ALYTAUS APSKRITIES XXII KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO KLIMAVIČIAUS TAUREI LAIMĖTI

Alytus, 2022 m. gruodžio 9 d.

Uždavinių sprendimai

1. Vienas vaikas pasiėmė pusę krepšelyje buvusių riešutų ir dar vieną riešutą, kitas vaikas pasiėmė pusę likusių riešutų ir dar vieną riešutą. O kai trečiasis vaikas pasiėmė pusę likusių riešutų ir dar tris riešutus, krepšelyje riešutų nebeliko. Kiek riešutų buvo krepšelyje?

Sprendimas. Pirmas būdas. Sakykime, kad buvo x riešutų. Pirmas vaikas paėmė $\frac{1}{2}x+1$ riešutą, taigi krepšelyje liko $x-\left(\frac{1}{2}x+1\right)=\frac{1}{2}x-1$ riešutų. Antras vaikas paėmė $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)+1=\frac{x+2}{4}$ riešutų, taigi liko $\frac{1}{2}x-1-\frac{x+2}{4}=\frac{x-6}{4}$ riešutų. Trečias vaikas paėmė $\frac{1}{2}\left(\frac{x-6}{4}\right)+3=\frac{x+18}{8}$ riešutų ir po to krepšelis buvo tuščias, taigi $\frac{x-6}{4}=\frac{x+18}{8}$. Iš čia $x=30$.

Antras būdas. Kadangi trečias vaikas paėmė pusę likusių riešutų ir dar tris, o po to krepšelyje riešutų neliko, tai jis paėmė 6 riešutus. Taigi 6 riešutai yra 1 mažiau, nei pusė likusių riešutų po pirmojo paėmimo. Todėl antras vaikas paėmė 8 riešutus, antras ir trečias kartu paėmė 14 riešutų, o tai vienu riešutu mažiau, nei pusė visų riešutų. Taigi viso buvo 30 riešutų.

Atsakymas: 30.

2. Apskaičiuokite 8^x-8^{-x}, jei $2^x-2^{-x}=5$.

Sprendimas. Pirmas būdas. Taikydami kubų skirtumo formulę gauname: $8^x-8^{-x}=(2^x)^3-(2^{-x})^3=(2^x-2^{-x})((2^x)^2+1+(2^{-x})^2)=5((2^x-2^{-x})^2+3)=5(5^2+3)=140$.

Antras būdas. Žymėdami $2^x=t>0$, iš lygybės $2^x-2^{-x}=5$ turime lygtį $t-\frac{1}{t}=5$, $t^2-5t-1=0$, kurios teigiamas sprendinys yra $t=\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{29}\right)$. Tuomet $t^{-1}=\frac{1}{2}\left(-5+\sqrt{29}\right)$, $8^x-8^{-x}=t^3-t^{-3}=140$.

Atsakymas: 140.

3. Praeivis ėjo gatve ir skaičiavo jį aplenkiančius ir jo sutiktus autobusus. Jis pastebėjo, kad kas 7 minutės jį aplenkia autobusas, o kas 5 minutės jis sutinka autobusą. Kas kiek laiko autobusai išvyksta iš galinės stoties, jei jie išvyksta vienodais intervalais ir visa maršrutą važiuoja vienodu greičiu?

Sprendimas. Tarkime, kad praeivis iš taško A ėjo 35 minutes į vieną pusę ir 35 minutes į kitą pusę. Per tą laiką, eidamas pirmyn, jis sutiko 7 autobusus, o grįžtantį atgal jį aplenkė 5 autobusai. Taigi per 70 minučių viena kryptimi iš taško A pravažiavo 12 autobusų, todėl autobusai išvyksta kas $\frac{70}{12}=5\ min.\ 50\ s$.

Atsakymas: 5 min. 50 s.

4. Tėvo metų skaičius yra du kartus didesnis už sūnaus metų skaičių. Kai tėvui buvo 28 metai, sūnus buvo pragyvenęs $\frac{1}{3}$ dabartinio savo amžiaus. Kiek šiuo metu metų sūnui ir kiek – tėvui?

Sprendimas. Sakykime, kad dabar sūnui x metų, o tėvui – $2x$ metų, taigi tėvo ir sūnaus metų skirtumas yra x metų. Kai tėvui buvo 28 metai, sūnui buvo $28-x$ metų, ir tai sudarė trečdalį dabartinio sūnaus amžiaus. Taigi turime lygtį $28-x=\frac{1}{3}x$, iš kurios randame $x=21$.

Atsakymas: sūnui dabar 21 metai, tėvui – 42.

5. Įrodykite, kad:

a) $\underbrace{22...2}_{20}+(\underbrace{33...3}_{20})^2=\underbrace{11...1}_{40}$;

b) $\underbrace{22...2}_{n}+(\underbrace{33...3}_{n})^2=\underbrace{11...1}_{2n}$

esant bet kuriam natūraliajam skaičiui *n*.

Įrodymas. Kadangi $22...2=9\cdot\underbrace{11...1}_{n}$ ir $\underbrace{33...3}_{n}=3\cdot\underbrace{11...1}_{n}$, tai

$$\underbrace{22...2}_{n}+(\underbrace{33...3}_{n})^2=\underbrace{11...1}_{n}\cdot(2+9\cdot\underbrace{11...1}_{n})=\underbrace{11...1}_{n}\cdot(2+\underbrace{99...9}_{n})=$$
$$=\underbrace{11...1}_{n}\cdot 1\underbrace{00...0}_{n-1}1=\underbrace{11...1}_{n}\cdot(1\underbrace{00...0}_{n-1}+1)=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{11...1}_{n}=\underbrace{11...1}_{2n}.$$

6. Trys broliai grybavo ir kartu rado 24 grybus, kiekvienas rado tiek grybų, kiek kiekvienam jų metų. Jauniausias sau pasiliko pusę rastų grybų, likusius po lygiai padalydamas kitiems broliams. Po to vidurinis brolis pusę savo turimų (t. y. surastų ir gautų iš jauniausiojo brolio) grybų pasiliko sau, o likusius po lygiai padalijo kitiems broliams. Galiausiai vyriausias brolis irgi sau pasiliko pusę turimų grybų, o likusius po lygiai padalijo jaunesniems broliams. Po to paaiškėjo, kad visi broliai turi po vienodą skaičių grybų. Kiek kiekvienam broliui metų?

Sprendimas. Pirmas būdas. Tarkime, kad vyriausias brolis rado x grybų, vidurinysis – y grybų, o jauniausias – z grybų, taigi $x+y+z=24$. Jauniausias sau pasiliko $\frac{z}{2}$, grybų, o kitus padalijo po $\frac{z}{4}$ kitiems broliams, taigi vidurinysis ir vyriausias dabar turi atitinkamai $y+\frac{z}{4}$ ir $x+\frac{z}{4}$ grybų. Vidurinysis sau pasiliko $\frac{1}{2}\left(y+\frac{z}{4}\right)=\frac{y}{2}+\frac{z}{8}$ grybų, likusius po $\frac{y}{4}+\frac{z}{16}$ padalijo kitiems. Dabar jauniausias brolis turi $\frac{z}{2}+\left(\frac{y}{4}+\frac{z}{16}\right)=\frac{9z}{16}+\frac{y}{4}$, o vyriausias turi $x+\frac{z}{4}+\left(\frac{y}{4}+\frac{z}{16}\right)=x+\frac{y}{4}+\frac{5z}{16}$ grybų. Kai vyriausias sau pasiliko pusę turimų grybų, tai jam liko 8 grybai, todėl $\frac{x}{2}+\frac{y}{8}+\frac{5z}{32}=8$, arba $16x+4y+5z=256$. Kai vyriausias atidavė po $\frac{x}{4}+\frac{y}{16}+\frac{5z}{64}$ grybų kitiems broliams, vidurinysis turėjo $\frac{y}{2}+\frac{z}{8}+\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{16}+\frac{5z}{64}\right)=\frac{x}{4}+\frac{9y}{16}+\frac{13z}{64}$, todėl $\frac{x}{4}+\frac{9y}{16}+\frac{13z}{64}=8$, arba $16x+36y+13z=512$. Iš sistemos

$$x+y+z=24.$$

$$16x+4y+5z=256,$$

$$16x+36y+13z=512$$

randame, kad $x=13$, $y=7$, $z=4$.

Antras būdas. Kadangi po paskutiniojo pasidalijimo grybais vyriausias brolis turėjo 8 grybus, tai prieš šį pasidalijimą jis turėjo 16 grybų ir po 4 atidavė jaunesniems broliams. Todėl vidurinis ir jauniausias broliai prieš šį pasidalijimą turėjo po 4 grybus. Iš čia gauname, kad prieš savąjį padalijimą vidurinis brolis turėjo 8 grybus, po du iš kurių jis atidavė kitiems broliams. Todėl jauniausias brolis prieš tai turėjo 2 grybus, o tai buvo pusė jo surastų grybų. Taigi jauniausias brolis rado 4 grybus, po vieną atidavė kitiems, todėl vidurinis buvo radęs 7 grybus. Tuomet vyriausias rado $24-7-4=13$ grybų.

Atsakymas: vyriausiam broliui 13 metų, viduriniam – 7, jauniausiam 4 metai.

7. Dviejų dviženklių skaičių suma dalijasi iš 13, o dalmuo dalijasi iš 7. Raskite tuos skaičius.

Sprendimas. Jei x ir y – ieškomieji dviženkliai skaičiai, tai pagal sąlygą $x + y = 13k$, $\frac{x}{y} = 7l$, čia k ir l – natūralieji skaičiai. Kadangi dviženklių skaičių dalmuo yra vienženklis skaičius, tai $l = 1$, taigi $x = 7y$, $7y + y = 13k$, $8y = 13k$. Iš čia seka, kad $k = 8n$, n- natūralusis skaičius. Kai $n = 1$, turime $y = 13$, $x = 91$. kai $n \geq 2$, $k \geq 16$, $y \geq 26$, tuomet $x = 7y$ yra triženklis skaičius. Taigi vienintelis atsakymas: $x = 13$, $y = 91$.

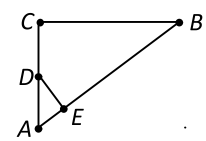
Atsakymas: 13 ir 91.

8. Raskite visus triženklius skaičius, kurie 13 kartų didesni už savo skaitmenų sumą.

Sprendimas. Sakykime, kad $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$ – ieškomasis skaičius, tuomet $100x + 10y + z = 13(x + y + z)$. Iš čia $87x = 3y + 12z$, $29x = y + 4z$. Kadangi x, y, z yra sksaitmenys, tai reiškinio $y + 4z$ didžiausia reikšmė lygi $9 + 36 = 45$. Iš čia gauname, kad $x = 1$, todėl $y + 4z = 29$, $z = \frac{29-y}{4}$. Kadangi z yra sveikasis skaičius, neviršijantis 9, tai iš šios lygybės seka, kad y gali būti 9, 5 arba 1. Kai $y = 9$, $z = 5$, kai $y = 5$, $z = 6$, kai $y = 1$, $z = 7$.

Atsakymas: 195, 156, 117.

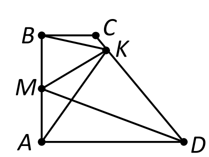
9. Stačiojo trikampio ABC statinių ilgiai $AC = 12\ cm$, $BC = 16\ cm$, taškas D yra statinio ACvidurio taškas, atkarpa DE yra statmena įžambinei AB (taškas E yra įžambinėje). Raskite keturkampio $CDEB$ plotą.



Sprendimas. Akivaizdu, kad trikampio ABC įžambinė $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 20$, o jo plotas $S = \frac{1}{2}AC \cdot BC = 96$. Trikampiai ADE ir ABC yra panašieji, todėl jų plotų santykis lygus atitinkamų kraštinių kvadratų santykiui: $S_{\Delta ADE} : S_{\Delta ABC} = AD^2 : AB^2 = 6^2 : 20^2 = 9 : 100$. Todėl trikampio ADE plotas lygus $S_{\Delta ADE} = \frac{9}{100} \cdot 96 = \frac{216}{25}$. Tuomet keturkampio $CDEB$ plotas lygus trikampių ABC ir ADE plotų skirtumui: $96 - \frac{216}{25} = \frac{2184}{25}$.

Atsakymas: $\frac{2184}{25}\ cm^2$.

10. Atkarpos AD ir BC yra trapecijos $ABCD$ pagrindai, kampas A yra statusis, kampo ADC pusiaukampinė kerta šoninę kraštinę AB jos vidurio taške M, Iš taško M yra nubrėžtas statmuo į kraštinę CD, kertantis ją taške K. Raskite kampo AKB didumą.



Sprendimas. Taškas M yra kampo ADC pusiaukampinėje, taigi jis vienodai nutolęs nuo to kampo kraštinių, todėl $MA = MK$. Kadangi $MB = MA$, tai iš lygybių $AM = MB = MK$ išplaukia, kad taškai A, K, B yra apskritime, kurio centras M, atkarpa AB yra jo skersmuo, taigi kampas AKB yra statusis.

Atsakymas: 90^0.