

DVIDEŠIMT PIRMOJI RUDENINĖ KOMANDINĖ RASEINIŲ KRAŠTO OLIMPIADA PROFESORIAUS JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

Raseiniai, 2022m. lapkričio 17 d.

Kiekviena uždavinys ne tik nurodykite atsakymą, bet ir paaiškinkite, kodėl jis teisingas, o jokie kiti atsakymai, o ne tik tie pasiūlytieji yra negalimi (nebent jei uždavinio sąlygoje būtų nurodyta, kad rinktis reikia tik iš siūlomų atsakymų).

1. Tolimas Magdalenos Raseiniškės ainis, bet dėl to nė kiek ne mažiau globojamas Pričkus turi žaislinių kareivėlių rinkinį ir yra puikiai suskaičiavęs, kad tų kareivėlių turi mažiau negu 100 ir kad jų tikrai yra daugiau negu 30. Kai jis išrikiuoja juos eilėmis po 7 kareivėlius, tai jam atlieka vienas kareivėlis. O kai jis išrikiuoja juos eilėmis po 10, tai jam atlieka du kareivėliai. Kiekgi kareivėlių gali turėti Pričkus?

(A) 32 (B) 50 (C) 62 (D) 71 (E) 92

2. Išsimokslinę ir aritmetikoje pažengę žmonės Šimkaičiuose kurį laiką įtemptai mąstė apie tokį reikalą, kurio formuluotė iš pažiūros nebuvo labai jau sudėtinga. Sakykime, kad n yra natūralusis skaičius, kuris turi lygiai 6 natūraliuosius daliklius. Kiek iš viso natūraliųjų daliklių tada garantuotai turi skaičius n^2 ?

(A) 11 (B) 12 (C) 15 (D) 36 (E) Tai priklauso nuo skaičiaus n reikšmės

3. Nuo savo senelės didžiulės vyšnios kažkur Jurbarko priemiesčiuose Albertas nuskyne 756 uogas. Po to jis jas po lygiai padalino tarp savęs ir kelių savo draugų. Trys iš Alberto draugų gavę uogas nesijautė labai alkani ir gal todėl gražino Albertui kiekvienas lygiai po ketvirtadalį savo gautų uogų (jie, kaip prieš tai ir pats Albertas, atskirų uogų į dalis nesmulkino). Albertas, kuris nejautė vyšnioms jokio saiko, suvalgė visas trijų savo draugų gražintas bei dar ir savo iš karto gautąsias uogas. Kai jis baigė jas visas valgyti, susivokė, kad jis bus suvalgęs mažų mažiausiai 150 uogų. Kiek uogų gali būti suvalgęs Albertas?

(A) 150 (B) 189 (C) 210 (D) 231 (E) 270

4. Štai uždavinys, kuris pernai buvo pripažintas ne tik Babtų mieste, bet ir jo apylinkėse antru pagal įdomumą uždaviniu apie kubą, kurio kraštinės ilgis yra 1 metras. Jo sąlyga buvo taip pat gana trumpa. Joje tebuvo klausiamas: kokio ilgumo yra pats trumpiausias kelias (metrais), einantis per visas duoto kubo viršūnes ir prasidedantis bei pasibaigiantis toje pačioje viršūnėje?

(A) $6 + \sqrt{2}$ (B) $7 + \sqrt{3}$ (C) $6 + 2\sqrt{2}$ (D) 8 (E) 10

5. Magdalena Raseiniškė kartą tarė visiems ainiams: surikiuokite skaičius 3^{33} , 4^{30} , 5^{25} didėjimo tvarka.

(A) $3^{33} < 5^{25} < 4^{30}$ (B) $3^{33} < 4^{30} < 5^{25}$ (C) $4^{30} < 3^{33} < 5^{25}$
(D) $4^{30} < 5^{25} < 3^{33}$ (E) $5^{25} < 4^{30} < 3^{33}$

6. Štai uždavinys, sukėlęs tam tikrą ažiotažą net ir Raseiniuose. Kiek yra penkiaženklų natūraliųjų skaičių, turinčių visus penkis skaitmenis 1, 2, 3, 4, 5 ir be liekanos besidalijančių iš 24?

- (A) 2 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 20

7. Štai uždavinys, sukėlęs lengvą sumaištį vienos gimnazijos pačioje matematinėje klasėje. Sakykime, kad a ir b yra du skirtingi realieji skaičiai. Žinodami, kad dvi lygtys

$$x^2 + ax + 3b = 0 \quad \text{ir} \quad x^2 + bx + 3a = 0$$

turi bendrą sprendinį, nustatykite sumos $a + b$ visas galimas reikšmes.

- (A) 0 arba -3 (B) 0 arba 3 (C) Tik 0
(D) Tik -3 (E) Tokių reikšmių yra be galo daug

8. Magdalenos Raseiniškės sūnus Protazas, nors ir nelaikomas labai pamaldžiu, kartą vis dėl to ėmė ir nusipirko dviejų kambarių butelį pačiame Šiluvos centre, beje, esantį piligrimų centro beveik pašonėje. Paskambinęs jis paliudijo motinai, kad jo nusipirktame bute yra du stačiakampiai kambariai, kurių ilgis ir plotis, skaičiuojant metrais, yra natūralieji skaičiai. Jis pridūrė, kad pirmojo kambario plotas (kvadratiniais metrais) yra vienu vienetu didesnis už to kambario perimetrą (metrais). O antrojo kambario plotas (kvadratiniais metrais) yra, atvirkščiai, vienu vienetu mažesnis už to kambario perimetrą (metrais). Magdalenai labai įdomu susigaudyti: kokia yra Protazo abiejų kambarių plotų suma (kv. metrais)?

- (A) 28 (B) 30 (C) 36 (D) 42 (E) 58

9. Magdalenos Raseiniškės anūkelis Gervazas susirado naują pramogą, kuria jis nustebino netgi visko mačiusią močiutę. Jis pareiškė imsis visus 12 langelių, išsidėsčiusių 4×4 lentelės pakraščiais, ir aiškiai prisipažino beketinantis įrašyti tuose langeliuose visus skaičius 1, 2, 3, ..., 11, 12 (po vieną skaičių langelyje), kad kiekvienai lentelės kraštinei suskaičiavus ties ją esančių keturių skaičių sumą, visos keturios tokios sumos būtų lygios. Net močiutė iki galo nesuvokia, kodėl trijuose kampiniuose langeliuose jis ryžtingai įrašė skaičius, parodytus paveikslėlyje. Močiutė Magdalena Raseiniškė susigriebė bemaštanti: koks gi skaičius po tų visų jos mylimo anūkėlio darbų pasirodys paskutiniame ketvirtajame kampiniame langelyje, kol kas kukliai pažymėtame X ženklu?

1			5
X			11

- (A) 9 (B) 10 (C) 7 (D) 2 (E) 3

10. Į 4×4 lentelės visus 16 langelių Tytuvėnų matematinės šviesuomenės pasiuntiniai ketina įrašyti po natūraliųjų skaičių, kad kiekvienoje iš dviejų keturlangių įstrižainių keturi skaičiai būtų skirtingi tarpusavyje, o 8 sandaugos, gaunamos sudauginus po keturis skaičius, esančius vienoje eilutėje arba viename stulpelyje, būtų lygios. Parodykite, kad tai įmanoma, o jei jau taip, tai prisideda natūralus klausimas: kokią mažiausią reikšmę gali įgyti didžiausias tokioje lentelėje įrašytas skaičius (lentelėje nebūtinai turi būti tik vienas didžiausias skaičius)?

- (A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 16

DVIDEŠIMT PIRMOJI RUDENINĖ INDIVIDUALIOJI RASEINIŲ KRAŠTO OLIMPIADA PROFESORIAUS JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

Raseiniai, 2022 m. lapkričio 17 d.

1. Magdalenos Raseiniškės anūkėlis Gervazas susirado naują pramogą, kuria jis nustebino netgi visko mačiusią močiutę. Jis pareiškė imsiąs visus 12 langelių, išsidėsčiusių 4×4 lentelės pakraščiais, ir aiškiai prisipažino beketinantis įrašyti tuose langeliuose visus skaičius 1, 2, 3, ..., 11, 12 (po vieną skaičių langelyje), kad kiekvienai lentelės kraštinei suskaičiavus ties ją esančių keturių skaičių sumą, visos keturios tokios sumos būtų lygios. Net močiutė iki galo nesuvokia, kodėl trijuose kampiniuose langeliuose jis ryžtingai įrašė skaičius, parodytus paveikslėlyje. Močiutė Magdalena Raseiniškė susigriebė bemažanti: koks gi skaičius po tų visų jos mylimo anūkėlio darbų pasirodys paskutiniame ketvirtajame kampiniame langelyje, kol kas kukliai pažymėtame X ženklu?

1			5
X			11

2. Niekas negalėtų pasakyti, kodėl Vadžgirio berniukai labai įniko į tokį uždavinį: reikia rasti visus tokius sveikųjų skaičių a , b ir c trejetus, kuriems

$$\frac{a+1}{3} = \frac{b+2}{4} = \frac{5}{c+3}.$$

3. Į 4×4 lentelės langelius Tytuvėnų matematinės šviesuomenės pasiuntiniai ketina įrašyti po natūralųjį skaičių, kad kiekvienoje iš dviejų keturlangių įstrižainių keturi skaičiai būtų skirtingi tarpusavyje, o 8 sandaugos, gaunamos sudauginus po keturis skaičius, esančius vienoje eilutėje arba viename stulpelyje, būtų lygios. Parodykite, kad tai įmanoma, o jei jau taip, tai prisideda natūralus klausimas: kokią mažiausią reikšmę gali įgyti didžiausias tokioje lentelėje įrašytas skaičius (lentelėje nebūtinai turi būti tik vienas didžiausias skaičius)?

4. Štai uždavinys, sukėlęs lengvą sumaištį pačioje Ariogaloje. Iš pirmo žvilgsnio problema neatrodė labai baisi, tačiau ne vienas Ariogalos šviesuolis buvo benuleidžias rankas ar net pareiškiąs, kad būtent dabar turis kitų, netgi daug svarbesnių reikalų. O pačiame tame uždavinyje klausama: kokios yra reiškinio

$$\frac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2}$$

didžiausia reikšmė ir mažiausia reikšmė?

5. Magdalenos Raseiniškės sūnus Protazas, nors ir nelaikomas labai pamaldžiu, kartą vis dėl to ėmė ir nusipirko dviejų kambarių butelį pačiame Šiluvos centre, beje, esantį piligrimų centro beveik pašonėje. Paskambinęs jis paliudijo motinai, kad jo nusipirktame bute yra du stačiakampiai kambariai, kurių ilgis ir plotis, skaičiuojant metrais, yra natūralieji skaičiai. Jis pridūrė, kad pirmojo kambario plotas (kvadratiniais metrais) yra vienu vienetu didesnis už to kambario perimetrą (metrais). O antrojo kambario plotas (kvadratiniais metrais) yra, atvirkščiai, vienu vienetu mažesnis už to kambario perimetrą (metrais). Magdalenai labai įdomu susigaudyti: kokia yra Protazo buto abiejų kambarių plotų suma (kv. metrais)?