XXXVI LIETUVOS KOMANDINĖ MOKINIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROF. JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas 2022-09-24

1. Išspręskite lygčių sistemą:
$$\begin{cases} 25^{x-y} + 2 \cdot 5^{x-y} = 3, \\ 5^x + 5^{1-y} = 6. \end{cases}$$

2. Apskaičiuokite
$$\frac{x^2}{x^4 - 3x^2 + 25},$$
kai žinoma, kad
$$\frac{x}{x^2 + 7x + 5} = a,$$
kur a yra duotas realusis skaičius. Atsakymą užrašykite dviejų daugianarių santykiu $\frac{p(a)}{q(a)}$.

3. Išspręskite nelygybę:
$$\frac{(x+3)^4}{(x+1)^3} + \frac{x+1}{16} \geq \frac{(x+3)^2}{2(x+1)}.$$

4. Kiekvieno realiojo skaičiaus y sveikoji dalis žymima $[y]$. Išspręskite lygtį
$$[x] + [9x] = -999^{2^{999}}.$$

5. Įrodykite, kad jei realieji teigiami skaičiai x, y, z tenkina lygybę $x + y + z = 1$, tai
$$\frac{1 + 9x^2}{1 + 2x + 2y^2 + 2z^2} + \frac{1 + 9y^2}{1 + 2y + 2z^2 + 2x^2} + \frac{1 + 9z^2}{1 + 2z + 2x^2 + 2y^2} < 4.$$

6. Nubraukus natūraliojo skaičiaus $n \geq 100$ pirmus (iš kairės) du skaitmenis, gautas skaičius $\frac{n}{73}$. Nustatykite tris mažiausias galimas skaičiaus n reikšmes.

7. Kiekvienam natūraliajam n nustatykite tokį didžiausią natūralųjį N, kuriam skaičius $111\ldots111$, sudarytas iš 3^n vienodų skaitmenų, dalijasi iš 3^N.

8. Natūralusis skaičius m turi tokį teigiamą daliklį D, kad $m = D^5 + d^5$, kur d yra skaičiaus m mažiausias daliklis, didesnis už 1. Nustatykite, kiek daugiausiai teigiamų daliklių gali turėti skaičius $D^2 + d^2$.

9. Įrodykite, kad jei skaičiai p, q, r yra pirminiai, o skaičiai $pq + 1$, $pr + 1$, $qr - p$ yra sveikųjų skaičių kvadratai, tai ir skaičius $p + 2qr + 2$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas.

10. Natūralųjį skaičių n vadinsime smarkiu, jei $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ dalijasi iš $n^2 + 1$. Įrodykite:

    a) yra be galo daug smarkių natūraliųjų skaičių;

    b) yra be galo daug natūraliųjų skaičių, kurie nėra smarkūs.

11. Į tam tikros lentelės langelius taip įrašyta po vieną iš skaičių 1 ir -1, kad užrašius kiekvienos eilutės skaičių sumą ir kiekvieno stulpelio skaičių sumą visos užrašytosios sumos būtų poromis skirtingos. Ar tai gali būti a) 5×6 lentelė; b) 6×6 lentelė?

12. Kirmėlė surado kubinį obuolį, padalytą į $3 \times 3 \times 3$ kubelių, ir įsigraužė į vieną iš kampinių kubelių. Iš kiekvieno kubelio ji gali peršliaužti į kitą, jei tie kubeliai turi bendrą sieną. Kirmėlė nori nušliaužti į tolimiausią kampinį kubelį, peršliauždama iš vieno kubelio į kitą ne daugiau nei 6 kartus. Tam ji turi pasirinkti, kuriais kubeliais šliauš. Keliais būdais ji gali pasirinkti reikiamą kubelių seką?

13. Lygiakraštis trikampis padalytas į 9 vienodus lygiakraščius trikampėlius. Taškai, esantys trikampėlių viršūnėmis, tam tikra tvarka sunumeruoti skaičiais $1, 2, \ldots, 10$. Kieviename trikampėlyje įrašyta jo trijų viršūnių skaičių suma. Įrodykite, kad tarp šių 9 skaičių, įrašytų trikampėliuose, yra trys, kurių suma didesnė už 47.

14. Vienos paskaitos metu penki studentai buvo užmigę. Kiekvienas iš jų buvo užmigęs lygiai du kartus: pirmą kartą užmigo paskaitai jau prasidėjus, pabudo, po kurio laiko vėl užmigo ir vėl pabudo paskaitai dar nepasibaigus. Jokie du iš 20 įvykių, kai kas nors užmigdavo arba pabusdavo, neįvyko vienu metu. Kiekvienai užmigusiųjų studentų porai buvo toks laiko tarpas, kai tie du studentai miegojo vienu metu. Įrodykite, kad buvo laiko tarpas, kai vienu metu miegojo mažiausiai trys studentai.

15. Į 8×8 lentelės langelius taip įrašyta po vieną iš skaičių 1 ir -1, kad kiekviename keturlangiame 2×2 kvadrate keturių skaičių suma būtų lygi 2 arba -2. Įrodykite, kad lentelėje yra dvi vienodos eilutės.

16. Stačiajame trikampyje vieno kampo tangentas lygus $\frac{2}{3}$, o aukštinė, nuleista į įžambinę, dalija ją į atkarpas, kurių ilgių skirtumas lygus 2. Raskite šios įžambinės ilgį.

17. Lygiakraščio trikampio ABC išorėje pažymėtas toks taškas M, kad atkarpos AM ir BC kertasi. Raskite kampo MAB didumą, jei $\angle AMB = 20°$ ir $\angle AMC = 30°$.

18. Stačiakampio $ABCD$ kraštinėje CD pažymėtas toks taškas E, kad $\angle AEB = \angle AED$. Raskite stačiakampio $ABCD$ plotą, jei $AB = 2BC$ ir $DE = 1$.

19. Įbrėžtinio keturkampio $ABCD$ kraštinės BC vidurio statmuo kerta kraštines BC ir AB atitinkamai taškuose M ir N. Trikampio CMN apibrėžtinis apskritimas kerta atkarpą CD taške $K \neq C$. Įrodykite, kad tiesės AD ir KM yra statmenos.

20. Taškas M dalija stačiojo trikampio ABC įžambinę AB pusiau. Atkarpoje AC pažymėtas toks taškas D, kad $CD = CM$. Trikampių ACM ir ABD apibrėžtiniai apskritimai kertasi taške $P \neq A$. Įrodykite, kad tiesė AP dalija kampą BAC pusiau.