

ALYTAUS APSKRITIES XXII KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA

MOKYTOJO KAZIO KLIMAVIČIAUS TAUREI LAIMĖTI

Alytus, 2022 m. gruodžio 9 d.

Uždaviniai

1. Vienas vaikas pasiėmė pusę krepšelyje buvusių riešutų ir dar vieną riešutą, kitas vaikas pasiėmė pusę likusių riešutų ir dar vieną riešutą. O kai trečiasis vaikas pasiėmė pusę likusių riešutų ir dar tris riešutus, krepšelyje riešutų nebeliko. Kiek riešutų buvo krepšelyje?
2. Apskaičiuokite $8^x - 8^{-x}$, jei $2^x - 2^{-x} = 5$.
3. Praeivis ėjo gatve ir skaičiavo jį aplenkiančius ir jo sutiktus autobusus. Jis pastebėjo, kad kas 7 minutės jį aplenkia autobusas, o kas 5 minutės jis sutinka autobusą. Kas kiek laiko autobusai išvyksta iš galinės stoties, jei jie išvyksta vienodais intervalais ir visą maršrutą važiuoja vienodu greičiu?
4. Tėvo metų skaičius yra du kartus didesnis už sūnaus metų skaičių. Kai tėvui buvo 28 metai, sūnus buvo pragyvenęs $\frac{1}{3}$ dabartinio savo amžiaus. Kiek šiuo metu metų sūnui ir kiek – tėvui?
5. Įrodykite, kad:
 - a) $\frac{\underbrace{22\dots2}_{20} + (\underbrace{33\dots3}_{20})^2}{40} = \frac{\underbrace{11\dots1}_{40}}{40}$;
 - b) $\frac{\underbrace{22\dots2}_n + (\underbrace{33\dots3}_n)^2}{2n} = \frac{\underbrace{11\dots1}_{2n}}{2n}$
esant bet kuriam natūraliajam skaičiui n .
6. Trys broliai grybavo ir kartu rado 24 grybus, kiekvienas rado tiek grybų, kiek kiekvienam jų metų. Jauniausias sau pasiliko pusę rastų grybų, likusius po lygiai padalydamas kitiems broliams. Po to vidurinis brolis pusę savo turimų (t. y. surastų ir gautų iš jauniausiojo brolio) grybų pasiliko sau, o likusius po lygiai padalijo kitiems broliams. Galiausiai vyriausias brolis irgi sau pasiliko pusę turimų grybų, o likusius po lygiai padalijo jaunesniems broliams. Po to paaiškėjo, kad visi broliai turi po vienodą skaičių grybų. Kiek kiekvienam broliui metų?
7. Dviejų dviženklų skaičių suma dalijasi iš 13, o dalmuo dalijasi iš 7. Raskite tuos skaičius.
8. Raskite visus triženklus skaičius, kurie 13 kartų didesni už savo skaitmenų sumą.
9. Stačiojo trikampio ABC statinių ilgai $AC = 12$ cm, $BC = 16$ cm, taškas D yra statinio AC vidurio taškas, atkarpa DE yra statmena įžambinei AB (taškas E yra įžambinėje). Raskite keturkampio $CDEB$ plotą.
10. Atkarpos AD ir BC yra trapecijos $ABCD$ pagrindai, kampas A yra statusis, kampo ADC pusiaukampinė kerta šoninę kraštinę AB jos vidurio taške M , iš taško M yra nubrėžtas statmuo į kraštinę CD , kertantis ją taške K . Raskite kampo AKB didumą.