14-osios matematinės varžybos
Lietuvos Didžiosios Kunigaikštystės garbei

Atsakymai, sprendimai

Parengė Artūras Dubickas ir Aivaras Novikas

1. Ats. 19

Tarkime, kad P turi 20 šaknų intervale $(99; 100)$. Tada $Q(x) = P(x + 99)$ turi 20 šaknų intervale $(0; 1)$. Taigi daugianario Q visų šaknų sandauga yra didesnė už 0 ir mažesnė už 1. Kita vertus, pagal Vijeto teoremą ši sandauga yra lygi $Q(0) = P(99) \in \mathbb{Z}$ – prieštara.

Įrodysime, kad P gali turėti lygiai 19 šaknų intervale $(99; 100)$. Pažymėkime

$$F(x) = x^{20} + (1 - 38x)(3 - 38x)(5 - 38x) \ldots (37 - 38x).$$

Tada kiekvienam $k = 1, 2, \ldots, 18$ skaičius

$$F\left(\frac{k}{19}\right) = \left(\frac{k}{19}\right)^{20} + (1 - 2k)(3 - 2k)(5 - 2k) \ldots (37 - 2k) = \\ = \left(\frac{k}{19}\right)^{20} + (-1)^k (2k - 1)!!(37 - 2k)!!$$

yra teigiamas, kai k yra lyginis, ir neigiamas, kai k yra nelyginis. Be to, $F(0) > 0$ ir $F(1) < 0$. Vadinasi, kiekviename intervale $\left(\frac{k}{19}; \frac{k+1}{19}\right)$, kai $k = 0, 1, \ldots, 18$, daugianaris F turi bent vieną šaknį. Be to, F turi bent vieną šaknį intervale $(1; +\infty)$, nes $F(1) < 0$. Taigi iš viso daugianaris F turi 20 skirtingų realiųjų šaknų: lygiai 19 skirtingų šaknų intervale $(0; 1)$ ir dar vieną šaknį, didesnę už 1. Vadinasi, daugianaris $P(x) = F(x - 99)$ turi reikiamą pavidalą ir lygiai 19 šaknų intervale $(99; 100)$.

2. Ats. 64.

Olimpiados dalyvių skaičių pažymėkime n. Tegu $A = \{0, 1, \ldots, 7\}$.

Kiekvienam dalyviui užrašę už pirmus du uždavinius gautus taškus kaip skaičių porą (t_1, t_2), negausime dviejų vienodų porų. Kadangi $t_1, t_2 \in A$ ir $|A| = 8$, tai $n \leqslant 8^2 = 64$.

Įrodysime, kad reikšmė $n = 64$ yra galima. Nagrinėkime visų įmanomų trejetų (t_1, t_2, t_3), kur $t_1, t_2, t_3 \in A$ ir suma $t_1 + t_2 + t_3$ dalijasi iš 8, aibę B. Kiekvienai skaičių $t_1, t_2 \in A$ porai egzistuoja lygiai vienas toks trejetas: skaičių t_3 vienareikšmiškai apibrėžia sąlygos $t_3 \in A$,

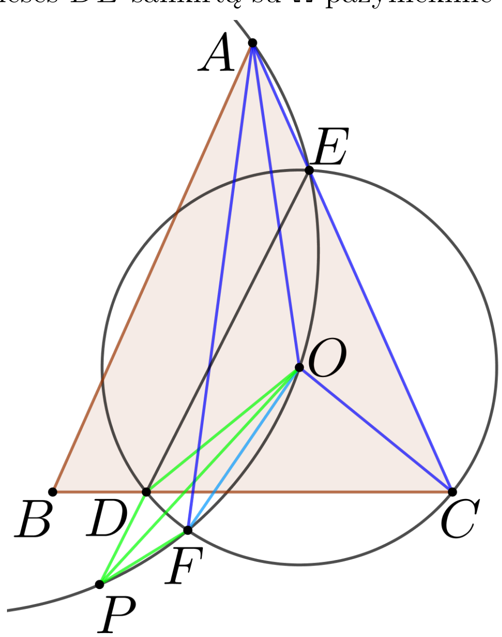
$t_3 \equiv -t_1 - t_2 \pmod 8$ (t. y. t_3 yra skaičiaus $-t_1-t_2$ dalybos iš 8 liekana). Taigi $|B| = 64$.

Įmanoma tokia situacija: olimpiadoje dalyvavo 64 mokiniai, kiekvieno iš jų rezultatai (taškai gauti už kiekvieną uždavinį) yra trejetas $(t_1, t_2, t_3) \in B$ ir jokių dviejų mokinių rezultatai nesutampa. Ši situacija tenkina uždavinio sąlygą. Iš tiesų, jei bet kurių dviejų mokinių rezultatai yra (u_1, u_2, u_3) ir (v_1, v_2, v_3), tai bet kuriems tarpusavyje skirtingiems $i, j \in \{1, 2, 3\} = \{i, j, k\}$ turime $(u_i, u_j) \neq (v_i, v_j)$, nes priešingu atveju skaičiai u_k ir v_k lygūs kaip lygių skaičių $(-u_i - u_j)$ ir $(-v_i - v_j)$ dalybos iš 8 liekanos.

Vadinasi, didžiausia galima n reikšmė lygi 64.

Pastaba. Sprendime naudojome trejetų (t_1, t_2, t_3) aibę B. Galima sudaryti 8×8 lentelę, kiekvienam trejetui $(t_1, t_2, t_3) \in B$ skaičių t_3 įrašant (t_1+1)-oje eilutėje, (t_2+1)-ame stulpelyje. Tai, kad 64 mokinių rezultatų aibė gali sutapti su aibe B, išplaukia iš gautosios lentelės savybės, kad jos kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje yra po 8 skirtingus skaičius nuo 0 iki 7. Esama ir kitokių 8×8 lentelių, pasižyminčių šia savybe. Kiekvienai iš jų galima imti visus 64 trejetus (t_1, t_2, t_3), kur t_3 yra skaičius, esantis $(t_1 + 1)$-oje eilutėje, $(t_2 + 1)$-ame stulpelyje, kaip 64 mokinių rezultatus, ir gausime situaciją, kuri tenkina uždavinio sąlygą.

3. Tiesės DE sankirtą su Ω pažymėkime P (žr. pav.).



Kadangi $OF = OE$, tai apskritime Ω turime

$$\angle FAO = \angle OAE = \angle CAO,$$

$$\angle OFA = 180^\circ - \angle AEO = \angle OEC = \angle OCE = \angle OCA.$$

Vadinasi, trikampiai AOF ir AOC panašūs (pagal du kampus) ir netgi lygūs (bendra kraštinė AO). Kadangi $AB = AC = AF$, tai A yra trikampio BFC apibrėžtinio apskritimo centras ir

$$\angle FAC = 2\angle FBC = 2\angle FBD,$$

$$\angle FPD = \angle FPE = \angle FAE = \angle FAC = 2\angle FBD.$$

Kadangi $OF = OE$, tai apskritime Ω turime

$$\angle FPO = \angle OPE = \angle DPO,$$

$$\angle OFP = 180^\circ - \angle PEO = 180^\circ - \angle ODE = \angle ODP.$$

Vadinasi, trikampiai POF ir POD panašūs (pagal du kampus) ir netgi lygūs (bendra kraštinė PO). Taigi $PD = PF$.

Kadangi $PD = PF$ ir $\angle FPD = 2\angle FBD$, tai taškas P, priklausantis Ω, yra trikampio BDF apibrėžtinio apskritimo centras.

Įrodyta.

4. Ats. $(1,1,1)$, $(1,2,4)$, $(1,4,2)$, $(2,1,4)$, $(2,4,1)$, $(4,1,2)$, $(4,2,1)$.

Tarkime, kad $n^2 = 2^a + 2^b + 2^c + 3$, kur $a, b, c, n \in \mathbb{N}$ ir $a \leqslant b \leqslant c$. Tada skaičius n nelyginis. Pažymėję $n = 2k + 1$ gauname, kad $n^2 = 4k(k+1) + 1 \equiv 1 \pmod 8$.

Jei $a \geqslant 2$, tai $n^2 \equiv 3 \pmod 4$ – prieštara. Taigi $a = 1$.

Jei $b \geqslant 3$, tai $n^2 = 2^b + 2^c + 5 \equiv 5 \pmod 8$ – prieštara. Taigi $b = 1$ arba $b = 2$.

Jei $b = 1$, tai $n^2 = 2^c + 7$. Jei šiuo atveju $c \geqslant 2$, tai $n^2 \equiv 3 \pmod 4$ – prieštara. Taigi $(a, b, c) = (1, 1, 1)$, ir šis trejetas tenkina uždavinio sąlygą: gauname $n^2 = 9 = 3^2$.

Jei $b = 2$, tai $n^2 = 2^c + 9$ ir $2^c = (n-3)(n+3)$. Tada $n > 3$. Galime pažymėti $n - 3 = 2^x$, $n + 3 = 2^y$, kur $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ir $x < y$. Skaičius $6 = 2^y - 2^x = 2^x \cdot (2^{y-x} - 1)$ dalijasi iš 2, bet ne iš 2^2. Taigi $x = 1$, $n = 2^x + 3 = 5$, $2^c = n^2 - 9 = 16$, $(a, b, c) = (1, 2, 4)$ (tinka: $n^2 = 25 = 5^2$).

Atsisakę sąlygos $a \leqslant b \leqslant c$, gauname dar 5 sprendinius, keisdami sprendinio $(1, 2, 4)$ skaičių tvarką.