XXXVI Lietuvos komandinė mokinių matematikos olimpiada prof. Jono Kubiliaus taurei laimėti

Atsakymai, sprendimai

Parengė Aivaras Novikas

1. Ats. $(0,0)$, $(1,1)$.

Tarkime, kad (x,y) yra duotosios sistemos sprendinys. Pažymėkime $t=5^{x-y}$, $u=5^x$, $v=5^{-y}$. Tada

$$t=uv>0, \qquad t^2+2t=3, \qquad u+5v=6.$$

Išsprendę kvadratinę lygtį $t^2+2t-3=0$, gauname, kad $t=1$ arba $t=-3$. Kadangi $t>0$, tai $uv=t=1$ ir

$$6=u+5v=u+\frac{5}{u}, \qquad u^2-6u+5=0, \qquad u=1 \text{ arba } u=5.$$

Atitinkamai gauname: $v=1$ arba $v=\frac{1}{5}$; $x=0$ arba $x=1$; $y=0$ arba $y=1$. Abu gauti sprendiniai $(0,0)$ ir $(1,1)$ tenkina duotąją sistemą.

2. Ats. $\frac{a^2}{36a^2-14a+1}$.

Jei $a\neq 0$, tai $x\neq 0$ ir

$$x+5x^{-1}=\frac{x^2+7x+5}{x}-7=a^{-1}-7,$$

$$\left(a^{-1}-7\right)^2=x^2+10+25x^{-2}=13+\frac{x^4-3x^2+25}{x^2},$$

$$\frac{x^2}{x^4-3x^2+25}=\left(a^{-2}-14a^{-1}+49-13\right)^{-1}=\frac{a^2}{36a^2-14a+1}.$$

Pastebėkime, kad trinario $y^2-3y+25$ diskriminantas neigiamas, todėl čia skaičiai $\frac{x^4-3x^2+25}{x^2}=a^{-2}-14a^{-1}+49-13$ ir $36a^2-14a+1$ nelygūs 0.

Jei $a=0$, tai $x=0$ ir $\frac{x^2}{x^4-3x^2+25}=0=\frac{a^2}{36a^2-14a+1}$.

3. Ats. $x\in\left\{-5;-2\frac{1}{3}\right\}\cup(-1;+\infty)$.

Duotąją nelygybę pertvarkykime, kad joje rastųsi pilnas kvadratas:

$$\frac{16(x+3)^4+(x+1)^4-8(x+3)^2(x+1)^2}{16(x+1)^3}\geqslant 0,$$

$$\frac{\left(4(x+3)^2-(x+1)^2\right)^2}{16(x+1)^3}\geqslant 0.$$

Skaitiklis kairėje gautosios nelygybės pusėje visada neneigiamas, todėl tinka visos x reikšmės, kurioms vardiklis teigiamas, t. y. visos reikšmės $x > -1$. Kai $x = -1$, tai pradinėje nelygybėje turime neapibrėžtumą. Kai $x < -1$, tai gautosios nelygybės kariės pusės vardiklis neigiamas. Tada tinka tos ir tik tos x reikšmės, kurioms skaitiklis lygus 0:

$$4(x+3)^2-(x+1)^2=0, \qquad 2x+6=\pm(x+1), \qquad x=-5 \text{ arba } -\frac{7}{3}.$$

4. Ats. Sprendinių nėra.

Skaičiaus 999 laipsniai su natūraliaisiais rodikliais iš eilės baigiasi skaitmenimis 9, 1, 9, 1, ... Kadangi skaičius 2^{999} yra lyginis, tai skaičius $999^{2^{999}}$ baigiasi skaitmeniu 1. Tada $-999^{2^{999}} = 10n + 9$, kur skaičius n yra sveikasis.

Jei $x \geqslant n+1$, tai $[x] \geqslant n+1$, $9x \geqslant 9n+9$ ir $[9x] \geqslant 9n+9$, taigi $[x]+[9x] \geqslant 10n+10$. Bet jei $x < n+1$, tai $[x] \leqslant n$, $9x < 9n+9$, $[9x] \leqslant 9n+8$ ir tada $[x]+[9x] \leqslant 10n+8$. Vadinasi, duotoji lygtis $[x]+[9x] = 10n+9$ sprendinių neturi.

5. Kadangi $x, y, z \in (0;1)$, tai $x^2 < x$, $\ y^2 < y$, $\ z^2 < z$ ir

$$\frac{1+9x^2}{1+2x+2y^2+2z^2}+\frac{1+9y^2}{1+2y+2z^2+2x^2}+\frac{1+9z^2}{1+2z+2x^2+2y^2}<$$
$$<\frac{1+9x^2}{1+2x^2+2y^2+2z^2}+\frac{1+9y^2}{1+2y^2+2z^2+2x^2}+\frac{1+9z^2}{1+2z^2+2x^2+2y^2}=$$
$$=\frac{3+9x^2+9y^2+9z^2}{1+2x^2+2y^2+2z^2}=\frac{3+(x^2+y^2+z^2)+8(x^2+y^2+z^2)}{1+2x^2+2y^2+2z^2}<$$
$$<\frac{3+(x+y+z)+8(x^2+y^2+z^2)}{1+2x^2+2y^2+2z^2}=\frac{4+8(x^2+y^2+z^2)}{1+2(x^2+y^2+z^2)}=4.$$

6. Ats. 365, 1825, 3650.

Pažymėkime $k=\frac{n}{73}$. Tada $n-k=72k$ turi dalytis iš 10^m, kur m yra skaičiaus k skaitmenų skaičius.

Ieškodami mažiausių tinkamų n reikšmių, pirmiausiai tarkime, kad skaičius $n \geqslant 100$ yra triženklis. Tada $m=1$, o $72k$ dalijasi iš 10. Skaičius $k=\frac{n}{73}>0$ yra vienaženklis ir dalijasi iš 5, tad $k=5$. Gauname vienintelę galimą reikšmę $n=73k=365$. Ji tenkina uždavinio sąlygą.

Toliau tarkime, kad skaičius n yra keturženklis. Tada $m = 2$, o $72k$ dalijasi iš 100. Skaičius k yra dviženklis ir dalijasi iš 25, tad $k = 25$, 50 arba 75. Kadangi $n = 73 \cdot 25 = 1825$ ir $n = 73 \cdot 50 = 3650$ tenkina uždavinio sąlygą, tai ir yra ieškomos skaičiaus n reikšmės.

7. Ats. $N = n$ kiekvienam $n \in \mathbb{N}$.

Kiekvienam $n \in \mathbb{N}$ pažymėkime $a_n = (10^{3^n} - 1) : 9 = 111\ldots111$. Matematine indukcija pagal n įrodysime tokį teiginį: kiekvienas skaičius a_n dalijasi iš 3^n, bet ne iš 3^{n+1}.

Tarkime, kad $n = 1$. Tada skaičius $a_1 = 111$ dalijasi iš 3, bet ne iš 3^2.

Tarkime, kad $k \in \mathbb{N}$, o skaičius a_k dalijasi iš 3^k, bet ne iš 3^{k+1}. Tada skaičius

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{10^{3^{k+1}} - 1}{10^{3^k} - 1} = 10^{2 \cdot 3^k} + 10^{3^k} + 1 = 100\ldots00100\ldots001$$

yra sveikasis. Jo skaitmenų suma lygi 3, todėl jis dalijasi iš 3, bet ne iš 9. Vadinasi, skaičius $a_{k+1} = a_k \cdot \frac{a_{k+1}}{a_k}$ dalijasi iš $3^k \cdot 3 = 3^{k+1}$, bet ne iš 3^{k+2}.

Remiantis matematinės indukcijos principu, teiginys įrodytas. Taigi kiekvienam $n \in \mathbb{N}$ didžiausia galima N reikšmė lygi n.

8. Ats. 12.

Skaičius d yra mažiausias pirminis skaičiaus m daliklis. Jei skaičius m nelyginis, tai tokie turi būti ir jo dalikliai d bei D. Tačiau tada sumos $m = D^5 + d^5$ reikšmė yra lyginė. Vadinasi, skaičius m lyginis ir $d = 2$.

Skaičius D dalija skaičių $m - D^5 = 2^5$. Reikšmė $D = 1$ netinka, nes tada $m = 1 + 32 = 33$ yra nelyginis. Taigi lieka galimos tik reikšmės $D = 2$, 4, 8, 16, 32 ir atitinkamai

$$m = 2^5 + 2^5, \qquad 2^{10} + 2^5, \qquad 2^{15} + 2^5 \qquad 2^{20} + 2^5, \qquad 2^{25} + 2^5.$$

Kiekvienu iš 5 atvejų turime $m = D^5 + d^5$, kur D ir d yra skaičiaus m teigiami dalikliai, o d yra mažiausias toks daliklis, didesnis už 1. Atitinkamos $D^2 + d^2$ reikšmės lygios

$$2^2 + 2^2 = 2^3, \qquad 2^4 + 2^2 = 2^2 \cdot 5, \qquad 2^6 + 2^2 = 2^2 \cdot 17,$$

$$2^8 + 2^2 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13, \qquad 2^{10} + 2^2 = 2^2 \cdot 257.$$

Čia skaičius 257 yra pirminis, nes nesidalija iš jokio pirminio skaičiaus, ne didesnio už $\sqrt{257} < 17$. Skaičiaus $D^2 + d^2$ teigiamų daliklių skaičius atitinkamai lygus 4, $3 \cdot 2$, $3 \cdot 2$, $3 \cdot 2 \cdot 2$, $3 \cdot 2$. Didžiausias iš šių 5 skaičių yra 12.

9. Tarkime, kad skaičiai p, q, r tenkina uždavinio sąlygą. Pažymėkime $a = \sqrt{pq+1} \in \mathbb{N}$. Tada $(a-1)(a+1) = pq$. Skaičiai p ir q yra pirminiai, todėl arba $a-1 = 1$, $a+1 = pq$, arba $\{a-1, a+1\} = \{p, q\}$. Pirmuoju atveju $pq - 1 = (a+1) - (a-1) = 2$ ir $pq = 3$, tačiau skaičius 3 nėra dviejų pirminių skaičių sandauga. Taigi turime antrąjį atvejį ir $|p-q| = (a+1) - (a-1) = 2$. Analogiškai įrodoma, kad $|p-r| = 2$.

   Tarkime, kad skaičiai q ir r yra skirtingi. Tada vienas iš jų yra 2 mažesnis, o kitas yra 2 didesnis už p. Taigi $\{p, q, r\} = \{b, b+2, b+4\}$. Kiekvienam $b \in \mathbb{N}$ vienas iš skaičių $b, b+2, b+4$ dalijasi iš 3. Šiuo atveju tas iš 3 dalusis skaičius dar ir pirminis, todėl lygus 3. Vienintelė tinkama galimybė yra $\{p, q, r\} = \{3, 5, 7\}$. Tada $p = b+2 = 5$ ir $p + 2qr + 2 = 5 + 2 \cdot 3 \cdot 7 + 2 = 7^2$.

   Tarkime, kad $q = r$. Tada $q = r = p \pm 2$ ir todėl $q \neq 2$. Tikslusis kvadratas $qr - p = q^2 - q \pm 2$ yra mažesnis už q^2, todėl

$$q^2 - q - 2 \leqslant qr - p \leqslant (q-1)^2 = q^2 - 2q + 1, \qquad q \leqslant 3.$$

   Vadinasi, $q = r = 3$, $p = 5$ ir $p + 2qr + 2 = 5 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 = 5^2$.

10. a) Imkime $n = 2a^2$, kur $a \in \mathbb{N}$. Tada

$$n^2 + 1 = 4a^4 + 1 = (4a^4 + 4a^2 + 1) - 4a^2 =$$

$$= (2a^2+1)^2 - (2a)^2 = (2a^2 - 2a + 1)(2a^2 + 2a + 1).$$

   Toliau taip parinkime a, kad skaičius $c = 2a^2 + 2a + 1$ išsiskaidytų mažesniais daugikliais. Pavyzdžiui, imkime $a = 5b + 1$, kur $b \in \mathbb{N}$. Tada $c \equiv 0 \pmod 5$, ir skaidinyje $c = 5 \cdot \frac{c}{5}$ turime $\frac{c}{5} \in \mathbb{N}$.

   Kiekvienam pakankamai dideliam $b \in \mathbb{N}$ turime

$$5 < \frac{2a^2 + 2a + 1}{5} < 2a^2 - 2a + 1 < 2a^2 = n.$$

   (Nesunku įsitikinti, kad šios nelygybės galioja visiems $a \geqslant 6$, taigi visiems $b \in \mathbb{N}$.) Tokiu atveju trijų poromis skirtingų natūraliųjų skaičių

$2a^2 - 2a + 1$, 5 ir $\frac{2a^2+2a+1}{5}$, kur $a = 5b + 1$, sandauga $n^2 + 1$ dalija skaičių $n!$. Taip gauname be galo daug smarkių skaičių $n = 2 \cdot (5b + 1)^2$, kur $b \in \mathbb{N}$.

b) Tarkime, kad $m \in \mathbb{N}$, o p yra bet koks pirminis skaičiaus $m^2 + 1$ daliklis. Tada m dalijasi iš p su tam tikra liekana $n \in \{1, 2, \ldots, p - 1\}$. Skaičius $n^2 + 1$ dalijasi iš p, o skaičius $n!$ iš $p > n$ nesidalija. Todėl taip gautas skaičius n niekada nebus smarkus.

Yra be galo daug pirminių skaičių p, kurie yra bent vieno iš skaičių m^2+1, kur $m \in \mathbb{N}$, dalikliai. Priešingu atveju tokius skaičius p galėtume pažymėti $p_1, p_2, \ldots, p_k$, ir skaičius $(p_1p_2 \ldots p_k)^2+1 > 1$ neturėtų nė vieno pirminio daliklio.

Vadinasi, imdami visas įmanomas tinkamas skaičių poras (m, p), gausime be galo daug skirtingų nesmarkaus skaičiaus n reikšmių: kitaip skaičiaus $n^2 + 1$ reikšmių, o tuo pačiu ir skaičiaus $n^2 + 1$ daliklio p reikšmių skaičius tebūtų baigtinis.

11. Ats. a) Taip; b) ne.

a) Uždavinio sąlygą tenkina tokia 5×6 lentelė:

1	1	1	1	1	−1
1	1	1	1	−1	−1
1	1	1	−1	−1	−1
1	1	−1	−1	−1	−1
1	−1	−1	−1	−1	−1

Skaičių sumos eilutėse ir stulpeliuose atitinkamai lygios 4, 2, 0, -2, -4 ir 5, 3, 1, -1, -3, -5.

b) Tarkime, kad į 6×6 lentelės langelius įrašyta po vieną iš skaičių 1 ir -1. Kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje yra po 6 sveikuosius nelyginius skaičius, kurių suma yra lyginis skaičius tarp -6 ir 6, t. y. vienas iš 7 skaičių -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6. Kadangi tokių sumų yra 12, tai bent dvi iš jų sutampa. Vadinasi, jokia 6×6 lentelė uždavinio sąlygos netenkina.

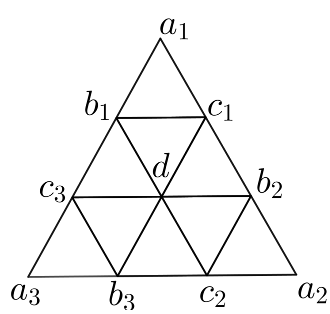
12. Ats. 90.

Žiūrint į obuolį iš tam tikros padėties, pradinis kirmėlės kubelis yra kubo apačioje, kairėje ir priekyje. Kad pasiektų priešingą kampinį kubelį, kirmėlė turi bent du kartus judėti kubeliais aukštyn, bent du kartus –

dešinėn ir bent du kartus – tolyn nuo žiūrovo. Taigi jai teks peršliaužti iš vieno kubelio į kitą lygiai 6 kartus. Jai teks atlikti lygiai du šliaužimus aukštyn (A ir A), lygiai du – dešinėn (D ir D) ir lygiai du – tolyn (T ir T). Šiuos šešis trijų tipų (A, D ir T) šliaužimus ji gali atlikti bet kokia tvarka ir taip, vis artėdama prie galutinio tikslo, peršliauš nuo apatinės sienos prie viršutinės, nuo kairiosios – prie dešiniosios, nuo priekinės – prie tolimosios, taigi atsidurs reikiamame kubelyje.

Vadinasi, kirmėlė turi tiek kelių į reikiamą kampinį kubelį, kiek yra skirtingų šešiaraidžių žodžių, kuriuose yra po dvi raides A, D ir T. Raidžių A pozicijas žodyje galima pasirinkti $C_6^2 = \frac{6\cdot5}{1\cdot2} = 15$ būdų. Jas pasirinkus, lieka $C_4^2 = \frac{4\cdot3}{1\cdot2} = 6$ būdai pasirinkti raidžių D pozicijas, o likusiose dviejose pozicijose liks įrašyti raidę T. Iš viso gauname $15\cdot6 = 90$ žodžių ir atitinkamai 90 kelių, kuriais gali šliaužti kirmėlė.

13. Tarkime, kad reikiamų trijų skaičių, įrašytų trikampėliuose, nėra. Skaičius, kuriais sunumeruotos trikampėlių viršūnės, pažymėkime, kaip parodyta paveikslėlyje.



Jei $a_1 \leqslant 7$, tai

$$47 \geqslant (b_1 + c_1 + d) + (a_2 + b_2 + c_2) + (a_3 + b_3 + c_3) =$$

$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + 10) - a_1 = 55 - a_1 \geqslant 55 - 7 = 48.$$

Vadinasi, $a_1 \geqslant 8$. Analogiškai gauname, kad $a_2 \geqslant 8$, $a_3 \geqslant 8$. Taigi $\{a_1, a_2, a_3\} = \{8, 9, 10\}$. Tačiau tada $d \leqslant 7$ ir

$$47 \geqslant (a_1 + b_1 + c_1) + (a_2 + b_2 + c_2) + (a_3 + b_3 + c_3) =$$

$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + 10) - d = 55 - d \geqslant 55 - 7 = 48.$$

Gavome prieštarą. Vadinasi, egzistuoja trys trikampėliuose įrašyti skaičiai, kurių suma didesnė už 47.

14. Užmigimo ir pabudimo 20 įvykių dalija paskaitos laiką į 21 laiko tarpą. Kiekvieno laiko tarpo metu miegojusių studentų skaičių iš eilės pažymėkime $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{20}$. Čia $a_0 = a_{20} = 0$. Gautoje sekoje bet kurie du gretimi nariai skiriasi 1, todėl visi sekos nariai su lyginiais indeksais yra lyginiai, o su nelyginiais – nelyginiai.

    Tarkime, kad kiekvienu paskaitos laiku buvo daugiausiai du miegantys studentai, t. y. kad sekoje $a_1, a_2, \ldots, a_{19}$ visi nariai yra ne didesni už 2. Kadangi kiekvienai miegojusių studentų porai buvo laikas, kai jie miegojo vienu metu, tai šioje sekoje yra mažiausiai $C_5^2 = 10$ narių, kurie lygūs 2. Kita vertus, šioje sekoje yra tik 9 lyginiai skaičiai. Gavome prieštarą. Vadinasi, tam tikru paskaitos metu miegojo trys ar daugiau studentų.

15. Narginėkime bet kurias dvi gretimas lentelės eilutes. Viršutinės eilutės skaičius iš eilės pažymėkime $a_1, a_2, \ldots, a_8$, o apatinės – $b_1, b_2, \ldots, b_8$. Pastebėkime: $a_1 = b_1$ tada ir tik tada, kai $a_2 \neq b_2$. Analogiškai $a_2 = b_2$ tada ir tik tada, kai $a_3 \neq b_3$, ir t. t. Vadinasi, arba $a_i = b_i$ visiems nelyginiams i ir $a_i \neq b_i$ visiems lyginiams i, arba $a_i \neq b_i$ visiems nelyginiams i ir $a_i = b_i$ visiems lyginiams i. Tokias dvi eilutes atitinkamai vadinkime N-lygiomis arba L-lygiomis.

    Nagrinėkime bet kurias tris gretimas lentelės eilutes. Jei vidurinė eilutė yra N-lygi tiek viršutinei, tiek apatinei arba L-lygi tiek viršutinei, tiek apatinei, tai viršutinė ir apatinė eilutės yra vienodos.

    Narginėkime bet kurias penkias gretimas lentelės eilutes. Jei jokios dvi iš jų nėra vienodos, o pirmoji eilutė yra N-lygi antrajai, tai antroji yra L-lygi trečiajai, trečioji – N-lygi ketvirtajai, o ketvirtoji – L-lygi penktajai. Tačiau tada pirmoji ir penktoji eilutės yra vienodos:

a	b	$\ldots$
a	$-b$	$\ldots$
$-a$	$-b$	$\ldots$
$-a$	b	$\ldots$
a	b	$\ldots$

    Atvejis, kai jokios dvi iš tų penkių eilučių nėra vienodos, o pirmoji eilutė yra L-lygi antrajai, analogiškas. Vadinasi, tarp bet kurių penkių gretimų duotosios lentelės eilučių yra dvi vienodos.

16. Ats. $5\frac{1}{5}$.

Nuleistosios aukštinės ilgį pažymėkime h, o atkarpų, į kurias ši aukštinė dalija duotojo trikampio įžambinę, ilgius pažymėkime x ir $x+2$. Du trikampiai, į kuriuos duotąjį trikampį dalija aukštinė, yra statieji ir turi po bendrą smailųjį kampą su duotuoju trikampiu. Todėl visi šie trys trikampiai yra panašūs. Duotojo trikampio statinių ilgių santykis lygus $3:2$, tad dviejų mažesniųjų trikampių atitinkamų statinių santykiai yra tokie patys: vienas iš skaičių $\frac{x+2}{h}$ ir $\frac{x}{h}$ lygus $\frac{3}{2}$, o kitas lygus $\frac{2}{3}$. Kadangi $\frac{x+2}{h} > \frac{x}{h}$, tai

$$\frac{x+2}{h} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{x}{h} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{2x+4}{3} = h = \frac{3x}{2}, \qquad 4x+8 = 9x, \qquad x = \frac{8}{5}.$$

Vadinasi, duotojo trikampio įžambinės ilgis lygus $x+(x+2) = \frac{26}{5} = 5\frac{1}{5}$.

17. Ats. 20°.

Nagrinėkime apskritimą c su centru B ir spinduliu $BA = BC$. Šiam apskritimui priklauso taškai A ir C. Taškai B ir M yra vienoje pusėje nuo tiesės AC, o kampas AMC lygus pusei kampo ABC. Todėl kampas AMC yra įbrėžtinis, o taškas M priklauso apskritimui c. Vadinasi, $BM = BA$ ir $\angle MAB = \angle AMB = 20^\circ$.

18. Ats. $14 + 8\sqrt{3}$.

Pažymėkime $x = BC$. Tada $CD = 2x$, $CE = CD - DE = 2x - 1$. Kadangi $\angle AEB = \angle AED = \angle BAE$ (priešiniai kampai), tai $BE = BA = 2x$. Stačiojo trikampio BCE statinis BC yra du kartus trumpesnis už įžambinę, todėl $\angle BEC = 30^\circ$ ir

$$\frac{x}{2x-1} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \left(2-\sqrt{3}\right)x = 1, \qquad x = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}.$$

Vadinasi, stačiakampio $ABCD$ plotas lygus

$$2x \cdot x = 2 \cdot \left(2+\sqrt{3}\right)^2 = 14 + 8\sqrt{3}.$$

19. Pažymėkime $\alpha = \angle CNM$ ir $\beta = \angle MCN = 90^\circ - \alpha$. Tiesių AD ir KM sankirtą pažymėkime L. Reikia įrodyti, kad $\angle DLK = 90^\circ$.

Trikampio BCN aukštinė MN yra ir jo pusiaukraštinė. Todėl šis trikampis lygiašonis ir $\angle MBN = \beta$. Kadangi keturkampiai $ABCD$ ir $CMNK$ yra įbrėžtiniai, tai

$$\angle LDK = 180^\circ - \angle ADC = \angle ABC = \angle MBN = \beta,$$

$$\angle DKL = \angle CKM \text{ (kryžminiai kampai) } = \angle CNM = \alpha,$$

$$\angle DLK = 180^\circ - \angle LDK - \angle DKL = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ.$$

20. Kadangi keturkampiai $ABPD$ ir $ACPM$ yra įbrėžtiniai, tai

$$\angle MBP = 180^\circ - \angle ADP = \angle CDP,$$

$$\angle BMP = 180^\circ - \angle AMP = \angle ACP = \angle DCP.$$

Be to, taškas M yra trikampio ABC apibrėžtinio apskritimo centras ir $MB = MC = CD$. Vadinasi, $\triangle MBP = \triangle CDP$ (pagal kraštinę ir du kampus). Šių lygių trikampių aukštinės iš viršūnės P yra lygios, t. y. taškas P yra vienodai nutolęs nuo tiesių AB bei AC ir priklauso jų sudaromo kampo BAC pusiaukampinei.