

XXII LIETUVOS 5-6 KLASIŲ MOKINIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2022 m. rugsėjo 24 d.

1. Po sunkios, ryškių idėjų ir atkaklių darbų kupinos dienos bebras Bebrungas Bungas lengviau užmiega, jei mintyse skaičiuoja per gardą šokinėjančius barselius ir barsytes – savo seno bičiulio barsuko Barsingio Pingio gentainius. Kartą prieš miegą Bebrungui pavyko įsivaizduoti 60 šuolių per gardą, kol užmigo. Beužmiegančio bebros vaizduotėje kiekvienas barselis spėjo atlikti 6 šuolius, o kiekviena barsytė 7 šuolius. Kiek gi iš viso Barsingio skirtingų gentainių tasyk galėjo šokinėti Bebrungo Bungo priešmiegėse mintyse, jei jose būta šokinėjančių tiek barselių, tiek barsyčių?

2. Akimirka prieš pat užmiegant Bebrungui Bungui jo laikrodis ėmė mušti 10 valandų, o Bebrungo sąmonę lyg žaibas perskrodė baugi mintis, kad galbūt niekaip neįmanoma vietoj sveikųjų skaičių nuo 1 iki 12, rodančių valandas, užrašyti 12 tokių iš eilės einančių natūraliųjų skaičių didėjimo tvarka, kad pirmųjų devynių iš jų suma būtų lygi trigubai paskutinių dviejų skaičių sumai. Bet bebras tuoj pamanė, kad gal ir galima rasti tokius 12 skaičių, ir užmigo. Vėliau Bebrungas sugalvojo tinkamus 12 skaičių. Kokie tai gali būti skaičiai?

3. Bebrungo sapne keletas nepažangiausių barselių ėmė lankyti dailiausias būrelis. Sapne į tą būrelį spėjo užsirašyti 16-metis asiliukas Apoliukas, ir tada būrelio narių amžių (metais) vidurkis (tai yra, visų tų amžių suma, padalyta iš būrelio narių skaičiaus) padidėjo 1. O prieš pat bebrui pabundant, prie būrelio prisidėjo mažylė kiauinė Ožiaunė, kuriai tebuvo 4 metai, ir tada tas vidurkis vėl tapo toks, koks buvo pradžioje. Kiek barselių lankė susapnuotą būrelį?

4. Bebrungą Bungą pažadino energingas beldimas ir, pažvelgęs pro savo 5×5 langą, kurį sudarė 25 maži langeliai, jis ne tik pro miegus išvydo bičiulio Barsingio brolių bičiuką barsuką Kuką, bet jam dar pasivaideno, kad kiekviename mažajame langelyje sužibo po vieną iš skaičių 0, 1, 2 ir kad visos penkių skaičių sumos, gaunamos lango eilutėse, stulpeliuose ir abiejose penkialangėse įstrižainėse, yra poromis skirtingos, tai yra, kad jokios dvi iš tų sumų nėra lygios. Atsipeikėjęs bebras tuoj suabejojo, ar tokia 5×5 lentelė su skaičiais galėtų atsirasti, net visą rytą rašinėjant skaičius lange. Bet Kukas ėmė atkaklauti, kad tokią lentelę galima lange nupiešti ir kad jis jau žinąs, kaip tai padaryti, nors pačios lentelės dar nesugalvojęs. Tad ar gali atsirasti tokia lentelė? O gal Bebrungo abejonės pagrįstos ir galima įrodyti, kad tokios lentelės nėra ir negali būti?

5. Barsukas Kukas nuvedė Bebrungą į Barsingio Pingio aritmetinę laboratoriją. Čia Barsingui buvo pavykę sudaryti teisingą lygybę su natūraliaisiais skaičiais, kurioje nebuvo nė vieno skaitmens 9, o kiekvieną skaitmenį joje padidinus 1 vėl radosi teisinga lygybė:

$$5 \times 5 = 25 \rightarrow 6 \times 6 = 36$$

Tada bebras su abiem barsukais supuolė ėmė kurti naujas tokias lygybes. Tą dieną jiems rūpėjo vien tik tokios lygybės $a \times b = c$, kur skaičius a yra vienaženklis, o skaičius b yra dviženklis. Kai jie rado vieną tokią lygybę, Bebrungas pareiškė, kad jis galės ramiai užmigt, tik jei jie ras dar bent penkias.

a) Ar galite ir jūs rasti bent vieną reikiamą lygybę?

b) Ar galite rasti dar penkias reikiamas lygybes, kurios užtikrintų Bebrungo ramybę?

XXII LIETUVOS 7-8 KLASIŲ MOKINIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2022 m. rugsėjo 24 d.

1. Mažylė kiaunė Ožiaunė panoro, kad jos numylėtinis asiliukas Apoliukas artėjančio 17-tojo gimtadienio proga iš miško gyventojų gautų krūvą dovanų ir kad tas dovanų skaičius baigtųsi skaitmenimis ...17, dalytųsi iš 17, o dar ir jo skaitmenų suma būtų lygi 17. Sumanusis bebras Bebrungas Bungas sudraudė kiaunę ir paaiškino jai, kad tiek daug dovanų Apoliukas niekaip negalėtų gauti. Kiek mažiausiai dovanų gautų Apoliukas, jei kiaunės kaprizai visgi galėtų būti įgyvendinti?
2. Bebro Bebrungo Bungo sapnuose kažin kokie barsukai vis lankė dailoraščio būrelį, kur mokėsi gražiai rašyti žodį „barsukas“ ir kitus jiems brangius žodžius. Viename sapne į tą būrelį sugebėjo užsirašyti asiliukas Apoliukas. Čia jis jau kažkodėl buvo nebe šešiolikmetis, o surimtėjęs 30-metis asiliukas, tad būrelio narių amžių (metais) vidurkis padidėjo net 2. O prieš pat bebrui pabundant, prie būrelio dar prisidėjo kiaunė Ožiaunė, kuriai tebuvo 4 metai, ir šįsyk tasai būrelio amžių vidurkis sumažėjo 1 ir taip tapo 1 didesnis, nei buvo pradžioje. Kiek barsukų lankė susapnuotąjį būrelį?
3. Bebrungo Bungo bičiulio barsuko Barsingio Pingio gentainiai – barseliai ir barsytės – žaidė su bebro jiems išdrožtais mediniais skaitmenimis. Viena barsytė iš šešių skaitmenų sudėliojo šešiaženklį skaičių, bet barselis jos kūrinį sujaukė. Tada jis pamėgino vėl sudėti tą patį skaičių. Jam pavyko prisiminti to skaičiaus pirmųjų penkių skaitmenų tvarką, bet paskutinį skaitmenį 7 jis padėjo ne dešinėje nuo jų, kaip derėjo, o kairėje, padarydamas tą skaitmenį pirmuoju. Bebrungui, mėgusiam visokias sudėtingas trupmenas, teko nusivilti: padalijęs naująjį šešiaženklį skaičių iš pradinio, jis gavo paprastų paprasčiausią dalmenį 5. Nustatykite barsytės sudarytąjį pradinį šešiaženklį skaičių.
4. Bebras Bebrungas mėgo sudėtingas trupmenas bei kitokius iššūkius. Todėl jis nuobodžiavo eidamas pas savo bičiulį Barsingį lengvu ir patogiu, lygiu ir tobulai tiesiu takeliu. Ties takeliu augo keli beržai. Vėliau pakilęs kalvos viršūnėn, Bebrungas nužvelgė takelį nuoširdžiai reikliu žvilgsniu ir suvokė, kad takelis, kuriuo ką tik ėjo, ne toks jau paprastas: atstumai tarp minėtųjų beržų buvo tokie, kad kiekvienam iš devynių skaičių 1, 2, 3, ..., 9 buvo du beržai, augantys per lygiai tiek metrų vienas nuo kito, koks buvo tas skaičius. Dar daugiau: beržų skaičius buvo mažiausias įmanomas, kad taip galėtų būti. Kiek gi beržų augo ties tuo Bebrungą nustebinusiu takeliu?
5. Svečiuose pas Barsingį atsaini, bet tvirtų faktų pažėrusi Bebrungo kalba nuo takelio į Barsingio namus geometrinių savybių palengva, lyg koku vingresniu takeliu plaukiant, navinguriavo prie kitų panašių klausimų. Nebuvo apeitas ir klausimas apie tobulai taisyklingo šešiakampio $ABCDEF$ formos lauką, kurį reikia užsėti, ir apie tai, kas bus, jei užsėsime tik tą dalį, kurią riboja keturkampis $ABCE$. Barsingis Pingis, kruopščiai pripaišęs tokių šešiakampių ir dar priskaldęs visokių trikampių, vėl sulimpančių į didesnes figūras, greitai sumojo, kiek kartų tada sumažėtų užsėto lauko plotas. Kiek gi kartų jis sumažėtų?