



PASVALIO KRAŠTO
22-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2022 m. lapkričio 25 d.

Uždaviniai jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Pamokoje nedalyvavusių mokinių skaičius sudaro 12,5 proc. dalyvaujančių pamokoje. Jei iš klasės išeitų dar du mokiniai, tai nedalyvaujančių pamokoje skaičius sudarytų 20 proc. dalyvaujančių pamokoje. Kiek klasėje yra mokinių?
2. Krūvelėje yra 2022 monetos. Du žaidėjai žaidžia taip: vienu ėjimu pirmasis žaidėjas gali paimiti bet kuri lyginį monetų skaičių nuo 2 iki 100, o antrasis žaidėjas – bet kuri nelyginį skaičių monetų nuo 1 iki 99. Pralaimi tas žaidėjas, kuris nebegali atlikti ėjimo. Kuris žaidėjas (teisingai žaisdamas) gali visada laimėti?
3. Grybautojų grupę sudarė 11 mergaičių ir n berniukų. Iš viso jie surinko $n^2 + 9n - 2$ grybus. Kurių buvo daugiau – mergaičių ar berniukų, jei žinoma, kad visi surinko po vienodą grybų skaičių?
4. Pirkėjas į parduotuvę atsinešė šiek tiek mažiau nei 150 eurų, be to, visi pinigai buvo tik 1 euro monetos ir 5 eurų banknotai. Apsipirkus paaiškėjo, kad pirkėjas išleido 2 trečdalius turėtos sumos, vieno euro monetų liko tiek, kiek iš pradžių buvo 5 eurų banknotų, o 5 eurų banknotų liko tiek, kiek iš pradžių buvo vieno euro monetų. Kiek pinigų pirkėjas išleido?
5. Grupė keliautojų 8 valandą ryto išvyko autobusu iš miesto A į miestą B . Pakeliui jie suplanavo sustojimą mieste M . Po 2 valandų jie pasiekė miestą K , o vairuotojas pranešė, kad iki miesto M liko tiek kelio, kiek jie jau nuvažiavo. Mieste M grupė kurį laiką ilsėjosi, o po to vėl važiavo link miesto B . Lygiai 17 valandą ji buvo už 150 km nuo miesto K . Tuomet vairuotojas pranešė, kad iki miesto B liko tiek kelio, kiek jie nuvažiavo nuo miesto M . Miestą B keliautojai pasiekė 20 valandą. Koks atstumas tarp miestų A ir B , jei visą kelionės laiką autobuso greitis buvo pastovus?
6. Natūralųjį skaičių vadinsime *šauriu skaičiumi*, jeigu jo skaitmenų suma lygi 6, o jis pats dalijasi iš 6, bet nesidalija iš 12. Pavyzdžiui, skaičiai 222 ir 2022 yra šaurūs. Kiek yra šaurių skaičių, didesnių už 222, bet mažesnių už 2022?
7. Parduotuvėje buvo 6 dėžės vinių: 22 kg, 23 kg, 26 kg, 28 kg, 29 kg, 31 kg. Du pirkėjai iš viso nupirko 5 dėžes. Be to, vienas pirkėjas nupirko 4 kartus daugiau vinių už kitą. Kuri dėžė liko neparduota?
8. Realieji skaičiai x ir y tenkina lygybes $x + y = 6$ ir $x^3 + y^3 = 144$. Raskite $x^2 + y^2$.
9. Atkarpa AD yra lygiašonės trapecijos $ABCD$ ilgesnysis pagrindas, įstrižainė AC dalija trapeciją į du lygiašonius trikampius. Raskite trapecijos kampus.
10. Trikampio ABC plotas lygus 15 cm^2 , $AB = 7 \text{ cm}$, $AC = 5 \text{ cm}$. Į trikampį įbrėžtas pusskritulis, kurio centras yra kraštinėje BC . Raskite pusskritulio spindulį.



PASVALIO KRAŠTO
22-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2022 m. lapkričio 25 d.

Uždaviniai vyresniųjų klasių mokiniams

1. Kvadratinio trinario $ax^2 + bx + c$ reikšmė yra sveikasis skaičius, kai $x=0$, $x=1$ ir $x=2$. Įrodykite, kad šis trinaris įgyja sveikąją reikšmę esant bet kuriam sveikajam skaičiui x .
2. Krūvelėje yra 2022 monetos. Du žaidėjai žaidžia taip: vienu ėjimu pirmasis žaidėjas gali paimti bet kurį lyginį monetų skaičių nuo 2 iki 100, o antrasis žaidėjas – bet kurį nelyginį skaičių monetų nuo 1 iki 99. Pralaimi tas žaidėjas, kuris nebegali atlikti ėjimo. Kuris žaidėjas (teisingai žaisdamas) gali visada laimėti?
3. Grybautojų grupę sudarė 11 mergaičių ir n berniukų. Iš viso jie surinko $n^2 + 9n - 2$ grybus. Kurių buvo daugiau – mergaičių ar berniukų, jei žinoma, kad visi surinko po vienodą grybų skaičių?
4. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių n , kuriam esant $\sqrt[5]{2n}$, $\sqrt[6]{3n}$ ir $\sqrt[7]{5n}$ yra sveikieji skaičiai.
5. Teigiamo sveikąjo skaičiaus n faktorialas (žym. $n!$) apibrėžiamas formule
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$
Kurio skaičiaus faktorialą reikia išbraukti iš sandaugos $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 20!$, kad likusi sandauga būtų natūraliojo skaičiaus kvadratas?
6. Natūralųjį skaičių vadinsime *šauniu skaičiumi*, jeigu jo skaitmenų suma lygi 6, o jis pats dalijasi iš 6, bet nesidalija iš 12. Pavyzdžiui, skaičiai 222 ir 2022 yra šaunūs. Kiek yra šaunių skaičių, didesnių už 222, bet mažesnių už 2022?
7. Į parduotuvę toje pačioje dėžėje vežami bananai ir sausainiai. Prikrauta bananų dėžė svertų 200 kg, o vien tik sausainių – 40 kg. Tačiau ji turi sverti ne daugiau kaip 100 kg. Kilogramas bananų kainuoja 2 eurus, o kilogramas sausainių – 6 eurus. Kokią didžiausią pinigų sumą galima gauti nuvežus į parduotuvę vieną dėžę šių prekių?
8. Realieji skaičiai a , b ir c ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$) tenkina sąlygas
$$3a + 4b = 3c \quad \text{ir} \quad 4a - 3b = 4c.$$
Įrodykite, kad skaičiai $|a|$, $|b|$ ir $|c|$ yra kurio nors stačiojo trikampio kraštinių ilgių.
9. Stačiojo trikampio statinių ilgių 5 ir 12. Raskite apskritimo, liečiančio įžambinę ir statinių tęsinius, spindulio ilgį.
10. Iškiliojo keturkampio $ABCD$ kampas D yra smailusis, o visi kiti kampai – bukieji. Kuri įstrižainė yra ilgesnė – AC ar BD ?