LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

I. UŽDAVINIAI, SPRENDŽIAMI SUDARANT LYGTIS IR JŲ SISTEMAS

(2022–2024)

Teorinę medžiagą parengė ir pirmąją užduotį sudarė doc. dr. Antanas Apynis
(Vilniaus universitetas)

Iš patirties žinome, kad tekstiniai (žodiniai) darbo, judėjimo, mišinių (lydinių) ir kiti panašūs uždaviniai dažnai sprendžiami sudarant lygtis bei lygčių sistemas. Bet ne vien tik jie. Štai, pavyzdžiui, tiesių $y = 2x + 7$ ir $y = 3x + 9$ susikirtimo taško M koordinatės turi tenkinti ir vienos tiesės lygtį $y = 2x + 7$, ir kitos tiesės lygtį $y = 3x + 9$, nes tas taškas yra ir vienoje tiesėje, ir kitoje tiesėje. Vadinasi, taško M koordinatėms rasti reikia išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} y = 2x + 7, \\ y = 3x + 9, \end{cases}$$

kurią galima užrašyti, pavyzdžiui, ir taip:

$$\begin{cases} 2x - y = -7, \\ 3x - y = -9. \end{cases}$$

Išsprendę ją gautume, kad $x = -2,\ \ y = 3.$ Iš čia išplauktų išvada, jog pora (–2; 3) yra tiesių susikirtimo taško M koordinatės.

Siekdami labiau įsigilinti į šią temą, kartu išnagrinėkime kelis konkrečius pavyzdžius. Ką gali žinoti, gal tai padės įveikti visus šios temos uždavinius.

1 pavyzdys. Du automobiliai važiuoja apskritimu, kurio ilgis 3600 metrų. Pirmas automobilis per vieną sekundę nuvažiuoja 4 metrais toliau už antrą, todėl visą apskritimą jis įveikia 10 sekundžių greičiau. Koks yra kiekvieno automobilio greitis?

Sprendimas. Tegu v yra pirmo automobilio greitis (m/sek). Tada (pagal sąlygą) antro automobilio greitis yra $(v - 4)$ m/sek.

Pirmas automobilis visą ratą įveikia per $\frac{3600}{v}$ sekundžių, o antras – per $\frac{3600}{v-4}$ sekundžių. Pagal sąlygą, laiko skirtumas yra 10 sekundžių, todėl turi galioti lygybė

$$\frac{3600}{v-4} - \frac{3600}{v} = 10.$$

Tos lygties ir pakanka greičiui rasti. Beje, ji turi du sprendinius: $v_1 = 40$ ir $v_2 = -36.$ Bet (pagal prasmę) tinka tik $v = 40.$ Taigi pirmo automobilio greitis yra 40 m/sek = 144 km/h, o antro – 36 m/sek = 129,6 km/h.

Ats.: 144 km/h ir 129,6 km/h.

2 pavyzdys. Du broliai gyvena už 400 metrų nuo mokyklos. Eidamas į mokyklą, vyresnysis brolis nužingsniuoja 300 žingsnių mažiau už jaunesnįjį brolį, nes jo žingsnis yra 30 centimetrų ilgesnis. Koks yra kiekvieno brolio žingsnio ilgis?

Sprendimas. Jei jaunesniojo brolio žingsnis būtų x metrų ilgio, tai jis suskaičiuotų $\frac{400}{x}$ žingsnių. Tada $\frac{400}{x+0{,}3}$ būtų vyresniojo brolio žingsnių skaičius. Pagal sąlygą, turėtų galioti lygybė $\frac{400}{x} - \frac{400}{x+0{,}3} = 300.$ Iš čia gauname ekvivalenčią kvadratinę lygtį $10x^2 + 3x - 4 = 0$ $(x \neq 0$ ir $x \neq -0{,}3)$, turinčią du sprendinius: $x_1 = -0{,}8$ ir $x_2 = 0{,}5.$ Tačiau tinka tik antras.

Taigi jaunesniojo brolio žingsnio ilgis 0,5 m, o vyresniojo – 0,8 m.

Ats.: 0,5 m ir 0,8 m.

3 pavyzdys (Diofanto uždavinys). Skaičių 100 reikia du kartus suskaidyti į du dėmenis taip, kad pirmo skaidinio didesnysis dėmuo būtų dvigubai didesnis už antro skaidinio mažesnįjį dėmenį, o antro skaidinio didesnysis dėmuo būtų trigubai didesnis už pirmo skaidinio mažesnįjį dėmenį.

Sprendimas. Tegu pirmo skaidinio dėmenys yra a ir b, $a < b$, o antro – c ir d, $c < d$. Remdamiesi sąlyga, gauname tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} a+b=100, \\ c+d=100, \\ \quad b=2c, \\ \quad d=3a. \end{cases}$$

Spręsdami šią sistemą, gauname:

$$\begin{cases} a+2c=100, \\ c+3a=100, \\ \quad b=2c, \\ \quad d=3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=100-2c, \\ c+3(100-2c)=100, \\ \quad b=2c, \\ \quad d=3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=100-2c, \\ c=40, \\ b=80, \\ d=3a. \end{cases}$$

Taigi $a=20,\ \ b=80,\ \ c=40,\ \ d=60.$

Ats.: 20 ir 80; 40 ir 60.

4 pavyzdys. Baseinas pripildomas vandeniu 5 vamzdžiais:
pirmu vamzdžiu –per 24 minutes;
antru, trečiu ir ketvirtu –per 20 minučių;
antru, trečiu ir penktu – per 30 minučių;
pirmu ir penktu – per 15 minučių.

Apskaičiuokime, per kiek laiko baseinas būtų pripildytas vandeniu atsukus visų penkių vamzdžių čiaupus.

Sprendimas. Tegu V yra baseino tūris, t – ieškomas laikas (min.), o x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – baseino pripildymo sparta (V dalis per 1 min.) atitinkamai pirmu, antru, trečiu, ketvirtu ir penktu vamzdžiu.

Aišku, kad

$$t=\frac{V}{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}.$$

Sumai $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$ rasti sudarykime lygčių sistemą

$$\begin{cases} 24x_1 = V, \\ 20(x_2+x_3+x_4) = V, \\ 30(x_2+x_3+x_5) = V, \\ 15(x_1+x_5) = V. \end{cases}$$

Ji yra ekvivalenti šiai sistemai:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{24}V, \\ x_2+x_3+x_4 = \frac{1}{20}V, \\ x_2+x_3+x_5 = \frac{1}{30}V, \\ x_1+x_5 = \frac{1}{15}V. \end{cases}$$

Kadangi $x_1=\frac{1}{24}V$, tai iš ketvirtos lygties gauname, kad

$$x_5=\frac{1}{15}V-\frac{1}{24}V=\frac{3}{120}V=\frac{1}{40}V.$$

Iš trečios lygties randame x_2+x_3, o tada iš antros lygties – x_4 reikšmę:

$$x_2+x_3=\frac{1}{30}V-x_5=\left(\frac{1}{30}-\frac{1}{40}\right)V=\frac{1}{120}V;$$

$$x_4=\frac{1}{20}V-(x_2+x_3)=\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{120}\right)V=\frac{5}{120}V=\frac{1}{24}V.$$

Matome, kad nėra galimybės apskaičiuoti dydžių x_2 ir x_3 reikšmes. Bet tai nėra kliūtis ieškomai sumai rasti:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_1 + (x_2 + x_3) + x_4 + x_5 = \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{24} + \frac{1}{40}\right)V = \frac{7}{60}V.$$

Vadinasi, $t = \frac{60}{7} = 8\frac{4}{7}$.

Ats.: $8\frac{4}{7}$.

5 pavyzdys. Raskime visas parametro *a* reikšmes, kurioms esant kvadratinė lygtis

$$x^2 - \frac{15}{4}x + a^2 = 0$$

turi du sprendinius ir vienas iš jų yra lygus antro sprendinio kvadratui.

Sprendimas. Kad lygtis turėtų du sprendinius, jos diskriminantas $D = \left(\frac{15}{4}\right)^2 - 4a^2 = \frac{1}{16}(225 - 64a^2)$ turi būti teigiamas. Spręsdami nelygybę $D > 0$ gauname:

$$225 - 64a^2 > 0 \Rightarrow a^2 < \frac{225}{64} \Rightarrow |a| < \frac{15}{8}.$$

Taigi (1) lygtis turi du sprendinius, jei $a \in \left(-\frac{15}{8}; \frac{15}{8}\right)$.

Tegu x_1 ir x_2 yra (1) lygties sprendiniai. Pagal Vijeto teoremą,

$$x_1 + x_2 = \frac{15}{4} \text{ ir } x_1 \cdot x_2 = a^2.$$

Ieškant parametro *a* reikšmių, kurioms esant galioja sąlyga $x_1 = x_2^2$, reikia išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_2^2 + x_2 = \frac{15}{4}, \\ x_2^2 \cdot x_2 = a^2. \end{cases}$$

Gausime:

$$\begin{cases} 4x_2^2 + 4x_2 - 15 = 0, \\ x_2^3 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x_2 + 1)^2 - 16 = 0, \\ x_2^3 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_2 + 1 = \pm 4, \\ x_2^3 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{5}{2} \text{ arba } x_2 = \frac{3}{2}, \\ x_2^3 = a^2. \end{cases}$$

Iš čia gauname, kad $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_1 = \frac{9}{4}$, ir $a^2 = \frac{27}{8}$. Todėl $a = \pm\sqrt{\frac{27}{8}} = \pm\sqrt{\frac{54}{16}} = \pm\frac{3\sqrt{6}}{4}$. Nesunku įsitikinti, kad ir skaičius $-\frac{3\sqrt{6}}{4}$, ir skaičius $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ priklauso intervalui $\left(-\frac{15}{8}; \frac{15}{8}\right)$. Vadinasi, $a \in \left\{-\frac{3\sqrt{6}}{4}; \frac{3\sqrt{6}}{4}\right\}$.

Ats.: $a \in \left\{-\frac{3\sqrt{6}}{4}; \frac{3\sqrt{6}}{4}\right\}$.

6 pavyzdys. Raskime parabolės lygtį, žinodami, kad ši parabolė eina per taškus (1; 4), (–2; –5) ir (3; 0), o jos simetrijos ašis yra lygiagreti su koordinačių sistemos ašimi *Oy*.

Sprendimas. Ieškomos parabolės bendroji lygtis yra $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Pagal sąlygą, turi galioti šios lygybės:

$$a + b + c = 4, \quad 4a - 2b + c = -5, \quad 9a + 3b + c = 0.$$

Iš jų sudarome ir sprendžiame lygčių (nežinomieji čia yra *a*, *b* ir *c*) sistemą:

$$\begin{cases} a+b+c=4, \\ 4a-2b+c=-5, \\ 9a+3b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=4-a-b, \\ 4a-2b+(4-a-b)=-5, \\ 9a+3b+(4-a-b)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=4-a-b, \\ 3a-3b=-9, \\ 8a+2b=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=4-a-b, \\ a-b=-3, \\ 4a+b=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

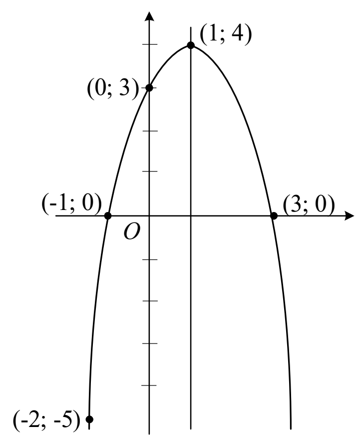
$$\Rightarrow \begin{cases} c=4-a-b, \\ a=b-3, \\ 4(b-3)+b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=4-a-b, \\ a=b-3, \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow a=-1, b=2, c=3.$$

Taigi ieškoma parabolės lygtis yra

$$y=-x^2+2x+3.$$

Šios parabolės šakos leidžiasi žemyn (žr. pav.), viršūnės taško koordinatės yra (1; 4); su ašimi Oy ji susikerta taške (0; 3), o su ašimi Ox susikerta taškuose (3; 0) ir (-1; 0).

Ats.: $y=-x^2+2x+3$.



PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Lygus laukas yra stačiakampio formos. Vieno krašto taške M yra akmuo, nuo artimiausio kampo nutolęs per vieną dešimtąją to krašto ilgio dalį.

Einant iš taško M iki tolimiausio kampo sklypo kraštu ir ėjimo kryptį keičiant tik vieną kartą tektų sugaišti 1 h 3 min, o einant į tą kampą tiesiai per lauką pakaktų 45 min. Kelionė sklypo įstrižaine užtruktų daugiau kaip 48 min.

Apskaičiuokite, per kelias minutes iš taško M galima nueiti (tuo pačiu pastoviu greičiu kaip ir kitur) iki artimiausio kampo.

2. Du grybautojai miške rado po 40 grybų, tarp kurių per abu buvo 52 baravykai, Apskaičiuokite, kiek baravykų rado kiekvienas grybautojas, jei žinoma, kad pirmojo grybautojo baravykų ir likusių grybų skaičiaus santykis yra 4 kartus didesnis už antrojo grybautojo baravykų ir likusių grybų skaičiaus santykį.

3. Du darbininkai tam tikrą darbą atliko per 10 dienų, bet pirmas darbininkas paskutines dvi dienas nedirbo. Per pirmas 7 dienas buvo atlikta 80 % viso darbo. Apskaičiuokite, per kelias dienas visą darbą galėtų atlikti pirmas darbininkas.

4. Iš A į B išvažiavo krovininis automobilis, o po valandos – ir lengvasis automobilis. Punktą B abu automobiliai pasiekė tuo pačiu laiko momentu. Jei vienas iš jų būtų išvažiavęs iš A į B, o kitas – iš B į A (tuo pačiu laiko momentu), tai būtų susitikę po 1 h 12 min.

Kiek laiko iš A į B važiavo krovininis automobilis?

5. Indas pripiltas 96 % koncentracijos rūgšties tirpalo. Nupylus 2,5 litro, į jį įpilta tiek pat 80 % koncentracijos tos pačios rūgšties tirpalo. Pakartojus tokį pat veiksmą (nupylus 2,5 litro gauto tirpalo ir įpylus tiek pat 80 % koncentracijos tirpalo), rūgšties koncentracija tirpale pasidarė 89 %.

Kokia indo talpa?

6. Yra trys lydiniai, sudaryti iš metalų A, B ir C. Pirmą lydinį sudaro tik metalai A ir B, kurių masių santykis 3:5; antrą – tik metalai B ir C, kurių masių santykis 1:2, o trečią – tik A ir C, kurių masių santykis 2:3.

Iš šių lydinių gautas naujas lydinys, kuriame metalų A, B ir C santykis yra 3:5:2.

Raskite pirmo, antro ir trečio lydinio masių santykį šiame lydinyje.

7. Sugalvotas teigiamas sveikasis skaičius. Reikėjo jį padidinti 200 000 vienetų ir gautą skaičių patrigubinti. Tačiau pakako prirašyti prie sugalvoto skaičiaus skaitmenį 2 (dešinėje pusėje) ir buvo gautas tas pats rezultatas.

Koks skaičius buvo sugalvotas?

8. Apskaičiuokite funkcijos *f*, tenkinančios sąlygą $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}$, $x>0$, reikšmę $f(4)$.

9. Nustatykite, ar yra parabolė, kuri eitų per taškus $M_1(1; 3)$, $M_2(0; 5)$, $M_3(2; 5)$ ir $M_4(-1; 11)$, o simetrijos ašis būtų lygiagreti su koordinačių sistemos ašimi *Oy*. Jeigu taip, parašykite jos lygtį.

10. Raskite tokią *a* ir *b* reikšmių porą (*a*; *b*), kad tiesė $y=ax+b$ eitų per tašką (–1; 1) ir per tiesių $y=3x-5$ ir $y=x+1$ susikirtimo tašką *M*.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2022 m. gruodžio 15 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: http://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/

LIETUVOS JAUN ŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA