LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

II. ALGEBRINĖS LYGTYS

(2022–2024)

Teorinę medžiagą parengė ir antrąją užduotį sudarė doc. dr. **Antanas Apynis** (Vilniaus universitetas)

Algebrine lygtimi su nežinomuoju x vadinama tokia lygtis, kurią galima užrašyti pavidalu

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0; \qquad (1)$$

čia a_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1, n$, bet kurie realieji skaičiai, bet $a_n \neq 0$. Natūralusis skaičius n vadinamas *lygties laipsniu*.

Jei $n = 1$, algebrinė lygtis vadinama *tiesine lygtimi*; paprastai ji užrašoma pavidalu $ax + b = 0$, $a \neq 0$.

Jei $n = 2$, algebrinė lygtis vadinama *kvadratine lygtimi*; paprastai ji užrašoma pavidalu $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

Tiek su tiesine lygtimi, tiek su kvadratine lygtimi mūsų jaunieji matematikai yra gerai susipažinę, todėl šioje temoje nagrinėsime tik aukštesnio laipsnio algebrines lygtis.

Kiekvienos algebrinės lygties *sprendinys* suvokiamas vienodai – tai realusis skaičius, sakykim a, kuriam esant daugianario $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ reikšmė lygi nuliui; taigi jei galioja lygybė

$$a_n \cdot a^n + a_{n-1} \cdot a^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot a + a_0 = 0.$$

Ar sunku įsitikinti, kad konkretus skaičius yra algebrinės lygties sprendinys? Ir taip, ir ne – nelygu, koks yra tas skaičius ir koks yra lygties laipsnis. Štai, pavyzdžiui, skaičius 3 yra trečiojo laipsnio lygties

$$2x^3 - 12x^2 + 19x - 3 = 0 \qquad (2)$$

sprendinys, nes $2 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 19 \cdot 3 - 3 = 54 - 108 + 57 - 3 = 0$, o atsakyti į klausimą, ar $x = \dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$ yra šios lygties sprendinys, nebe taip lengva. Vis dėlto galima įsitikinti, kad ir jis tenkina lygtį, nes

$$x = \frac{3+\sqrt{7}}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{16+6\sqrt{7}}{4} = \frac{8+3\sqrt{7}}{2} \Rightarrow x^3 = x \cdot x^2 = \frac{3+\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{8+3\sqrt{7}}{2} = \frac{45+17\sqrt{7}}{4},$$

o tada gauname, kad

$$2x^3 - 12x^2 + 19x - 3 = 2 \cdot \frac{45+17\sqrt{7}}{4} - 12 \cdot \frac{8+3\sqrt{7}}{2} + 19 \cdot \frac{3+\sqrt{7}}{2} - 3 =$$

$$= \frac{(45+17\sqrt{7}) - 12(8+3\sqrt{7}) + 19(3+\sqrt{7})}{2} - 3 = \frac{6}{2} - 3 = 0.$$

Taigi skaičius $\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$ taip pat yra (2) lygties sprendinys. Visai panašiai galėtume įsitikinti (paliekame tai atlikti savarankiškai), kad (2) lygtis turi dar ir trečią sprendinį – realųjį skaičių $\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}$.

Apskritai tarp n-tojo laipsnio algebrinių lygčių galima rasti tokių, kurios turi lygiai n sprendinių, ir be galo daug tokių, kurios turi mažiau negu n sprendinių ar net nė vieno. Bet nėra nė vienos algebrinės n-tojo laipsnio lygties, kuri turėtų daugiau kaip n sprendinių. Pastarąją išvadą reikėtų pagrįsti teoriniais samprotavimais, taigi įrodyti, nes konkrečių atvejų analizės nepakanka. Vis dėlto įrodymą praleisime.

1 pavyzdys. Įrodykime, kad ketvirtojo laipsnio (algebrinė) lygtis

$$x^4 + 6x^2 - 12x + 11 = 0 \qquad (3)$$

neturi sprendinių.

Įrodymas. Kairėje lygybės pusėje esantį daugianarį pertvarkykime, pavyzdžiui, taip:

$$x^4 + 6x^2 - 12x + 11 = (x^4 + 2x^2 + 1) + (4x^2 - 12x + 9) + 1 = (x^2+1)^2 + (2x-3)^2 + 1,$$

ir pasidarys visiškai aišku, kad vietoj x įrašę bet kurį realųjį skaičių gausime teigiamą daugianario reikšmę, taigi nė vienos nuliui lygios reikšmės. Vadinasi, (3) lygtis tikrai neturi sprendinių.

2 pavyzdys. Išspręskime trečiojo laipsnio lygtį

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0. \tag{4}$$

Sprendimas. Kadangi

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x^3 + 2x^2) - (x+2) = x^2(x+2) - (x+2) = (x+2)(x^2-1) = (x+2)(x-1)(x+1),$$

tai (4) lygtis yra ekvivalenti lygčiai

$$(x+2)(x-1)(x+1) = 0.$$

Iš čia ir gauname, kad (4) lygybė galioja tik vienu iš trijų atveju:

$$x+2=0, \quad x-1=0 \ \text{ ir } \ x+1=0,$$

taigi, jei $x=-2,\ x=1$ arba $x=-1.$

Išvada aiški: (4) lygtis turi tris sprendinius – realiuosius skaičius -2; -1; 1.

Ats.: -2; -1; 1.

Kad būtų paprasčiau, daugianarį $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0;\ \ a_n \neq 0,$ pažymėkime $P(x)$. Tada (1) lygtį bus galima užrašyti pavidalu $P(x) = 0.$

Apibrėžimas. Sakoma, kad daugianaris $P(x)$ dalijasi iš dvinario $x-a$, jeigu yra toks daugianaris $Q(x)$, kuriam esant galioja lygybė

$$P(x) = (x-a)Q(x). \tag{5}$$

Pavyzdžiui, trečiojo laipsnio daugianaris $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ (žr. 2 pvz.) dalijasi iš trijų dvinarių: $x+2,\ x-1$ ir $x+1,$ nes

1) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x+2)\cdot((x-1)(x+1)) = (x+2)(x^2-1);$ (6)

2) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)\cdot((x+2)(x+1)) = (x-1)(x^2+3x+2);$ (7)

3) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x+1)\cdot((x+2)(x-1)) = (x+1)(x^2+x-2).$ (8)

Daugianarį $Q(x)$ visada galima rasti dalijant $P(x)$ iš $x-a$ kampu. O suprasti tokią dalybą visai nesunku ir be išsamaus aprašymo – pakaks pavyzdžių. Dalydami ką tik nagrinėtą daugianarį

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

paeiliui iš $x+2,\ x-1$ ir $x+1,$ gausime:

$$\begin{array}{l|l} _\, x^3+2x^2-x-2 & x+2 \\ \quad x^3+2x^2 & \overline{x^2-1} \\ \hline \qquad\quad _\, -x-2 & \\ \qquad\qquad -x-2 & \\ \hline \qquad\qquad\quad 0 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l} _\, x^3+2x^2-x-2 & x-1 \\ \quad x^3-\ x^2 & \overline{x^2+3x+2} \\ \hline \quad _\, 3x^2-x-2 & \\ \qquad 3x^2-3x & \\ \hline \qquad\quad _\, 2x-2 & \\ \qquad\qquad 2x-2 & \\ \hline \qquad\qquad\quad 0 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l} _\, x^3+2x^2-x-2 & x+1 \\ \quad x^3+\ x^2 & \overline{x^2+x-2} \\ \hline \quad _\, x^2+x-2 & \\ \qquad x^2+x & \\ \hline \qquad\quad _\, 2x-2 & \\ \qquad\qquad 2x-2 & \\ \hline \qquad\qquad\quad 0 & \end{array}$$

Vadinasi,

$$\frac{x^3+2x^2-x-2}{x+2} = x^2-1, \quad \frac{x^3+2x^2-x-2}{x-1} = x^2+3x+2, \quad \frac{x^3+2x^2-x-2}{x+1} = x^2+x-2.$$

Aišku, čia turima mintyje, kad $x \neq -2$ (pirmoje lygybėje), $x \neq 1$ (antroje lygybėje) ir $x \neq -1$ (trečioje lygybėje). Matome, kad $Q(x)$ išraiškos tokios pat kaip (6), (7) ir (8) lygybėse.

O ką gautume dalydami $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ iš $x-a$, jei $a \notin \{-2; -1; 1\}$? Žinoma, kad turėtų atsirasti nelygi nuliui liekana, nes priešingu atveju skaičius a būtų lygties $P(x)=0$ sprendinys, o jų aibė (šiuo atveju) yra $\{-2; -1; 1\}$. Abejonėms išsklaidyti pasirinkime $a = -3$ ir padalykime (kampu)

$P(x)$ iš $x+3$:

$$
\begin{array}{l|l}
\_\,x^3+2x^2-x-2 & x+3 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-3x^2} & x^2-x+2 \\
\quad \_\,-x^2-x-2 & \\
\quad \underline{-x^2-3x} & \\
\qquad \_\,2x-2 & \\
\qquad \underline{2x+6} & \\
\qquad\quad -8 &
\end{array}
$$

Šios dalybos rezultatą galima užrašyti dvejopai:

$$x^3+2x^2-x-2=(x+3)(x^2-x+2)-8 \tag{9}$$

arba

$$\frac{x^3+2x^2-x-2}{x+3}=x^2-x+2-\frac{8}{x+3};\quad x\neq -3.$$

Įrašę $x=-3$ į (9) lygybę, gautume, kad

$$P(-3)=(-3)^3+2(-3)^2-(-3)-2=-8.$$

Vadinasi, daugianario $P(x)=x^3+2x^2-x-2$ dalybos iš dvinario $x-(-3)=x+3$ liekana (skaičius -8) sutampa su daugianario $P(x)$ reikšme taške $x=-3$, taigi su skaičiumi $P(-3)$.

Bezu teorema (Etienne Bezout (1730-1783) – prancūzų matematikas).

Daugianario

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0,\quad a_n\neq 0,$$

dalybos iš dvinario $x-a$, $a\in\mathbf{R}$, *liekana yra* $P(a)$.

Remiantis šia teorema galima tvirtinti, jog kiekvienam *n*-tojo laipsnio daugianariui $P(x)$ galima rasti tokį daugianarį $Q(x)$ (jis turi būti $(n-1)$ -jo laipsnio), kad galiotų lygybė

$$P(x)=(x-a)Q(x)+P(a). \tag{10}$$

O svarbiausia išvada, išplaukianti iš Bezu teoremos yra šis teiginys:

Realusis skaičius a yra algebrinės lygties $P(x)=0$ *sprendinys tik kai daugianario* $P(x)$ *dalybos iš dvinario* $x-a$ *liekana lygi nuliui.*

Štai, pavyzdžiui, trečiojo laipsnio daugianario – kvadratinio trinario

$$P(x)=13x^2+275x-288$$

reikšmė, kai $x=1$, lygi nuliui, todėl jis dalijasi iš dvinario $x-1$. Dalydami kampu gauname:

$$
\begin{array}{l|l}
\_\,13x^2+275x-288 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{13x^2-13x} & 13x+288 \\
\qquad \_\,288x-288 & \\
\qquad \underline{288x-288} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Vadinasi, $P(x)=13x^2+275x-288=(x-1)(13x+288)$. Todėl kvadratinę lygtį

$$13x^2+275x-288=0$$

galima išspręsti ir taip:

$$13x^2+275x-288=0\Rightarrow\ (x-1)(13x+288)=0\Rightarrow\ x-1=0\ \text{ arba }\ 13x+288=0.$$

Iš čia gautume du sprendinius: $x=1$ ir $x=-\dfrac{288}{13}$.

Aišku, kad tuos pačius sprendinius gautume ir taikydami tą metodą, kurį visi gerai mokame taikyti.

Čia pat atkreipkime dėmesį ir į tai, kad pademonstruotą kvadratinės lygties

$$P(x)=0, \quad P(x)=ax^2+bx+c, \quad a\neq 0,$$

sprendimo būdą galima taikyti tik tada, kai pasiseka „pamatyti“ tokią x reikšmę, kuriai esant $P(x)=0$. Kitaip sakant, kai pasiseka atspėti vieną šios lygties sprendinį. Tuo tarpu kvadratinės lygties sprendimas skaičiuojant kvadratinio trinario diskriminantą $D=b^2-4ac$ yra universalus – jį galima taikyti sprendžiant kiekvieną kvadratinę lygtį.

3 pavyzdys. Išspręskime trečiojo laipsnio lygtį

$$5x^3+7x^2+13x+11=0. \tag{11}$$

Sprendimas. Nesunku įsitikinti, kad skaičius -1 yra (11) lygties sprendinys. O tai reiškia, kad daugianaris $P(x)=5x^3+7x^2+13x+11$ dalijasi iš dvinario $x-(-1)=x+1$. Dalydami kampu gauname:

$$\begin{array}{l|l}
_\,5x^3+7x^2+13x+11 & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{5x^3+5x^2} & 5x^2+2x+11 \\
\qquad _\,2x^2+13x+11 & \\
\qquad \underline{2x^2+2x} & \\
\qquad\qquad _\,11x+11 & \\
\qquad\qquad \underline{11x+11} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Dabar (11) lygtį pakeiskime ekvivalenčia lygtimi

$$(x+1)(5x^2+2x+11)=0 \tag{12}$$

ir pamatysime, kad $x=-1$ yra vienintelis jos sprendinys, nes

$$5x^2+2x+11=4x^2+(x^2+2x+1)+10=4x^2+(x+1)^2+10>0,$$

kai x yra bet kuris realusis skaičius.

Taigi (11) lygtis turi vienintelį sprendinį – realųjį skaičių -1.

Ats.: -1.

4 pavyzdys. Išspręskime ketvirtojo laipsnio algebrinę lygtį

$$5x^4-17x^3-6x^2+68x-56=0. \tag{13}$$

Sprendimas. Iš pradžių pabandykime rasti skaičių a (geriau sveikąjį), kuriam esant daugianario

$$P(x)=5x^4-17x^3-6x^2+68x-56$$

reikšmė $P(a)$ lygi nuliui. Tiesiogiai tikrindami, gauname, kad $P(0)\neq 0,\ P(1)\neq 0,\ P(-1)\neq 0,$ bet $P(2)=0,\ P(-2)=0,$ o toliau vėl nieko.

Taip ir sužinojome, kad (13) lygtis tikrai turi du sprendinius – realiuosius skaičius 2 ir -2. Kitus jos sprendinius (jeigu jų būtų) galima rasti skaidant $P(x)$ dauginamaisiais. Kadangi $P(x)$ dalijasi ir iš dvinario $x-2$, ir iš dvinario $x+2$, tai jis tikrai dalijasi ir iš sandaugos $(x-2)(x+2)=x^2-4$. Dalmens ieškokime dalydami kampu:

$$\begin{array}{l|l}
_\,5x^4-17x^3-6x^2+68x-56 & x^2-4 \\ \cline{2-2}
\underline{5x^4-20x^2} & 5x^2-17x+14 \\
\qquad _\,-17x^3+14x^2+68x-56 & \\
\qquad \underline{-17x^3+68x} & \\
\qquad\qquad _\,14x^2-56 & \\
\qquad\qquad \underline{14x^2-56} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Vadinasi, $P(x)=(x^2-4)(5x^2-17x+14).$ Todėl (13) lygtis yra ekvivalenti lygčiai

$$(x^2-4)(5x^2-17x+14)=0\,. \tag{14}$$

Du jos sprendinius ($x = 2$ ir $x = -2$) jau žinome, o likusius (jeigu jų būtų) nesunku sužinoti išsprendus kvadratinę lygtį

$$5x^2 - 17x + 14 = 0.$$

Gausime, kad

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 5 \cdot 14}}{10} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 280}}{10} = \frac{17 \pm 3}{10}.$$

Iš čia $x = 1{,}4$ arba $x = 2$. Skaičius 2 yra ir lygties $x^2 - 4 = 0$ sprendinys.

Taigi (13) lygtis turi tris sprendinius – realiuosius skaičius 2, -2 ir 1,4.

Ats.: 2, -2 ir 1,4.

Atkreipkime dėmesį į daugianario

$$P(x) = 5x^4 - 17x^3 - 6x^2 + 68x - 56$$

skaidinį dauginamaisiais $x - 2$, $x + 2$ ir $x - 1{,}4$. Jis yra toks:

$$P(x) = 5(x-2)^2 \cdot (x+2) \cdot (x - 1{,}4),$$

nes $P(x) = (x^2 - 4)(5x^2 - 17x + 14) = (x-2)(x+2) \cdot 5(x-2)(x-1{,}4).$

Kad ir trumpam, bet vis tiek sustokime prie daugianario $P(x)$ skaidymo dalijant $P(x)$ iš dvinario $x - a,$ nes gebėjimas išskaidyti $P(x)$ dauginamaisiais labai palengvina lygties $P(x) = 0$ sprendimą. Štai antrame pavyzdyje gavome, kad

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x + 2(x-1)(x+1), \tag{14}$$

trečiame

$$P(x) = 5x^3 + 7x^2 + 13x + 11 = (x+1)(5x^2 + 2x + 11), \tag{15}$$

o ketvirtame pavyzdyje

$$P(x) = 5x^4 - 17x^3 - 6x^2 + 68x - 56 = 5(x-2)^2(x+2)(x-1{,}4). \tag{16}$$

Matome, kad (15) skaidinyje yra kvadratinis trinaris $5x^2 + 2x + 11,$ nors (pagal Vijeto teoremą) jį būtų galima užrašyti sandauga $5(x - x_1)(x - x_{2)}.$ Bet tai neįmanoma, nes nėra tokių realiųjų skaičių x_1 ir x_2, kad būtų $P(x_1) = 0$ ir $P(x_2) = 0$ (žr. 3 pvz.).

Išsprendę daugiau algebrinių lygčių $P(x) = 0,$ galėtume ir patys (atidžiai įsižiūrėdami) pamatyti labai svarbių daugianario $P(x)$ savybių. O viena daugianario

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0,$$

savybė yra tokia:

Jeigu daugianario $P(x)$ *koeficientai yra sveikieji skaičiai ir* $a_n = 1,$ *tai realusis skaičius a, kuriam esant galioja lygybė* $P(a) = 0,$ *gali būti tik sveikasis skaičius ir (be to) laisvojo nario* a_0 *daliklis.*

5 pavyzdys. Išskaidykime dauginamaisiais šiuos daugianarius:

a) $P(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15;$

b) $P(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 28x - 24;$

c) $P(x) = x^4 + 3x^3 - 31x^2 - 31x - 70.$

Sprendimas. a) Laisvasis narys yra 15. Jo dalikliai yra $\pm 1, \pm 3, \pm 5$ ir ± 15. Tik tarp šių aštuonių skaičių tikslinga ieškoti tokio *a*, kad būtų $P(a) = 0.$

Iš pradžių pakanka vieno tokio skaičiaus, pavyzdžiui, $a = -1.$ Padaliję $P(x)$ iš $x - a = x + 1,$ gauname, kad

$$P(x) = (x+1)(x^2 - 8x + 15).$$

O kvadratinio trinario $x^2 - 8x + 15$ reikšmė lygi nuliui, kai $a = 3$ (arba 5). Todėl padaliję jį iš $x - 3$ (arba $x - 5$), gauname, kad

$$x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5).$$

Vadinasi, $P(x)=x^3-7x^2+7x+15=(x+1)(x-3)(x-5).$

Ats.: $x^3-7x^2+7x+15=(x+1)(x-3)(x-5).$

b) Laisvojo nario -24 dalikliai yra $\pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm6; \pm8; \pm12$ ir $\pm24.$ Tiesiogiai skaičiuodami gauname, kad $P(1)\neq 0,$ $P(-1)\neq 0,$ bet $P(2)=0.$ Todėl galima $P(x)$ padalyti iš dvinario $x-2$ ir toliau tęsti $P(x)$ skaidymą dauginamaisiais nagrinėjant dalmenį

$$Q(x)=x^3-x^2-8x+12,$$

nes $P(x)=(x-2)Q(x)=(x-2)(x^3-x^2-8x+12).$

Daugianario $Q(x)$ laisvojo nario dalikliai yra $\pm1; \pm2; \pm3; \pm4$ ir $\pm12.$ Kadangi $Q(x)=0,$ kai $x=2,$ tai padalijęs $Q(x)$ iš $x-2,$ gauname, kad $Q(x)=(x-2)(x^2+x-6)$ ir $x^2+x-6=(x-2)(x+3).$

Vadinasi,

$$P(x)=x^4-3x^3-6x^2+28x-24=(x-2)\cdot(x-2)(x^2+x-6)=(x-2)\cdot(x-2)\cdot(x-2)(x+3)=(x-2)^3(x+3).$$

Ats.: $x^4-3x^3-6x^2+28x-24=(x-2)^3(x+3).$

c) Daugianario $P(x)=x^4+3x^3-31x^2-31x-70$ laisvojo nario -70 dalikliai yra

$$\pm1, \pm2, \pm5, \pm7, \pm10, \pm14, \pm35, \pm70.$$

Matome, kad skaičiaus *a*, kuriam galiotų lygybė $P(a)=0,$ paieška gali būti gana ilga ir reikalaujanti didelio atidumo, bet vistiek tikrinkime. Gauname, kad $P(1)\neq 0,$ $P(-1)\neq 0,$ $P(2)\neq 0,$ $P(-2)\neq 0.$ Bet $P(5)=0$ ir $P(-7)=0.$ Padalijęs $P(x)$ iš dvinarių $(x-5)$ ir $(x+7)$ sandaugos

$$(x-5)(x+7)=x^2+2x-35,$$

gauname, kad

$$P(x)=(x-5)(x+7)(x^2+2x-35).$$

Kadangi $x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0,$ kai $x\in\mathbf{R},$ tai tolesnis $P(x)$ skaidymas dvinariais $x-a$ neįmanomas.

Ats.: $x^4+3x^3-31x^2-31x-70=(x-5)(x+7)(x^2+x+2).$

6 pavyzdys. Išspręskime algebrinę lygtį

$$x^6-2x^4-3x^2+6. \qquad (17)$$

Sprendimas. Daugianario $P(x)=x^6-2x^4-3x^2+6$ laisvojo nario dalikliai yra $\pm1, \pm2, \pm3$ ir $\pm6,$ bet nė vienas iš jų nėra (17) lygties sprendinys. Todėl šios lygties sprendimas skaidant $P(x)$ dauginamaisiais yra problemiškas. Būtų neteisinga tvirtinti, kad toks būdas neįmanomas, nes išvada, kad tarp laisvojo nario daliklių nėra nė vieno skaičiaus *a*, kuris tenkintų sąlygą $P(a)=0,$ tereiškia, kad $P(x)$ skaidinyje dauginamaisiais tikrai negali būti dvinario $x-a.$

Pasirinkę keitinį $t=x^2,$ gauname trečiojo laipsnio lygtį

$$t^3-2t^2-3t+6=0. \qquad (18)$$

Kadangi $t^3-2t^2-3t+6=(t^3-2t^2)-(3t-6)=t^2(t-2)-3(t-2)=(t-2)(t^2-2),$ tai (18) lygtis ekvivalenti lygčiai

$$(t-2)(t^2-2)=0,$$

kurios sprendiniai yra $t_1=2,$ $t_2=-\sqrt{3}$ ir $t_3=\sqrt{3}.$ Bet $t_2=-\sqrt{3}$ netinka, nes turi būti $t\geq 0.$ Taigi $t\in\{2; \sqrt{3}\}.$

O tada iš lygčių $x^2=2$ ir $x^2=\sqrt{3}$ gauname keturis (17) lygties sprendinius: $\pm\sqrt{2}$ ir $\pm\sqrt[4]{3}.$

Ats.: $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt[4]{3}.$

7 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=24\,. \qquad (19)$$

Sprendimas. Jei x būtų sveikasis skaičius, tai kairėje pusėje gautume keturių sveikųjų skaičių (teigiamų arba neigiamų), einančių iš eilės, sandaugą. O kadangi $24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4,$ tai (19) lygybė galios, jei $x = 0$ arba $x = 5.$

Taigi turime du (19) lygties sprendinius. Dabar pertvarkykime reiškinį

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) - 24.$$

Gausime:

$$P(x) = ((x-1)(x-2)) \cdot ((x-3)(x-4)) - 24 = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12) - 24 =$$
$$= x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 40x = x(x^3 - 10x^2 + 35x - 40).$$

Kadangi $\dfrac{x^3 - 10x^2 + 35x - 40}{x-5} = x^2 - 5x + 8,$ tai $P(x) = x(x-5)(x^2 - 5x + 8).$

Vadinasi, lygtis $P(x) = 0$ (taigi (19)) turi du sprendinius – realiuosius skaičius 0 ir 5, nes

$$x^2 - 5x + 8 = (x - 2{,}5)^2 + 1{,}75 > 0.$$

<u>Kitas sprendimo būdas.</u> Kadangi

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = ((x-1)(x-4))((x-2)(x-3)) = (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6),$$

tai pasirinkę $t = x^2 - 5x + 4$ gausime kvadratinę lygtį $t(t+2) = 24,$ kurią nesunku išspręsti:

$$t(t+2) = 24 \Rightarrow t^2 + 2t = 24 \Rightarrow (t+1)^2 = 25 \Rightarrow t = -1 \pm 5.$$

Iš čia gauname, kad $t = -6$ arba $t = 4.$

Jei $t = -6$, tai

$$x^2 - 5x + 4 = -6 \Rightarrow x^2 - 5x + 10 = 0,$$

o pastaroji lygtis sprendinių neturi, nes $x^2 - 5x + 10 > 0.$

Jei $t = 4,$ tai

$$x^2 - 5x + 4 = 4 \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ arba } x = 5.$$

Gauname tuos pačius du (19) lygties sprendinius.

Ats.: 0; 5.

8 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$(x^2 + 3x + 6)(x^2 + 7x + 16) = 41. \tag{20}$$

Sprendimas. Sudauginę ir atlikę kitus skaičiavimus, gauname ekvivalenčią lygtį

$$x^4 + 10x^3 + 43x^2 + 90x + 55 = 0. \tag{21}$$

Aišku, kad ji neturi nė vieno teigiamo sprendinio. Todėl ieškant a, kad būtų $P(a) = 0,$ pakanka tikrinti tik neigiamus laisvojo nario 55 daliklius $-1; -5; -11$ ir $-55.$ Bet nė vienas netenkina sąlygos $P(a) = 0.$

Lygties kairėje pusėje esantį daugianarį $P(x)$ pertvarkykime taip:

$$P(x) = x^4 + 10x^3 + 43x^2 + 90x + 55 = (x^4 + 10x^3 + 25x^2) + (18x^2 + 90x) + 55 =$$
$$= (x^2 + 5x)^2 + 18(x^2 + 5x) + 55.$$

Pažymėję $t = x^2 + 5x,$ gauname kvadratinę lygtį

$$t^2 + 18t + 55 = 0.$$

Tada

$$(t+9)^2 - 26 = 0 \Rightarrow t = -9 \pm \sqrt{26}.$$

Jei $t = -9 - \sqrt{26}$, tai

$$x^2 + 5x = -9 - \sqrt{26} \Rightarrow x^2 + 5x + 9 + \sqrt{26} = 0.$$

Bet pastaroji lygtis sprendinių neturi, nes

$$x^2 + 5x + 9 + \sqrt{26} = (x + 2{,}5)^2 + 2{,}75x + \sqrt{26} > 0, \text{ jei } x \in \mathbf{R}.$$

Jei $t = -9 + \sqrt{26}$, tai

$$x^2+5x=-9+\sqrt{26} \Rightarrow x^2+5x+9-\sqrt{26}=0 \Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4(9-\sqrt{26})}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{4\sqrt{26}-11}}{2}.$$

Taigi (21) lygtis turi du sprendinius – realiuosius skaičius $\frac{-5-\sqrt{4\sqrt{26}-11}}{2}$ ir $\frac{-5+\sqrt{4\sqrt{26}-11}}{2}$.

Ats.: $\frac{-5\pm\sqrt{4\sqrt{26}-11}}{2}$.

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Išspręskite lygtį $x^3-19x+30=0$.

2. Išspręskite lygtį $(x+1)(x+2)(x+3)=990$.

3. Išspręskite lygtį $x^3+x^2=36$.

4. Išspręskite lygtį $x^6-x^3=2$.

5. Išspręskite lygtį $x^4=(x+1)^4$.

6. Išspręskite lygtį $(x^2+6x)^2-(x+3)^2=11$.

7. Išspręskite lygtį $(x-6)^4+(x-8)^4=16$.

8. Išspręskite lygtį $x^4-6x^3-21x^2+104x-42=0$.

9. Išspręskite lygtį $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680$.

10. Įrodykite, kad lygtis $x^4-x^3+x^2+2x+12=0$ neturi sprendinių.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2023 m. vasario 10 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: http://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA