Atranka į 2022 m. Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos olimpiadas

Sprendimai

Artūras Dubickas ir Aivaras Novikas

1. Yra 4044 svareliai, kurių masės (gramais) yra $1, 2, 3, \ldots, 4044$. Agnė nori pasirinkti 2022 svarelius, kurių masių suma yra lyginis skaičius. Benas tvirtina: kad ir kokius svarelius pasirinktų Agnė, jis juos galės taip paskirstyti į dvi krūveles, kad abiejų krūvelių masės būtų lygios. (Krūvelėse svarelių nebūtinai turi būti po lygiai.) Ar Benas teisus?

   Sprendimas. Agnė gali pasirinkti 2022 svarelius, kurių masės (gramais) yra lyginiai skaičiai, t. y. $2, 4, 6, \ldots, 4044$. Tarkime, kad juos galima taip paskirstyti į dvi krūveles, kad vienoje krūvelėje svarelių masės būtų $x_1, \ldots, x_n$, kitoje $y_1, \ldots, y_m$, ir $x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_m$. Čia $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ yra visi lyginiai natūralieji skaičiai nuo 2 iki 4044. Akivaizdu, jog tada galioja ir lygybė

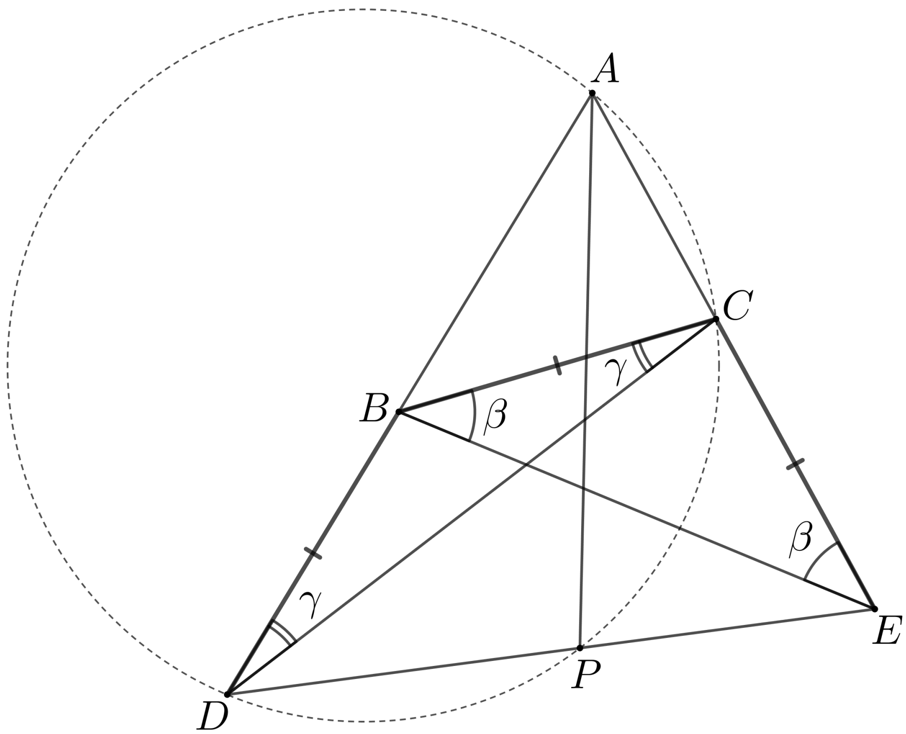
$$\frac{x_1}{2} + \cdots + \frac{x_n}{2} = \frac{y_1}{2} + \cdots + \frac{y_m}{2},$$

   kur $\frac{x_1}{2}, \ldots, \frac{x_n}{2}, \frac{y_1}{2}, \ldots, \frac{y_m}{2}$ yra visi natūralieji skaičiai nuo 1 iki 2022. Abiejų šios lygybės pusių suma $\frac{x_1}{2} + \cdots + \frac{x_n}{2} + \frac{y_1}{2} + \cdots + \frac{y_m}{2}$ turi būti lyginis skaičius, tačiau $1 + 2 + 3 + \cdots + 2022 = 1011 \cdot 2023$ yra nelyginis skaičius, prieštara. Vadinasi, Benas neteisus.

   Atsakymas: ne.

2. Duotas trikampis ABC, kuriame $\angle BAC = 60°$. Kraštinės AB tęsinyje už viršūnės B ir kraštinės AC tęsinyje už viršūnės C atitinkamai pažymėti tokie taškai D ir E, kad $BD = BC = CE$. Trikampio ACD apibrėžtinis apskritimas kerta atkarpą DE taške $P \neq D$. Įrodykite, kad atkarpa AP yra trikampio ADE pusiaukampinė.

   Pirmas sprendimas. Lygiašonių trikampių BCD ir BCE kampų prie pagrindo didumus atitinkamai pažymėkime β ir γ (žr. pav.).



Tada

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle CBD = \angle BDC + \angle BCD = 2\gamma,$$

$$\text{analogiškai } \angle ACB = 2\beta,$$

$$60^\circ = \angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = 180^\circ - 2\beta - 2\gamma.$$

Taigi $\beta + \gamma = 60^\circ$. Pastebėkime, kad keturkampis $ABPE$ yra įbrėžtinis:

$$\angle APE = 180^\circ - \angle APD =$$

$$= 180^\circ - \angle ACD \text{ (keturkampis } ACPD \text{ įbrėžtinis)} =$$

$$= 3(\beta + \gamma) - (2\beta + \gamma) = 2\gamma + \beta = \angle ABE.$$

Pritaikykime kirstinių savybę keturkampių $ABPE$ ir $ACPD$ apibrėžtiniams apskritimams:

$$DB \cdot DA = DP \cdot DE, \qquad EC \cdot EA = EP \cdot ED,$$

$$DA : DP = DE : DB = ED : EC = EA : EP.$$

Kadangi $PD : PE = AD : AE$, tai, remiantis pusiaukampinės savybe, atkarpa AP yra trikampio ADE pusiaukampinė.

Antras sprendimas. Lygiašonių trikampių BCD ir BCE kampų prie pagrindo didumus atitinkamai pažymėkime β ir γ. Kaip ir pirmame sprendime, gauname $\angle ABC = 2\gamma$, $\angle ACB = 2\beta$, $\beta + \gamma = 60°$. Tada

$$\angle DBE + \angle DCE = (180° - \beta - 2\gamma) + (180° - \gamma - 2\beta) = 180°.$$

Vadinasi, trikampius DBE ir DCE galima taip suglausti lygiomis kraštinėmis BD ir CE, kad kampai DBE ir DCE sudarytų ištiestinį kampą. Taip gausime trikampį, kurio dvi kraštinės lygios DE, o kampas tarp jų lygus

$$\angle BDE + \angle CED = \angle ADE + \angle AED = 180° - \angle DAE = 120°.$$

Tada kiti du gautojo trikampio kampai lygūs $\angle CDE = 30°$ ir $\angle BED = 30°$. Vadinasi, $\angle EAP = \angle CAP = \angle CDP = 30°$. Iš $\angle BAC = 60°$ išplaukia, kad atkarpa AP yra trikampio ADE pusiaukampinė.

3. Nustatykite visus realiuosius skaičius c, kuriems egzistuoja tokia funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kad

$$f(f(x) + f(y)) + cxy = f(x + y)$$

su visais realiaisiais x ir y.

Sprendimas. Tinka reikšmė $c = 0$: tada galime imti funkciją $f(x) = 0$, kai $x \in \mathbb{R}$. Toliau tarkime, kad tam tikri $c \neq 0$ ir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tenkina uždavinio sąlygą. Funkcijos f reikšmių aibę pažymėkime E_f.

Duotojoje lygtyje įrašykime $y = -x$:

$$f(f(x) + f(-x)) - cx^2 = f(0), \qquad f(f(x) + f(-x)) = f(0) + cx^2.$$

Taigi $f(0) + cx^2 \in E_f$ kiekvienam $x \in \mathbb{R}$. Jei $c > 0$, tai $[f(0); +\infty) \subset E_f$. Jei $c < 0$, tai $(-\infty; f(0)] \subset E_f$.

Duotojoje lygtyje įrašykime $y = 0$:

$$f(f(x) + f(0)) = f(x) = (f(x) + f(0)) - f(0).$$

Čia $f(x)$ gali būti bet kuris skaičius iš E_f. Todėl, pažymėję

$$t = f(x) + f(0),$$

gauname lygybę $f(t) = t - f(0)$, galiojančią arba visiems $t \geqslant 2f(0)$ (jei $c > 0$), arba visiems $t \leqslant 2f(0)$ (jei $c < 0$).

Jei $c > 0$, tai visoms pakankamai didelėms x ir y reikšmėms (tinka visi $x, y > 3|f(0)|$) turime:

$$f(f(x)+f(y)) = f((x-f(0))+(y-f(0)) = f(x+y-2f(0)) =$$

$$= (x+y-2f(0)) - f(0) = x+y-3f(0),$$

$$x+y-3f(0)+cxy = f(f(x)+f(y))+cxy = f(x+y) = x+y-f(0),$$

$$cxy = 2f(0).$$

Jei $c < 0$, tai lygybę $cxy = f(0)$ analogiškai gauname visoms pakankamai mažoms x ir y reikšmėms (tinka visi $x, y < -3|f(0)|$). Abiem atvejais $c > 0$ ir $c < 0$ gauname prieštarą, nes $f(0)$ yra konstanta, o cxy gali įgyti be galo daug skirtingų reikšmių. Vadinasi, jokiam $c \neq 0$ tinkamos funkcijos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nerasime.

Atsakymas: $c = 0$.

4. Įrodykite, kad jei a, b ir c yra realieji teigiami skaičiai, tai

$$\frac{a^4b^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4c^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4a^4}{c^3+a^3} \leqslant \frac{a^5+b^5+c^5}{2}.$$

Sprendimas. Remdamiesi aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybe, gauname $(a^5+b^5)(a^3+b^3) \geqslant 2\sqrt{a^5b^5} \cdot 2\sqrt{a^3b^3} = 4a^4b^4$, todėl

$$\frac{a^4b^4}{a^3+b^3} \leqslant \frac{a^5+b^5}{4}.$$

Analogiškai įrodoma, kad

$$\frac{b^4c^4}{b^3+c^3} \leqslant \frac{b^5+c^5}{4}, \qquad \frac{c^4a^4}{c^3+a^3} \leqslant \frac{c^5+a^5}{4}.$$

Sudėję šias tris nelygybes gauname reikiamą nelygybę.

5. Kiekvienam natūraliajam $n \geqslant 3$ nustatykite reiškinio

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1$$

didžiausią galimą reikšmę, kai $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Sprendimas. Galimybių, kaip pasirinkti x_i reikšmes, skaičius baigtinis, taigi didžiausia reiškinio reikšmė apibrėžta. Pažymėkime ją M_n, o atitinkamą skaičių $x_1, \ldots, x_n$ rinkinį vadinkime *optimaliuoju.* Aišku, kad $M_3 = 6+2+3 = 11$. Visi įmanomi rinkiniai x_1, x_2, x_3 yra optimalieji.

Tegu $n \geqslant 4$. Pastebėkime, kad cikliškai pakeičiant skaičius $x_1, \ldots, x_n$ skaičiais $x_t, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{t-1}$, kur $2 \leqslant t \leqslant n$, ieškoma suma nepakinta. Todėl viename iš optimaliųjų rinkinių $x_1, \ldots, x_n$ turime $x_n = n$. Šiame rinkinyje pažymėkime $x_{n-1} = a$ ir $x_1 = b$. Šalia rinkinio $x_1, \ldots, x_n$ nagrinėkime ir mažesnį rinkinį $x_1, \ldots, x_{n-1}$ bei atitinkamą reiškinio reikšmę

$$S_{n-1} = x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1} + x_{n-1}x_1.$$

Reikšmę M_n gausime, iš S_{n-1} atėmę $x_{n-1}x_1 = ab$ ir pridėję $x_{n-1}x_n + x_nx_1 = an + bn$. Kadangi $S_{n-1} \leqslant M_{n-1}$, tai

$$\begin{aligned} M_n = S_{n-1} - ab + an + bn = S_{n-1} + n^2 - (n-a)(n-b) \leqslant \\ \leqslant S_{n-1} + n^2 - 2 \leqslant M_{n-1} + n^2 - 2. \end{aligned}$$

Be to, jei $\{a, b\} = \{n-2, n-1\}$ ir $S_{n-1} = M_{n-1}$, tai gauname lygybę

$$M_n = M_{n-1} + n^2 - 2.$$

Jei turime optimalųjį rinkinį $x_1, \ldots, x_{n-1}$ ir $\{x_1, x_{n-1}\} = \{n-2, n-1\}$, tai galime laikyti, kad $x_1 = n-1$ (kitaip optimaliojo rinkinio skaičių tvarką pakeistume priešinga, vėl gaudami optimalųjį rinkinį). Tada rinkinys $x_1, \ldots, x_{n-1}, n$ taip pat yra optimalusis ir $\{x_1, x_n\} = \{n-1, n\}$.

Pradėję nuo tinkamo optimaliojo rinkinio $2, 1, 3$, iš jo nurodytu būdu gausime 4 skaičių optimalųjį rinkinį, iš šio – 5 skaičių optimalųjį rinkinį, ir t. t., kiekvienam $n \geqslant 3$ turėdami situaciją $\{x_1, x_n\} = \{n-1, n\}$. Vadinasi, $M_3 = 6$ ir $M_k = M_{k-1} + k^2 - 2$, kai $k = 4, \ldots, n$. Todėl

$$\begin{aligned} M_n &= M_3 + 4^2 - 2 + 5^2 - 2 + \cdots + n^2 - 2 = \\ &= 11 + (4^2 + 5^2 + \cdots + n^2) - 2(n-3) = \\ &= 11 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 14 - 2n + 6 = \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 - 11n + 18}{6}. \end{aligned}$$

Šioje formulėje įrašę $n = 3$, gauname $M_3 = 11$. Taigi ji yra teisinga ir su šia n reikšme.

Atsakymas: $\frac{2n^3+3n^2-11n+18}{6}$.

6. Nustatykite, ar egzistuoja tokie 2003 skaičiai

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2003} \in \{1, 2, 3, \ldots, 4006\},$$

kad $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{2003}$, o skaičius

$$2^{a_1} + 2^{a_2} + 2^{a_3} + \ldots + 2^{a_{2003}} + 2^{4007}$$

dalijasi iš 2004.

Sprendimas. Jei skaičiai $a_1, a_2, \ldots, a_{2003}$ tenkina uždavinio sąlygą, tai dvejetainėje skaičiavimo sistemoje skaičius $N = 2^{a_1} + \ldots + 2^{a_{2003}} + 2^{4007}$ užrašomas pavidalu $1 \ldots 0$, kurį sudaro 4008 skaitmenys (vienetai ir nuliai), o skaičiai $a_1, \ldots, a_{2003}$ lemia, kurie skaitmenys lygūs 1. Performuluokime uždavinį: reikia nustatyti, ar egzistuoja toks natūralusis skaičius N, kuris dvejetainėje skaičiavimo sistemoje baigiasi skaitmeniu 0, turi lygiai 4008 skaitmenis, iš kurių lygiai 2004 yra vienetai, ir kuris dalijasi iš $2004 = 11111010100_{(2)}$. Yra keli būdai sukonstruoti tinkamą skaičių N. Čia pateiksime du iš jų.

Pirmas būdas. Imkime 285 skaičius $2004 = 11111010100_{(2)}$ ir skaičių $3 \cdot 2004 = 1011101111100_{(2)}$. Šių 286 skaičių dvejetaines išraiškas bet kokia tvarka surašę vieną po kitos, gausime tam tikro skaičiaus M, dalaus iš 2004, dvejetainę išraišką, kurioje yra $285 \cdot 11 + 13 = 3148$ skaitmenys, iš kurių $285 \cdot 7 + 9 = 2004$ yra vienetai. Tada skaičiaus $N = 2^{860} \cdot M$ dvejetainėje išraiškoje yra $3148 + 860 = 4008$ skaitmenys, iš kurių 2004 yra vienetai, o paskutinis skaitmuo lygus 0. Be to, N dalijasi iš 2004, nes M dalijasi iš 2004.

Antras būdas. Nagrinėkime skaičių

$$M_1 = 2^{2016} \cdot (2^{1992} - 1) = 111 \ldots 11000 \ldots 00_{(2)},$$

kurio dvejetainėje išraiškoje yra 1992 vienetai ir 2016 nulių, taigi iš viso 4008 skaitmenys. Jis dalijasi iš $2004 = 4 \cdot 3 \cdot 167$, nes skaičius 167 yra pirminis ir

$$2^{2016} \equiv 0 \pmod 4, \qquad 2^{1992} - 1 \equiv (-1)^{1992} - 1 \equiv 0 \pmod 3,$$

$$2^{1992} - 1 \equiv 4096^{166} - 1 \equiv 0 \pmod{167} \quad \text{(mažoji Ferma teorema).}$$

Be to, skaičiai $10020 = 2004 \cdot 5 = 10011100100100_{(2)}$ ir

$$M_2 = 10020 \cdot 2^{14} + 10020 = 1100111001001001001110010010\,0_{(2)}$$

dalijasi iš 2004. Skaičiaus $N = M_1 + M_2$ dvejetainę išraišką sudaro 4008 skaitmenys, iš kurių $1992 + 12 = 2004$ yra vienetai, o paskutinis skaitmuo lygus 0. Be to, N dalijasi iš 2004, nes M_1 ir M_2 dalijasi iš 2004.

Vadinasi, tinkami skaičiai $a_1, a_2, \ldots, a_{2003}$ egzistuoja.

Atsakymas: taip, egzistuoja.