DVIDEŠIMT PIRMOJI RUDENINĖ RASEINIŲ KRAŠTO OLIMPIADA PROFESORIAUS JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

Raseiniai, 2022 m. lapkričio 17 d.

Sprendimai

Parengė Romualdas Kašuba

Komandinė olimpiada

1. Kadangi Pričkui rikiuojant kareivėlius eilėmis po 10, atlieka du kareivėliai, tai kareivėlių skaičius yra $10m + 2$, kur skaičius m yra sveikasis. Todėl Pričkus gali turėti tik 32, 42, 52, 62, 72, 82 arba 92 kareivėlius. Kadangi rikiuojant kareivėlius eilėmis po 7, atlieka vienas kareivėlis, tai atėmus iš kareivėlių skaičiaus vienetą, turi gautis skaičius, dalus iš 7. Tarp skaičių 31, 41, 51, 61, 71, 81 ir 91, iš 7 dalijasi tik skaičius 91. Taigi kareivėlių tegali būti 92. Šis skaičius tenkina visas uždavinio sąlygas, nes turime $92 = 10 \cdot 9 + 2 = 7 \cdot 13 + 1$ ir $30 < 92 < 100$. Vadinasi, teisingas atsakymas yra atsakymas E.
Atsakymas. (E) 92.

2. Šešis natūraliuosius daliklius turi, pavyzdžiui, kiekvienas skaičius

$$p^5,$$

kur skaičius p yra pirminis, arba skaičius

$$p \cdot q^2,$$

kur p ir q yra skirtingi pirminiai skaičiai. Tie dalikliai atitinkamai lygūs:

$$1,\ p,\ p^2,\ p^3,\ p^4,\ p^5 \qquad \text{ir} \qquad 1,\ p,\ q,\ pq,\ q^2,\ pq^2.$$

Pirmuoju atveju pakėlę kvadratu gauname skaičių

$$p^{10},$$

kuris turi 11 natūraliųjų daliklių: $1,\ p,\ p^2,\ p^3, \ldots,\ p^9,\ p^{10}$. O antruoju atveju, pakėlę kvadratu, gauname skaičių

$$p^2 \cdot q^{4.},$$

kurio natūralieji dalikliai yra $p^m q^n$, kur $m = 0, 1, 2$ ir $n = 0, 1, 2, 3, 4$, taigi gauname

$$(2 + 1)(4 + 1) = 3 \cdot 5 = 15$$

daliklių. Tai jau rodo, kad atsakymas priklauso nuo skaičiaus n pavidalo ir todėl tada būtinai teisingas yra atsakymas E.
Atsakymas. Teisingas atsakymas yra E.

3. Paties Alberto bei jo draugų skaičius yra tam tikras skaičiaus 756 daliklis d. Pasižiūrėkime, kokius daliklius turi skaičius 756. Pirmiausiai jis dalijasi iš 4, nes $756 = 4 \cdot 189$. Skaičius 189 dalijasi iš 7, nes $189 = 7 \cdot 27$, vadinasi, $756 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$. Matome, kad pirmieji (vienaženkliai) skaičiaus 756 dalikliai yra skaičiai $1, 2, 3, 4, 6, 7, 9$.
Mažiausias daliklis (uogų valgytojų skaičius), kuris mums galėtų tikti pagal uždavinio sąlygą, yra 4 – būtų padalintos 4 dalys po 189 uogas. Tačiau tai yra negerai, nes nuo 189 negalima „sveikai" grąžinti ketvirtadalio uogų. Sekantis daliklis galėtų būti 6, tada būtų 6 dalys po 126 uogas – nes $756 = 6 \cdot 126$

ir vėl nuo 126 uogų neįmanoma „sveikai“ grąžinti ketvirtadalio uogų. Sekantis daliklis yra 7, taip atsirastų Albertas ir dabar jau 6 jo draugai. Tada $756 = 108 \cdot 7$. Dabar trys Alberto draugai jau gali jam grąžinti po ketvirtadalį uogų, nes jų dalys yra po 108, o 108 dalijasi iš 4, duodami dalmenį 27. Tada besotis Albertas iš viso suvalgytų $108 + 3 \cdot 27 = 189$ uogas ir tai tikrai jau yra daugiau negu 150. Kiti dalikliai jau nebetinka, nes jeigu imtume daliklį 9 arba daugiau, tai $756 = 9 \cdot 84$ ir draugų dalys yra daugiausiai po 84 uogas, trys draugai grąžina Albertui daugiausiai po 21 uogą, arba iš viso 63 uogas, bet Albertas tada bus tesuvalgęs daugiausiai $84 + 63 = 147$ uogas. O tai yra mažiau negu 150.
Atsakymas. (B) 189.

4. Pirmiausiai sukonstruosime kelią, praeinantį per visas kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$, kurio kraštinės ilgis yra 1 m, viršūnes ir kurio ilgis yra 8 m. Čia kubo viršūnės galima įsivaizduoti sužymėtas taip: apatinė siena yra kvadratas $ABCD$, o viršutinė – kvadratas $A_1B_1C_1D_1$, kurio viršūnė A_1 yra virš viršūnės A, viršūnė B_1 – virš viršūnės B, ir taip toliau. Tada aštuonmetrį kelią, sudarytą iš tiesės atkarpų, galime užrašyti taip: $ABCDD_1C_1B_1A_1A$. Šiame kelio užraše viskas yra suprantama taip: kelio pradžia yra taškas A, tada iš jo (tiesiai) einama į B, vėliau – į C, ir taip toliau iki pradinio taško A.
Beliktų įrodyti, kad trumpesnis kelias nėra galimas. Tai galima suvokti iš to, kad atstumas tarp dviejų kubo viršūnių visada ne trumpesnis nei 1 metras (jis dar gali būti $\sqrt{2}$ m ir $\sqrt{3}$ m), o apkeliauti reikia 8 viršūnes ir grįžti į pirmąją, taip nueinant 8 kelio atkarpas, kaskart bent po 1 metrą.
Atsakymas. (D) 8.

5. Pasistengsime įrodyti, kad 3^{33} yra tikrai mažiau už 4^{30}. Pakaktų įrodyti, kad 3^{11} yra mažiau už 4^{10}, nes tada pakaktų nelygybę $3^{11} < 4^{10}$ pakelti trečiuoju laipsniu arba, trumpiau sakant, kubu. Bet nelygybė $3^{11} < 4^{10}$ tikrai yra teisinga, nes

$$3^{11} = 3 \cdot (3^5)^2 = 3 \cdot (243)^2 < 3 \cdot (256)^2 = 3 \cdot 4^8 < 16 \cdot 4^8 = 4^{10}.$$

Dabar pasistengsime įrodyti, kad $4^{30} > 5^{25}$. Tam pakaktų įrodyti, kad $4^6 > 5^5$, nes juk galima būtų tą nelygybę pakelti penktuoju laipsniu. Tačiau $4^6 = 64^2 = 4096$, o $5^5 = 3125$, ir viskas yra aišku.
Liko palyginti 3^{33} su 5^{25}. Atrodytų, kad 5^{25} yra didesnis. Taip tikrai ir yra, nes mes įrodysime, kad 5^{25} yra didesnis net už 3^{35}. Tam gana įrodyti, kad $3^7 < 5^5$, nes galima teisingą nelygybę $3^7 < 5^5$ pakelti penktuoju laipsniu. Tačiau nelygybė $3^7 < 5^5$ yra teisinga, nes

$$3^7 = 3 \cdot (3^3)^2 = 3 \cdot (27)^2 = 3 \cdot 729 = 2187 < 3125 = 5^5.$$

Vadinasi, po visų trijų palyginimų (iš kurių pirmasis, beje, nėra būtinas) gauname, kad $3^{33} < 5^{25} < 4^{30}$, o tai atitinka atsakymą A.
Atsakymas. $3^{33} < 5^{25} < 4^{30}$, arba atsakymas A.

6. Jeigu į penkiaženklį skaičių po vieną kartą įeina skaitmenys 1, 2, 3, 4 ir 5, tai, kadangi to skaičiaus skaitmenų suma $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ dalijasi iš 3, todėl ir pats tas 5-ženklis skaičius turi dalintis be liekanos iš 3. Tam, kad jis be liekanos dalintųsi iš 24, reikia, kad jis be liekanos dalintųsi dar ir iš 8. (Primename, kad skaičius 3 ir 8 jokių didesnių už 1 bendrų daliklių neturi.) O skaičius

$$\overline{abcde} = \overline{ab} \cdot 1000 + \overline{cde}$$

dalijasi be liekanos iš 8 tada ir tik tada, kai skaičius $\overline{cde}$, sudėtas iš 3-jų pačių paskutiniųjų jo skaitmenų, dalijasi be liekanos iš 8.

Be jokios abejonės, jei jau skaičius $\overline{abcde}$ dalijasi be liekanos iš 8, tai paskutinis jo skaitmuo e yra lyginis, todėl mūsų atveju $e = 2$ arba $e = 4$.
Jei $e = 4$, tai $\overline{cde} = 100c + 10d + 4$ dalijasi iš 4, todėl $10d$ dalijasi iš 4 ir $d = 2$. Tačiau tokiu atveju $\overline{cde} = 100c + 24$ dalijasi iš 8, ir čia netinka jokia c reikšmė. Taigi jokio tinkamo skaičiaus negauname.
Jei $e = 2$, tai $\overline{cde} = 100c + 10d + 2$ dalijasi iš 4, todėl $10d + 2$ dalijasi iš 4 ir tinka nebent $d = 1$, 3 arba 5. Kiekvienu iš trijų atvejų perinkime galimybes, koks gali būti c, ir gausime tinkamas $\overline{cde}$ reikšmes 312, 512, 432, 152, 352 bei tinkamas $\overline{abcde}$ reikšmes 45312, 54312, 34512, 43512, 15432, 51432, 34152, 43152, 14352, 41352.
Vadinasi, iš viso turime 10 mums tinkamų iš 24 besidalijančių skaičių ir todėl renkamės atsakymą C.
Atsakymas. (C) 10.

7. Sakykime, kad x_0 yra bendrasis tų abiejų lygčių sprendinys. Tada galioja abi lygybės

$$x_0{}^2 + ax_0 + 3b = 0$$

ir

$$x_0{}^2 + bx_0 + 3a = 0.$$

Atėmę antrąją lygybę iš pirmosios gausime

$$ax_0 + 3b - bx_0 - 3a = 0.$$

Todėl galime parašyti, kad

$$x_0(a - b) = 3(a - b).$$

Kadangi sąlygoje yra pasakyta, kad a ir b yra skirtingi skaičiai, tai $a \neq b$ ir iš skirtumo $a - b \neq 0$ galima padalinti abi lygybės puses. Taip gauname, kad jeigu tos dvi lygtys turi bendrą sprendinį, tai tada tasai sprendinys yra 3. Įrašę tą reikšmę į bet kurią iš tų dviejų lygybių gauname tokią pačią sąlygą, kuri yra

$$3^2 + 3a + 3b = 0.$$

Kitaip sakant, gauname, kad $9 + 3a + 3b = 0$, arba $a + b = -3$. Uždavinio sąlygą tenkina, pavyzdžiui, reikšmės $a = 0$, $b = -3$, o tai reiškia, jog teisingas yra atsakymas D.
Atsakymas. (D) – 3.

8. Pažymėkime abu pirmojo kambario matmenis *x* ir *y*. Iš uždavinio sąlygos duomenų gauname lygtį:

$$xy = 2x + 2y + 1,$$

iš kur išplaukia, kad

$$y = \frac{2x + 1}{x - 2} = \frac{2x - 4 + 5}{x - 2} = 2 + \frac{5}{x - 2}.$$

Skaičius y bus sveikasis, jeigu $x - 2 = \pm 1$ arba $x - 2 = \pm 5$. Matmenys turi būti teigiami, todėl pirmuoju atveju gauname $x = 3,\ y = 7$, o antruoju $x = 7,\ y = 3$. Todėl pirmojo kambario matmenys yra 3×7 (arba 7×3), o plotas yra $7 \cdot 3 = 21$ kvadratinis metras.
Analogiškai antruoju atveju gauname $xy = 2x + 2y - 1$, iš kur išplaukia, kad

$$y = \frac{2x - 1}{x - 2} = \frac{2x - 4 + 3}{x - 2} = 2 + \frac{3}{x - 2}.$$

O iš čia matome, kad skaičius y bus sveikasis, jeigu $x - 2 = \pm 1$ arba $x - 2 = \pm 3$. Pirmuoju atveju gauname $x = 3,\ y = 5$, o antruoju $x = 5,\ y = 3$.
Todėl antrojo kambario matmenys yra 3×5 (arba 5×3) , o plotas yra $3 \cdot 5 = 15$ kvadratinių metrų.
Kambarių plotų suma yra $21 + 15 = 36$ kvadratiniai metrai.
Atsakymas. Buto kambarių plotų suma yra 36 kvadratiniai metrai, arba atsakymas C.

9. Nežinomą ketvirtąjį kampinį skaičių pažymėkime x, o keturių skaičių ties kiekviena kraštine sumą pažymėkime S. Tada visų keturių sumų suma yra lygi

$$4S = (1 + 2 + 3 + \ldots + 12) + (1 + 5 + 11 + x) = 95 + x,$$

kur simboliu S, kaip jau sakyta, yra pažymėta (kiek)vienos kraštinės keturių skaičių suma. Taip ir suvokiame, kad skaičius $95 + x$ dalijasi iš 4. Bet tokiu atveju skaičiui x lieka vienintelė galimybė: $x = 9$, nes kiti du skaičiai 1 ir 5 (kuriuos sudėjus su 95 suma dalijasi iš 4) jau yra „užimti“, nes jau įrašyti lentelės kampuose. Belieka įsitikinti, kad tada tokią lentelę galima užbaigti pildyti. Tai rodo pateiktas paveikslėlis.

1	12	8	5
6			3
10			7
9	2	4	11

Atsakymas. (A) 9.

10. Kadangi keturlangėse įstrižainėse yra užrašyti keturi skirtingi natūralieji skaičiai, tai tarp jų tikrai yra už 4 ne mažesnis skaičius. Todėl pats didžiausias tokios lentelės skaičius yra ne mažesnis už 4. Sekantis pavyzdys rodo, kad pats didžiausias tokios lentelės skaičius gali būti lygus 4. Akivaizdu, kad ši lentelė tenkina visas mūsų uždavinio sąlygas. Vadinasi, mažiausioji paties didžiausio tokios lentelės skaičiaus reikšmė yra lygi 4.

2	1	4	3
4	3	2	1
3	4	1	2
1	2	3	4

Atsakymas. (B) 4.

Individualioji olimpiada

1. Žr. 9-ojo komandinės olimpiados uždavinio sprendimą.

2. Iš nurodytųjų lygybių mes kartu su Vadžgirio berniukais gavome, kad

$$(a + 1)(c + 3) = 15 \qquad \text{ir} \qquad (b + 2)(c + 3) = 20.$$

Todėl mes visi kartu su jais turime, kad iš sveikojo skaičiaus $c + 3$ dalijasi skaičiai 15 ir 20. Todėl taip pat suprantame, kad iš jo dalijasi ir jų skirtumas, kuris, aišku savaime, yra lygus 5. Todėl

$$\frac{5}{c+3}$$

yra sveikasis skaičius ir, vadinasi, $c + 3$ gali įgyti keturias reikšmes: – 5 , – 1, 1 ir 5. Iš eilės išnagrinėkime visus keturis atvejus, įrašydami atitinkamas c reikšmes į duotąsias lygybes: 1) $c = -8$, $a = -4, b = -6$; 2) $c = -4$, $a = -16, b = -22$; 3) $c = -2$, $a = 14, b = 18$; 4) $c = 2$, $a = 2, b = 2$.

Atsakymas. $(a, b, c) = (-4, -6, -8)$, $(-16, -22, -4)$, $(14, 18, -2)$ ir $(2, 2, 2)$.

3. Žr. 10-ojo komandinės olimpiados uždavinio sprendimą.

4. Pertvarkykime duotąjį reiškinį:

$$\frac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2} = \frac{4y^2 - 4xy + y^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{(2y - x)^2}{x^2 + y^2} - 1,$$

$$\frac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2} = \frac{4x^2 + 4y^2 - (4x^2 + 4xy + y^2)}{x^2 + y^2} = 4 - \frac{(y + 2x)^2}{x^2 + y^2}.$$

Duotasis reiškinys įgyja pačią didžiausią reikšmę, lygią 4, kai $y = -2x$ $(x \neq 0)$, o jos mažiausioji reikšmė yra lygi -1, kai $y = \frac{x}{2}$ $(x \neq 0)$.

Atsakymas. Reiškinio didžiausia reikšmė lygi 4, o mažiausia reikšmė lygi –1.

5. Žr. 8-ojo komandinės olimpiados uždavinio sprendimą.