PASVALIO KRAŠTO 22-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2022 m. lapkričio 25 d.

Uždavinių sprendimai jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Pamokoje nedalyvavusių mokinių skaičius sudaro 12,5 proc. dalyvaujančių pamokoje. Jei iš klasės išeitų dar du mokiniai, tai nedalyvaujančių pamokoje skaičius sudarytų 20 proc. dalyvaujančių pamokoje. Kiek klasėje yra mokinių?

Sprendimas. Sakykime, kad atvykusių į pamokas mokinių skaičius yra x, tuomet nedalyvaujančių skaičius yra $0{,}125x$. Jei du mokiniai išeitų, klasėje liktų $x-2$ mokiniai, o nedalyvaujančių mokinių skaičius būtų $0{,}125x+2$. Pagal sąlygą, $0{,}125x+2=0{,}2(x-2)$. Iš čia randame $x=32$. Taigi į pamoką atvyko 32 mokiniai, neatvyko $0{,}125\cdot 32=4$, o iš viso klasėje yra 36 mokiniai.

Ats.: 36.

2. Krūvelėje yra 2022 monetos. Du žaidėjai žaidžia taip: vienu ėjimu pirmasis žaidėjas gali paimti bet kurį lyginį monetų skaičių nuo 2 iki 100, o antrasis žaidėjas – bet kurį nelyginį skaičių monetų nuo 1 iki 99. Pralaimi tas žaidėjas, kuris nebegali atlikti ėjimo. Kuris žaidėjas (teisingai žaisdamas) gali visada laimėti?

Sprendimas. Kad ir kokį monetų skaičių x, $x\in\{1;3;...;99\}$, pasirinktų antrasis žaidėjas, pirmasis gali pasiekti, kad bendra suma būtų 101 – jam pakanka paimti $101-x$ monetų, nes $101-x$ yra lyginis skaičius tarp 2 ir 100.

Kadangi $2022=101\cdot 20+2$, tai pirmu ėjimu pirmasis žaidėjas turėtų paimti 2 monetas, o tada derintis prie antrojo žaidėjo pasirinkimo taip, kad bendra paimtų monetų skaičių suma būtų 101. Ir to pakaks, kad jis laimėtų. Iš tikrųjų, po dvidešimto pirmojo žaidėjo ėmimo bus paimta 1921 moneta, taigi liks 101 moneta ir antrasis žaidėjas bus priverstas paimti dar bent vieną monetą. Todėl liks ne daugiau 100 monetų ir po dvidešimt pirmo pirmojo žaidėjo ėmimo neliks monetų ir jis laimės.

Ats.: Pirmasis žaidėjas.

3. Grybautojų grupę sudarė 11 mergaičių ir n berniukų. Iš viso jie surinko n^2+9n-2 grybus. Kurių buvo daugiau – mergaičių ar berniukų, jei žinoma, kad visi surinko po vienodą grybų skaičių?

Sprendimas. Pagal sąlygą, skaičius n^2+9n-2 turi dalytis iš $n+11$ (nes visi surinko po vienodą grybų skaičių). Dalydami, pavyzdžiui, kampu gauname:

$$
\begin{array}{l|l}
-\;n^2+9n-2 & n+11 \\ \cline{2-2}
\underline{n^2+11n} & n-2 \\
\quad -\;-2n-2 & \\
\quad\;\; \underline{-2n-22} & \\
\qquad\quad 20 &
\end{array}
$$

Aišku, tą patį rezultatą galima gauti ir grupuojant:

$$n^2+9n-2=(n^2+11n)-(2n+22)+20=n(n+11)-2(n+11)+20=(n+11)(n-2)+20.$$

Kad skaičius n^2+9n-2 dalytųsi iš $n+11$ be liekanos, 20 turi dalytis iš $n+11$, todėl būtinai turi būti $n=9$. Taigi grybautojų grupėje buvo 9 berniukai ir 11 mergaičių.

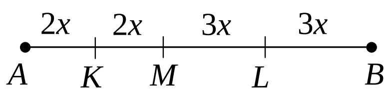
Ats.: mergaičių.

4. Pirkėjas į parduotuvę atsinešė šiek tiek mažiau nei 150 eurų, be to, visi pinigai buvo tik 1 euro monetos ir 5 eurų banknotai. Apsipirkus paaiškėjo, kad pirkėjas išleido 2 trečdalius turėtos sumos, vieno euro monetų liko tiek, kiek iš pradžių buvo 5 eurų banknotų, o 5 eurų banknotų liko tiek, kiek iš pradžių buvo vieno euro monetų. Kiek pinigų pirkėjas išleido?

Sprendimas. Sakykime, kad buvo x vieno euro monetų ir y 5 eurų banknotų, tuomet po apsipirkimo liko x banknotų ir y monetų. Taigi iš viso buvo $x+5y$ eurų, o liko $5x+y$ eurų. Pagal sąlygą, $5x+y=\frac{1}{3}(x+5y).$ Iš čia $15x+3y=x+5y,$ t. y. $y=7x.$ Taigi iš viso pirkėjas turėjo $x+5y=x+35x=36x$ eurų. Nelygybės $36x<150$ sprendiniai yra intervalas $\left(-\infty;\frac{25}{6}\right),$ šio intervalo didžiausias sveikasis skaičius $x=4.$ Todėl iš viso buvo $36\cdot 4=144$ eurai, o išleista $144\cdot\frac{2}{3}=96.$

Ats.: 96 eurus.

5. Grupė keliautojų 8 valandą ryto išvyko autobusu iš miesto *A* į miestą *B*. Pakeliui jie suplanavo sustojimą mieste *M*. Po 2 valandų jie pasiekė miestą *K*, o vairuotojas pranešė, kad iki miesto *M* liko tiek kelio, kiek jie jau nuvažiavo. Mieste *M* grupė kurį laiką ilsėjosi, o po to vėl važiavo link miesto *B*. Lygiai 17 valandą ji buvo už 150 km nuo miesto *K*. Tuomet vairuotojas pranešė, kad iki miesto *B* liko tiek kelio, kiek jie nuvažiavo nuo miesto *M*. Miestą *B* keliautojai pasiekė 20 valandą. Koks atstumas tarp miestų *A* ir *B*, jei visą kelionės laiką autobuso greitis buvo pastovus?



Sprendimas. Sakykime, kad autobuso greitis $x\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$ Tuomet (pagal sąlygą) $AK=KM=2x.$ Sakykime, kad 17 val. keliautojai buvo taške *L*. Iš sąlygos išplaukia, kad $ML=LB$ (žr. pav.), o atstumą LB autobusas nuvažiavo per 3 valandas. Todėl $ML=LB=3x.$ Kadangi $KL=KM+ML,$ tai $150=2x+3x=5x.$ Iš čia $x=30.$ Vadinasi, $AB=AK+KM+ML+LB=10x=300$ (km).

Ats.: 300 km.

6. Natūralųjį skaičių vadinsime *šauniu skaičiumi*, jeigu jo skaitmenų suma lygi 6, o jis pats dalijasi iš 6, bet nesidalija iš 12. Pavyzdžiui, skaičiai 222 ir 2022 yra šaunūs. Kiek yra šaunių skaičių , didesnių už 222, bet mažesnių už 2022?

Sprendimas. Aišku, kad tinka tik tie skaičiai, kurių paskutinis (vienetų) skaitmuo yra lyginis, bet mažesnis už 6. Todėl galimi tik šie atvejai:

1) $\overline{AB0},\ A+B=6;$ 2) $\overline{AB2},\ A+B=4;$ 3) $\overline{AB4},\ A+B=2;$

4) $\overline{1AB0},\ A+B=5;$ 5) $\overline{1AB2},\ A+B=3;$ 6) $\overline{1AB4},\ A+B=1;$

7) $\overline{20BC},\ B+C=4.$

Taikydami perrankos metodą gauname, kad ieškomi skaičiai yra:

330, 510, 402, 1050, 1230, 1410, 1122, 1302, 1014.

Taigi šaunių skaičių, didesnių už 222, bet mažesnių už 2022, yra 9.

Ats.: 9.

7. Parduotuvėje buvo 6 dėžės vinių: 22 kg, 23 kg, 26 kg, 28 kg, 29 kg, 31 kg. Du pirkėjai iš viso nupirko 5 dėžes. Be to, vienas pirkėjas nupirko 4 kartus daugiau vinių už kitą. Kuri dėžė liko neparduota?

Sprendimas. Iš viso buvo $22+23+26+28+29+31=159$ kilogramai vinių. Jei vienas pirkėjas nupirko x kg, tai kitas – $4x$ kg. Taigi abu jie nupirko $5x$ kg vinių. Todėl nupirktų vinių masė turi dalytis iš 5. Iš skaičių $159-22=137,$ $159-23=136,$ $159-26=133,$ $159-28=131,$ $159-29=130,$ $159-31=128$ tik skaičius 130 dalijasi iš 5. Vadinasi, buvo nupirkta 130 kg vinių, o liko dėžė, kurioje buvo 29 kg vinių.

Ats.: 29 kg.

8. Realieji skaičiai x ir y tenkina lygybes $x+y=6$ ir $x^3+y^3=144$. Raskite x^2+y^2.

Sprendimas. Aišku, kad

$$x^3+y^3=(x+y)((x^2+y^2)-xy)$$

ir

$$(x+y)^2=(x^2+y^2)+2xy.$$

Pagal sąlygą,

$$144=6((x^2+y^2)-xy) \text{ ir } 36=(x^2+y^2)+2xy.$$

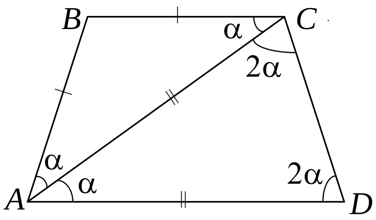
Iš čia gauname:

$$\begin{cases}(x^2+y^2)-xy=24,\\(x^2+y^2)+2xy=36\end{cases} \Rightarrow 2(x^2+y^2)+(x^2+y^2)=2\cdot 24+36 \Rightarrow 3(x^2+y^2)=84 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=28.$$

Ats.: 28.

9. Atkarpa AD yra lygiašonės trapecijos $ABCD$ ilgesnysis pagrindas, įstrižainė AC dalija trapeciją į du lygiašonius trikampius. Raskite trapecijos kampus.



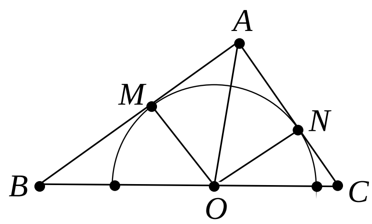
Sprendimas. Kadangi trapecijos $ABCD$ pagrindas AD ilgesnis už pagrindą BC, tai kampas ABC yra bukasis, todėl lygiašoniame trikampyje ABC teisinga lygybė $AB=BC$. Žymėkime $\angle BAC = \angle BCA=\alpha$. O kadangi $\angle BCA=\angle CAD$, tai $\angle CAD=\alpha$ (žr. pav.). Taigi $\angle BAD=\angle ADC=2\alpha$.

Aišku, kad lygiašoniame trikampyje ACD negali būti $CD=AC$ (nes $\angle B$ yra bukasis). Taip pat negali būti $CD=AD$, nes BC yra trumpesnė atkarpa už AD. Vadinasi, $AD=AC$ ir $\angle ACD=\angle ADC=2\alpha$.

Iš lygybės $\alpha+2\alpha+2\alpha=180^\circ$, gauname, kad $\alpha=36^\circ$. Todėl $\angle A=\angle D=72^\circ$ ir $\angle B=\angle C=108^\circ$.

Ats.: 72° ir 108°.

10. Trikampio ABC plotas lygus 15 cm^2, $AB=7$ cm, $AC=5$ cm. Į trikampį įbrėžtas pusskritulis, kurio centras yra kraštinėje BC. Raskite pusskritulio spindulį.



Sprendimas. Sakykime, kad taškas O yra įbrėžto pusskritulio centras, taškuose M ir N šis pusskritulis liečia kraštines AB ir AC (žr. pav.) $OM=ON=r$ – pusskritulio spindulys. Tuomet atkarpos OM ir ON yra trikampių AOB ir AOC aukštinės. Kadangi trikampio ABC plotas lygus trikampių AOB ir AOC plotų sumai, tai $15=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot r+\frac{1}{2}\cdot 5\cdot r$, o iš čia $r=2{,}5$ (cm).

Ats.: 2,5 cm.

PASVALIO KRAŠTO
22-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2022 m. lapkričio 25 d.

Uždavinių sprendimai
vyresniųjų klasių mokiniams

1. Kvadratinio trinario ax^2+bx+c reikšmė yra sveikasis skaičius, kai $x=0$, $x=1$ ir $x=2$. Įrodykite, kad šis trinaris įgyja sveikąją reikšmę esant bet kuriam sveikajam skaičiui *x*.

Sprendimas. Pagal sąlygą, skaičiai c, $a+b+c$ ir $4a+2b+c$ yra sveikieji, t. y. $c\in\mathbf{Z}$, $a+b+c\in\mathbf{Z}$ ir $4a+2b+c\in\mathbf{Z}$. Iš sąlygų $c\in\mathbf{Z}$ ir $a+b+c\in\mathbf{Z}$ išplaukia, kad $a+b\in\mathbf{Z}$, o tada iš sąlygos $4a+2b+c=2a+2(a+b)+c\in\mathbf{Z}$ išplaukia, jog $2a\in\mathbf{Z}$. Vadinasi, ir $2b\in\mathbf{Z}$, nes $2a+2b=$ $=2(a+b)\in\mathbf{Z}$.

Matome, kad $2a$, $2b$ ir c yra sveikieji skaičiai.
Nagrinėkime du atvejus:
1) $x=2m$, $m\in\mathbf{Z}$, ir
2) $x=2m+1$, $m\in\mathbf{Z}$.
Pirmu atveju gauname, kad

$$ax^2+bx+c=a(2m)^2+b\cdot 2m+c=4am^2+2bm+c=2\cdot 2a\cdot m^2+2b\cdot m+c\in\mathbf{Z}.$$

Antru atveju ax^2+bx+c taip pat yra sveikasis skaičius, nes

$$ax^2+bx+c=a(2m+1)^2+b(2m+1)+c=a(4m^2+4m+1)+2bm+b+c=$$
$$=4a(m^2+m)+2bm+(a+b+c).$$

2. Krūvelėje yra 2022 monetos. Du žaidėjai žaidžia taip: vienu ėjimu pirmasis žaidėjas gali paimti bet kurį lyginį monetų skaičių nuo 2 iki 100, o antrasis žaidėjas – bet kurį nelyginį skaičių monetų nuo 1 iki 99. Pralaimi tas žaidėjas, kuris nebegali atlikti ėjimo. Kuris žaidėjas (teisingai žaisdamas) gali visada laimėti?

Sprendimas. Kad ir kokį monetų skaičių *x*, $x\in\{1;3;\ldots;99\}$, pasirinktų antrasis žaidėjas, pirmasis gali pasiekti, kad bendra suma būtų 101 – jam pakanka paimti 101 – *x* monetų, nes 101 – *x* yra lyginis skaičius tarp 2 ir 100.

Kadangi $2022=101\cdot 20+2$, tai pirmu ėjimu pirmasis žaidėjas turėtų paimti 2 monetas, o tada derintis prie antrojo žaidėjo pasirinkimo taip, kad bendra paimtų monetų skaičių suma būtų 101. Ir to pakaks, kad jis laimėtų. Iš tikrųjų, po dvidešimto pirmojo žaidėjo ėmimo bus paimta 1921 moneta, taigi liks 101 moneta ir antrasis žaidėjas bus priverstas paimti dar bent vieną monetą. Todėl liks ne daugiau 100 monetų ir po dvidešimt pirmo pirmojo žaidėjo ėmimo neliks monetų ir jis laimės.

Ats.: Pirmasis žaidėjas.

3. Grybautojų grupę sudarė 11 mergaičių ir *n* berniukų. Iš viso jie surinko n^2+9n-2 grybus. Kurių buvo daugiau – mergaičių ar berniukų, jei žinoma, kad visi surinko po vienodą grybų skaičių?

Sprendimas. Pagal sąlygą, skaičius n^2+9n-2 turi dalytis iš $n+11$ (nes visi surinko po vienodą grybų skaičių). Dalydami, pavyzdžiui, kampu gauname:

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{\ \ } n^2+9n-2 & n+11 \\
\cline{2-2}
\underline{n^2+11n} & n-2 \\
\underline{\ \ } -2n-2 & \\
\underline{-2n-22} & \\
20 &
\end{array}
$$

Aišku, tą patį rezultatą galima gauti ir grupuojant:

$$n^2+9n-2=(n^2+11n)-(2n+22)+20=n(n+11)-2(n+11)+20=(n+11)(n-2)+20.$$

Kad skaičius n^2+9n-2 dalytųsi iš $n+11$ be liekanos, 20 turi dalytis iš $n+11$, todėl būtinai turi būti $n=9$. Taigi grybautojų grupėje buvo 9 berniukai ir 11 mergaičių.

Ats.: mergaičių.

4. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių *n*, kuriam esant $\sqrt[5]{2n}$, $\sqrt[6]{3n}$ ir $\sqrt[7]{5n}$ yra sveikieji skaičiai.

Sprendimas. Aišku, kad *n* turėtų būti pavidalo $2^a\cdot 3^b\cdot 5^c$; *a*, *b*, *c* – natūralieji skaičiai:

$$a=4+5k_1=42k_2,$$
$$b=5+6l_1=35l_2,$$
$$c=6+7m_1=30m_2$$

(čia k_1, k_2, l_1, l_2, m_1 ir m_2 – natūralieji skaičiai). Dešiniosios lygybės galioja, nes *a* dalijasi iš 6 ir 7, *b* dalijasi iš 5 ir 7, o *c* dalijasi iš 5 ir 6.

Iš lygčių

$$k_2=\frac{4+5k_1}{42},\quad l_2=\frac{5+6l_1}{35}\quad \text{ir}\quad m_2=\frac{6+7m_1}{30}$$

reikia rasti mažiausias k_1, l_1 ir m_1 reikšmes, kurioms esant k_2, l_2 ir m_2 yra sveikieji skaičiai.

Gauname, kad

$$k_1=16,\quad l_1=5,\quad m_1=12;$$

todėl $a=84$, $b=35$, $c=90$.

Taigi ieškomas skaičius yra $n=2^{84}\cdot 3^{35}\cdot 5^{90}$.

Ats.: $2^{84}\cdot 3^{35}\cdot 5^{90}$.

5. Teigiamo sveikojo skaičiaus *n* faktorialas (žym. *n*!) apibrėžiamas formule

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n.$$

Kurio skaičiaus faktorialą reikia išbraukti iš sandaugos $1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 20!$, kad likusi sandauga būtų natūraliojo skaičiaus kvadratas?

Sprendimas. Aiškinkimės taip:

$$
\begin{aligned}
1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 20! &= (1!\cdot 2!)\cdot(3!\cdot 4!)\cdot(5!\cdot 6!)\cdot\ldots\cdot(17!\cdot 18!)\cdot(19!\cdot 20!)= \\
&=(1!\cdot 1!\cdot 2)\cdot(3!\cdot 3!\cdot 4)\cdot(5!\cdot 5!\cdot 6)\cdot\ldots\cdot(17!\cdot 17!\cdot 18)\cdot(19!\cdot 19!\cdot 20)= \\
&=(1!)^2\cdot 2\cdot(3!)^2\cdot 4\cdot(5!)^2\cdot 6\cdot\ldots\cdot(17!)^2\cdot 18\cdot(19!)^2\cdot 20= \\
&=(1!\cdot 3!\cdot 5!\cdot\ldots\cdot 17!\cdot 19!)^2\cdot(2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 18\cdot 20)= \\
&=(1!\cdot 3!\cdot 5!\cdot\ldots\cdot 17!\cdot 19!)^2\cdot 2^{10}\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 9\cdot 10)= \\
&=(1!\cdot 3!\cdot 5!\cdot\ldots\cdot 17!\cdot 19!\cdot 2^5)^2\cdot 10!.
\end{aligned}
$$

Taigi išbraukus 10!, likusių faktorialų sandauga yra natūraliojo skaičiaus $1!\cdot 3!\cdot 5!\cdot\ldots\cdot 17!\cdot 19!\cdot 2^5$ kvadratas.

Ats.: 10!.

6. Natūralųjį skaičių vadinsime *šauniu skaičiumi*, jeigu jo skaitmenų suma lygi 6, o jis pats dalijasi iš 6, bet nesidalija iš 12. Pavyzdžiui, skaičiai 222 ir 2022 yra šaunūs. Kiek yra šaunių skaičių , didesnių už 222, bet mažesnių už 2022?

Sprendimas. Aišku, kad tinka tik tie skaičiai, kurių paskutinis (vienetų) skaitmuo yra lyginis, bet mažesnis už 6. Todėl galimi tik šie atvejai:

1) $\overline{AB0},\ A+B=6;$ 2) $\overline{AB2},\ A+B=4;$ 3) $\overline{AB4},\ A+B=2;$

4) $\overline{1AB0},\ A+B=5;$ 5) $\overline{1AB2},\ A+B=3;$ 6) $\overline{1AB4},\ A+B=1;$

7) $\overline{20BC},\ B+C=4.$

Taikydami perrankos metodą gauname, kad ieškomi skaičiai yra:

330, 510, 402, 1050, 1230, 1410, 1122, 1302, 1014.

Taigi šaunių skaičių, didesnių už 222, bet mažesnių už 2022, yra 9.

Ats.: 9.

7. Į parduotuvę toje pačioje dėžėje vežami bananai ir sausainiai. Prikrauta bananų dėžė svertų 200 kg, o vien tik sausainių – 40 kg. Tačiau ji turi sverti ne daugiau kaip 100 kg. Kilogramas bananų kainuoja 2 eurus, o kilogramas sausainių – 6 eurus. Kokią didžiausią pinigų sumą galima gauti nuvežus į parduotuvę vieną dėžę šių prekių?

Sprendimas. Tegu x yra bananų, o y – sausainių kilogramų skaičius. Pagal sąlygą, vienas kilogramas bananų užima 0,005 dėžės tūrio dalį, o vienas kilogramas sausainių užima 0,025 jos tūrio dalį. Vadinasi, turi būti tenkinama sąlyga $0{,}005x+0{,}025y\le 1.$ Pinigų suma už parduotas prekes užrašoma formule $2x+6y$ (eurais). Kadangi $x+y\le 100,$ tai $2x+6y=2(x+y)+4y\le 200+4y.$

Iš nelygybių $x+y\le 100$ ir $0{,}005x+0{,}025y\le 1$ sistemos gauname:

$$\begin{cases} x+y\le 100, \\ 0{,}005x+0{,}025y\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y\le 100, \\ x+5y\le 200 \end{cases} \Rightarrow 2x+6y\le 300.$$

Pastaroji nelygybė gaunama sudėjus abi sistemos nelygybes.

Matome, kad suma $2x+6y$ (šiuo atveju!) yra gaunama pinigų suma, todėl iš karto galima daryti išvadą, jog ji tikrai nebus didesnė už 300 eurų. Bet ar įmanoma gauti 300 eurų? Jei būtų $x+y=100$ ir $0{,}005x+0{,}025y=1,$ taigi jei dėžė būtų pilna ir svertų lygiai 100 kg, tai gautume $x=75$ ir $y=25.$ O tada $2x+6y$ būtų 300.

Ats.: 300 eurų.

8. Realieji skaičiai a, b ir c ($a\ne 0, b\ne 0, c\ne 0$) tenkina sąlygas

$$3a+4b=3c \quad \text{ir} \quad 4a-3b=4c.$$

Įrodykite, kad skaičiai $|a|$, $|b|$ ir $|c|$ yra kurio nors stačiojo trikampio kraštinių ilgiai.

Sprendimas.

$$\begin{cases} 3a+4b=3c, \\ 4a-3b=4c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3a+4b)^2=9c^2, \\ (4a-3b)^2=16c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a^2+24ab+16b^2=9c^2, \\ 16a^2-24ab+9b^2=16c^2. \end{cases}$$

Sudėję abi lygybes, gauname:

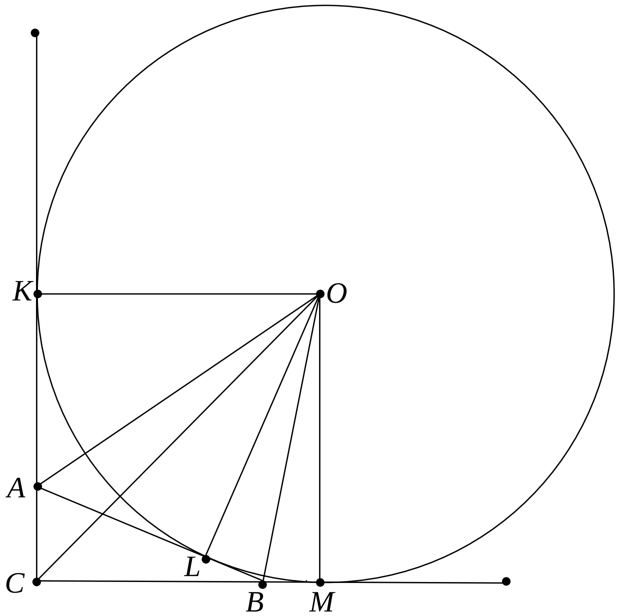
$$25a^2+25b^2=25c^2 \Rightarrow a^2+b^2=c^2.$$

Taigi (pagal Pitagoro teoremą) nelygūs nuliui skaičiai $|a|$, $|b|$ ir $|c|$ yra kurio nors stačiojo trikampio kraštinių ilgiai.

9. Stačiojo trikampio statinių ilgiai 5 ir 12. Raskite apskritimo, liečiančio įžambinę ir statinių tęsinius, spindulio ilgį.

Sprendimas. 1 būdas. Sakykime, kad AC = 5, BC = 12 yra stačiojo trikampio ABC statiniai, taškas O yra apskritimo, kuris liečia įžambinę AB taške L, statinio AC tęsinį liečia taške K, o statinio BC tęsinį – taške M (žr. pav.), centras. Jei $r = OK = OL = OM$ - ieškomas spindulys, tai atkarpos OK, OM, OL yra trikampių AOC, BOC, ABO aukštinės, todėl

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AOC} + S_{\Delta BOC} - S_{\Delta AOB} =$$
$$= \frac{1}{2} AC \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r - \frac{1}{2} AB \cdot r.$$



Kadangi $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = 30,$

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 13,$ tai

$$r = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AC + BC - AB} = 15.$$

2 būdas. Pagal apskritimo liestinių, nubrėžtų iš vieno taško, savybes, $AK = AL,$ $BM = BL,$ $CK = CM.$ Kadangi

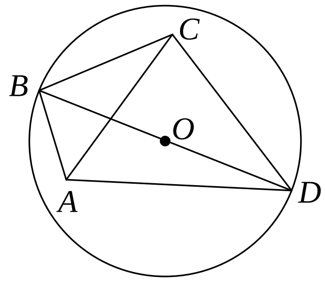
$$AL + LB = AK + BM = AB, \text{ tai}$$
$$CK + CM = 2CK = CA + AK + CB + BM =$$
$$= CA + CB + AB = 2p,$$

čia $2p$ – trikampio ABC perimetras, todėl $CK = CM = p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = 15.$ Kadangi apskritimo centras O yra kampo C pusiaukampinėje, tai $\angle OCK = 45^{\circ}$, o iš stačiojo trikampio OCK gauname, kad $OK = CK \operatorname{tg} \angle OCK = 15 \cdot 1 = 15.$

Ats.: 15.

10. Iškilojo keturkampio $ABCD$ kampas D yra smailusis, o visi kiti kampai – bukieji. Kuri įstrižainė yra ilgesnė – AC ar BD?

Sprendimas. Galima remtis tokiu faktu: jei atkarpa AB yra apskritimo skersmuo, tai taškas M yra apskritimo viduje tik tada, kai kampas AMB yra bukasis, o taškas N yra apskritimo išorėje tik tada, kai kampas ANB yra smailusis. Nubrėžę apskritimą, kurio skersmuo yra atkarpa BD (žr. pav.), gauname, kad taškas A ir C yra šio apskritimo viduje, nes kampai BAD ir BCD yra bukieji. Taigi atkarpa AC yra trumpesnė už apskritimo skersmenį BD.



Ats.: ilgesnė yra BD.