4 aritmetinį vidurkį $A_4 = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}$ ir jų geometrinį vidurkį $G_4 = \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$ sieja nelygybė $A_4 \geq G_4$.

Įrodymas. Tegu $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, $a_3 \geq 0$ ir $a_4 \geq 0$. Tada

$$A_4 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{\dfrac{a_1 + a_2}{2} + \dfrac{a_3 + a_4}{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2}} \geq \sqrt{\sqrt{a_1 a_2} \cdot \sqrt{a_3 a_4}} = \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} = G_4.$$

Vadinasi, $A_4 \geq G_4$, jei a_1, a_2, a_3 ir a_4 yra bet kurie neneigiami realieji skaičiai. O lygybė čia galioja tik kai $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

Atkreipkime dėmesį į tai, kad šiame įrodyme nebeieškojome kelio iki nelygybės $r^2 \geq 0$, $r \in (-\infty; \infty)$, o pritaikėme jau įrodytą nelygybę $A_2 \geq G_2$ – **iš** pradžių skaičių $b_1 = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$ ir $b_2 = \dfrac{a_3 + a_4}{2}$ porai, o paskui – skaičių a_1 ir a_2 bei a_3 ir a_4 poroms.

5 pavyzdys. Įrodykime, kad bet kurių neneigiamų realiųjų skaičių a_1, a_2 ir a_3 aritmetinį vidurkį $A_3 = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$ ir jų geometrinį vidurkį $G_3 = \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$ sieja nelygybė $A_3 \geq G_3$.

Įrodymas. Iš pradžių pritaikykime nelygybę $A_4 \geq G_4$ skaičiams $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$, $b_3 = a_3$ ir $b_4 = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$; $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, $a_3 \geq 0$. Gausime:

$$A_3 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}} = \sqrt[4]{G_3^3 \cdot A_3}.$$

Iš čia gauname:

$$A_3 = \sqrt[4]{G_3^3 \cdot A_3} \Rightarrow A_3^4 \geq G_3^3 \cdot A_3 \Rightarrow A_3^4 - G_3^3 \cdot A_3 \geq 0 \Rightarrow A_3(A_3^3 - G_3^3) \geq 0.$$

Jei $A_3 = 0$, tai $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, o tada ir $G_3 = 0$. Taigi šiuo atveju būtų $A_3 = G_3$.

Jei $A_3 > 0$, tai $A_3^3 - G_3^3 \geq 0$. Iš čia gauname, kad $A_3 \geq G_3$ (nes $A_3 > 0$ ir $G_3 \geq 0$).

Vadinasi, $A_3 \geq G_3$, jei a_1, a_2 ir a_3 yra bet kurie neneigiami realieji skaičiai. O atidžiai įsižiūrėję lengvai suprasime, kad lygybė $A_3 = G_3$ galioja tik kai $a_1 = a_2 = a_3$.

Matome, kad „kuo toliau į mišką, tuo daugiau medžių“, todėl apsiribokime tik nelygybėmis $A_2 \geq G_2$, $A_3 \geq G_3$ ir $A_4 \geq G_4$.

6 pavyzdys. Įrodykime, kad

$$\frac{x+y}{z} + \frac{x+z}{y} + \frac{y+z}{x} \geq 6, \tag{2}$$

jei $x > 0$, $y > 0$ ir $z > 0$.

Įrodymas. Pertvarkykime kairėje įrodomos nelygybės pusėje esantį reiškinį ir taikykime nelygybę $A_2 \geq G_2$:

$$\frac{x+y}{z}+\frac{x+z}{y}+\frac{y+z}{x}=\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)=$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\right)\geq 2\left(\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{y}}+\sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{z}}\right)=2(1+1+1)=6.$$

Taigi (2) nelygybė tikrai galioja, jei $x>0$, $y>0$ ir $z>0$. O lygybė galioja tik kai

$$\frac{x}{y}=\frac{y}{x},\quad \frac{y}{z}=\frac{z}{y}\quad \text{ir}\quad \frac{z}{x}=\frac{x}{z}.$$

Iš šios lygčių sistemos išplaukia, jog taip bus tik kai $x=y=z$.

7 pavyzdys. Įrodykime, kad

$$\frac{a+b+c}{3}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}},$$

jei $a\geq 0$, $b\geq 0$ ir $c\geq 0$ yra realieji skaičiai.

Įrodymas. Iš pradžių įvertinkime abiejų reiškinių kvadratų skirtumą:

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{9}-\frac{a^2+b^2+c^2}{3}=$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc-3a^2-3b^2-3c^2}{9}=\frac{2ab+2ac+2bc-2a^2-2b^2-2c^2}{9}=$$

$$=-\frac{(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bc+c^2)}{9}=-\frac{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}{9}\leq 0;$$

čia lygybė galima tik kai $a=b$, $a=c$ ir $b=c$, taigi tik kai $a=b=c$.

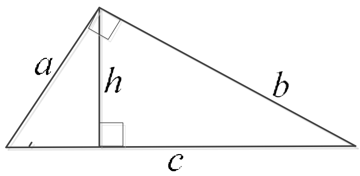
Iš nelygybės

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\right)^2\leq 0$$

išplaukia, kad $\frac{a+b+c}{3}-\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\leq 0$, nes $\frac{a+b+c}{3}+\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\geq 0$. Vadinasi, nelygybė $\frac{a+b+c}{3}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ tikrai galioja, jei $a\geq 0$, $b\geq 0$ ir $c\geq 0$. O jei $a=b=c$, tai visada gausime lygybę.

8 pavyzdys. Stačiojo trikampio statinių ilgiai yra a ir b, įžambinės ilgis c, o aukštinės, nubrėžtos iš stačiojo kampo viršūnės, ilgis yra h. Įrodykime, kad

$$a+b<c+h.$$



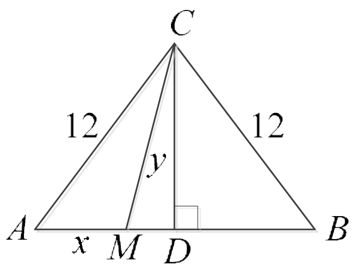
Įrodymas. Aišku, kad šio trikampio plotas yra $\frac{1}{2}ab$, arba $\frac{1}{2}ch$. Vadinasi, $ab=ch$. Todėl

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=c^2+2ab=c^2+2ch<c^2+2ch+h^2=(c+h)^2.$$

Iš nelygybės $(a+b)^2<(c+h)^2$ gauname:

$$(a+b)^2-(c+h)^2<0\Rightarrow((a+b)-(c+h))((a+b)+(c+h))<0\Rightarrow(a+b)-(c+h)<0\Rightarrow a+b<c+h.$$

9 pavyzdys. Lygiakraščio trikampio kraštinės ilgis yra 12. Įrodykime, kad neįmanoma šio trikampio padalyti į du trikampius taip, kad vieno perimetras būtų 27, o kito – 29.



Įrodymas. Kraštinėje AB ieškokime taško M, kad galiotų dvi lygybės –

$$AM+MC+CA=27\quad\text{ir}\quad MB+BC+CM=29.$$

Pažymėję $AM=x$, $MC=y$, gausime lygčių sistemą

$$\begin{cases}x+y=15,\\(12-x)+y=17,\end{cases}$$

kuri turi vienintelį sprendinį: $x=5$, $y=10$.

Matome, kad tiesė CM lyg ir padalija trikampį ABC į du trikampius (ΔAMC ir ΔMBC) taip, kad trikampio AMC perimetras yra $5+10+12=27$, o trikampio MBC perimetras yra $7+12+10=29$. Ir jei ne reikalavimas įrodyti, jog tai netiesa, greičiausiai ne vienas toje uždavinio sprendimo vietoje gal net padėtume tašką.

Įsižiūrėkime į statųjį trikampį MDC. Jo statiniai yra $MD=1$, $DC=\sqrt{12^2-6^2}=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$, o įžambinė $CM=\sqrt{MD^2+DC^2}=\sqrt{109}\neq 10$. O tai reiškia, kad iš lygčių sistemos rasta y reikšmė $y=10$, nėra atkarpos CM ilgis ir todėl neįmanoma lygiakraščio trikampio, kurio kraštinės ilgis 12, padalyti į du trikampius taip, kad vieno perimetras būtų 27, o kito – 29.

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Įrodykite, kad $a^2+3>2\sqrt{a^2+2}$, jei a yra bet kuris realusis skaičius.

2. Įrodykite, kad nelygybė

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\geq 8$$

galioja, jei a, b ir c yra bet kurie teigiami realieji skaičiai.

3. Įrodykite, kad

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}>\frac{3}{a+b+c},$$

jei a, b ir c yra teigiami realieji skaičiai.

4. Įrodykite, kad esant bet kuriam realiajam skaičiui x galioja nelygybė $x^{12}-x^9+x^4-x+1>0$.

5. Įrodykite, kad nėra tokio natūraliojo skaičiaus, kurio skaitmenų sandauga lygi 3570.

6. Įrodykite, kad jei natūralusis skaičius $m-n$ (čia m ir n taip pat natūralieji skaičiai) dalijasi iš 3, tai skaičius m^3-n^3 dalijasi iš 9.

7. Tegu a ir b yra stačiojo trikampio statinių ilgiai, c – jo įžambinės ilgis, o h – aukštinės, nubrėžtos iš stačiojo kampo viršūnės, ilgis. Įrodykite, kad galioja nelygybė

$$\frac{c+h}{a+b}\leq\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

8. Tegu M yra laisvai pasirinktas taškas trikampio ABC viduje, P – trikampio ABC perimetras, o $p=\frac{1}{2}P$. Įrodykite, kad $p<MA+MB+MC<P$.

9. Įrodykite, kad lygiakraštį trikampį, kurio kraštinės ilgis 8, įmanoma padalyti į du trikampius taip, kad vieno perimetras būtų 18, o kito – 20.

10. Tegu trikampio ABC kraštinių BC, CA ir AB ilgiai yra atitinkamai a, b, c, o prieš jas esančių kampų didumai – atitinkamai α, β ir γ. Įrodykite, kad šis trikampis yra lygiašonis, jeigu galioja lygybė $\frac{a-b}{a}=1-2\cos\gamma$.

VII. NESTANDARTINĖS LYGTYS IR NELYGYBĖS

Teorinę medžiagą parengė ir septintąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Romualdas Kašuba

Tiesą sakant, nėra lengva pasakyti, kuo nestandartinės lygtys ir nelygybės skiriasi nuo įprastinių lygčių ir nelygybių, nes tie skirtumai dažnai yra gana nežymūs.

Pradėkime nuo visai nesudėtingo pavyzdžio.

1 pavyzdys. Dviejų natūraliųjų skaičių suma yra lygi 1999. Jeigu viename iš jų užbrauktume du paskutiniuosius skaitmenis tai gausime antrąjį skaičių. Raskite tuos skaičius ir paaiškinkite, kodėl daugiau jų nėra.

Sprendimas. Jeigu pirmasis dedamasis skaičius būtų triženklis, tai užbraukę du paskutiniuosius skaitmenis gautume vienaženklį skaičių ir tada vienaženklio ir triženklio skaičių suma niekaip negalėtų būti lygi 1999. Todėl pirmasis didesnysis dedamasis skaičius yra keturženklis ir gali būti užrašytas pavidalu

$$ABCD.$$

Tada antrasis dedamasis (dviženklis)skaičius yra AB ir pagal sąlygą

$$ABCD + AB = 1999.$$

Tuomet galima atlikti tokius pertvarkymus

$$ABCD + AB = 100AB + CD + AB = 101AB + CD = 1999.$$

Iš čia turime, kad 1999 minus tam tikras dviženklis skaičius dalijasi be liekanos iš 101, vadinasi, jis yra lygus 1919. Todėl $CD = 1999 – 1919 = 80$, $101AB + 80 = 1919$ ir galutinai $AB = 19$.

Todėl ieškomasis didesnysis pirmasis dedamasis skaičius yra 1980, o antrasis – gautas užbraukus du paskutiniuosius to skaičiaus skaitmenis – 19 ir jų suma yra lygi

$$1980 + 19 = 1999.$$

Ats. Ieškomieji skaičiai yra 1980 ir 19**.**

Sekantis pavyzdys irgi nėra labai painus, tačiau išskirti vadinamuosius pilnus kvadratus gera yra mokėti.

2 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0.$$

Sprendimas. Padauginę duotąją lygtį iš dviejų gautume lygybę

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 4y + 8 = 0.$$

Pastarąją lygybę galime perrašyti taip:

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 4y + 8 = (x-y)^2 + (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) =$$
$$= (x-y)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 = 0.$$

Taip gauname, kad trijų kvadratų suma yra lygi nuliui, vadinasi, ir visi jie yra lygūs nuliui ir todėl jie visi trys, tai yra skaičiai

$$x - y,\ x - 2 \text{ ir } y - 2$$

yra nuliai, todėl

$$x = y = 2$$

yra (vienintelis) duotosios lygties sprendinys.

Ats.: $(x; y) = (2; 2)$

Dar kitame pavyzdyje irgi nieko labai painaus nesama.

3 pavyzdys. Su kokiomis parametro a reikšmėmis kvadratiniai trinariai

$$x^2 + ax + 1 = 0 \text{ ir } x^2 + x + a = 0$$

turi bendrą šaknį?

Sprendimas. Jeigu kvadratiniai trinariai turi bendrą šaknį, tai turi atsirasti atsiras toks skaičius p, kuris tenkina abi tas lygtis, tai yra turi būti taip, kad vienu metu galioja abidvi lygybės

$$p^2 + ap + 1 = 0 \text{ ir } p^2 + p + a = 0.$$

Atimdami vieną lygtį iš kitos mes gausime, kad

$$ap + 1 - p - a = 0.$$

Šią lygybę pertvarkome į lygybę

$$(a-1)(p-1)=0\,.$$

Jeigu a yra lygus 1, tai lygtis $x^2+x+1=0$ sprendinių neturi, nes ji gali būti perrašyta pavidalu

$$x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\neq 0\,.$$

Lieka atvejis kai p yra lygus 1, tada

$$1^2+1+a=0,$$

arba

$$a = -2.$$

Patikrinę matome, kad ta a reikšmė tinka abiem kvadratiniams trinariams – abu jie tikrai turi šaknį lygią 1.

Ats.: $a = 2$.

Kartais sprendžiant lygtis ar nagrinėjant kitus algebrinius reiškinius, reikia kiek pamąstyti ir tuo pačiu geriau įsigilinti į nagrinėjamų reiškinių esmę. Kad nebūtume įtarti tuščiu samprotavimu, kartais vadinamu net ir pamokslavimu, pateiksime labai paprastą pavyzdį.

4 pavyzdys. Suraskite pačią mažiausią sveikąją teigiamą x reikšmę, su kuria reiškinys

$$(\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+\frac{x}{6})$$

yra sveikasis skaičius.

Sprendimas. Atrodytų, kad užtenka paimti patį mažiausią sveiką teigiamą skaičių x, kuris dalijasi be liekanos iš 2, 3, 4, 5 ir 6 ir atlikus nurodytus veiksmus, gauti tą skaičių. Kadangi, kaip yra gerai žinoma, skaičių 2, 3, 4, 5 ir 6 bendras mažiausias kartotinis yra 60, tai atsakymas būtų

$$\frac{60}{2}+\frac{60}{3}+\frac{60}{4}+\frac{60}{5}+\frac{60}{6}=30+20+15+12+10=87.$$

Tačiau, kadangi gautasis rezultatas yra skaičius 87, kuris yra dalus iš 3, tai įrašę į tą išraišką tris kartus mažesnį skaičių 20, atsakymu gautume 3 kartus už skaičių 87 mažesnį skaičių ir vis tiek sveiką teigiamą skaičių 29.

Kas gi čia atsitinka ir kodėl netinka skaičius 60, kuris yra visų esančių vardiklių bendras mažiausias kartotinis?

Taip nutinka dėl to, kad dalies to išraiškos suma nepaisant nieko yra sveikasis skaičius, būtent, mūsų atveju

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}=1$$

ir todėl reiškinys susiveda į kur kas paprastesnį nustatymą, su kokia mažiausia sveika teigiama reikšme reiškinys

$$(\frac{x}{4}+\frac{x}{5})$$

yra sveikasis teigiamas skaičius. Skaitytojas turbūt gerai pastebėjo, jog tai reiškia, jog skaičiaus x dalumu iš 2, 3 ir 5 jau galime nebesurūpinti.

O reiškinys $\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=\frac{5x+4x}{20}=\frac{9x}{20}$ įgyja sveiką teigiamą reikšmę, kai x yra lygus 20, ką mes ir buvome pastebėję anksčiau.

Ats.: 20.

Penktajame pavyzdyje ir vėl yra „išskiriami“ vadinamieji pilnieji kvadratai.

5 pavyzdys. Įrodykite, kad su visais realiaisiais skaičiais x, y ir z galioja nelygybė

$$(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2+3\geq 4(x+y+z).$$

Kada ji virsta lygybe?

Sprendimas. Jeigu mes viską sukeltume į vieną pusę, tada galėtume perrašyti taip:

$$2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2yz+2zx-4x-4y-4z+3\geq 0.$$

O tai yra tas pats kaip užrašyti

$$(x+y)^2-2(x+y)+1+(y+z)^2-2(y+z)+1+(z+x)^2-2(z+x)+1\geq 0.$$

Todėl gauname

$$(x+y-1)^2+(y+z-1)^2+(z+x-1)^2\geq 0,$$

Kas yra akivaizdžiai teisinga, nes kelių kvadratų suma tikrai visada yra neneigiama.

Dabar beliko nustatyti, kada galioja lygybės ženklas. O jis galioja tada, kai visi kvadratai yra lygus nuliui; mūsų atveju, tai reiškia, kad

$$x+y-1=0,$$

$$y+z-1=0$$

$$z+x-1=0.$$

Sudėjus visas lygtis ir padalinus jas iš 2, gautume

$$x+y+z-1{,}5=0,$$

O tai yra tas pats kaip

$$x=y=z=\frac{1}{2}.$$

Šeštasis pavyzdys iš pažiūros atrodo gana sudėtingai.

6 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\frac{x^2+11x-6}{x^2-x-6}=\frac{5x}{x^2-6}.$$

Sprendimas. Pirmiausiai pastebėkime, kad x yra nelygus 0, nes kai x yra lygus nuliui, lygties dešinioji pusė yra lygi 0, o kairioji, atvirkščiai, nelygi nuliui (ji tada yra lygi 1). Todėl duotosios lygties skaitiklius ir vardiklius galima padalinti iš x. Padalinę gauname

$$\frac{\dfrac{x^2+11x-6}{x}}{\dfrac{x^2-x-6}{x}}=\frac{\dfrac{5x}{x}}{\dfrac{x^2-6}{x}}.$$

Tai yra tas pats, kaip parašyti

$$\frac{x-\dfrac{6}{x}+11}{x-\dfrac{6}{x}-1}=\frac{5}{x-\dfrac{6}{x}}.$$

Jeigu mes $x-\dfrac{6}{x}$ pažymėtume y, tai gautume lygtį

$$\frac{y+11}{y-1}=\frac{5}{y}.$$

Arba toliau tvarkantis būtų

$$y(y+11)=5(y-1),$$

$$y^2+11y-5y+5=0,$$

$$y^2+6y+5=0.$$

Iš čia gauname, kad y yra lygus arba –1 , arba –5. Duotosios lygties šaknis gausime, išsprendę dvi lygtis: $x-\dfrac{6}{x}=-1$ ir $x-\dfrac{6}{x}=-5$, t. y. $x^2+x-6=0$ ir $x^2+5x-6=0$.

Taip gausime šaknis –3, 2 bei –6 ir 1.

Ats.: –3, 2, –6, 1.

7 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{4}.$

Sprendimas. Ši lygtis yra visai paprasta – iš tikrųjų, iškėlę bendrą abiejų sumos narių daugiklį $\frac{1}{(x+1)}$ prieš skliaustus, gauname

$$\frac{1}{(x+1)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+2)}\right)=\frac{1}{(x+1)}\cdot\frac{x+2+x}{x(x+2)}=\frac{2x+2}{x\cdot(x+1)(x+2)}=$$
$$\frac{2(x+1)}{x(x+1)(x+2)}=\frac{2}{x(x+2)}=\frac{1}{4}.$$

Kitaip tariant, $x(x+2)=8$, $x^2+2x-8=0$ ir gauname dvi šaknis: vieną x reikšmę, lygią 2 ir dar kitą, lygią -4.

Patikrinimas rodo, kad abi šios reikšmės tikrai tenkina nurodytąją lygybę.

Ats.: 2; –4.

Tai, ką mes ką tik darėme, dabar tuoj bus truputėlį papildyta.

8 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{3}{10}.$$

Sprendimas. Metodas, pritaikytas ką tik spręstame uždavinyje nebetinka, nes dabar lygtyje jau yra nebe du, o trys nariai, kurie bendro daliklio jau nebeturi – vadinasi, turime dairytis kito būdo. Čia dabar padeda kitas metodas: būtent pastebėjimas, kad kiekvieną narį galime užrašyti kaip dviejų trupmenų su skaitikliais, lygiais 1, skirtumą.

Sakysime,

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}.$$

Panašiai

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}.$$

ir

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}.$$

Todėl pradinę lygtį galime perrašyti taip:

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\left(\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)\right)=\frac{3}{10}.$$

Atskliautus ir suprastinus gauname

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=\frac{3}{10}.$$

Toliau viskas jau visai įprasta:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=\frac{x+3-x}{x(x+3)}=\frac{3}{10}.$$

Dabar toliau turime

$$\frac{3}{x(x+3)}=\frac{3}{10}.$$

ir

$$x(x+3)=10\,.$$

Toliau turime kvadratinę lygtį ir dvi jos šaknis: vieną, lygią 2 ir dar kitą, lygią –5.

Ats.: 2; –5.

Žemiau pateikiamoje sistemoje nėra jokių vadinamųjų pirmojo laipsnio narių.

9 pavyzdys. Raskite visus lygčių sistemos

$$\begin{cases} x^2 - 6yz + 2y^2 = 1, \\ 3y^2 - 4xy + 9z^2 = -1. \end{cases}$$

sprendinius.

Sprendimas. Sudėję abi sistemos lygtis gauname lygybę

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 - 6yz + 9z^2 = (x - 2y)^2 + (y - 3z)^2 = 0.$$

Tai reiškia, kad

$$x - 2y \ = 0$$

ir

$$y - 3z \ = 0.$$

Tai reiškia, jog

$$x = 2y \ \text{ ir } \ y = 3z \ .$$

Vadinasi

$$x = 6z \ .$$

Įrašius į pirmąją sistemos lygtį gausime

$$36z^2 - 6 \cdot 3z \cdot z + 2 \cdot 9z^2 = 1 \,,$$

tai reiškia, kad

$$36z^2 = 1 = x^2.$$

Vadinasi, $x = \pm 1$.

Todėl, jei x yra 1, tai y yra ½, o z yra 1/6, o jei x yra –1, tai y yra –1/2 , o z yra –1/6.

Ats.: $(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{6}), (-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}).$

Dabar bus panagrinėta nelygybė, kurią sprendžiant labai nesunku pamiršti pasižiūrėti į ką nors visai paprasto.

10 pavyzdys. Išspręskite nelygybę

$$\sqrt{x+2} > x.$$

Sprendimas. Taip ir norisi dirbant su šia nelygybe, iš karto abi jos puses pakelti kvadratu. Jeigu mes iš karto taip ir padarytume, tai gautume nelygybę, kuri būtų tokia:

$$x + 2 > x^2.$$

Jeigu dabar viską sukeltume į vieną pusę, tai gautume

$$0 > x^2 - x - 2,$$

arba, rašant labiau įprastai, būtų

$$x^2 - x - 2 < 0.$$

Jeigu mes dabar surastume kvadratinės lygties

$$x^2 - x - 2 = 0$$

šaknis, kurios yra lygios –1 ir 2, tai tada mes tą kvadratinį trinarį galėtume išskaidyti

$$x^2 - x - 2 = (x - (-1)(x - 2) = (x + 1)(x - 2)$$

ir gauti nelygybę

$$(x + 1)(x - 2) < 0 \,.$$

Dabar turime situaciją, kai dviejų daugiklių sandauga yra neigiama, o taip yra tada ir tik tada, kai tie daugikliai yra skirtingų ženklų, vadinasi, tada ir tiktai tada, kai arba

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x - 2 < 0, \end{cases}$$

arba

$$\begin{cases} x + 1 < 0 \\ x - 2 > 0. \end{cases}$$

Pirmoji sistema gali būti perrašyta kaip

$$-1 < x < 2,$$

O antroji sistema sprendinių neturi, nes x vienu metu negali būti ir mažesnis už –1 ir didesnis už 2.

Taip pakėlę kvadratu gautume, kad $-1 < x < 2$ būtų mūsų nelygybės, gautos, kaip pamename, mūsų pradinę nelygybę pakeliant kvadratu, sprendinys.

Ir kas čia būtų negerai? Ogi tas, kad mes prieš keldami nelygybę kvadratu pamiršome, jog jeigu nelygybės dešinioji pusė (ta be šaknies) gali būti neigiama, tai tada visi tokie x yra mūsų nelygybės sprendiniai – nes, prisiminkime, kad $\sqrt{x+2}$ yra visada teigiamas, jei tik jis yra apibrėžtas – tai yra mes dar pamiršome pasižiūrėti ir mūsų nelygybės apibrėžimo sritį, kuri mūsų atveju yra nustatoma nelygybe

$$x + 2 \geq 0$$

arba reikalavimu

$$x \geq -2.$$

Todėl reziumuodami galima pasakyti, kad visi tokie neigiami *x*, kurie patenka į nelygybės apibrėžimo sritį, kurie prasideda skaičiumi –2, yra mūsų nelygybės sprendiniai.

Sakymas yra ne

$$-1 < x < 2,$$

o

$$-2 \leq x < 2 \quad .$$

Ats.: $-2 \leq x < 2$

Dabar pasižiūrėsime, o kas būtų, jeigu nelygybės smaigalį nukreiptume į kitą pusę.

11 pavyzdys. Išspręskite nelygybę

$$\sqrt{x+6} < x.$$

Sprendimas. Jeigu mes ir dabar, daugiau nieko nesakydami, tik pakeltume kvadratu abi puses ir toliau spręstume nieko nesakydami, tai gautume

$$x^2 - x - 6 > 0.$$

Toliau būtų kvadratinio trinario

$$x^2 - x - 6$$

prilyginimas 0, tai yra kvadratinės lygties

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Sprendimas. Tos kvadratinės lygties šaknys yra skaičiai –2 ir 3, todėl trinarį išskaidžius gautume

$$x^2 - x - 6 = (x - (-2)(x - 3) = (x + 2)(x - 3)$$

ir turėtume išspręsti nelygybę $(x+2)(x-3) > 0.$ Dabar turime dviejų daugiklių sandauga, kuri turi būti teigiama, o taip nutiks tada ir tiktai tada, kai daugikliai bus vienodo ženklo: arba abu neigiami, arba abu teigiami. Pirmu atveju turime sistemą

$$\begin{cases} x + 2 < 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}$$

o antruoju

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x - 3 > 0. \end{cases}$$

Pirmuoju atveju gauname, kad vienu metu turi būti *x* mažesnis už –2 ir 3, o tai yra tas pats, kad *x* mažiau –2 (mažiau už mažesnį), o kitu atveju turi būti taip, kad *x* vienu metu didesnis už –2 ir 3, o tai yra tas pats, kad *x* yra daugiau už 3 (arba, kaip sakoma, daugiau už didesnį). Todėl nelygybės

$$(x + 2)(x - 3) > 0$$

sprendinys būtų dviejų intervalų

$$(-\infty; -2) \text{ ir } (3; +\infty)$$

junginys.

Ir kas dabar būtų praleista? Pirmiausiai būtų neatsižvelgta į apibrėžimo sritį, kuri dabar pas mus susiveda į reikalavimą, kad *x* + 6 turi būti neneigiamas arba kad *x* yra daugiau arba lygus už –6. Ir dar praleista yra tai, kad jeigu *x* būtų neigiamas, tai jis niekaip negalėtų būti didesnis už $\sqrt{x+6}$, kuris yra neneigiamas pagal apibrėžimą. Todėl iš „kandidatų į nelygybės sprandinius“ reikia pašalinti visus neigiamus x. Todėl atsakymas būtų intervalas $(3; +\infty)$.

Ats.: $(3; +\infty)$.

Sekantis uždavinys vėl esmingai priklauso nuo pilnojo kvadrato išskyrimo meno.

12 pavyzdys. Bet kuriems trims realiesiems skaičiams a, b ir c įrodykite, kad $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Sprendimas. Techniškai būtų paprasčiausia, jeigu mums ateitų mintis padvigubinti įrodinėjamąją nelygybę prieš tai sukėlus viską į vieną pusę. Tada mes turėtume įrodyti nelygybę

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0.$$

Pastarąją nelygybę mes galime „išnarstyti“ taip

$$a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$$

Tryliktasis uždavinys mums primena, jog nelygybę galima be jokios baimės dauginti iš teigiamo reiškinio.

13 pavyzdys. Bet kuriam neneigiamam skaičiui a įrodykite nelygybę

$$1 - \frac{a}{2} \leq \frac{1}{1+a^2}.$$

Sprendimas. Kadangi $1 + a^2$ tikrai visada yra teigiamas, tai mes iš jo be baimės padaryti ką nors neteisėto galime iš jo padauginti abi nagrinėjamosios nelygybės puses (o techniškai dar patogiau padauginti iš dvigubai didesnio skaičiaus, tai yra iš $2(1+a^2)$. Tada mes gautume

$$((1+a^2)(2-a) = 2 - a + 2a^2 - a^3 \leq 2.$$

Tai yra tas pats kaip užrašyti

$$a^3 - 2a^2 + a \geq 0.$$

Bet šioji nelygybė tikrai yra teisinga, nes

$$a^3 - 2a^2 + a = a(a^2 - 2a + 1) = a(a-1)^2 \geq 0.$$

Primename, kad pagal sąlygą a yra teigiamas skaičius).

Žemiau pateikiamame uždavinyje bent jau yra be vargo nujaučiama, kuriais metais jis buvo sukomponuotas.

14 pavyzdys. Raskite visas natūraliųjų skaičių x ir y poras, tenkinančias lygtį

$$47^x - 14^y = 2013.$$

Sprendimas. Pirmiausiai pastebėkime, jog jeigu $y \geq 3$, tai skaičius 14^y dalijasi iš 8. Dabar gali kilti mintis panagrinėti šią lygtį moduliu 8. Kadangi $47 = -1(\text{mod } 8)$, $2013 = 5(\text{mod } 8)$, tai iš pradinės lygties gauname

$$(-1)^x - 0 = 5(\text{mod} 8),$$

o tai yra neįmanoma su jokiu natūraliuoju x .

Šioje vietoje mes norėtume priminti skaitytojui, kad lygybė

$$A = B(\text{mod } N)$$

reiškia, kad skaičių A ir B skirtumas $A - B$ dalijasi (be liekanos) iš N.

Be to, jeigu y yra lygus 1, tai

$$47^x = 2013 + 14 = 2027,$$

o tai irgi neįmanoma su jokia natūraliąja x reikšme, kadangi $47 < 2027 < 47^2$.

Liko išnagrinėti atvejį, kai y yra lygus 2.

Tada

$$47^x = 2013 + 14^2 = 2013 + 196 = 2209.$$

Padalinus 2209 iš 47, gauname vėl 47. Todėl x yra lygus 2. Galutinai gauname, kad $x = y = 2$.

Ats.: $(x; y) = (2;2)$

15 uždavinys mums primena kažką apie kvadratinius trinarius.

15 pavyzdys. Duoti du kvadratiniai trinariai su koeficientais prie x^2 lygiais 1. Be to, dar yra žinoma, kad $f(20) + f(12) = g(20) + g(12)$. Įrodykite, kad tada atsiras toks natūralusis skaičius n, kad $f(n) = g(n)$.

Sprendimas. Sakykime, kad $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$, tada

$$f(20)+f(12)=20^2+20a+b+12^2+12a+b=20^2+12^2+32a+2b,$$

$$g(20)+g(12)=20^2+20c+d+12^2+12c+d=20^2+12^2+32c+2d,$$

iš kur gauname, kad

$$32a+2b=32c+2d,$$

$$16a+b=16c+d,$$

$$16^2+16a+b=16^2+16c+d.$$

Vadinasi, iš tikrųjų

$$f(16)=g(16),$$

o tai ir reikėjo įrodyti.

16 uždavinio nelygybė yra gana vertinga ir dažnai sutinkama.

16 pavyzdys. Įrodykite, jog jeigu x, y, z yra teigiami skaičiai, tai tada galioja nelygybė

$$1<\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}<2.$$

Sprendimas. Pastebėkime, jog jeigu trupmenos skaitiklis ir vardiklis yra teigiami skaičiai, tai tada jeigu nekeisdami skaitiklio padidinsime tos trupmenos vardiklį, tada tokios trupmenos reikšmė sumažės. Todėl turėsime

$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}>\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{y+z+x}+\frac{z}{z+x+y}=1.$$

Kita vertus,

$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}=\left(1-\frac{y}{x+y}\right)+\left(1-\frac{z}{y+z}\right)+\left(1-\frac{x}{z+x}\right)=$$

$$3-\left(\frac{y}{y+x}+\frac{z}{z+y}+\frac{x}{x+z}\right)<3-1=2.$$

Sekančiame uždavinyje bus daug bendravardiklinimų ir pabaigoje dar ir vėl pilnojo kvadrato išskyrimų.

17 pavyzdys. Įrodykite, kad su visais teigiamais skaičiais a, b, x, y galioja nelygybė

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\geq\frac{8xy}{(1+ax)(1+by)}.$$

Sprendimas. Padauginkime nelygybę

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\geq\frac{8xy}{(1+ax)(1+by)}$$

iš teigiamo skaičiaus

$$ab(1+ax)(1+by)$$

ir tada gausime, kad tai yra tas pats kaip nelygybė

$$(bx+ay)(1+ax)(1+by)\geq 8abxy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow bx+ay+abx^2+a^2xy+aby^2+b^2xy+ab^2x^2y+a^2bxy^2\geq 8abxy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ab^2x^2y-2abxy+ay+a^2bxy^2-2abxy+bx+abx^2-2abxy+aby^2+$$

$$+a^2xy-2abxy+b^2xy\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ay(bx-1)^2+bx(ay-1)^2+ab(x-y)^2+xy(a-b)^2\geq 0.$$

Pastebėsime, kad pastaroji nelygybė tikrai yra teisinga, nes, prisiminkime, skaičiai a, b, x, y yra teigiami skaičiai.

Sekantis uždavinys ir vėl skatina nebijoti bendravardiklinimų.

18 pavyzdys. Tegu a, b ir c yra teigiami skaičiai tokie, kad $a + b + c = 1$. Įrodykite, kad tada yra teisinga lygybė

$$ab\left(\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}\right)+ac\left(\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-c}\right)+bc\left(\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\right)=1.$$

Sprendimas. Perdirbkime kairiąją mūsų įrodinėjamosios nelygybės pusę

$$ab\left(\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}\right)+ac\left(\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-c}\right)+bc\left(\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\right)=$$

$$=\frac{ab(2-a-b)}{(1-a)(1-b)}+\frac{ac(2-a-c)}{(1-a)(1-c)}+\frac{bc(2-b-c)}{(1-b)(1-c)}=$$

$$=\frac{ab(1+c)}{(1-a)(1-b)}+\frac{ac(1+b)}{(1-a)(1-c)}+\frac{bc(1+a)}{(1-b)(1-c)}=$$

$$=\frac{ab(1-c^2)+ac(1-b^2)+bc(1-a^2)}{(1-a)(1-b)(1-c)}=$$

$$=\frac{ab+ac+bc-abc(a+b+c)}{1-(a+b+c)+(ab+bc+bc)-abc}=\frac{ab+bc+ac-abc}{ab+ac+bc-abc}=1.$$

Gavome tai, ką ir turėjome įrodyti.

Pilnojo kvadrato išskyrimas bei perranka leidžia mums gana paprastai susitvarkyti ir su 19 uždaviniu.

19 pavyzdys. Raskite visus sveikuosius lygties $x^2-6xy+13y^2=29$ sprendinius.

Sprendimas. Pertvarkome lygtį:

$$x^2-6xy+13y^2=29,\ x^2-6xy+9y^2+4y^2=29,\ (x-3y)^2+(2y)^2=29,$$

vadinasi, iš paskutiniosios lygybės turime, kad $(2y)^2\le 29.$ Todėl y tegali būti lygus 0, ±1 arba ±2.

Jeigu y yra lygus 0, tada gauname $x^2=29$, o ši lygtis, suprantama, sveikųjų sprendinių neturi.

Kai $y=\pm1$, tai $(x-3y)^2=25 \Leftrightarrow x-3y=\pm5,$ tai yra teisinga viena iš keturių lygčių sistemų:

$$\begin{cases} y=1 \\ x-3y=5, \end{cases}$$

arba

$$\begin{cases} y=1 \\ x-3y=-5, \end{cases}$$

arba

$$\begin{cases} y=-1 \\ x-3y=5, \end{cases}$$

arba

$$\begin{cases} y=-1 \\ x-3y=-5. \end{cases}$$

Spręsdami jas visas paeiliui gauname tokias nežinomųjų poras
$(x;y)=(8;1)$, toliau $(x;y)=(-2;1)$, dar toliau $(x;y)=(2;-1)$ ir galiausiai $(x;y)=(-8;-1)$.

Jeigu $y=\pm2$, tai turime $(x-3)^2=13$, o ši lygtis sveikųjų sprendinių, suprantama, neturi.

Ats.: (8; 1), (–2; 1), (2; –1) ir (–8; –1).

Paskutinis uždavinys irgi yra susijęs su paprastais pertvarkiais.

20 pavyzdys. Raskite reiškinio $\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}$ reikšmę, jeigu yra žinoma, kad .

$$\frac{a-c}{b+c}+\frac{b-a}{c+a}+\frac{c-b}{a+b}=1.$$

Sprendimas. Pastebėkime, kad

$$\frac{a+b}{b+c}=\frac{a-c+c+b}{b+c}=\frac{a-c}{b+c}+1,\ \frac{b+c}{c+a}=\frac{b-a}{c+a}+1,\ \frac{c+a}{a+b}=\frac{c-b}{a+b}+1.$$

Sudėję tas tris lygybes gauname

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}=\frac{a-c}{b+c}+1+\frac{b-a}{c+a}+1+\frac{c-b}{a+b}+1=$$

$$3+\left(\frac{a-c}{b+c}+\frac{b-a}{c+a}+\frac{c-b}{a+b}\right)=3+1=4.$$

Ats.: 4.

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1. Ar atsiras du tokie natūralieji skaičiai, kurių suma yra lygi 2021 ir dar jeigu viename iš jų užbrauktume du pirmutiniuosius skaitmenis, tai gausime kitą dedamąjį skaičių?

2. Išspręskite lygčių sistemą

$$\frac{1}{x^2}+\frac{2}{y}=\frac{1}{y^2}-\frac{2}{x}=3.$$

3. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+2y=4, \\ 2xy-3z^2=4. \end{cases}$$

4. Įrodykite, kad iš lygybių $x+y=a,\ x^2+y^2=b$ ir $x^3+y^3=c$ išplaukia lygybė $a^3=3ab-2c$.

5. Išspręskite lygtį

$$(x^2-4x+6)^2-4x(x^2-4x+6)+3x^2=0.$$

6. Išspręskite lygtį

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}=\frac{4}{5}.$$

7. Duota lygčių sistema

$$\begin{cases} a^2+b^2=20 \\ ab+6b=32. \end{cases}$$

A) Atspėkite vieną tos sistemos sprendinį.
B) Suraskite visus tos sistemos sprendinius.

8. Bet kuriems keturiems realiesiems skaičiams *a, b, c* ir *d* įrodykite, kad

$$a^2+b^2+c^2+d^2\geq ab+bc+cd+da.$$

9. Išspręskite nelygybę

$$\sqrt{8+2x}>x.$$

10. Įrodykite, kad su visais realiaisiais skaičiais *x* yra teisinga nelygybė

$$4(x^3+x+1)\leq(x^2+1)(x^2+5).$$

VIII. RIBŲ SKAIČIAVIMO UŽDAVINIAI

Teorinę medžiagą parengė bei aštuntąją užduotį sudarė doc. dr. Antanas Apynis (Vilniaus universitetas)

Ribos sąvoka šiuolaikinėje matematikoje yra viena iš pačių svarbiausių – ja grindžiamas ir diferencialinis, ir integralinis skaičiavimas.

Mokykliniuose matematikos vadovėliuose pateikiamos tik pačios pradinės sąvokos, nesigilinant nei į ribos savybes, nei į skaičiavimo taisykles. Vis dėlto ir šioje jauniesiems matematikams skirtoje temoje nepateiksime nei matematiškai griežtų apibrėžimų, nei iš jų išplaukiančių savybių bei skaičiavimo taisyklių. Pakaks to, kas yra vadovėliuose.

1. Sekos riba. Kiekvieną begalinę seką galima suvokti kaip natūraliojo argumento funkcijos $y = f(n)$, $n \in \mathbf{N}$, reikšmių $f(n)$ eilę, sudarytą argumento didėjimo tvarka: $f(1),\ f(2),\ f(3),\ ...,\ f(n),\ ...$.

Seką sudarantys skaičiai vadinami sekos *nariais* ir paprastai žymimi kuria nors raide su indeksu, pavyzdžiui, x_n, $n = 1, 2, 3, ...$. Skaičių seka $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ glaustai užrašoma simboliu (x_n); šiame užraše x_n vadinamas *bendruoju* sekos *nariu*. Štai keli pavyzdžiai:

1) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{n}{n+1}, ...;$

2) $2, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, ..., \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, ...;$

3) $-1, 1, -1, 1, ..., (-1)^n, ...$.

Glausti šių sekų užrašai tokie:

$\left(\frac{n}{n+1}\right), \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ ir $\left((-1)^n\right)$.

Realusis skaičius a **vadinamas *sekos*** (x_n) ***riba*** **(rašoma** $\lim x_n = a$**), jei skirtumas** $x_n - a$**, kai** n **neribotai didėja** $(n \to +\infty)$, **artėja prie nulio.**

Taigi galima padaryti išvadą, kad $\lim \frac{n}{n+1} = 1$, nes $\frac{n}{n+1} - 1 = -\frac{1}{n+1} \to 0$, kai $n \to +\infty$.

Intuityviai aišku, kad $\lim (-1)^n$ neegzistuoja, bet išsamią analizę, jog tikrai taip yra, praleiskime.

Na, o prie sekos $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ ribos $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sustokime.

Būtų nedovanotina klaida „gauti“ 1 argumentuojant tuo, kad $1+\frac{1}{n} \to 1$, kai $n \to +\infty$, nes sekos

$$2, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, ..., \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, ...$$

nariai didėja ir yra (pradedant antru) didesni už 2 (įsitikinkite savarankiškai!).

Kita vertus, ribos $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ paieškos uždavinys nėra trivialus, o analizės rezultatas – netikėtas ir labai reikšmingas:

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad e \approx 2{,}718281828459$$

(skaičius e yra iracionalusis skaičius).

Mokyklinėje matematikoje gana išsamiai nagrinėjamos dvi skaičių sekos – aritmetinė progresija ir geometrinė progresija. Aišku, kad jos gali būti tiek baigtinės, tiek begalinės.

Geometrinė progresija nusakoma jos pirmuoju nariu (žym. b_1) ir progresijos vardikliu (žym. q), o visi kiti nariai gaunami pagal formulę $b_n = b_1 q^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, ...$. Žinome, kad pirmųjų n narių suma (žym. S_n) apskaičiuojama pagal formulę

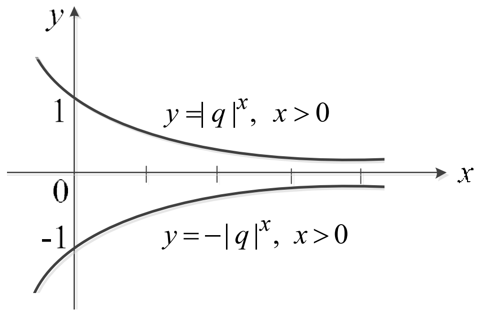
$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}, \text{ jei } q \neq 1.$$

Sudarykime seką (S_n) ir pasvarstykime, kokia galėtų būti jos riba $\lim S_n$, kai $0 < |q| < 1$.

Užrašius S_n formulę pavidalu

$$S_n = \frac{b_1}{q-1} \cdot q^n + \frac{b_1}{1-q},$$

lengva suprasti, kad pakanka išsiaiškinti dydžio q^n (sekos (q^n)) kitimo pobūdį, kai $0 < |q| < 1$.



Aišku, kad taškai $(n;\ q^n)$, $n \in \mathbf{N}$, yra arba rodiklinės funkcijos $y = |q|^x$, arba rodiklinės funkcijos $y = -|q|^x$ grafiko kreivėje (žr. pav.). Kadangi ir $|q|^x$ artėja prie nulio, ir $-|q|^x$ artėja prie nulio, kai x neribotai didėja, tai $q^n \to 0$, kai $n \to +\infty$, nepriklausomai nuo to, ar $q \in (-1;\ 0)$ ar $q \in (0;\ 1)$. Vadinasi,

$$\lim S_n = \lim\left(\frac{b_1}{q-1} \cdot q^n + \frac{b_1}{1-q}\right) = \frac{b_1}{1-q}.$$

Kartu išnagrinėkime dar kelis skaičiavimo uždavinius.

1 pavyzdys. Apskaičiuokime sekos (x_n), $x_n = \sqrt{\frac{9n-1}{n-2}}$, ribą

Sprendimas. Kadangi

$$\frac{9n-1}{n-2} = \frac{(9n-18)+17}{n-2} = \frac{9(n-2)}{n-2} + \frac{17}{n-2} = 9 + \frac{17}{n-2} \text{ ir } \frac{17}{n-2} \to 0, \text{ kai } n \to +\infty, \text{ tai}$$

$$\lim \sqrt{\frac{9n-1}{n-2}} = \lim \sqrt{9 + \frac{17}{n-2}} = \sqrt{9} = 3.$$

2 pavyzdys. Apskaičiuokime sekos (x_n), $x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$, ribą.

Sprendimas. Iš pradžių kiekvieną trupmeną $\frac{1}{k(k+1)}$, $k = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, pakeiskime dviejų trupmenų skirtumu:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Pasinaudoję šiuo rezultatu, gausime, kad

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

todėl

$$\lim\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right) = \lim\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

3 pavyzdys. Apskaičiuokime $\lim x_n$, jei

$$x_n = \frac{3n^2 + 7n - 1}{6n^2 + 5}.$$

Sprendimas. Lengva suprasti, kad jei $n \to +\infty$, tai $3n^2 + 7n - 1 \to +\infty$ ir $6n^2 + 5 \to +\infty$, todėl nedera skubėti su atsakymu. Iš pradžių ir skaitiklį, ir vardiklį padalykime iš n^2. Gausime:

$$x_n = \frac{3n^2 + 7n - 1}{6n^2 + 5} = \frac{\frac{3n^2 + 7n - 1}{n^2}}{\frac{6n^2 + 5}{n^2}} = \frac{\frac{3n^2}{n^2} + \frac{7n}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{6n^2}{n^2} + \frac{5}{n^2}} = \frac{3 + \frac{7}{n} - \frac{1}{n^2}}{6 + \frac{5}{n^2}}.$$

Matome, kad $\lim\left(3+\frac{7}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=3$ ir $\lim\left(6+\frac{5}{n^2}\right)=6,$ nes $\frac{7}{n}\to 0,$ $\frac{1}{n^2}\to 0$ ir $\frac{5}{n^2}\to 0,$ kai $n\to+\infty.$
Vadinasi

$$\lim\frac{3n^2+7n-1}{6n^2+5}=\lim\frac{3+\frac{7}{n}-\frac{1}{n^2}}{6+\frac{5}{n^2}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Įsižiūrėję į gautą rezultatą, galėtume padaryti išvadą, jog esant dideliems skaičiams n trupmenos vardiklis $6n^2+5$ dvigubai sparčiau didėja už trupmenos skaitiklį $3n^2+7n-1$.

Atkreipkime dėmesį ir į tai, kad analogiškai skaičiuodami (atlikite visą darbą savarankiškai!) gautume, jog

$$\lim\frac{n^2+9n+7}{n^2+1}=1,\quad \lim\frac{(2n+1)^2+1}{5n^2+n+3}=\frac{4}{5},\quad \lim\frac{8n^2+13}{3n^2+(2-n)^2}=2.$$

Taigi visais atvejais ir skaitiklis, ir vardiklis artėja į begalybę, o trupmeninių reiškinių ribos – skirtingos.

4 pavyzdys. Apskaičiuokime $\lim x_n$, jei

$$x_n=\frac{2n^2\sqrt{n}+3n-1}{3n^3+n^2+1}.$$

Sprendimas. Šiame uždavinyje vėl turime tam tikrą neaiškumą (neapibrėžtumą), nes ir skaitiklis, ir vardiklis neribotai didėja (artėja į begalybę), kai n neribotai didėja. Paprastai šio tipo neapibrėžtumas glaustai nurodomas simboliu $\frac{\infty}{\infty}$ (čia $\frac{\infty}{\infty}$ nėra paprastoji trupmena!).

Aiškindamiesi šį neapibrėžtumą ir skaitiklį, ir vardiklį padalykime iš n^3, taigi iš aukščiausio n laipsnio vardiklyje. Gausime:

$$\frac{2n^2\sqrt{n}+3n-1}{3n^3+n^2+1}=\frac{\frac{2n^2\sqrt{n}+3n-1}{n^3}}{\frac{3n^3+n^2+1}{n^3}}=\frac{\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}.$$

Matome, kad jokio neapibrėžtumo nebelieka, todėl

$$\lim\frac{2n^2\sqrt{n}+3n-1}{3n^3+n^2+1}=\lim\frac{\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}=\frac{0}{3}=0.$$

Taigi $\lim x_n=0.$

5 pavyzdys. Apskaičiuokime sekos (x_n), $x_n=\sqrt{n^2+4n}-\sqrt{n^2+3}$, ribą.

Sprendimas. Aišku, kad $\sqrt{n^2+4n}\to+\infty$ ir $\sqrt{n^2+3}\to+\infty,$ kai $n\to+\infty.$ Bet iš to pastebėjimo tegalima padaryti išvadą, kad turime neapibrėžtumą tipo $\infty-\infty$ ir kad dydžio x_n kitimo pobūdis nėra aiškus.

Iš pradžių kvadratinių šaknų $\sqrt{n^2+4n}$ ir $\sqrt{n^2+3}$ skirtumą padauginkime ir padalykime iš jų sumos $\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2+3}.$ Gausime, kad

$$\sqrt{n^2+4n}-\sqrt{n^2+3}=\frac{\left(\sqrt{n^2+4n}-\sqrt{n^2+3}\right)\left(\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2+3}\right)}{\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2+3}}=\frac{(n^2+4n)-(n^2+3)}{\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2+3}}=\frac{4n-3}{\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2+3}}.$$

Matome, kad po šių veiksmų pasikeitė neapibrėžtumo tipas – turėjome $\infty-\infty$, o gavome $\frac{\infty}{\infty}$. Aiškindamiesi pastarąjį neapibrėžtumą, trupmenos skaitiklį ir vardiklį padalykime iš n ir gausime, kad

$$x_n = \sqrt{n^2+4n} - \sqrt{n^2+3} = \frac{4-\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}}.$$

Vadinasi,

$$\lim x_n = \lim\left(\sqrt{n^2+4n} - \sqrt{n^2+3}\right) = \lim \frac{4-\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}} = \frac{4}{1+1} = 2.$$

Analogiškai spręsdami (siūlytume tai padaryti savarankiškai), gautume, kad:

1) $\lim\left(\sqrt{n-1} - \sqrt{n+1}\right) = 0$;

2) $\lim\left(\sqrt{n^2+7n} - n\right) = 3{,}5$;

3) $\lim\left(2n - \sqrt{3+8n+4n^2}\right) = -2$.

6 pavyzdys. Apskaičiuokime sekos (x_n), $x_n = \dfrac{1+3+5+...+(2n-1)}{\sqrt{9n^4+1}}$, ribą.

Sprendimas. Aišku, kad turime neapibrėžtumą tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Lyg ir tikslinga ir skaitiklį, ir vardiklį padalyti iš n^2, bet nežinia, kokį rezultatą gausime skaitiklyje.

Atidžiai įsižiūrėję skaitiklyje galėtume pamatyti aritmetinės progresijos 1, 3, 5, ... , $2n-1$ narių sumą. Vadinasi, dalydami skaitiklį iš n^2 gautume:

$$\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{n^2} = \frac{\frac{(1+(2n-1))n}{2}}{n^2} = 1,$$

todėl

$$x_n = \frac{1+3+5+...+(2n-1)}{\sqrt{9n^4+1}} = \frac{\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{n^2}}{\frac{\sqrt{9n^4+1}}{n^2}} = \frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{n^4}}}.$$

Taigi

$$\lim x_n = \lim \frac{1+3+5+...+(2n-1)}{\sqrt{9n^4+1}} = \lim \frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{n^4}}} = \frac{1}{3}.$$

2. Funkcijos riba. Šiame skyrelyje, remdamiesi konkrečiais pavyzdžiais, panagrinėkime ribos $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ skaičiavimo uždavinį, kai *f* yra vieno kintamojo *x* funkcija, apibrėžta kuriame nors realiųjų skaičių intervale, o *a* yra konkretus realusis skaičius.

Realusis skaičius A **vadinamas funkcijos** $y = f(x)$ **riba taške** a **(rašoma:** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, **jeigu skirtumas** $f(x) - A$ **artėja prie nulio, kai** x **artėja prie** a **(rašoma** $x \to a$ **).**

Žinoma, čia yra suformuluota tik intuityvi ribos samprata, bet ir jos tikrai pakaks ne vienam uždaviniui išspręsti. O sukaupus tam tikrą analizės ir skaičiavimo patirtį bus daug lengviau suprasti ir griežta matematikos kalba suformuluotus apibrėžimus bei iš jų išplaukiančius teorinius teiginius.

Pradėkime nuo funkcijų $y = \dfrac{\sin x}{x}$ ir $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Funkcija $y=\dfrac{\sin x}{x}$ yra apibrėžta aibėje $(-\infty\,;\,0)\cup(0;\,\infty)$; taigi visoje realiųjų skaičių aibėje, išskyrus tašką $x=0$. Bet tik šis taškas ir yra „įdomus“ skaičiuojant ribą $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x}{x}$, nes visais kitais atvejais (kai $a\neq 0$) atsakymas akivaizdus -

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin a}{a}.$$

Nagrinėjant funkciją $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ aibėje $(-1;\,0)\cup(0;\,\infty)$ padėtis panaši.

Jei $a\neq 0$, tai $\lim\limits_{x\to a}(1+x)^{\frac{1}{x}}=(1+a)^{\frac{1}{a}}$, o ribos

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

analizė (beje, kaip ir ribos $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$) prieinama tik gerokai toliau matematikos studijose pažengus. Vis dėlto rezultatus pateiksime:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

O dabar pereikime prie lengvesnių uždavinių sprendimo.

7 pavyzdys. Apskaičiuokite $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$.

Sprendimas. Matome, kad $x^2-4=0$ ir $x^2-x-2=0$, kai $x=2$. Vadinasi, $x^2-4\approx 0$ ir $x^2-x-2\approx 0$, jei $x\approx 2$ ($x\neq 2$). Jokio aiškumo, kokia trupmenos $\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$ reikšmių kitimo tendencija, kai x artėja prie 2. Tokia padėtis vadinama neapibrėžtumu tipo $\dfrac{0}{0}$ (čia $\dfrac{0}{0}$ nėra paprastoji trupmena ir nereiškia dalybos iš nulio!).

Pagal Vijeto teoremą, skaičius –2 yra kvadratinio dvinario x^2-4 antra šaknis, o skaičius –1 yra kvadratinio trinario x^2-x-2 antra šaknis. Vadinasi, jei $x\neq 2$,

$$\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{x+2}{x+1},$$

todėl galima daryti išvadą, jog

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+1}=\frac{2+2}{2+1}=\frac{4}{3}.$$

Atkreipkime dėmesį į tai, kad funkcija $y=f(x)$, $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$, nors ir neapibrėžta taške $x=2$, bet turi ribą (lygią $\dfrac{4}{3}$) šiame taške. Taigi $f(x)$ reikšmės artimos skaičiui $\dfrac{4}{3}$, kai x yra arti 2.

8 pavyzdys. Apskaičiuokime $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+3x-4}{x^3+4x-5}$.

Sprendimas. Skaičius 1 yra ir daugianario x^4+3x-4, ir daugianario x^3+4x-5 šaknis. Pabandykime ir vieną, ir kitą išskaidyti dauginamaisiais taip, kad vienas dauginamasis (daugiklis) būtų $x-1$:

$x^4+3x-4=(x^4-1)+(3x-3)=(x^2-1)(x^2+1)+3(x-1)=(x-1)((x+1)(x^2+1)+3)=(x-1)(x^3+x^2+x+4)$;

$x^3+4x-5=(x^3-1)+(4x-4)=(x-1)(x^2+x+1)+4(x-1)=(x-1)(x^2+x+5)$.

Matome, kad (jei $x\neq 1$)

$$\frac{x^4+3x-4}{x^3+4x-5}=\frac{(x-1)(x^3+x^2+x+4)}{(x-1)(x^2+x+5)}=\frac{x^3+x^2+x+4}{x^2+x+5}.$$

Be to, skaičius 1 nėra vardiklyje esančio kvadratinio trinario šaknis, todėl

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4+3x-4}{x^3+4x-5}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+x+4}{x^2+x+5}=1.$$

Sugrįžę prie išnagrinėtų pavyzdžių, galėtume įžvelgti tą patį neapibrėžtumo $\frac{0}{0}$ išsiaiškinimo būdą: skaičiuodami ribą $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ (čia $P(x)$ ir $Q(x)$ – atitinkami daugianariai, turintys bendrą šaknį $x=a$), ir vieną, ir kitą daugianarį padalijome iš skirtumo $x-a$. Beje, padalyti galima ne tik išskiriant daugiklį $x-a$, bet ir dalijant kampu:

1)
$$\begin{array}{l|l}
x^4+3x-4 & x-1 \\
\underline{-\,x^4-x^3} & x^3+x^2+x+4 \\
\quad x^3+3x-4 & \\
\quad\underline{-\,x^3-x^2} & \\
\qquad x^2+3x-4 & \\
\qquad\underline{-\,x^2-x} & \\
\qquad\quad 4x-4 & \\
\qquad\quad\underline{-\,4x-4} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

2)
$$\begin{array}{l|l}
x^3+4x-5 & x-1 \\
\underline{-\,x^3-x^2} & x^2+x+5 \\
\quad x^2+4x-5 & \\
\quad\underline{-\,x^2-x} & \\
\qquad 5x-5 & \\
\qquad\underline{-\,5x-5} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Taigi

$$\frac{x^4+3x-4}{x^3+4x-5}=\frac{\dfrac{x^4+3x-4}{x-1}}{\dfrac{x^3+4x-5}{x-1}}=\frac{x^3+x^2+x+4}{x^2+x+5}.$$

Analogiškai

$$\frac{x^2-4}{x^2-x-2}=\frac{\dfrac{x^2-4}{x-2}}{\dfrac{x^2-x-2}{x-2}}=\frac{x+2}{x+1}.$$

Aišku, dalijame iš $x-a$ turėdami mintyje, kad $x-a\neq 0$.

9 pavyzdys. Apskaičiuokime $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4+2x^3-x^2-4x-2}{2x^3+9x^2+12x+5}$.

Sprendimas. Tiesiogiai tikrindami įsitikiname, kad

$$x^4+2x^3-x^2-4x-2=0 \text{ ir } 2x^3+9x^2+12x+5=0, \text{ kai } x=-1.$$

Aiškindamiesi neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$, ir vieną, ir kitą daugianarį padalykime iš $x+1$. Gausime:

1)
$$\begin{array}{l|l}
x^4+2x^3-x^2-4x-2 & x+1 \\
\underline{-\,x^4+x^3} & x^3+x^2-2x-2 \\
\quad x^3-x^2-4x-2 & \\
\quad\underline{-\,x^3+x^2} & \\
\qquad -2x^2-4x-2 & \\
\qquad\underline{-\,-2x^2-2x} & \\
\qquad\quad -2x-2 & \\
\qquad\quad\underline{-\,-2x-2} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

2)
$$\begin{array}{l|l}
2x^3+9x^2+12x+5 & x+1 \\
\underline{-\,2x^3+2x^2} & 2x^2+7x+5 \\
\quad 7x^2+12x+5 & \\
\quad\underline{-\,7x^2+7x} & \\
\qquad 5x+5 & \\
\qquad\underline{-\,5x+5} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Taigi

$$\frac{x^4+2x^3-x^2-4x-2}{x+1}=x^3+x^2-2x-2$$

ir

$$\frac{2x^3+9x^2+12x+5}{x+1}=2x^2+7x+5,$$

todėl

$$\frac{x^4+2x^3-x^2-4x-2}{2x^3+9x^2+12x+5}=\frac{x^3+x^2-2x-2}{2x^2+7x+5}.$$

Deja, $2x^2+7x+5=0$, kai $x=-1$. Bet ir skaitiklis lygus nuliui, kai $x=-1$. Vadinasi, neapibrėžtumas $\frac{0}{0}$ neišnyko. Todėl dar kartą dalykime (ir skaitiklį, ir vardiklį) iš $x+1$:

1)
$$\begin{array}{r|l}
x^3+x^2-2x-2 & \underline{\;x+1\;} \\
-\underline{x^3+x^2\qquad\qquad} & x^2-2 \\
-2x-2 & \\
-\underline{-2x-2} & \\
0 &
\end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r|l}
2x^2+7x+5 & \underline{\;x+1\;} \\
-\underline{2x^2+2x\qquad} & 2x+5 \\
5x+5 & \\
-\underline{5x+5} & \\
0 &
\end{array}$$

Kadangi

$$\frac{x^3+x^2-2x-1}{2x^2+7x+5}=\frac{\dfrac{x^3+x^2-2x-1}{x+1}}{\dfrac{2x^2+7x+5}{x+1}}=\frac{x^2-2}{2x+5},$$

tai

$$\frac{x^4+2x^3-x^2-4x-2}{2x^3+9x^2+12x+5}=\frac{x^2-2}{2x+5}.$$

Vadinasi,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4+2x^3-x^2-4x-2}{2x^3+9x^2+12x+5}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2}{2x+5}=\frac{1-2}{-2+5}=-\frac{1}{3}.$$

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Apskaičiuokite sekos (x_n),

$$x_n=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2}{(n+1)^2}+\frac{3}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{n}{(n+1)^2},$$

ribą $\lim x_n$.

2. Apskaičiuokite sekos (x_n),

$$x_n=2\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+2)}\right),$$

ribą $\lim x_n$.

3. Apskaičiuokite $\lim x_n$, jei $x_n=\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{(n-2)^2-1}$.

4. Apskaičiuokite $\lim x_n$, jei $x_n=\dfrac{(n+1)^3-(n-2)^3}{n^2+2n-3}$.

5. Apskaičiuokite $\lim x_n$, jei $x_n = \dfrac{\sqrt{4n^3+1}}{(5n+3)(\sqrt{n}+1)}$.

6. Apskaičiuokite $\lim n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$.

7. Apskaičiuokite

$$\lim_{x\to 7}\frac{2x^2-11x-21}{x^2-9x+14}.$$

8. Apskaičiuokite

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}+\frac{1}{x-1}\right).$$

9. Apskaičiuokite

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-x^3+x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1}.$$

10. Apskaičiuokite

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^3-11x^2+12x+9}{x^4-6x^3+13x^2-24x+36}.$$

BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

1. Iš čiaupo A vanduo bėga 15 litrų per minutę greičiu, o iš čiaupo B bėga 10 litrų per minutę greičiu. Pildant 200 litrų talpos tuščią indą, iš pradžių 100 sekundžių buvo atsuktas tik čiaupas A, o tada atsuktas dar ir čiaupas B. Indą jie baigė pildyti kartu. Per kiek laiko indas buvo pripildytas vandens?
2. Trapecijos pagrindų ilgiai yra 9 cm ir 6 cm, aukštinės ilgis lygus 10 cm. Raskite atstumus nuo trapecijos įstrižainių susikirtimo taško iki trapecijos pagrindų.
3. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\mathrm{x}+\mathrm{y}} + x = 3; \\ \dfrac{x}{2x+y} = -4. \end{cases}$$

4. Raskite ribą

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 24x + 63}{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 24x + 36}.$$

STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Du darbininkai turėjo nušienauti pievą – po pusę pievos kiekvienas. Abu darbininkai šienavo vienodu tempu. Pirmasis darbininkas darbą pradėjo 2 h. 16 min. anksčiau už antrąjį. Iki 12 h jie nušienavo 40 procentų pievos, tada pusantros valandos pietavo ir ilsėjosi. Pirmasis darbininkas darbą baigė 17 h 54 min, o antrasis – 20 h 10 min. Kokį laiką rodė laikrodis, kai šienauti pievą pradėjo pirmasis darbininkas?

Sprendimas. Sakykime, kad S yra šienaujamos pievos plotas (ha), v – darbo tempas (ha/min), o $t -$ antrojo darbininko darbo trukmė (min) iki 12 h. Tada pagal sąlygą $(2t + 136)v = 0{,}4S$, $(264 + 400)v = 0{,}6S$. Iš čia gauname, kad $\frac{2t+1}{664} = \frac{2}{3}$, taigi $t = \frac{460}{3}$ (min)=4 h 49 min 20 s. Todėl ieškomas laikrodžio rodmuo yra 7 h 10 min 40 s.

Ats.: 7 h 10 min 40 s.

2. Sunkvežimis su pavojingu kroviniu 40 km/h greičiu išvyko iš Kauno į Palangą. Atstumas tarp šių miestų yra 240 km. Tuo pačiu metu iš Palangos į Kauną išvyko motociklininkas. Motociklininkas susitiko sunkvežimį, kai jam iki Kauno buvo likę pusvalandis kelio. Atvykęs į Kauną motociklininkas iš karto vėl išvyko į Palangą. Kokiu greičiu turėtų važiuoti motociklininkas, kad jis į Palangą atvyktų greičiau negu sunkvežimis?

Sprendimas. Pažymėkime x (km/h) motociklininko greitį, y (valandų) – laiko tarpą nuo transporto priemonių išvykimo momento iki jų susitikimo. Tuomet pagal sąlygą $xy + 40y = 240 \Rightarrow y = \dfrac{240}{x+40}$. Kad motociklininkas į Palangą atvyktų anksčiau negu sunkvežimis turi galioti nelygybė $2\left(\dfrac{240}{x+40} + \dfrac{1}{2}\right) < 6$. Pertvarkę gauname nelygybę: $\dfrac{x-56}{x+40} > 0 \quad \Rightarrow x > 56$.

Ats.: Motociklininko greitis turi būti didesnis nei 56 km/h

3. Šachmatų turnyre dalyvavo du dešimtos klasės mokiniai ir mažiau nei 10 vienuoliktokų. Abu dešimtokai kartu surinko 8 taškus, o kiekvienas vienuoliktokas surinko po vienodą taškų skaičių. Kiekvienas dalyvis sužaidė po vieną partiją su visais kitais dalyviais. Šachmatų turnyre už laimėtą partiją žaidėjas gauna 1 tašką, pralaimėjęs - nulį, o lygiųjų atveju abu gauna po pusę taško. Kiek mokinių iš viso dalyvavo turnyre?

Sprendimas. Sakykime, kad turnyre dalyvavo x vienuoliktokų, $x < 10$. Iš viso buvo $x + 2$ dalyvių, taigi buvo sužaista $\frac{1}{2}(x + 2)(x + 1)$ partijų. Kadangi šachmatų turnyre kiekvienoje partijoje iš viso gaunamas vienas taškas, tai visi vienuoliktokai kartu surinko

$$\frac{1}{2}(x + 2)(x + 1) - 8 = \frac{x^2 + 3x - 14}{2}$$

taškų. Kadangi visi jie surinko po vienodą skaičių taškų, tai kiekvienas gavo po $\frac{x^2+3x-1}{2x}$ taškų. Pagal uždavinio sąlygą dvigubas šis skaičius turi būti sveikasis, taigi skaičius $x^2 + 3x - 14$ turi dalintis iš skaičiaus x. Iš čia išplaukia, kad iš skaičiaus x turi dalintis skaičius 14. Taigi $x = 7$ arba $x = 14$. Kadangi pagal sąlygą $x < 10$, tai $x = 7$.

Ats.: 9.

4. Iškilojo daugiakampio įstrižainių skaičius yra 230. Kiek kraštinių turi šis daugiakampis?

Sprendimas. Tegu kraštinių skaičius yra n. Tuomet įstrižainių, išvestų iš vienos viršūnės, yra $n-3$, o visų įstrižainių skaičius lygus $\frac{n(n-3)}{2}$. Gauname lygtį:

$$\frac{n(n-3)}{2}=230 \Rightarrow n^2-3n-460=0 \Rightarrow n=23.$$

Ats.: 23.

5. Natūraliojo skaičiaus a dalybos iš 3 liekana yra lygi 2. Raskite skaičiaus a^2+2a dalybos iš 3 liekaną.

Sprendimas. Kadangi skaičių a galima užrašyti pavidalu $a=3m+2$, čia m – sveikasis skaičius, tai $a^2+2a=(3m+2)^2+2(3m+2)=9m^2+18m+8$. Kadangi $9m^2+18m$ dalijasi iš 3 su bet kuriuo sveikuoju m, o skaičiaus 8 dalijimo iš 3 liekana yra 2, tai ieškomoji liekana lygi 2.

Ats.: 2.

6. Kokiame intervale turi būti parametro m reikšmės, kad kvadratinės lygties

$$x^2-2mx+m^2-1=0$$

sprendiniai būtų intervale $(-2,4)$?

Sprendimas. Kadangi $x^2-2mx+m^2-1=(x-m)^2-1$, tai $(x-m)^2-1=0$, kai $x-m=\pm1$, t. y. kai $x=m-1$ arba $x=m+1$. Belieka išspręsti nelygybių $m-1>-2$ ir $m+1<4$ sistemą, iš kurios gauname, kad $m>-1$, $m<3$. Taigi $-1<m<3$.

Ats.: $(-1,3)$.

7. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} x^2-y=23, \\ x^2y=50. \end{cases}$

Sprendimas. Iš antrosios lygties matome, kad $y>0$. Iš pirmosios lygties išreiškiame $x^2=$ $=y+23$ ir įrašome šią išraišką į antrąją lygį. Gauname kvadratinę lygtį $y^2+23y-50=0$, kuri turi vieną teigiamą sprendinį $y=2$. Tuomet $x^2=25$, $x=\pm5$, taigi lygčių sistema turi du sprendinius – dvi nežinomųjų x ir y poras (5, 2) ir $(-5, 2)$.

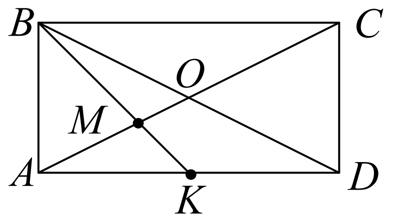
Ats.: (5, 2), $(-5, 2)$.

8. Apskaičiuokite $x^3+\frac{1}{x^3}$, kai $x+\frac{1}{x}=a$.

Sprendimas. $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)=a\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)=a\left((x+\frac{1}{x})^2-3\right)=a(a^2-3)$.

Ats.: $a(a^2-3)$.

9. Stačiakampio $ABCD$ kraštinių santykis $AD{:}\,AB = \sqrt{2}$, taškas K yra kraštinės AD vidurio taškas. Raskite kampą tarp tiesių AC ir BK.



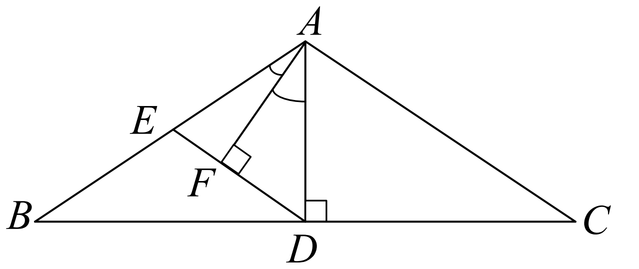
Sprendimas. Sakykime, kad taškas O yra stačiakampio įstrižainių sankirtos taškas, o atkarpos AC ir BK susikerta taške M. Jei $AB = 1$, tai $AD = \sqrt{2}$, $AK = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Kadangi taškai O ir K yra trikampio ABD kraštinių vidurio taškai, tai atkarpos AO ir BK yra to trikampio pusiaukraštinės, taškas M jų susikirtimo taškas, todėl $AM{:}\,MO = BM{:}\,BK = 2{:}\,1$. Kadangi $BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $AO = \frac{1}{2}AC =$ $= \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tai $AM = \frac{2}{3}AO = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $MK = \frac{1}{3}BK = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Taikydami kosinusų teoremą trikampiui AMK gauname, kad $\cos\angle AMK = \frac{AM^2+M\ {}^2-AK^2}{2\cdot AM\cdot MK} = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}} = 0$. Iš čia išplaukia, kad ieškomas kampas yra statusis.

Ats.: 90^0.

10. Atkarpa AD yra lygiašonio trikampio ABC, $AB = AC$ aukštinė, atkarpa DE yra trikampio ABD pusiaukraštinė, o atkarpa AF – trikampio ADE aukštinė, be to $\angle EAF = \angle DAF$. Raskite trikampio ABC kampus.

Sprendimas. Kadangi pagal sąlygą atkarpa AF yra trikampio ADE aukštinė ir pusiaukampinė, tai trikampis ADE yra lygiašonis, $AE = AD$. Kadangi atkarpa DE yra stačiojo trikampio ABD pusiaukraštinė, nubrėžta į įžambinę AB, tai $DE = BE = EA$. Taigi trikampis ADE yra lygiakraštis, $\angle EAD =$ $= 60^0$, todėl $\angle BAC = 120^0$, $\angle B = \angle C = 30^0$.

Ats.: $120^0, 30^0, 30^0$.



PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Namui suremontuoti buvo pasamdyti keli darbininkai, galintys tą darbą atlikti per tam tikrą dienų skaičių. Jei būtų pasamdyta 3 darbininkais mažiau, tai darbas truktų 6 dienomis ilgiau, o jei būtų pasamdyta 2 darbininkais daugiau, tai darbas būtų baigtas 2 dienomis anksčiau sutarto laiko. Kiek buvo pasamdyta darbininkų ir per kiek dienų buvo sutarta baigti namo remontą?

Sprendimas. Tarkime, kad buvo pasamdyta x darbininkų, ir buvo susitarta suremontuoti namą per y dienų. Vadinasi, namo remonto darbų apimtis yra xy dienų.

Pagal sąlygos pirmąją dalį sudarome lygtį:

$$(x-3)(y+6)=xy,$$

o pagal sąlygos antrąją dalį:

$$(x+2)(y-2)=xy.$$

Iš lygčių sudarome sistemą:

$$\begin{cases}(x-3)(y+6)=(x+2)(y-2), & (1)\\ (x+2)(y-2)=xy. & (2)\end{cases}$$

Sistemos (1) lygties nežinomąjį y išreiškiame:

$$5y=8x-14,\quad \text{t. y}\quad y=1{,}6x-2{,}8.$$

Įrašę gautą y reikšmę į pertvarkytą (2) lygtį $2y-2x=4$ turime:

$$2(1{,}6x-2{,}8)-2x=4,\quad 3{,}2x-5{,}6-2x=4\quad \text{ir}\quad x=8.$$

Todėl $y=1{,}6\cdot 8-2{,}8=10.$

Patikrinimu įsitikiname, kad buvo pasamdyta 8 darbininkai, kurie turėjo baigti namo remontą per 10 dienų.

Ats.: 8 darbininkai; 10 dienų.

2. Rimas savo užduotį gali atlikti per 15 h, o Simo užduotį – per 25 h. Simas savo užduotį atlieka per 20 h. Per kiek laiko Simas gali padaryti Rimo užduotį?

Sprendimas. Tegu Simo užduoties apimtis yra 1, tai Simo darbo spartumas yra $\frac{1}{20}$, o Rimo, atliekant šią užduotį, – $\frac{1}{25}$. Vadinasi, sparčiau (greičiau), t. y. našiau, dirba Simas $\frac{1}{20}:\frac{1}{25}=\frac{25}{20}=1{,}25$ (karto). Todėl Simas Rimo užduotį padarytų per $15:1{,}25=12$ (h).

Ats.:. Per 12 h.

3. Ritos mobilaus telefono baterijos įkrovos pakanka 4 valandoms pokalbių arba x ryšio laukimo valandoms. Kokia yra x reikšmė, jei žinoma, kad per užsitęsusį Ritos pokalbį visiškai įkrauta telefono baterija išsikrovė per 3 h $51\frac{1}{9}$ min?

Sprendimas. Kadangi $51\frac{1}{9}$ min = $\frac{400}{9\cdot 60}$ h = $\frac{23}{27}$ h, tai 3 h $51\frac{1}{9}$ min = $3\frac{23}{27}$ h.

1 būdas (aritmetinis).

Per 1 pokalbių valandą išsikrauna $\frac{1}{4}$ baterijos, o per 1 ryšio laukimo valandą išsikrauna

$$\frac{1}{3\frac{23}{27}}-\frac{1}{4}=\frac{27}{104}-\frac{1}{4}=\frac{27-26}{104}=\frac{1}{104}\ \text{baterijos.}$$

Todėl visiškai įkrautos mobilaus telefono baterijos ryšio laukimui pakanka $1:\frac{1}{104}=104$ (h).

2 būdas (algebrinis).

$$\text{Per 1 h išsikrauna}\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{4}\ \text{baterijos pokalbio metu,}\\[2mm] \dfrac{1}{x}\ \text{baterijos ryšio belaukiant,}\\[2mm] \left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{x}\right)\ \text{baterijos kalbantis ir palaikant ryšį.}\end{array}\right.$$

Pagal sąlygą:

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{x}\right)\cdot 3\frac{23}{27}=1.$$

$\frac{x+4}{4x}\cdot\frac{104}{27}=1$, $\frac{26(x+4)}{27x}=1$. Trupmena lygi 1, kai skaitiklis ir vardiklis yra lygūs: $27x=26x+104$, $x=104$.

Ats.: $x=104\,\text{h}$.

4. Vandens bake yra du čiaupai: vienu čiaupu vanduo įteka į baką, o antru išteka iš bako. Jei atidarytume kartu abu čiaupus, tai tuščias bakas prisipildytų per 36 min. Kartą esant tuščiam bakui, buvo atidaryti abu čiaupai 6 minutėms, o po to čiaupas, kuriuo vanduo išteka, buvo uždarytas ir bakas prisipildė per 10 min. Per kiek minučių baką pripildytų pirmasis čiaupas, jei antrasis būtų uždarytas?

Sprendimas. Sakykime, kad I čiaupas pripildo baką per x min, o II čiaupu iš bako vanduo išbėga per y min.

$$\text{Per 1 min}\left[\begin{array}{l}\text{I čiaupas pripildo } \dfrac{1}{x}\ \text{bako,}\\[2mm] \text{II čiaupas ištuština } \dfrac{1}{y}\ \text{bako.}\end{array}\right.$$

Pagal sąlygos pirmąją situaciją sudarome lygtį:

$$\frac{36}{x}-\frac{36}{y}=1.$$

Pagal sąlygos antrąją situaciją I čiaupas veikė 16 min, o II čiaupas tik 6 min, tai sudarome lygtį:

$$\frac{16}{x}-\frac{6}{y}=1.$$

Iš lygčių sudarome sistemą ir ją išsprendžiame:

$$\begin{cases}\dfrac{36}{x}-\dfrac{36}{y}=1, & |:6\\[2mm] \dfrac{16}{x}-\dfrac{6}{y}=1;\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{6}{x}-\dfrac{6}{y}=\dfrac{1}{6}, & (1)\\[2mm] \dfrac{16}{x}-\dfrac{6}{y}=1. & (2)\end{cases}$$

Iš sistemos (2) lygties panariui atėmę (1) lygtį turime: $\frac{10}{x}=\frac{5}{6}$. Taigi $x=12$, o $y=18$.

Patikrinimu įsitikiname, kad I čiaupas, jeigu II čiaupas būtų uždarytas, baką pripildytų per 12 minučių.

Ats.: 12 min.

5. Dvi statybininkų brigados statė objektą. Po 5 bendro darbo dienų antroji brigada buvo pasiųsta į kitą aikštelę ir darbą baigė viena pirmoji brigada dar po 9 dienų. Per kiek dienų galėtų atlikti visą darbą kiekviena brigada, dirbdama atskirai, jei antrajai brigadai atlikti šį darbą reikia 12 dienų mažiau?

Sprendimas. Iš įvairių galimų šio uždavinio sprendimo apipavidalinimo būdų pasirinkime, pavyzdžiui, lentelę:

	Gali atlikti darbą per	Darbo našumas	Faktiškai dirbo	Atlikto darbo apimtis
I brigada	$(x+12)$ dienų	$\frac{1}{x+12}$	14 dienų	$\frac{14}{x+12}$
II brigada	x dienų	$\frac{1}{x}$	5 dienos	$\frac{5}{x}$

Pagal sąlygą:

$$\frac{14}{x+12}+\frac{5}{x}=1.$$

$\frac{14x+5x+60}{x(x+12)}=1,\quad \Leftrightarrow \quad x^2+12x=19x+60,\quad x^2-7x-60=0$ ir $x_1=-5$ (netinka), $x_2=12.$

Patikrinimu įsitikiname, kad viena antroji brigada gali pastatyti objektą per 12 dienų, o pirmoji – per 24 dienas.

Ats.: 24 dienos, 12 dienų.

6. Iš vietovių *A* ir *B* vienu keliu vienas priešais kitą pastoviais greičiais išvažiavo du dviratininkai. Pirmasis iš *A* išvažiavo 8 val. 24 min ir į *B* atvyko 12 val. 36 min, o antrasis iš *B* išvažiavo 8 val. 36 min ir į *A* atvyko 13 val. 51 min. Kuriuo laiku dviratininkai kelyje prasilenkė?

Sprendimas. Dviratininko kelionė iš *A* į *B* truko 12 val. 36 min – 8 val. 24 min = 4 h 12 min $=4\frac{1}{5}$ h, dviratininko iš *B* į *A* truko 13 val.51 min – 8 val.36 min = 5 h 15 min = $5\frac{1}{4}$ h.

Dviratininko iš *A* važiavimo spartumas $1:4\frac{1}{5}=\frac{5}{21}$, o dviratininko iš *B* – $1:5\frac{1}{4}=\frac{4}{21}$. Dviratininkų vieno prie kito artėjimo kelyje spartumas buvo $\frac{5}{21}+\frac{4}{21}=\frac{9}{21}$.

Per 12 min = $\frac{1}{5}$ h (8 val. 36 min – 8 val. 24 min = 12 min), kol dviratininkas iš *B* nebuvo pradėjęs kelionę, dviratininkas iš *A* nuvažiavo $\frac{5}{21}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{21}$ kelio, todėl kai pradėjo važiuoti dviratininkas iš *B* , atstumas tarp jų buvo $1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21}$ kelio.

Vadinasi, po abiejų dviratininkų važiavimo kartu jie prasilenkė kelyje praėjus $\frac{20}{21}:\frac{9}{21}=\frac{20}{9}=2\frac{2}{9}$ (h).

Tai įvyko 8 val. 36 min + 2 h $13\frac{1}{3}$ min = 10 val. $49\frac{1}{3}$ min.

Ats.: 10 val. $49\frac{1}{3}$ min.

7. (Levo Tolstojaus uždavinys.) Į lauką išvyko šienpjovių artėlė. Čia ji turėjo nupjauti dvi pievas, kurių viena buvo dvigubai didesnė už kitą. Pusę dienos artėlė pjovė didesniąją pievą, o antrą dienos pusę ji susiskirstė į dvi lygias grupes, kurių viena turėjo baigti šienauti didesniąją pievą, o antroji ėmė pjauti mažesniąją. Iki vakaro didesnioji buvo nupjauta, o mažesniosios pievos liko sklypas, kurį kitą dieną nupjovė vienas šienpjovys, dirbdamas ištisą dieną. Kiek šienpjovių buvo artėlėje?

Sprendimas. Tai istorinis uždavinys. Grafas Levas Tolstojus (1828–1910) – pasaulinio garso rusų rašytojas, eseistas, dramaturgas ir filosofas. Vienu iš gyvenimo laikotarpių domėjosi vaikų mokymo sistemomis, valstiečių vaikams atidarė kaimo mokyklą, rūpinosi ja. Gal iš šio laikotarpio ir šis uždavinys. Beje, Oilerio skaičius *e* – natūraliojo logaritmo pagrindo, kurio apytikslė reikšmė $e\approx 2{,}7182818284...$, aštuoni skaitmenys po kablelio yra susiję su Levo Tolstojaus gimimo metais.

O dabar prie uždavinio. Paprastai šienpjoviai pievą pjauna pradalgėmis: vienas po kito. Todėl vyriškasis ego neleidžia atsilikti, pasirodyti silpnesniu. Vadinasi, visų darbo spartumas vienodas.

1 būdas (aritmetinis). Vienas iš daugelio galimų sprendimo apipavidalinimo variantų galėtų būti ir toks:

Sakykime, kad šienpjovių artėlė per pirmąjį pusdienį nupjovė pievos dalį, lygią 1, tai visos dienos požiūriu – $\frac{1}{2}$, o per antrąjį pusdienį pusė artėlės – $\frac{1}{4}$ visos didesniosios pievos. Vadinasi, per dieną buvo nupjauta $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ didesniosios pievos, t. y. $\frac{3}{8}$ mažesniosios pievos požiūriu. Antroji šienpjovių pusė (grupė) atliko darbą per pirmąją dieną mažesnėje pievoje lygų $\frac{1}{4}$. Todėl mažesnėje pievoje liko šienauti $\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ jos. Kadangi tai vieno šienpjovio darbo apimtis visai dienai, tai artėlėje buvo 8 šienpjoviai.

2 būdas (algebrinis). Tai vėl vienas iš daugelio galimų variantų:

Tegul šienpjovių skaičius artėlėje yra x, o vienas šienpjovys per dieną nupjauna a arų pievos.

Pagal sąlygą:

$$x\cdot\frac{a}{2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{a}{2}=\left(\frac{x}{2}\cdot\frac{a}{2}+a\right)\cdot 2.$$

Abi lygties puses padaliję iš a turime:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}=\frac{x}{2}+2,\quad \frac{x}{4}=2 \quad \text{ir} \quad x=8.$$

Vadinasi, artėlėje buvo 8 šienpjoviai.

Ats.: 8 šienpjoviai.

8. Penki vienodo galingumo ekskavatoriai, dirbdami kartu, gali iškasti duobę per 24 valandas. Tačiau jie pradėjo dirbti vienas po kito vienodais laiko tarpais, o duobę baigė kasti kartu. Kiek laiko dirbo kiekvienas ekskavatorininkas, jei pirmasis, pradėjęs darbą, dirbo 3 kartus ilgiau, negu paskutinysis įsijungęs į darbą?

Sprendimas. Duobės kasimo apimtis yra $5\cdot 24=120$ valandų. Tegul penktasis ekskavatorininkas dirbo x h, tai pirmasis $3x$ h.

Kadangi ekskavatorininkai įsijungė į darbą vienodais laiko tarpais vienas po kito, tai:

$$\frac{3x+x}{2}\cdot 5=120 \quad \text{ir} \quad 10x=120. \quad \text{Vadinasi,} \quad x=12.$$

Taigi pirmasis ekskavatorininkas dirbo 36 h, o penktasis – 12 h.

Kadangi ekskavatorininkų darbo laikai sudaro aritmetinę progresiją, tai $12=36+4d$ ir $d=-6$.

Vadinasi, antrasis ekskavatorininkas dirbo $36-6=30$ (h), trečiasis – $30-6=24$ (h), o ketvirtasis – $24-6=18$ (h).

Ats.: 36 h; 30 h; 24 h; 18 h; 12 h.

9. Petras, dirbdamas vienas, visą darbą atliktų per m valandų. Jonas, dirbdamas vienas, šį darbą atliktų per n valandų. Dirbdami abu, jie dvigubai didesnės apimties darbą atliktų per T valandų. Įsitikinkite, kad T yra skaičių m ir n harmoninis vidurkis.

Sprendimas. 1 būdas (aritmetinis).

Per 1 min
- Petras atlieka $\frac{1}{m}$ darbo dalį;
- Jonas atlieka $\frac{1}{n}$ darbo dalį;
- Petras ir Jonas drauge atlieka $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{m+n}{mn}$ darbo dalį.

Dvigubai didesnės apimties darbą Petras ir Jonas atliktų per $2:\frac{m+n}{mn}=\frac{2mn}{m+n}$ valandų. Taigi $T=\frac{2mn}{m+n}$.

2būdas (algebrinis).

Pagal sąlygą Petro darbo našumas (spartumas) yra $\frac{1}{m}$, Jono – $\frac{1}{n}$, o abiejų drauge – $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{m+n}{mn}$.

Pasinaudoję formule $A=N\cdot t$ turime:

$$\frac{m+n}{mn}\cdot T=2.\ \text{Iš čia}\ \ T=\frac{2mn}{m+n}.$$

Tiek sprendžiant vienu ar kitu būdu akivaizdu, kad $\frac{2mn}{m+n}=T$ yra dviejų skaičių *m* ir *n* harmoninis vidurkis remiantis harmoninio vidurkio samprata.

10. (Vienas iš keturių uždavinių, pateiktas 1932 metais Kauno jėzuitų humanitarinėje gimnazijoje per abitūros egzaminus.) Vienam staliui buvo užmokėta 48 Lt, kitam, kuris dirbo 6 val. mažiau, – 27 Lt. Jei pirmasis stalius būtų dirbęs tiek valandų kiek antrasis, antrasis tiek kiek pirmasis, tai būtų uždirbę po lygiai. Po kiek valandų dirbo staliai?

Sprendimas. Iš pateiktos sąlygos aišku, kad stalių valandiniai atlygiai yra skirtingi.

Sakykime, kad I staliaus valandinis atlygis yra *x* Lt, o II staliaus – *y* Lt. Tegul II stalius dirbo *t* h, o I stalius (t+6) h.

Pagal sąlygą sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x(t+6)=48, & (1)\\ yt \quad\ =27, & (2)\\ xt \quad\ =y(t+6). & (3)\end{cases}$$

Iš I lygties turime: $xt+6x=48$, $t=\frac{48}{x}-6$, o iš (2) lygties – $t=\frac{27}{y}$. Sulyginę šias lygybes gauname:

$\frac{48}{x}-6=\frac{27}{y}\ |\cdot xy$, $48y-6xy=27x\ |:3$, $16y-2xy=9x$, $9x+2xy=16y$, $x(9+2y)=16y$, $x=\frac{16y}{9+2y}$.

Iš (3) sistemos lygties turime $xt=yt+6y$, $xt-yt=6y$ ir $t(x-y)=6y$.

Įrašę gautą *x* reikšmę į paskutiniąją lygybę gauname:

$$t\left(\frac{16y}{9+2y}-y\right)=6y\ |:y\ (y\neq 0),\quad t\left(\frac{16}{9+2y}-1\right)=6\ \text{ ir }\ t\cdot\frac{7-2y}{9+2y}=6.$$

Kadangi $t=\frac{27}{y}$, tai $\frac{27}{y}\cdot\frac{7-2y}{9+2y}=6\ |\cdot y(9+2y)$. Vadinasi, $189-54y=54y+12y^2\ |:3$ ir $4y^2+36y-63=0$. Iš čia $y_1=-10{,}5$ (netinka) ir $y_2=1{,}5$. Taigi 1,5 Lt yra II staliaus valandinis atlygis, o I staliaus: $\frac{16\cdot 1{,}5}{9+2\cdot 1{,}5}=\frac{24}{12}=2$ (Lt).

Tačiau mus domina stalių dirbtas laikas:

$$\text{II stalius dirbo}\ \frac{27}{1{,}5}=18\,\text{(h), o I stalius – 24 h.}$$

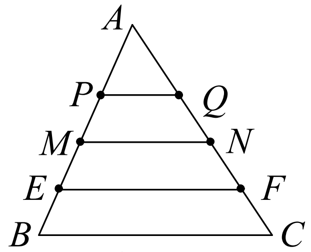
Surastomis stalių valandinių atlygių ir dirbtų laikų reikšmėmis patikriname sprendimo teisingumą.

Ats.: I stalius 24 h, o II stalius 18 h.

ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Trikampio vidurinė linija MN dalija trikampį ABC į trapeciją $BCNM$ ir trikampį AMN. Raskite trapecijos BCNM ir trikampio AMN vidurinių linijų ilgių santykį.

Sprendimas. Sakykime, kad taškai E ir F yra atkarpų BM ir CN vidurio taškai, o taškai P ir Q – atkarpų AM ir AN vidurio taškai (1 pav), o kraštinės BC ilgis lygus a. Pagal trikampio ir trapecijos vidurinių linijų savybes $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$, $EF = \frac{1}{2}(BC + MN) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) = \frac{3}{4}a$, $PQ = \frac{1}{2}MN = \frac{a}{4}$, todėl $EF : PQ = \frac{3}{4}a : \frac{1}{4}a = 3$.

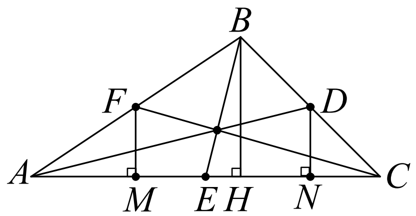


1 pav.

Ats.: $3 : 1$.

2. Smailiojo trikampio kraštinių AB ir BC ortogonaliųjų projekcijų tiesėje AC ilgiai lygūs 6 ir 4. Raskite trikampio pusiaukraštinių ortogonaliųjų projekcijų tiesėje AC ilgius.

Sprendimas. Sakykime, kad AD, BE, CF yra trikampio ABC pusiaukraštinės, iš taškų B, D ir E nuleidžiame statmenis BH, DN ir FM tiesei AC (2 pav.), kadangi pagal sąlygą trikampis ABC smailusis, tai taškai H, N ir M yra kraštinėje AC. Atkarpos AH ir CH yra kraštinių AB ir BC ortogonaliosios projekcijoa tiesėje AC, taigi $AH = 6$, $BH = 4$, $AC = 10$, $AE = EC = 5$. Tuomet pusiaukraštinės BD ortogonalioji projekcija $EH = AH - AE = 6 - 5 = 1$. Kadangi $AF = FB$, o $FM \parallel BH$, tai pagal Talio teoremą $AM = MH = \frac{1}{2}AH = 3$, todėl pusiaukraštinės CF ortogonalioji projekcija tiesėje AC – atkarpa $CM = AC - AM = 7$. Analogiškai iš lygybės $CD = DB$ ir sąlygos $BH \parallel DN$ pagal Talio teoremą gauname, kad $HN = NC = \frac{1}{2}CH = 2$, todėl puaiaukraštinės AD ortogonalioji projekcija tiesėje AC – atkarpa $AN = AC - NC = 8$.

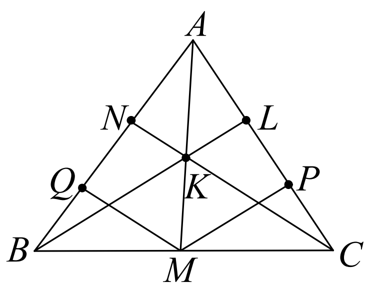


2 pav.

Ats.: pusiaukraštinių BD, CF, AD ortogonaliųjų projekcijų tiesėje AC ilgiai atitinkamai lygūs 1, 7, 8.

3. Taškas K yra trikampio ABC pusiaukraštinės AM vidurio taškas, tiesė BK kraštinę AC kerta taške L, o tiesė CK kraštinę AB kerta taške N. Raskite santykį $NL: BC$.

Sprendimas. Nubrėžkime atkarpas $MP \parallel BL$, $P \in AC$ ir $MQ \parallel CN$, $Q \in AB$ (3 pav.). Kadangi $AK = KM$, tai pagal Talio teoremą $AL = LP$. Kadangi $BM = MC$, tai pagal Talio teoremą $LP = PC$, taigi $AL = LP = PC = \frac{1}{3}AC$. Analogiškai gauname, kad $AN = NQ = QB = \frac{1}{3}AB$. Taigi $AN : AL = AB : AC = 1:3$. Trikampių ABC ir ANL kampas A bendras, prie to kampo esančios kraštinės proporcingos, taigi pagal antrąjį trikampių panašumo požymį trikampiai ABC ir ANL yra panašieji, todėl $NL : BC = AN : AB = 1 : 3$.

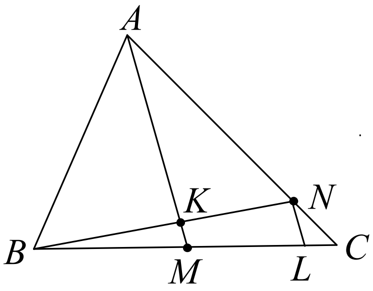


3 pav.

Ats.: $1 : 3$.

4. Taškas N yra trikampio ABC kraštinėje AC, jis tenkina sąlygą $AN:NC = 5$. Raskite kokiu santykiu trikampio pusiaukraštinė AM dalija atkarpą BN.

Sprendimas. Sakykime, kad trikampio pusiaukraštinė AM kerta atkarpą BN taške K (4 pav.). Per tašką N nubrėžiame tiesę $NL \parallel AM$, $L \in BC$. Pagal Talio teoremą $ML : LC = AN : NC = 5$, taigi $ML = \frac{5}{6}MC = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2}BC = \frac{5}{12}BC$, taigi $BL = BM + ML = \frac{1}{2}BC + \frac{5}{12}BC = \frac{11}{12}BC$. Iš čia gauname, kad $BL : LC = 11 : 1$. Todėl $BM : ML = 6 : 5$, kadangi $KM \parallel NL$, tai iš Talio teoremos turime, kad $BK : KN = BM : ML = 6 : 5$.

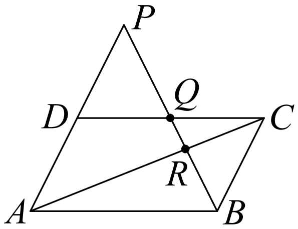


4 pav.

Ats.: $6 : 5$.

5. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinės AD tęsinyje už taško D pažymėtas taškas P, tiesė PB kerta lygiagretainio kraštinę CD taške Q, o įstrižainę AC – taške R. Raskite atkarpos RB ilgį, jei $PQ = 25$, $QR = 6$.

Sprendimas. Kadangi $AP \parallel BC$, tai trikampiai APR ir CBR yra panašieji (5 pav.), todėl $\frac{RB}{RP} = \frac{RC}{RA}$. Kadangi $AB \parallel QC$, tai trikampiai ARB ir CRQ yra panašieji, todėl $\frac{RC}{RA} = \frac{RQ}{RB}$. Iš gautųjų santykių išplaukia lygybė $\frac{RB}{RP} = \frac{RQ}{RB}$, todėl $RB^2 = RP \cdot RQ = (PQ + QR) \cdot RQ = 31 \cdot 6 = 186$, $RB = \sqrt{186}$.

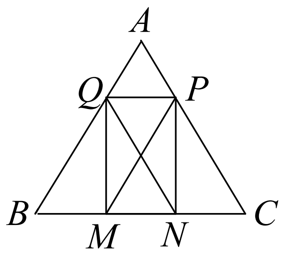


5 pav.

Ats.: $\sqrt{186}$.

6. Į trikampį ABC įbrėžtas lygiagretainis, kurio kraštinių ilgiai 3 ir 5, o vienos įstrižainės ilgis lygus 6. Lygiagretainio įstrižainės yra lygiagrečios su trikampio kraštinėmis AB ir AC, o jo trumpesnioji kraštinė yra trikampio kraštinėje BC. Raskite trikampio ABC kraštinių ilgius.

Sprendimas. Sakykime, kad lygiagretainio $MNPQ$ kraštinė MN yra trikampio ABC kraštinėje BC, viršūnės P ir Q yra atitinkamai kraštinėse AC ir AB (6 pav.). Pagal sąlygą $MN = 3$, $QM = 5$. Kadangi keturkampiai $BMPQ, MNPQ$ ir $NCPQ$ yra lygiagretainiai, tai $BM = MN = NC = PQ = 3$, taigi $BC = 3MN = 9$. Sakykime, kad lygiagretainio įstrižainė $QN = 6$. Kitą įstrižainę rasime trikampiams MNP ir QMN taikydami kosinusų teoremą: $MP^2 = MN^2 + PN^2 - 2MN \cdot PN \cos\angle MNP$. Kadangi $\angle MNP + \angle NMQ = 180^0$, tai $\cos\angle MNP = -\cos\angle NMQ = -\frac{MQ^2+MN^2-QN^2}{2MQ \cdot MN} = -\frac{5^2+3^2-6^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{1}{15}$. Tuomet $MP^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{15} = 32$, taigi $MP = 4\sqrt{2}$.. Kadangi $MP \parallel AB$, tai $\Delta CMP \sim \Delta CBA$, todėl $\frac{AB}{PM} = \frac{CB}{CM}$, $AB = \frac{CB \cdot PM}{CM} = \frac{9 \cdot 4\sqrt{2}}{9-3} = 6\sqrt{2}$. Analogiškai $\Delta BNQ \sim \Delta BCA$, todėl $\frac{AC}{QN} = \frac{BC}{BN}$, $\mathrm{AC} = \frac{BC \cdot QN}{BN} = \frac{9 \cdot 6}{9-3} = 9$.

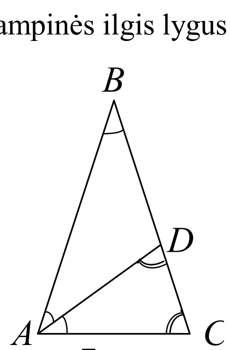


6 pav.

Ats.: $BC = 9$, $AB = 6\sqrt{2}$, $AC = 9$, $MP = 4\sqrt{2}$.

7. Lygiašonio trikampio kampas prie pagrindo lygus 72^0, kampo prie pagrindo pusiaukampinės ilgis lygus 1. Raskite trikampio šoninės kraštinės ilgį.

Sprendimas. Sakykime, kad lygiašoniame trikampyje ABC, $AB = BC$, $\angle BAC = \angle BCA = 72^0$, atkarpa $AD = 1$ jo kampo prie viršūnės pusiaukampinė (7 pav.). Kadangi $\angle DAC = \frac{1}{2}\angle BAC = 36^0$, tai $\angle ADC = 180^0 - 72^0 - 36^0 = 72^0 = \angle ACB$, tai trikampis ACD lygiašonis, $AC = AD = 1$. Kadangi $\angle ABD = 180^0 - 2\angle ACB = 36^0 = \angle BAD$, tai trikampis ABD irgi lygiašonis, todėl $AD = BD = 1$. Kadangi trikampiai ADC ir BAC yra panašieji, tai $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Žymėkime $AB = BC =$



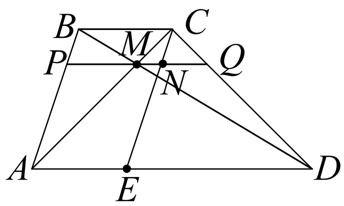
7 pav.

x, tuomet $CD = BC - BD = x - 1$, todėl $\frac{1}{x-1} = \frac{x}{1}$, iš čia $x^2 - x - 1 = 0$. Teigiamoji šios lygties šaknis $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, taigi trikampio šoninės kraštinės ilgis lygus $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ats.: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

8. Trapecijos pagrindų ilgiai yra 4 ir 12. Tiesė lygiagreti trapecijos pagrindams, eina per jos įstrižainių susikirtimo tašką. Raskite tos tiesės atkarpos, esančios tarp trapecijos šoninių kraštinių, ilgį.

Sprendimas. Sakykime, kad trapecijos $ABCD$ pagrindai $AD = 12, BC = 4$, trapecijos įstrižainės AC ir BD susikerta taške M, per tašką M nubrėžta lygiagreti su trapecijos pagrindais tiesė šonines kraštines AB ir CD kerta atitinkamai taškuose P ir Q (8 pav.). Kadangi tiesės AD ir BC yra lygiagrečios, tai trikampiai AMD ir CMB yra panašieji, todėl $\frac{MA}{MC} = \frac{AD}{CB} = \frac{12}{4} = 3$. Iš čia išplaukia lygybė $\frac{AC}{MC} = 4$. Iš Talio teoremos išplaukia, kad $\frac{AP}{PB} = \frac{DQ}{QC} = \frac{AM}{MC} = 3$, o $\frac{CD}{CQ} = 4$. Per trapecijos viršūnę C nubrėžiame tiesę, lygiagrečią su šonine kraštine AB, kuri pagrindą AD kerta taške E, o tiesę $PQ -$ taške N. Keturkampis ACE yra lygiagretainis, todėl $AE = BC = PN = 4$, $ED = 12 - 4 = 8$. Iš trikampių ECD ir NCQ panašumo gauname, kad $\frac{ED}{NQ} = \frac{CD}{CQ} = 4$. Iš čia $NQ = \frac{ED}{4} = 2$, todėl $PQ = NP + NQ = 4 + 2 = 6$.

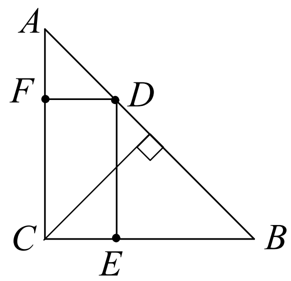


8 pav.

Ats.: 6.

9. Stačiojo trikampio ABC įžambinėje AB yra taškas D, iš jo nubrėžti statmenys DE ir DF atitinkamai į statinius BC ir AC. Trikampio ADF plotas lygus 9, o trikampio BDE plotas lygus 16. Raskite trikampio ABC plotą.

Sprendimas. Kadangi $AC \parallel DE$, tai trikampiai ACB ir DEB yra panašieji (9 pav.). Jei trikampio ABC plotas lygus S, tai pagal panašiųjų trikampių plotų santykio savybę $S_{\Delta BED} : S = DE^2 : AC^2$, taigi $DE = \sqrt{\frac{S_{\Delta BED}}{S}} AC$. Analogiškai iš panašiųjų trikampių ABC ir ADF panašumo turime $S_{\Delta ADF} : S = AF^2 : AC^2$, taigi $AF = \sqrt{\frac{S_{\Delta ADF}}{S}} AC$. Kadangi $DE + AF = FC + AF = AC$, tai iš gautųjų lygybių išplaukia, kad $\sqrt{\frac{S_{\Delta BED}}{S}} AC + \sqrt{\frac{S_{\Delta ADF}}{S}} AC = AC$. Taigi $\frac{4}{\sqrt{S}} + \frac{3}{\sqrt{S}} = 1$, $\sqrt{S} = 7$, $S = 49$.



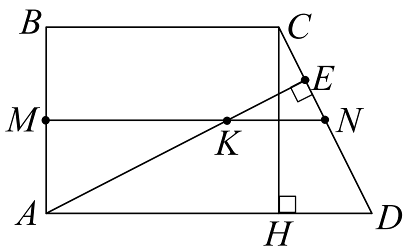
9 pav.

Ats.: 49.

10. Trapecijos $ABCD$ kampai A ir B yra statieji, pagrindų ilgiai $AD = 14, BC = 10$, taškai M ir N yra šoninių kraštinių AB ir CD vidurio taškai. Iš viršūnės A nuleistas statmuo kraštinei CD kerta atkarpą MN taške K ir $MK{:}KN = 2{:}1$. Raskite trapecijos $ABCD$ plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad iš viršūnės A nuleistas statmuo kraštinei CD kerta ją taške E, o atkarpa CH, $H \in AD$ yra trapecijos aukštinė (10 pav.). Pagal sąlygą vidurinė linija $MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = 12$, todėl $MK = 8$, $KN = 4$. Keturkampis $ABCH$ yra stačiakampis, todėl $AH = BC = 10$, todėl $HD = AD - AH = 4$. Kadangi $MN \parallel AD$, tai statieji trikampiai AED ir KEN yra panašieji, todėl $KN : AD = EN : ED$, taigi $EN = \frac{KN \cdot ED}{AD} = \frac{4E}{14} = \frac{2}{7}ED$. Kadangi $ND = \frac{1}{2}CD$, tai $ED = EN + ND = \frac{2}{7}ED + \frac{1}{2}CD$, tai

$ED - \frac{2}{7}ED = \frac{1}{2}CD,$ todėl $ED = \frac{7}{10}CD.$ Statieji trikampiai AED ir CHD yra panašieji, todėl $ED : AD = HD : CD,$ iš čia gauname, kad $CD = \frac{HD \cdot AD}{ED} = \frac{4 \cdot 14}{ED} = \frac{56}{ED}$. Įrašę $ED = \frac{7}{10}CD,$ gauname, kad $CD = \frac{56}{\frac{7}{10}CD},$ todėl $CD^2 = 80.$ Iš stačiojo trikampio CHD randame trapecijos aukštinę $CH = \sqrt{CD^2 - DH^2} = \sqrt{80 - 16} = 8$ ir trapecijos plotą $S = \frac{10+1}{2} \cdot 8 = 96.$



10 pav.

Ats.: 96.

TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Pirmas žygeivis iš A į B nueitų per 132 minutes, o antras žygeivis iš B į A nueitų per 110 minučių. Po kelių minučių pirmas žygeivis susitiktų su antru žygeiviu, jei pastarasis išeitų 22 minutėmis vėliau už pirmą.

Sprendimas. Laiką (min), kuriam praėjus pirmas žygeivis susitiks su antru žygeiviu, pažymėkime t. Pirmo žygeivio greitį (km/min) pažymėkime v_1, o antro v_2. Pagal uždavinio sąlygą,

$$v_1 t + v_2(t-22) = 132v_1 = 110v_2.$$

Iš antros lygybės išplaukia, kad

$$v_2 = \frac{132}{110}v_1 = 1{,}2v_1.$$

Todėl

$$v_1 t + v_2(t-22) = 132v_1 \Rightarrow t + 1{,}2(t-22) = 132 \Rightarrow 2{,}2t = 132 + 1{,}2\cdot 22 \Rightarrow t = 72.$$

Ats.: 72 min.

2. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 8x^2 + 2y^2 - 17, \\ x^2 = -4y(x+y). \end{cases}$$

Sprendimas.

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 8x^2 + 2y^2 - 17, \\ x^2 = -4y(x+y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^4 - 8x^2) + (y^4 - 2y^2) = -17, \\ x^2 + 4xy + 4y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2-4)^2 + (y^2-1)^2 = 0, \\ (x+2y)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \text{ ir } y^2 - 1 = 0, \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2,\ y = \pm 1, \\ x = -2y \end{cases} \Rightarrow x = -2,\ y = 1 \text{ arba } x = 2,\ y = -1.$$

Ats.: (–2; 1), (2; –1).

3. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - x + 3y = 4. \end{cases}$$

Sprendimas. Taikydami keitinį $y = tx,$ gausime:

$$\begin{cases} 2x^2 - x\cdot tx - (tx)^2 = 0, \\ x^2 + (tx)^2 - x + 3tx = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (t^2 + t - 2)x^2 = 0, \\ (t^2+1)x^2 + (3t-1)x - 4 = 0. \end{cases}$$

Aišku, kad $x \neq 0.$ Todėl

$$\begin{cases} t^2 + t - 2 = 0, \\ (t^2+1)x^2 + (3t-1)x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -2 \text{ arba } t = 1, \\ (t^2+1)x^2 + (3t-1)x - 4 = 0. \end{cases}$$

Jei $t = -2,$ tai

$$5x^2 - 7x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{129}}{10} \Rightarrow x = \frac{7 - \sqrt{129}}{10} \text{ arba } x = \frac{7 + \sqrt{129}}{10}.$$

Šiuo atveju gauname du lygčių sistemos sprendinius:

$$\left(\frac{7-\sqrt{129}}{10};\ \frac{-7+\sqrt{129}}{5}\right) \text{ ir } \left(\frac{7+\sqrt{129}}{10};\ \frac{-7-\sqrt{129}}{5}\right).$$

Jei $t = 1$, tai

$$2x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ arba } x = 1.$$

Šiuo atveju gauname taip pat du lygčių sistemos sprendinius: (–2; –2) ir (1; 1).

Ats.: $\left(\frac{7-\sqrt{129}}{10};\ \frac{-7+\sqrt{129}}{5}\right)$, $\left(\frac{7+\sqrt{129}}{10};\ \frac{-7-\sqrt{129}}{5}\right)$, (–2; –2), (1; 1).

4. Apskaičiuokite $\frac{x^3}{y^3}$, jei $2(x^2 + y^2) = y(4y - 3x)$ ir $3(y^2 - x^2) = x(7y - 5x)$.

Sprendimas. Pažymėkime $t = \frac{x}{y}$. Tada $x = ty$, $y \neq 0$, o spręsdami lygčių sistemą gausime:

$$\begin{cases} 2((ty)^2 + y^2) = y(4y - 3ty), \\ 3(y^2 - (ty)^2) = ty(7y - 5ty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(t^2 + 1)y^2 = y^2(4 - 3t), \\ 3(1 - t^2)y^2 = ty^2(7 - 5t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(t^2 + 1) = 4 - 3t, \\ 3(1 - t^2) = t(7 - 5t) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2t^2 + 3t - 2 = 0, \\ 2t^2 - 7t + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 10t - 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Vadinasi, $\frac{x^3}{y^3} = t^3 = \frac{1}{8}$.

Ats.: $\frac{1}{8}$.

5. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + \dfrac{yz}{y+z} = 2, \\ y + \dfrac{zx}{z+x} = 2 \\ z + \dfrac{xy}{x+y} = 1. \end{cases}$$

Sprendimas. Aišku, kad $y + z \neq 0$, $z + x \neq 0$ ir $x + y \neq 0$. Tada

$$\begin{cases} x(y+z) + yz = 2(y+z), \\ y(z+x) + zx = 2(z+x), \\ z(x+y) + xy = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy + yz + zx = 2y + 2z, \\ xy + yz + zx = 2z + 2x, \\ xy + yz + zx = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 2z = 2z + 2x, \\ 2y + 2z = x + y, \\ xy + yz + zx = x + y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x, \\ 2z = x - y, \\ xy + yz + zx = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x, \\ z = 0, \\ x^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow x = 2,\ y = 2,\ z = 0.$$

Ats.: (2; 2; 0).

6. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^3 + y^3 + z^3 = x^4 + y^4 + z^4. \end{cases}$$

Sprendimas.

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^3 + y^3 + z^3 = x^4 + y^4 + z^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3, \\ (x^3 + y^3 + z^3) - 3 = (x^4 + y^4 + z^4) - (x + y + z) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=3, \\ (x^3-1)+(y^3-1)+(z^3-1)=(x^4-x)+(y^4-y)+(z^4-z)-(x+y+z) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=3, \\ (x^3-1)(x-1)+(y^3-1)(y-1)+(z^3-1)(z-1)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=3, \\ (x^3-1)(x-1)=0,\ (y^3-1)(y-1)=0,\ (z^3-1)(z-1)=0 \text{ (nes } (a^3-1)(a-1)\geq 0,\ a\in \mathbf{R}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=3, \\ x=y=z=1 \end{cases} \Rightarrow x=y=z=1.$$

Ats.:(1; 1; 1).

7. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{x}{yz}+\dfrac{y}{zx}+\dfrac{z}{xy}=\dfrac{3}{xyz}, \\ xy+yz+zx=3. \end{cases}$$

Sprendimas. Aišku, kad $xyz \neq 0$. Tada

$$\begin{cases} \dfrac{x}{yz}+\dfrac{y}{zx}+\dfrac{z}{xy}=\dfrac{3}{xyz}, \\ xy+yz+zx=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=3, \\ xy+yz+zx=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)=0, \\ xy+yz+zx=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx=0, \\ xy+yz+zx=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)=0, \\ xy+yz+zx=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0, \\ xy+yz+zx=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=0,\ y-z=0,\ z-x=0, \\ xy+yz+zx=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=y=x, \\ xy+yz+zx=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=y=x, \\ x^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=y=x, \\ x=-1 \text{ arba } x=1 \end{cases} \Rightarrow z=y=x=-1 \text{ arba } z=y=x=1.$$

Ats.: (–1; –1; –1), (1; 1; 1).

8. Raskite visus realiųjų skaičių trejetus (a; b; c), kurių kiekvienas skaičius yra lygus kitų dviejų skaičių skirtumo kvadratui.

Sprendimas. Pagal uždavinio sąlygą,

$$a=(b-c)^2,\ \ b=(c-a)^2 \text{ ir } c=(a-b)^2.$$

Taigi reikia išspręsti trijų lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} a=(b-c)^2, \\ b=(c-a)^2, \\ c=(a-b)^2. \end{cases} \tag{1}$$

Aišku, kad $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$, o trejetas (0; 0; 0) yra šios sistemos sprendinys.

Aiškinkimės, ar lygčių sistema turi daugiau sprendinių:

$$\begin{cases} a=(b-c)^2, \\ b=(c-a)^2, \\ c=(a-b)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-c=(b-c)^2-(a-b)^2, \\ b-c=(c-a)^2-(a-b)^2, \\ c=(a-b)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-c=(2b-c-a)(a-c), \\ b-c=(c-2a+b)(c-b), \\ c=(a-b)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a-c)(1+a-2b+c)=0, \\ (b-c)(1-2a+b+c)=0, \\ c=(a-b)^2. \end{cases}$$

Jei būtų $a-c=0,$ tai gautume, kad $a=c,$ $b=0$ ir (iš trečios lygties) $c=c^2,$ $c>0.$ Vadinasi, trejetas (1; 0; 1) yra (1) sistemos sprendinys.

Jei būtų $b-c=0,$ tai gautume, kad $b=c,$ $a=0$ ir (iš trečios lygties) $c=c^2,$ $c>0.$ Iš čia išplaukia, kad trejetas (0; 1; 1) yra (1) sistemos sprendinys.

Belieka išnagrinėti atvejį, kai $a-c\neq 0$ ir $b-c\neq 0$:

$$\begin{cases} 1+a-2b+c=0, \\ 1-2a+b+c=0, \\ c=(a-b)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+a-2b+c=0, \\ (1-2a+b+c)-(1+a-2b+c)=0, \\ c=(a-b)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+a-2b+c=0, \\ -3a+3b=0, \\ c=(a-b)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow b=a, c=0, a=1 \Rightarrow (1;1;0)$ yra (1) sistemos sprendinys.

Ats.: (0; 0; 0), (1; 0; 1), (0; 1; 1), (1; 1; 0).

9. Raskite visas realiųjų skaičių *x* ir *y* poras (*x*; *y*), tenkinančias lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+[y]+\{x\}=5{,}6\,, \\ [x]+y+\{y\}=5{,}2\,, \\ \{x\}+2\{y\}=2; \end{cases}$$

čia $[a]$ yra sveikoji, o $\{a\}$ – trupmeninė skaičiaus *a* dalis.

Sprendimas. Iš pirmos lygties atėmę antrą lygtį, gauname, kad $2\{x\}-2\{y\}=0{,}4.$ Įrašę $\{x\}=0{,}2+\{y\}$ į trečią lygtį, gauname:

$$0{,}2+\{y\}+2\{y\}=2 \Rightarrow \{y\}=0{,}6.$$

Vadinasi, $\{x\}=0{,}8$ ir

$$\begin{cases} [x]+[y]+2\cdot 0{,}8=5{,}6, \\ [x]+[y]+2\cdot 0{,}6=5{,}2 \end{cases} \Rightarrow [x]+[y]=4.$$

Jei $[x]=k,$ $k\in \mathbf{Z},$ tai $[y]=4-k.$ O tada $x=k+0{,}8,$ $y=(4-k)+0{,}6=4{,}6-k;$ $k\in \mathbf{Z}.$

Ats.: $(0{,}8+k; 4{,}6-k),$ $k\in \mathbf{Z}.$

10. Raskite visus lygčių sistemos

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=1{,}2\,, \\ \{x\}+y+[z]=3{,}4\,, \\ [x]+\{y\}+z=4{,}6 \end{cases}$$

sprendinius (*x*; *y*; *z*), jei *x* > 0, *y* > 0, *z* > 0.

Sprendimas. Sudėkime visas tris lygtis. Gausime:

$$2x+2y+2z=9{,}2 \Rightarrow x+y+z=4{,}6.$$

Todėl:

1) $(x+y+z)-(x+[y]+\{z\})=4{,}6-1{,}2 \Rightarrow \{y\}+[z]=3{,}4 \Rightarrow \{y\}=0{,}4, [z]=3;$

2) $(x+y+z)-(\{x\}+y+[z])=1{,}2 \Rightarrow [x]+\{z\}=1{,}2 \Rightarrow \{z\}=0{,}2, [x]=1;$

3) $(x+y+z)-([x]+\{y\}+z)=0 \Rightarrow \{x\}+[y]=0 \Rightarrow \{x\}=0,\ [y]=0.$

Vadinasi, $x=1,$ $y=0{,}4,$ $z=3{,}2.$

Ats.: (1; 0,4; 3,2).

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Naudodamiesi derinių skaičiaus formule $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$, kai $m = 0,1,2,\ldots,n$, įrodykite Paskalio lygybę $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$.

Įrodymas.

$$C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m = \frac{(n-1)!}{(m-1)!\cdot(n-m)!} + \frac{(n-1)!}{m!\cdot(n-1-m)!} = \frac{(n-1)!}{(m-1)!\cdot(n-m-1)!}\left(\frac{1}{n-m} + \frac{1}{m}\right) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(m-1)!\cdot(n-m-1)!}\cdot\frac{n}{(n-m)\cdot m} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!} = C_n^m .$$

2. Įrodykite binominių koeficientų savybę $C_n^m \cdot C_m^p = C_n^p \cdot C_{n-p}^{m-p}$, čia $p \le m \le n$.

Įrodymas.

$$C_n^p \cdot C_{n-p}^{m-p} = \frac{n!}{p!\cdot(n-p)!}\cdot\frac{(n-p)!}{(m-p)!\cdot(n-m)!} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}\cdot\frac{m!}{p!\cdot(m-p)!} = C_n^m \cdot C_m^p .$$

3. Matematinės indukcijos metodu įrodykite nelygybę

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \qquad (1)$$

kai $n \ge 2$.

Įrodymas. Kai $n = 2$, (1) nelygybė galioja, t. y. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$, nes $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} \Leftrightarrow$ $\sqrt{2} + 1 > 2 \Leftrightarrow \sqrt{2} > 1$.

Darome indukcinę prielaidą, kad (1) nelygybė galioja su $n = k$, t. y. tegu teisinga nelygybė $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$. Įrodysime, kad tuomet (1) nelygybė galioja su $n = k+1$, t. y.

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}. \qquad (2)$$

Pasinaudoję indukcine prielaida gausime: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Belieka įsitikinti, kad $\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$ $(k \ge 2)$. O ši nelygybė teisinga, nes:

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{k(k+1)}+1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} \Leftrightarrow \sqrt{k(k+1)} > k \Leftrightarrow k(k+1) > k^2 \Leftrightarrow k^2 + k > k^2 \Leftrightarrow k > 1.$$

Taigi (2) nelygybė galioja.

Remdamiesi matematinės indukcijos principu galime teigti, kad (1) nelygybė teisinga su visais $n \ge 2$.

4. Tegu n – lyginis natūralusis skaičius ($n = 2k$). Nustatykite, kuris iš binominių koeficientų C_n^m, $m = 0,1,2,\ldots,n$, yra didžiausias.

Sprendimas. Nagrinėkime santykį $\frac{C_n^{m+1}}{C_n^m} = \frac{n-m}{m+1}$. Nustatykime su kokiomis m reikšmėmis šis santykis yra didesnis už 1 ir kada jis mažesnis negu 1: $\frac{n-m}{m+1} > 1 \Leftrightarrow m < \frac{n-1}{2}$; $\frac{n-m}{m+1} < 1 \Leftrightarrow m > \frac{n-1}{2}$.

Darome išvadą: kai $m<\frac{n-1}{2}$, tai $C_n^{m+1}>C_m^m$, o kai $m>\frac{n-1}{2}$, tuomet $C_n^{m+1}<C_m^m$. Vadinasi, m didėjant iki $\frac{n-1}{2}$ binominiai koeficientai didėja, o su tolesnėmis m reikšmėmis – mažėja.

Kadangi $n=2k$ ir $\frac{n-1}{2}=\frac{2k-1}{2}=k-\frac{1}{2}\Rightarrow k-1<k-\frac{1}{2}<k$, tai $C_{2k}^{m+1}>C_{2k}^m$ su $m=0,1,2,\ldots,k-1$ ir $C_{2k}^{m+1}<C_{2k}^m$ su $m=k,k+1,\ldots,2k$. Kai $m=k-1$, tai $C_{2k}^k>C_{2k}^{k-1}$, o kai $m=k$, tai $C_{2k}^k>C_{2k}^{k+1}$. Taigi didžiausias binominis koeficientas yra C_{2k}^k. *Ats.*: C_{2k}^k.

5. Naudodamiesi (10) ir (11) formulėmis apskaičiuokite sumą $C_n^0+C_n^2+C_n^4+...+C_n^{n-2}+C_n^n$, kai n – lyginis natūralusis skaičius.

Sprendimas. Pažymėkime $S_l=C_n^0+C_n^2+C_n^4+...+C_n^{n-2}+C_n^n$, $S_n=C_n^1+C_n^3+C_n^5+...+C_n^{n-3}+C_n^{n-1}$. Tuomet pagal (10) lygybę $S_l+S_n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+...+C_n^{n-2}+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$. Kita vertus, iš (11) lygybės išplaukia, kad $S_l-S_n=0\Rightarrow S_n=S_l$. Tada $2S_l=2^n\Rightarrow S_l=2^{n-1}$. *Ats.*: 2^{n-1}.

6. Raskite natūralųjį skaičių *n*, su kuriuo $C_{2n}^{2n-1}\cdot C_{2n+1}^{2n}=20$.

Sprendimas. $C_{2n}^{2n-1}\cdot C_{2n+1}^{2n}=20\Rightarrow\frac{(2n)!}{(2n-1)!\cdot 1!}\cdot\frac{(2n+1)!}{(2n)!\cdot 1!}=20\Rightarrow 2n(2n+1)=20\Rightarrow 2n^2+n-10=0\Rightarrow$

$\Rightarrow n_{1,2}=2;-2{,}5\Rightarrow n=2$. *Ats.*: 2.

7. Binomo $\left(a\sqrt{a}+\frac{1}{a^4}\right)^n$ skleidinio trečiojo nario koeficientas yra 44 didesnis negu antrojo nario koeficientas. Raskite nario, į kurį neįeina kintamasis *a*, koeficientą.

Sprendimas. Pagal sąlygą $C_n^2-C_n^1=44\Rightarrow n^2-3n-88=0\Rightarrow n_{1,2}=11;-8\Rightarrow n=11$. Vadinasi, turime rasti skleidinio $\left(a\sqrt{a}+\frac{1}{a^4}\right)^{11}$ nario, į kurį neįeina kintamasis *a*, koeficientą. Tarkime, kad ieškomasis skleidinio narys yra $T_{m+1}=C_{11}^m(a\sqrt{a})^{11-m}(\frac{1}{a^4})^m=C_{11}^m\cdot a^{\frac{3}{2}(11-m)-4m}$. Raskime *m*, su kuriuo $\frac{3}{2}(11-m)-4m=0$. Gausime: $\frac{1}{2}(33-11m)=0\Rightarrow\frac{11}{2}(3-m)=0\Rightarrow m=3$. Vadinasi, narys be kintamojo *a* yra ketvirtasis skleidinio narys, o jo koeficientas yra $C_{11}^3=\frac{11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3}=165$. *Ats.*: 165.

8. Kelintas binomo $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}+\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$ skleidinio narys turi daugiklį a^7?

Sprendimas. Tegu ieškomasis skleidinio narys yra

$$T_{m+1}=C_{12}^m\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}\right)^{12-m}\left(\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^m=C_{12}^m\cdot\frac{3^{12-2m}}{2^{24-3m}}\cdot a^{\frac{2}{3}(12-m)+\frac{m}{2}}.$$

Lygties $\frac{2}{3}(12-m)+\frac{m}{2}=7$ sprendinys yra $m=6$. Taigi daugiklį a^7 turi septintasis skleidinio narys.

Ats.: Septintasis.

9. Raskite binomo $(3-\sqrt[5]{3})^{15}$ skleidinio racionaliuosius narius.

Sprendimas. Kiekvienas skleidinio narys išreiškiamas formule

$$T_{m+1}=C_{15}^m\cdot 3^{15-m}\cdot(-\sqrt[5]{3})^m,\ m=0,1,\ldots,15.$$

Patikrinę $m = 0,1,\ldots,15$ matome, kad racionalieji nariai yra tik šie: kai $m = 0$, $T_1 = 3^{15}$; kai $m = 5$, $T_6 = C_{15}^5 \cdot 3^{10} \cdot (-3) = -C_{15}^5 \cdot 3^{11}$; kai $m = 10$, $T_{11} = C_{15}^{10} \cdot 3^5 \cdot 3^2 = C_{15}^5 \cdot 3^7$; kai $m = 15$, $T_{16} = -C_{15}^{15} \cdot 3^0 \cdot 3^3 = -27$.

Ats.: $T_1 = 3^{15}$, $T_6 = -C_{15}^5 \cdot 3^{11}$, $T_{11} = C_{15}^5 \cdot 3^7$, $T_{16} = -27$.

10. Raskite reiškinio $R(x) = (1+x)^3 + (1+x)^4 + (1+x)^5 + \ldots + (1+x)^{15}$ nario su daugikliu x^3 koeficientą.

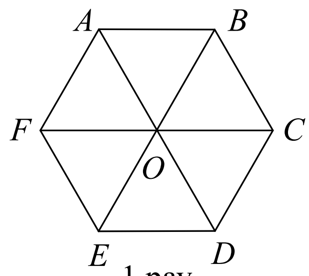
Sprendimas. Pirmiau pertvarkykime reiškinį naudodamiesi geometrinės progresijos narių sumavimo formule. Gausime, kad $R(x) = \frac{(1+x)^{16}}{x} - \frac{(1+x)^3}{x}$. Narys su x^3 bus tik pirmojo dėmens skleidinyje, tai – skleidinio $(1+x)^{16}$ narys su x^4, kurio koeficientas yra $C_{16}^4 = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1820$.

Ats.: 1820.

PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. $ABCDEF -$ taisyklingasis šešiakampis. Vektorius $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{BD}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AF}$.

Sprendimas. Sakykime, kad taškas O yra taisyklingojo šešiakampio $ABCDEF$ centras (1 pav.). kadangi keturkampiai $ABOF, ABCO$ ir $BCDO$ yra rombai, tai pagal lygiagretainio taisyklę $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BO} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}\right) + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}.$

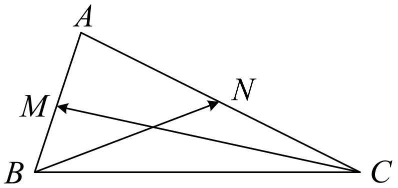


1 pav.

Atsakymas: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}$.

2. Taškai M ir N yra trikampio ABC kraštinių AB ir AC vidurio taškai. Vektorius $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{MN}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{BN}$ ir $\overrightarrow{CM}$.

Sprendimas. Taikydami vektorių atimties taisyklę (2 pav.), gauname lygybes $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$ Pirmosios lygybės abi puses dauginame iš dviejų ir sudedame su antrąja lygybe: $2\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB},$ taigi $\overrightarrow{AB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CM}$. Analogiškai antrosios lygybės abi puses padauginę iš dviejų ir sudėję su pirmąja, turime $\overrightarrow{BN} + 2\overrightarrow{CM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC},$ todėl $\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{4}{3}\overrightarrow{CM}.$



2 pav.

Kadangi atkarpa MN yra trikampio vidurinė linija, tai $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{CM})$.

Atsakymas: $\overrightarrow{AB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{4}{3}\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{CM}\right)$

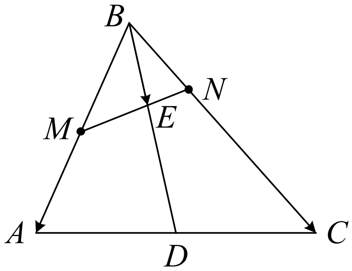
3. Nenuliniai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra nekolinearieji. Raskite tokias x ir y reikšmes, kad vektoriai $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ ir $\vec{d} = (y+1)\vec{a} + (2-x)\vec{b}$ būtų lygūs.

Sprendimas. Kadangi $\vec{a} + y\vec{b} = (y+1)\vec{a} + (2-x)\vec{b}$, tai atskliaudę ir perkėlę narius iš vienos lygybės pusės į kitą, gauname, kad $(x - y - 1)\vec{a} = (2 - x - y)\vec{b}$. Jei $2 - x - y \neq 0$, tai padaliję iš jo kaip ir 1 pavyzdyje gautume, kad vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearieji. Taigi $2 - x - y = 0$, todėl $(x - y - 1)\vec{a} = \vec{0}$. Kadangi vektorius $\vec{a}$ nenulinis, tai pastaroji lygybė teisinga tik kai $x - y - 1 = 0$. Iš lygčių $2 - x - y = 0$, $x - y - 1 = 0$ sistemos gauname $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.

Atsakymas: $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.

4. Taškas M yra trikampio ABC kraštinėje AB, taškas N yra jo kraštinėje BC ir $AM : MB = 3 : 4$, $CN : NB = 5 : 2$. Kokiu santykiu atkarpa MN dalija trikampio pusiaukraštinę BD?

Sprendimas. Sakykime, kad atkarpa MN ir trikampio ABC pusiaukraštinė BD susikerta taške E (3 pav.). Vektorių $\overrightarrow{BE}$ dviem būdais išreikškime nekolineariaisiais vektoriais $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{BC}$. Vektoriai $\overrightarrow{BE}$ ir $\overrightarrow{BD}$ yra kolinearieji, todėl yra tos skaičius x, kad $\overrightarrow{BE} = x\overrightarrow{BD}$. Kadangi taškas D yra atkarpos AC vidurio taškas, tai pagal 2 pavyzdžio rezultatą $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$. Taigi turime vektoriaus $\overrightarrow{BE}$ išraišką: $\overrightarrow{BE} = \frac{x}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{x}{2}\overrightarrow{BC}$. Kita vertus, taškai M, E ir N yra vienoje tiesėje, taigi $\overrightarrow{ME} \parallel \overrightarrow{MN}$, todėl yra toks skaičius y, kad $\overrightarrow{ME} = y\overrightarrow{MN}$. Kadangi $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \frac{2}{7}\overrightarrow{BC} - \frac{4}{7}\overrightarrow{BA}$, tai $\overrightarrow{ME} = \frac{2y}{7}\overrightarrow{BC} - \frac{4y}{7}\overrightarrow{BA}$, o $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{ME} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BA} + \frac{2y}{7}\overrightarrow{BC} - \frac{4y}{7}\overrightarrow{BA} = \frac{4-4y}{7}\overrightarrow{BA} + \frac{2y}{7}\overrightarrow{BC}$. Gautosios dvi vektoriaus $\overrightarrow{BE}$ išraiškos nekolineariaisiais vektoriais $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{BC}$ turi sutapti, todėl turi būti teisingos lygybės $\frac{x}{2} = \frac{4-4y}{7}$, $\frac{x}{2} = \frac{2y}{7}$. Iš čia randame $x = \frac{8}{21}$, $y = \frac{2}{3}$. Gavome, kad $\overrightarrow{BE} = \frac{8}{21}\overrightarrow{BD}$, taigi $BE : ED = 8 : 13$.

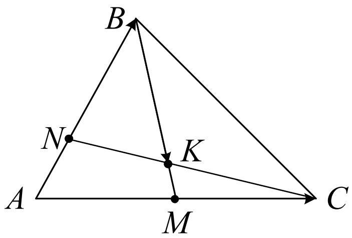


3 pav.

Atsakymas: 8 :13.

5. Trikampio ABC kraštinėje AB yra taškas N, o kraštinėje AC – taškas M taip, kad $AN:NB = 2:5$, $AM:MC = 3:4$. Atkarpos BM ir CN susikerta taške K. Raskite santykius $BK:KM$ ir $CK:KN$.

Sprendimas. Kadangi $\overrightarrow{BK} \parallel \overrightarrow{BM}$ (4 pav.), tai yra toks skaičius x, kad $\overrightarrow{BK} = x\overrightarrow{BM}$. Kadangi $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, tai $\overrightarrow{BK} = \frac{3x}{7}\overrightarrow{AC} - x\overrightarrow{AB}$. Analogiškai $\overrightarrow{CK} \parallel \overrightarrow{CN}$, tai yra toks skaičius y, kad $\overrightarrow{CK} = y\overrightarrow{CN}$. Kadangi $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, tai $\overrightarrow{CK} = \frac{2y}{7}\overrightarrow{AB} - y\overrightarrow{AC}$. Tuomet $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK} = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) + \left(\frac{2y}{7}\overrightarrow{AB} - y\overrightarrow{AC}\right) = \left(\frac{2y}{7} - 1\right)\overrightarrow{AB} + (1-y)\overrightarrow{AC}$. Dvi gautosios vektoriaus $\overrightarrow{BK}$ išraiškos nekolineariaisiais vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ turi sutapti, taigi turi būti teisingos lygybės $-x = \frac{2y}{7} - 1$, $\frac{3x}{7} = 1 - y$. Sprendžiame šią sistemą ir gauname, kad $x = \frac{35}{43}$, $y = \frac{28}{43}$. Taigi $BK:KM = 35 : 8$, $CK:KN = 28 : 15$.



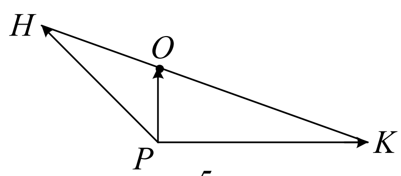
4 pav.

Atsakymas: $BK:KM = 35 : 8$, $CK:KN = 28 : 15$.

6. Trikampio PKH kraštinių PK ir PH ilgiai $PH = 2\sqrt{2}$, $PK = 2$, kampas HPK lygus 135^0. Kraštinėje KH yra pažymėtas toks taškas O, kad $HO : OK = 1 : 3$. Raskite atkarpos PO ilgį.

Sprendimas. Kadangi $\overrightarrow{PO} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{PK} + 3\overrightarrow{PH}\right)$, tai $\overrightarrow{PO}^2 = \frac{1}{16}(\overrightarrow{PK}^2 + 6\overrightarrow{PK} \cdot \overrightarrow{PH} + 9\overrightarrow{PH}^2)$ (5 pav.). Iš skaliarinės sandaugos savybių išplaukia, kad $\overrightarrow{PK}^2 = \left|\overrightarrow{PK}\right|^2 = 4$, $\overrightarrow{PH}^2 = \left|\overrightarrow{PH}\right|^2 = 8$, $\overrightarrow{PK} \cdot \overrightarrow{PH} = \left|\overrightarrow{PK}\right| \cdot$

$\left|\overrightarrow{PH}\right| \cdot \cos\angle\text{KPH} = 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4$. Taigi $\overrightarrow{PO}^2 = \frac{1}{16}(4 + 6 \cdot (-4) + 9 \cdot 8) = \frac{13}{4}$, o $PO = \sqrt{\overrightarrow{PO}^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

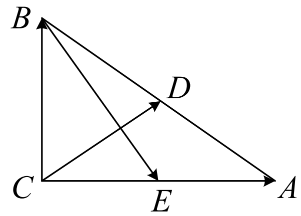


5 pav.

Atsakymas: $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

7. Stačiojo trikampio ABC, $\angle\text{C} = 90^0$, smailiojo kampo A kosinusas lygus $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Raskite kampą tarp šio trikampio pusiaukraštinių CD ir BE.

Sprendimas. Sakykime, kad trikampio statinių ilgiai $CB = a$, $CA = b$, o įžambinėsa ilgis yra c. Išreikškime vektorius $\overrightarrow{CD}$ ir $\overrightarrow{BE}$ vektoriais $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$ ir $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$ (6 pav.): $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$, $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{b} - 2\vec{a})$. Kampas tarp pusiaukraštinių CD ir BE yra lygus kampui tarp vektorių $\overrightarrow{CD}$ ir $\overrightarrow{BE}$ (arba jam gretutiniam kampui, jei kampas tarp vektorių $\overrightarrow{CD}$ ir $\overrightarrow{BE}$ yra bukasis). Taigi iekomąjį kampą α rasime pagal kampo tarp vektorių formulę $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{CD}| \cdot |\overrightarrow{BE}|}$.



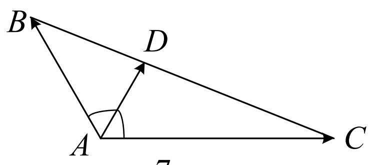
6 pav.

Skaičiuojame skaliarinę sandaugą $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}(\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b})$. Kadangi vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra statmenieji, tai $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, o $\vec{a}^2 = a^2$, $\vec{b}^2 = b^2$, tai $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}(-2a^2 + b^2)$. Iš sąlygos $\cos\angle\text{A} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ turime $\frac{b}{c} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\frac{b^2}{c^2} = \frac{2}{3}$, $3b^2 = 2(a^2 + b^2)$, taigi trikampio statiniams teisinga lygybė $b^2 = 2a^2$. Tuomet $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}(-2a^2 + b^2) = 0$, taigi pusiaukraštinės CD ir BE yra statmenos.

Atsakymas: 90^0.

8. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB = 3$, $AC = 5$, kampo BAC didumas yra 120^0. Raskite jo pusiaukampinės AD ilgį.

Sprendimas. Pagal trikampio pusiaukampinės savybę turime, kad $BD : DC = AB : AC = 3 : 5$ (7 pav.). Tuomet $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{8}(5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC})$. Keldami abi lygybės puses kvadratu, gauname, kad $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{1}{64}(25\overrightarrow{AB}^2 + 30\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 9\overrightarrow{AC}^2)$. Kadangi $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 9$, $\overrightarrow{AC}^2 = AC^2 = 25$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\angle\text{BAC} = 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{2}$, tai $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{1}{64}(25 \cdot 9 - 30 \cdot \frac{15}{2} + 9 \cdot 25) = \frac{225}{64}$. Taigi $AD = \sqrt{\overrightarrow{AD}^2} = \frac{15}{8}$.



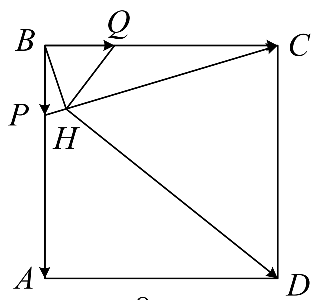
7 pav.

Atdsakymas: $\frac{15}{8}$.

9. Kvadrato $ABCD$ kraštinėse AB ir BC yra taškai $P \in AB$ ir $Q \in BC$ tokie, kad $BP = BQ$. Nubrėžta trikampio BPC aukštinė BH. Raskite kampo QHD didumą.

Sprendimas. Sakykime, kad kvadrato kraštinės ilgis lygus a, $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ (8 pav.), o $\overrightarrow{BP} = l\vec{a}$, $\overrightarrow{BQ} = l\vec{b}$, taigi $BP = BQ = la$. Taikydami 4 pavyzdžio rezultatą randame, kad $\overrightarrow{BH} =$

$\frac{1}{a^2+l^2a^2}\left(a^2(l\vec{a})+l^2a^2\vec{b}\right)$. Tuomet $\overrightarrow{HQ}=\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{BH}=l\vec{b}-\frac{1}{a^2+l^2a^2}\left(a^2l\vec{a}+l^2a^2\vec{b}\right)=\frac{1}{a^2+l^2a^2}\left(-a^2l\vec{a}+(la^2-l^2a^2+l^3a^2)\vec{b}\right)=\frac{a^2}{a^2+l^2a^2}\left(-l\vec{a}+(l-l^2+l^3)\vec{b}\right)=\frac{1}{1+l^2}\left(-l\vec{a}+(l-l^2+l^3)\vec{b}\right)$, o $\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BH}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\frac{1}{a^2+l^2a^2}\left(a^2l\vec{a}+l^2a^2\vec{b}\right)=\frac{1}{a^2+l^2a^2}\left((a^2+l^2a^2-la^2)\vec{a}+a^2\vec{b}\right)=\frac{1}{1+l^2}\left((1-l+l^2)\vec{a}+\vec{b}\right)$. Kadangi ieškomasis kampas yra kampas tarp vektorių $\overrightarrow{HQ}$ ir $\overrightarrow{HD}$, tai $\cos\angle\mathrm{QHD}=\frac{\overrightarrow{HQ}\cdot\overrightarrow{HD}}{\left|\overrightarrow{HQ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{HD}\right|}$. Kadangi vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra statmenieji ir vienodo ilgio, tai $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{a}^2=\vec{b}^2=a^2$, todėl $\overrightarrow{HQ}\cdot\overrightarrow{HD}=\frac{1}{(1+l^2)^2}(-l+l^2-l^3+l-l^2+l^3)a^2=0$, taigi šie vektoriai statmeni.

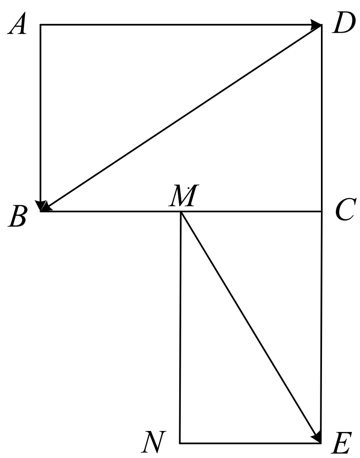


8 pav.

Atsakymas: 90^0.

10. Stačiakampio $ABCD$ kraštinių ilgiai $AB=4$, $AD=6$, taškas M yra kraštinės BC vidurio taškas. Nubrėžtas kitas stačiakampis $MCEN$, taškas E yra kraštinės DC tęsinyje už taško C ir $CE=5$. Raskite kampą tarp tiesių, kuriose yra stačiakampių įstrižainės DB ir ME.

Sprendimas. Sakykime, kad $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, vektorius $\overrightarrow{DB}$ ir $\overrightarrow{ME}$ išreikšime vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$. Turime $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CE}$. Akivaizdu, kad $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\vec{b}$, o kadangi $\overrightarrow{CE}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AB}$, $\left|\overrightarrow{CE}\right|=5$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=4$, tai $\overrightarrow{CE}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{5}{4}\vec{a}$. Taigi $\overrightarrow{ME}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{5}{4}\vec{a}$. Ieškomąjį kampą α tarp vektorių $\overrightarrow{DB}$ ir $\overrightarrow{ME}$ rasime taikydami formulę $\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{ME}}{\left|\overrightarrow{DB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{ME}\right|}$. Kadangi vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra statmeni, tai $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{a}^2=16$, $\vec{b}^2=36$, tai $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{ME}=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{5}{4}\vec{a}\right)=-\frac{1}{2}\vec{b}^2+\frac{5}{4}\vec{a}^2=-18+20=2$, $\left|\overrightarrow{DB}\right|=DB=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{52}$, $\left|\overrightarrow{ME}\right|=ME=\sqrt{MC^2+CE^2}=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$. Tuomet $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{52}\cdot\sqrt{34}}=\frac{1}{\sqrt{442}}$.



9 pav.

Atsakymas: $\arccos\frac{1}{\sqrt{442}}$.

ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Įrodykite, kad $a^2+3>2\sqrt{a^2+2}$, jei a yra bet kuris realusis skaičius.

Įrodymas. Kadangi $a^2+2>0,$ tai abu reiškiniai (a^2+3 ir $2\sqrt{a^2+2}$) yra apibrėžti visoje realiųjų skaičių aibėje. Nagrinėdami jų reikšmių skirtumą gausime:

$$(a^2+3)-2\sqrt{a^2+2}=(a^2+2)-2\sqrt{a^2+2}+1=(\sqrt{a^2+2}-1)^2\geq 0.$$

Lygybė čia galiotų tik kai $\sqrt{a^2+2}=1,$ bet tokių a reikšmių nėra. Todėl esant bet kuriam realiajam skaičiui a galioja griežta nelygybė

$$(a^2+3)-2\sqrt{a^2+2}>0,$$

iš kurios išplaukia, jog $(a^2+3)>2\sqrt{a^2+2},$ jei a yra bet kuris realusis skaičius.

2. Įrodykite, kad nelygybė

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\geq 8$$

galioja, jei a, b ir c yra bet kurie teigiami realieji skaičiai.

Įrodymas. Kadangi (taikant vidurkių A_2 ir G_2 nelygybę $A_2\geq G_2$)

$$a+b\geq 2\sqrt{ab},\quad b+c\geq 2\sqrt{bc}\quad \text{ir}\quad c+a\geq 2\sqrt{ca},$$

tai

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\geq\frac{2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}}{abc}=8.$$

Lygybė įrodomojoje nelygybėje galioja tik kai $a=b,$ $b=c$ ir $c=a,$ taigi kai $a=b=c.$

3. Įrodykite, kad

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}>\frac{3}{a+b+c},$$

jei a, b ir c yra teigiami realieji skaičiai.

Įrodymas. Nagrinėdami abiejų reiškinių reikšmių skirtumą gausime:

$$\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-\frac{3}{a+b+c}=\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+b+c}\right)+\left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+b+c}\right)+\left(\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b+c}\right)=$$

$$=\frac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\frac{a}{(b+c)(a+b+c)}+\frac{b}{(c+a)(a+b+c)}>0,$$

jei $a>0,$ $b>0$ ir $c>0.$ Todėl įrodomas teiginys yra teisingas.

Kitas teiginio įrodymo būdas. Aišku, kad esant teigiamiems skaičiams a, b ir c galioja šios nelygybės:

$$\frac{1}{a+b}>\frac{1}{a+b+c},\quad \frac{1}{b+c}>\frac{1}{a+b+c},\quad \frac{1}{c+a}>\frac{1}{a+b+c},$$

todėl

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}>\frac{3}{a+b+c}.$$

4. Įrodykite, kad esant bet kuriam realiajam skaičiui x galioja nelygybė $x^{12}-x^9+x^4-x+1>0.$

Įrodymas. Jei $x\leq 0,$ tai nelygybė yra akivaizdi. Jei $x\geq 1,$ tai

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1=(x^{12}-x^9)+(x^4-x)+1=x^9(x^3-1)+x(x^3-1)+1>0.$$

Belieka įsitikinti teiginio teisingumu, kai $x\in(0;1)$:

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1=x^{12}+(x^4-x^9)+(1-x)=x^{12}+x^4(1-x^5)+(1-x)>0,$$
nes visi pastarojo reiškinio dėmenys yra teigiami.

5. Įrodykite, kad nėra tokio natūraliojo skaičiaus, kurio skaitmenų sandauga lygi 3570.

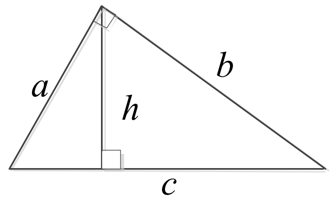
Įrodymas. Skaičius 3570 skaidinyje pirminiais dauginamaisiais ($3570=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot17$) yra skaičius 17, kuris nėra jokio natūraliojo skaičiaus skaitmuo.

6. Įrodykite, kad jei natūralusis skaičius $m-n$ (čia m ir n taip pat natūralieji skaičiai) dalijasi iš 3, tai skaičius m^3-n^3 dalijasi iš 9.

Įrodymas. Tarkime, kad $m-n=3k$, $k\in\mathbf{N}$. Tada $m=n+3k$ ir todėl
$$m^3-n^3=(m-n)(m^2+mn+n^2)=3k((n+3k)^2+(n+3k)n+n^2)=$$
$$=3k(n^2+6nk+9k^2+n^2+3nk+n^2)=3k(3n^2+9nk+9k^2)=9k(n^2+3nk+3k^2).$$
Gautoji skaičiaus m^3-n^3 išraiška rodo, kad jis tikrai dalijasi iš 9.

7. Tegu a ir b yra stačiojo trikampio statinių ilgiai, c – jo įžambinės ilgis, o h – aukštinės, nubrėžtos iš stačiojo kampo viršūnės, ilgis. Įrodykite, kad galioja nelygybė
$$\frac{c+h}{a+b}\le\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Įrodymas. Kadangi $c^2=a^2+b^2$, $ch=ab$, tai
$$\left(\frac{c+h}{a+b}\right)^2=\frac{c^2+2ch+h^2}{(a+b)^2}=\frac{a^2+b^2+2ab+h^2}{(a+b)^2}=\frac{(a+b)^2+h^2}{(a+b)^2}=$$
$$=1+\frac{h^2}{(a+b)^2}.$$



Iš lygybės $ch=ab$ gauname, kad $h=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, todėl
$$\frac{h^2}{(a+b)^2}=\frac{(ab)^2}{(a^2+b^2)(a+b)^2}\le\frac{(ab)^2}{2\sqrt{a^2b^2}\cdot(2\sqrt{ab})^2}=\frac{1}{8}.$$
(Rašydami pastarąją nelygybę taikėme aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę $A_2\ge G_2$).

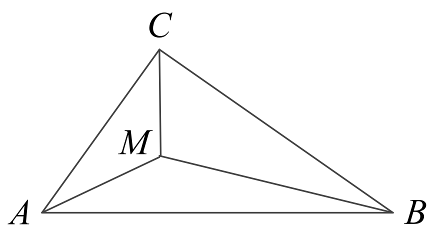
Vadinasi,
$$\left(\frac{c+h}{a+b}\right)^2=1+\frac{h^2}{(a+b)^2}\le1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8},$$
o lygybė galioja tik kai $a=b$ (išplaukia iš nelygybių $a^2+b^2\ge2\sqrt{a^2b^2}=2ab$ ir $a+b\ge2\sqrt{ab}$).
O tai reiškia, kad
$$\frac{c+h}{a+b}\le\sqrt{\frac{9}{8}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$
Reikšmę $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ trupmeną $\dfrac{c+h}{a+b}$ įgyja tik kai $a=b$.

8. Tegu M yra laisvai pasirinktas taškas trikampio ABC viduje, P – trikampio ABC perimetras, o $p=\dfrac{1}{2}P$.

Įrodykite, kad $p<MA+MB+MC<P$.

Įrodymas. Aišku, kad $AM+MB>AB$, $BM+MC>BC$ ir $CM+MA>CA$.
Sudėję šias nelygybes gauname, kad
$$2(MA+MB+MC)>AB+BC+CA=P,$$

todėl $MA + MB + MC > \frac{1}{2}P = p.$



Taip pat aišku, kad galioja ir šios nelygybės:

$$AM + MB < AC + CB,\quad BM + MC < BA + AC \text{ ir}$$
$$CM + MA < CB + BA.$$

Sudėję šias nelygybes gauname nelygybę

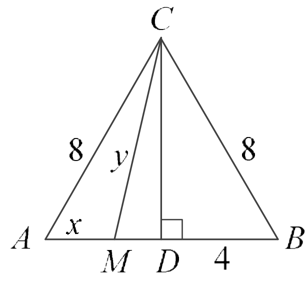
$$2(MA + MB + MC) < 2(AB + BC + CA) = 2P,$$

o iš jos – įrodomą nelygybę

$$MA + MB + MC < P.$$

9. Įrodykite, kad lygiakraštį trikampį, kurio kraštinės ilgis 8, įmanoma padalyti į du trikampius taip, kad vieno perimetras būtų 18, o kito – 20.

Įrodymas. Brėžkime (žr. pav.) tiesę CM (M yra kraštinės AB taškas) taip, kad galiotų abi lygybės:



$$x + y = 10 \text{ ir } (8 - x) + y = 12.$$

Šių lygčių sistema turi vienintelį sprendinį: $x = 3,\ \ y = 7.$

Iš pirmo žvilgsnio darbas lyg ir baigtas, bet būtina išsiaiškinti, ar tikrai iš lygčių sistemos rasta y reikšmė $y = 7$ yra atkarpos CM ilgis.

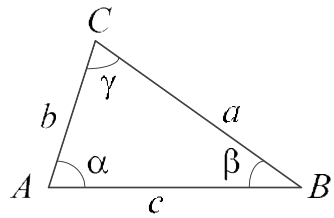
Aišku, kad šiai abejonei išsklaidyti pakanka prisiminti Pitagoro teoremą, pagal kurią turėtų galioti lygybė

$$CM^2 = 1^2 + (8^2 - 4^2) = 1 + 48 = 49.$$

Vadinasi, $y = 7$ tikrai yra atkarpos CM ilgis. Ir to pakanka išvadai, jog uždavinio sprendimo atsakymas teisingas, pagrįsti.

10. Tegu trikampio ABC kraštinių BC, CA ir AB ilgiai yra atitinkamai a, b, c, o prieš jas esančių kampų didumai – atitinkamai α, β ir γ. Įrodykite, kad šis trikampis yra lygiašonis, jeigu galioja lygybė $\frac{a-b}{a} = 1 - 2\cos\gamma.$

Įrodymas. Iš lygybės $\frac{a-b}{a} = 1 - 2\cos\gamma$ gauname, kad $b = 2a\cos\gamma.$ Tada taikydami kosinusų teoremą gauname:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = a^2 + (2a\cos\gamma)^2 - 2a\cdot 2a\cos\gamma\cdot\cos\gamma =$$
$$= a^2 + 4a^2\cos^2\gamma - 4a^2\cos^2\gamma = a^2.$$

Iš lygybės $c^2 = a^2$ išplaukia, kad $c = a,$ taigi $AB = BC.$

SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Ar atsiras du tokie natūralieji skaičiai, kurių suma yra lygi 2021 ir dar jeigu viename iš jų užbrauktume du pirmutiniuosius skaitmenis, tai gausime kitą dedamąjį skaičių?

Sprendimas. Jeigu pirmasis dedamasis skaičius būtų triženklis, tai užbraukę du pirmutiniuosius skaitmenis gautume vienaženklį skaičių ir tada vienaženklio ir triženklio skaičių suma niekaip negalėtų būti lygi 2021. Todėl pirmasis didesnysis dedamasis skaičius yra keturženklis ir gali būti užrašytas pavidalu

$$ABCD.$$

Tada antrasis dedamasis (dviženklis) skaičius yra CD ir pagal sąlygą

$$ABCD + CD = 2021.$$

Tačiau tada sumoje $ABCD + CD$ paskutinysis (vienetų) skaitmuo yra skaičiaus $D + D$ paskutinysis skaitmuo, todėl jis yra lyginis ir tikrai negalėtų būti lygus 1, kaip yra reikalaujama sąlygoje.

Ats. Tokių dviejų natūraliųjų skaičių nėra.

2. Išspręskite lygčių sistemą

$$\frac{1}{x^2} + \frac{2}{y} = \frac{1}{y^2} - \frac{2}{x} = 3.$$

Sprendimas. Jeigu mes įvestume standartinį keitinį $\frac{1}{x} = u$ bei $\frac{1}{y} = v$, tai gautume sistemą

$$u^2 + 2v = v^2 - 2u = 3.$$

Dabar antrąją sistemos lygtį atimame iš pirmosios ir gauname lygybę

$$u^2 - v^2 + 2(u + v) = 0.$$

Kadangi

$$u^2 - v^2 = (u - v)(u + v),$$

tai, iškėlę prieš skliaustus $u + v$, gautume išraišką

$$(u + v)(u - v + 2) = 0.$$

Vadinasi, dabar turime dvi galimybes: pirmoji yra $u + v = 0,$ o antroji yra $u - v + 2 = 0.$ Įrašius lygybę

$$u = -v$$

į sistemą gauname $u^2 - 2u - 3 = 0,$ kuri turi dvi šaknis. Pirmoji šaknis yra u, kuri yra -1, o kita u reikšmė yra lygi 3. Pereidami prie v gautume dvi reikšmes 1 ir -3. Savo ruožtu pereidami prie x ir y gauname dvi reikšmes

$$(x; y) = (-1\ ; 1)$$

ir dar

$$(x; y) = (1/3;\ -1/3).$$

Antruoju atveju, kai $u - v + 2 = 0$, turime $v = u + 2$ ir įrašius į sistemą

kuri yra tas pats, kaip $u^2 + 2(u+2) - 3 = 0$ arba $u^2 + 2u + 1 = (u+1)^2 = 0$.

Iš čia gauname, kad u yra lygus – 1, todėl v tada yra u + 2 arba yra 1.

Pereidami prie x ir y gauname tą pačią porą (– 1; 1), kurią jau buvome gavę.

Ats. Sistema turi sprendinius (– 1; 1) ir (1/3; – 1/3).

3. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 2xy - 3z^2 = 4. \end{cases}$$

Sprendimas. Iš pirmos lygties išreikškime $2y = 4 - x$ ir įrašykime į antrąją sistemos lygtį. Tada gausime, kad

$$x(4 - x) - 3z^2 = 4.$$

Po pertvarkymų

$$4x - x^2 - 3z^2 = 4.$$

Sukėlus viską į vieną pusę būtų

$$x^2 - 4x + 4 + 3z^2 = 0.$$

Tai yra tas pats, kaip parašyti, kad

$$(x-2)^2 + 3z^2 = 0.$$

Ši lygybė reiškia, kad x yra lygus 2, o z yra 0. Vadinasi $2y$ yra 4 – 2 arba yra lygus 2, vadinasi, y yra 1.

Gauname, kad

$$(x; y; z) = (2;1;0)$$

yra (vienintelis) mūsų sistemos sprendinys.

Ats. $(x; y; z) = (2;1;0)$.

4. Įrodykite, kad iš lygybių $x + y = a$, $x^2 + y^2 = b$ ir $x^3 + y^3 = c$ išplaukia lygybė $a^3 = 3ab - 2c$.

Sprendimas. Suskaičiuosime $3ab - 2c$ ir tada gausime

$$3ab - 2c = 3(x+y)(x^2+y^2) - 2(x^3+y^3) = 3x^3 + 3y^3 + 3xy^2 + 3x^2y - 2x^3 - 2y^3 =$$
$$= x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = (x+y)^3 = a^3.$$

O tai ir yra tas, ką mes norėjome gauti.

5. Išspręskite lygtį

$$(x^2 - 4x + 6)^2 - 4x(x^2 - 4x + 6) + 3x^2 = 0.$$

Sprendimas. Jeigu mes $x^2 - 4x + 6$ pažymėtume raide *y*, tai gautume reiškinį

$$y^2 - 4xy + 3x^2 = 0,$$

kurį galima išskaidyti kaip

$$(y - x)(y - 3x) \ = 0.$$

Todėl turime arba

$$x^2 - 4x + 6 = x\ ,$$

arba

$$x^2 - 4x + 6 = 3x.$$

Pirmuoju atveju gauname reiškinį $x^2 - 5x + 6 = 0,$ turintį dvi skirtingas teigiamas šaknis *x*, lygias 2 ir 3, o antruoju atveju gauname $x^2 - 7x + 6 = 0,$ kurios šaknys yra abi teigiamos ir jos yra 1 ir 6.

Ats. Lygties šaknys yra 1, 2, 3 ir 6.

6. Išspręskite lygtį

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{4}{5}.$$

Sprendimas. Kiekvieną trupmeną užrašysime kaip dviejų trupmenų skirtumą ir tada turėsime

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) + \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} = \frac{4}{x(x+4)}.$$

Tokiu būdu gauname lygtį

$$\frac{4}{x(x+4)} = \frac{4}{5}, x^2 + 4x - 5 = 0,$$

kuri turi dvi šaknis, iš kurių viena yra lygi –5, o kita yra lygi 1.
Ats. Lygtis turi dvi šaknis: –5 ir 1.

7. Duota lygčių sistema

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 20 \\ ab + 6b = 32. \end{cases}$$

A) Atspėkite vieną tos sistemos sprendinį.
B) Suraskite visus tos sistemos sprendinius.

Sprendimas. A) Nesunku atspėti vieną tos sistemos sprendinį (*a; b*) = (2; 4).

B) Jeigu mes ir pirmąją, ir antrąją lygtį padaugintume iš 4 ir dar antrąją lygtį atimtume iš pirmosios, tai tada gautume

$$4a^2 - 4ab + 4b^2 - 24b = 80 - 128 = -48.$$

Ją galime pertvarkyti taip:

$$4a^2 - 4ab + 4b^2 - 24b + 48 = 4a^2 - 4ab + b^2 + 3b^2 - 24b + 48 = (2a - b)^2 + 3(b^2 - 8b + 16) =$$
$$= (2a - b)^2 + 3(b - 4)^2 = 0.$$

Jeigu kvadratų suma yra lygi nuliui, tai tada gauname, kad $2a - b = 0$ ir $b - 4 = 0$. Todėl galutinai $b = 2a$ ir $b = 4$, iš kur išplaukia, kad $a = 2$ ir $b = 4$ (tai yra tas sprendinys, kurį mes atspėjome A) dalyje) yra vienintelis mūsų sistemos sprendinys.

Atsakymas. (*a*; *b*) = (2; 4).

8. Bet kuriems keturiems realiesiems skaičiams *a, b, c* ir *d* įrodykite, kad

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq ab + bc + cd + da.$$

Sprendimas. Pirmiausiai pastebėkime, kad akivaizdus faktas, jog $(a - b)^2 \geq 0$ (arba kad bet kurio skaičiaus, tarp jų ir skaičiaus *a* – *b* kvadratas yra neneigiamas skaičius) pakėlus kvadratu duoda nelygybę

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0,$$

kas yra tas pats kaip nelygybė

$$a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

kuri yra teisinga su visomis *a* ir *b* reikšmėmis.

Jeigu mes dabar šią nelygybę užrašysime skaičių (*a*; *b*), (*b*; *c*), (*c*; *d*) bei (*d*; *a*) poroms, tai gausime

$$a^2 + b^2 \geq 2ab,\ b^2 + c^2 \geq 2bc,\ c^2 + d^2 \geq 2cd \text{ ir } d^2 + a^2 \geq 2da.$$

Sudėję jas visas panariui ir padalinę gautąją sumą iš dviejų mes ir gausime įrodinėjamąją nelygybę.

9. Išspręskite nelygybę

$$\sqrt{8 + 2x} > x.$$

Sprendimas. Pirmiausiai galime nustatyti nelygybės apibrėžimo arba, kitaip tariant, jos egzistavimo sritį. Ta sritis susideda iš visų tokių *x*, kuriems 8 + 2*x* yra neneigiamas. Kitaip tariant, iš tokių *x*, kuriems

$$8+2x \geq 0 .$$

Kitaip sakant, tai yra tokie x, kuriems $x \geq -4$.

Dabar jeigu x yra neigiamas, tai kadangi $\sqrt{8+2x}$ yra visada neneigiamas, tai intervale nuo – 4 iki 0 nelygybė yra visada patenkinta.

O jeigu x yra teigiamas, tai abi nelygybės pusės yra teigiamos ir jas galima kelti kvadratu. Pakėlus gauname

$$8+2x > x^2.$$

Tai yra tas pats kaip parašyti, kad

$$x^2 - 2x - 8 < 0.$$

Prilyginus šį trinarį nuliui gauname dvi reikšmes: vieną lygią – 2, o kitą lygią 4. Todėl jį galima išskaidyti ir užrašyti, kad $x^2 - 2x - 8 = (x-(-2))(x-4) = (x+2)(x-4) < 0.$ Išsprendus standartinę nelygybių sistemą apie tai, jog jeigu dviejų dauginamųjų sandauga yra neigiama, o tai yra tada ir tiktai tada, kai jie yra skirtingo ženklo, tai gautume, jog mums tinka visi tokie x, kurie yra „griežtai“ tarp skaičių – 2 ir 4.

Taip gauname atsakymą, kuris yra dviejų intervalų – vieno nuo – 4 iki 0 ir kito nuo – 2 iki 4 junginys arba kad mūsų nelygybė yra tenkinama visų tokių x, kurie yra didesni arba lygūs už – 4 ir mažesni už 4.

Ats. $-4 \leq x < 4$.

10. Įrodykite, kad su visais realiaisiais skaičiais x yra teisinga nelygybė

$$4(x^3+x+1) \leq (x^2+1)(x^2+5).$$

Sprendimas. Sudauginus mes gautume

$$4x^3 + 4x + 4 \leq x^4 + x^2 + 5x^2 + 5 ,$$

o sukėlus viską į vieną pusę būtų

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \geq 0 .$$

Pastarąją nelygybę galime perrašyti taip:

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + x^2 - 2x + 1 =$$
$$= x^2(x^2-2x+1) - 2x(x^2-2x+1) + (x^2-2x+1) = (x^2-2x+1)^2 = ((x-1)^2)^2 = (x-1)^4 \geq 0.$$

O ši nelygybė yra teisinga, nes bet kurio reiškinio ketvirtasis laipsnis kaip to reiškinio kvadrato kvadratas iš tikrųjų visada yra neneigiamas.

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Apskaičiuokite sekos (x_n),

$$x_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{(n+1)^2} + \frac{3}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{n}{(n+1)^2},$$

ribą $\lim x_n$.

Sprendimas. Kadangi

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

tai

$$x_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{(n+1)^2} + \frac{3}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{1+2+3+\ldots+n}{(n+1)^2} = \frac{n(n+1)}{2(n+1)^2} = \frac{n}{2(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Todėl

$$\lim x_n = \lim \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}.$$

Ats.: $\frac{1}{2}$.

2. Apskaičiuokite sekos (x_n),

$$x_n = 2\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+2)}\right),$$

ribą $\lim x_n$.

Sprendimas. Aišku, kad $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} = \frac{2}{k(k+2)}$. Vadinasi,

$$x_n = \frac{2}{1\cdot 3} + \frac{2}{2\cdot 4} + \frac{2}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{2}{n\cdot(n+2)} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

Todėl

$$\lim x_n = \lim\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Ats.: $\frac{3}{2}$.

3. Apskaičiuokite $\lim (x_n)$, jei $x_n = \sqrt{n^2+2n+2} - \sqrt{(n-2)^2-1}$.

Sprendimas. Dydžiai $\sqrt{n^2+2n+2}$ ir $\sqrt{(n-2)^2-1}$ neribotai didėja, kai $n \to \infty$. Vadinasi, skaičiuodami skirtumo ribą, turime išsiaiškinti neapibrėžtumą $\infty - \infty$.

Dydžio x_n išraišką pertvarkykime taip:

$$x_n = \frac{\left(\sqrt{n^2+2n+2} - \sqrt{(n-2)^2-1}\right)\left(\sqrt{n^2+2n+2} + \sqrt{(n-2)^2-1}\right)}{\sqrt{n^2+2n+2} + \sqrt{(n-2)^2-1}} = \frac{(n^2+2n+2) - ((n-2)^2-1)}{\sqrt{n^2+2n+2} + \sqrt{(n-2)^2-1}} =$$

$$= \frac{6n-1}{\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{(n-2)^2-1}} = \frac{n\left(6-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}\right)} = \frac{6-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}}.$$

Matome, kad jokio neaiškumo (neapibrėžtumo) nebeliko:

$$\lim x_n = \lim \frac{6-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}} = \frac{6}{1+1} = 3.$$

Ats.: 3.

4. Apskaičiuokite $\lim(x_n)$, jei $x_n = \dfrac{(n+1)^3-(n-2)^3}{n^2+2n-3}$.

Sprendimas. Kadangi

$$x_n = \frac{(n+1)^3-(n-2)^3}{n^2+2n-3} = \frac{(n^3+3n^2+3n+1)-(n^3-6n^2+12n-8)}{n^2+2n-3} = \frac{9n^2-9n+9}{n^2+2n-3} =$$

$$= \frac{9n^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}\right)} = \frac{9\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{1+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}},$$

tai

$$\lim x_n = \lim \frac{9\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{1+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}} = \frac{9\cdot 1}{1} = 9.$$

Ats.: 9.

5. Apskaičiuokite $\lim(x_n)$, jei $x_n = \dfrac{\sqrt{4n^3+1}}{(5n+3)(\sqrt{n}+1)}$.

Sprendimas. Neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$ aiškinkimės taip:

$$x_n = \frac{\frac{\sqrt{4n^3+1}}{n\sqrt{n}}}{\frac{(5n+3)(\sqrt{n}+1)}{n\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{4+\frac{1}{n^3}}}{\left(5+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)};$$

todėl $\lim x_n = \lim \dfrac{\sqrt{4+\frac{1}{n^3}}}{\left(5+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \dfrac{\sqrt{4}}{5\cdot 1} = \dfrac{2}{5}$.

Ats.: $\dfrac{2}{5}$.

6. Apskaičiuokite $\lim n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$.

Sprendimas. Kadangi

$$n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\frac{n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{n\left(n^2+1-n^2\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1},$$

tai

$$\lim n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Ats.: $\frac{1}{2}$.

7. Apskaičiuokite $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2x^2-11x-21}{x^2-9x+14}$.

Sprendimas. Tiesiogiai tikrinant galima įsitikinti, kad $2x^2-11x-21=0$ ir $x^2-9x+14=0$, kai $x=7$. Tai reiškia, kad ir kvadratinis trinaris $2x^2-11x-21$, ir kvadratinis trinaris $x^2-9x+14$ dalijasi iš dvinario $x-7$. Dalykime kampu:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-11x-21 & x-7 \\ \underline{2x^2-14x} & 2x+3 \\ 3x-21 & \\ \underline{3x-21} & \\ 0 & \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r|l} x^2-9x+14 & x-7 \\ \underline{x^2-7x} & x-2 \\ -2x+14 & \\ \underline{-2x+14} & \\ 0 & \end{array}$$

Vadinasi,

$$\frac{2x^2-11x-21}{x^2-9x+14}=\frac{(x-7)(2x+3)}{(x-7)(x-2)}=\frac{2x+3}{x-2},\ \text{jei}\ \ x\neq 7.$$

Todėl

$$\lim_{x\to 7}\frac{2x^2-11x-21}{x^2-9x+14}=\lim_{x\to 7}\frac{2x+3}{x-2}=\frac{17}{5}.$$

Ats.: $\frac{17}{5}$.

8. Apskaičiuokite $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}+\frac{1}{x-1}\right)$.

Sprendimas. Nagrinėjamą reiškinį pertvarkykime taip:

$$\frac{3}{1-x^3}+\frac{1}{x-1}=\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}-\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-x}\left(\frac{3}{1+x+x^2}-1\right)=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{3-(1+x+x^2)}{1+x+x^2}=$$

$$=\frac{2-x-x^2}{(1-x)(1+x+x^2)}=\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x+2}{x^2+x+1}=1\,;x\neq 1.$$

Vadinasi, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3}{1-x^3}+\frac{1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=\frac{1+2}{1+1+1}=1.$

Ats.: 1.

9. Apskaičiuokite $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-x^3+x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

Sprendimas. Matome, kad turime neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$. Todėl nagrinėjamą reiškinį pertvarkykime:

$$\frac{x^4-x^3+x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\frac{(x^4-x^3)+(x^2-x)-(2x-2)}{(x^3-x^2)-(x-1)}=\frac{(x-1)(x^3+x-2)}{(x-1)(x^2-1)}=\frac{x^3+x-2}{x^2-1}=$$

$$=\frac{(x^3-1)+(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{(x-1)((x^2+x+1)+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2+x+2}{x+1};\ \ x\neq 1.$$

Dabar visai nesunku rasti skaičiuojamą ribą:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-x^3+x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+2}{x+1}=\frac{4}{2}=2.$$

Ats.: 2.

10. Apskaičiuokite $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-11x^2+12x+9}{x^4-6x^3+13x^2-24x+36}$.

Sprendimas. Neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$ aiškinkimės pertvarkydami nagrinėjamą reiškinį:

$$\frac{2x^3-11x^2+12x+9}{x^4-6x^3+13x^2-24x+36}=\frac{(x-3)(2x^2-5x-3)}{(x-3)(x^3-3x^2+4x-12)}=\frac{2x^2-5x-3}{x^3-3x^2+4x-12}=$$

$$=\frac{(x-3)(2x+1)}{(x-3)(x^2+4)}=\frac{2x+1}{x^2+4};\ \ x\neq 3.$$

Dabar jau aišku, kad

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^3-11x^2+12x+9}{x^4-6x^3+13x^2-24x+36}=\lim_{x\to 3}\frac{2x+1}{x^2+4}=\frac{7}{13}.$$

Ats.: $\frac{7}{13}$.

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

1	2	3	4
8 min 40 s	6 cm ir 4 cm	$(4, -9)$, $\left(-1, \frac{9}{4}\right)$	1