SŪDUVOS KRAŠTO GIMNAZIJŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

MARIJAMPOLĖS RYGIŠKIŲ JONO GIMNAZIJA

2022 m. gruodžio 9 d.

1. Garsiojo mokytojo Alvydo mokinių grupė, kurioje buvo 30 mokinių, šiam mokytojui, kaip žinoma, pažymiais nesišvaistant be reikalo, suorganizavo vadinamąją kuklių pasiekimų parodą, kurioje jaunuolės bei jaunuoliai rodė tokius įprastus pažymius: **2**, **3**, **4** ir **5**. Visų mokinių visų gautųjų pažymių suma buvo 93. Dar tapo žinoma, kad trejetų buvo daugiau negu penketų, bet mažiau negu ketvertų. Be to, paaiškėjo, kad ketvertų skaičius dalijasi iš 10, o penketų skaičius yra lyginis. Kiek dvejetų, trejetų, ketvertų ir penketų gavo tos bandomosios grupės mokiniai?

2. Marijampolės marijonų gimnazijoje yra labai gerbiami tie žmonės, kurie per gerą pusvalandį geba išspręsti tokį uždavinį apie $n \times n$ lentelę, padalintą į 1×1 langelius, kur skaičius n nelyginis, ir gauti iki galo suprastintą jo atsakymą. Iš tos lentelės esą yra pašalinami visi langeliai, esantys ties kiekviena iš keturių tos lentelės kraštinių, ir visi langeliai, esantys abiejose ilgosiose įstrižainėse. Kiekvienam natūraliajam nelyginiam skaičiui $n > 1$ nustatykite, kiek langelių po tokio veiksmo lieka lentelėje.

3. Kai mokytoja Daiva ima švelniai šypsotis, tai jos jautresnieji mokiniai jau nujaučia, kad po tokios šypsenos seks arba geometrinis uždavinys su stačiaisiais trikampiais, arba kažkas su geometrine ar net aritmetine progresija. Taip nutiko ir dabar, nes pasišypsojusi mokytoja ėmė diktuoti tokią sąlygą: jeigu a, b ir c yra stačiojo trikampio kraštinių ilgiai, $a < b < c$ ir šie ilgiai sudaro aritmetinę progresiją, tai kiek kartų trikampio statinių ilgių suma gali būti didesnė už įžambinės ilgį?

4. Sesė Geltonkasė Marijampolietė tikrai visada galėjo, gali ir todėl, suprantama, visada galės suvokti tokio uždavinio sprendimą: reikia rasti visus natūraliuosius skaičius n, kuriems skaičius

$$4^n + 260 = m^2$$

yra natūraliojo skaičiaus m kvadratas.

5. Vienas dar ir šiandien tebešvilpaujantis berniokas pradėjo matematinę karjerą, tuo padaręs įspūdį net ir direktoriui Vilhelmui, kai per pusantros paros kaip šiltą vilną sudorojo tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x - \dfrac{2x+y}{x^2-y^2} = 1, \\ y + \dfrac{x+2y}{x^2-y^2} = -1. \end{cases}$$

Kas gi išeina, iki pat galo išsprendus šią berniokui įveikiamą sistemą?

Sprendimai

1. Garsiojo mokytojo Alvydo mokinių grupė, kurioje buvo 30 mokinių, šiam mokytojui, kaip žinoma, pažymiais nesišvaistant be reikalo, suorganizavo vadinamąją kuklių pasiekimų parodą, kurioje jaunuolės bei jaunuoliai rodė tokius įprastus pažymius: **2**, **3**, **4** ir **5**. Visų mokinių visų gautųjų pažymių suma buvo 93. Dar tapo žinoma, kad trejetų buvo daugiau negu penketų, bet mažiau negu ketvertų. Be to, paaiškėjo, kad ketvertų skaičius dalijasi iš 10, o penketų skaičius yra lyginis. Kiek dvejetų, trejetų, ketvertų ir penketų gavo tos bandomosios grupės mokiniai?

Sprendimas. Tarkime, kad dvejetą, trejetą, ketvertą, penketą atitinkamai gavo po D, T, K, P mokinių. Tada

$$D + T + K + P = 30, \qquad 2D + 3T + 4K + 5P = 93.$$

Skaičius K dalijasi iš 10, tad tegali būti lygus 10, 20 arba 30. Jei $K = 30$, tai $4K = 120 > 93$. Jei $K = 20$, tai ketverto negavo 10 mokinių. Šių 10 mokinių pažymių suma yra ne mažesnė už 20, o tada bendra pažymių suma yra ne mažesnė už $20 + 4K = 100 > 93$. Taigi $K = 10$.

Skaičius P lyginis ir mažesnis už K, todėl $P = 0$, 2, 4, 6 arba 8 ir kiekvienu atveju

$$D + T = 20 - P, \qquad 2D + 3T = 53 - 5P.$$

Toliau galime patikrinti penkias P reikšmes ir kaskart gauti D bei T. Tačiau keturias reikšmes galima tuojau atmesti: skaičius

$$T = (2D + 3T) - 2(D + T) = 53 - 5P - 2(20 - P) = 13 - 3P$$

turi būti didesnis už P (netinka $P = 4$, 6, 8), bet mažesnis už $K = 10$ (netinka $P = 0$). Kai $P = 2$, tai $T = 7$ ir $D = 11$. Ketvertas $(D;\ T;\ K;\ P) = (11;\ 7;\ 10; 2)$ tenkina uždavinio sąlygą.

Atsakymas. Toje 30 mokinių grupėje 11 mokinių gavo dvejetus, 7 mokiniai gavo trejetus, 10 mokinių gavo ketvertus ir 2 mokiniai gavo penketus.

2. Marijampolės marijonų gimnazijoje yra labai gerbiami tie žmonės, kurie per gerą pusvalandį geba išspręsti tokį uždavinį apie $n \times n$ lentelę, padalintą į 1×1 langelius, kur skaičius n nelyginis, ir gauti iki galo suprastintą jo atsakymą. Iš tos lentelės esą yra pašalinami visi langeliai, esantys ties kiekviena iš keturių tos lentelės kraštinių, ir visi langeliai, esantys abiejose ilgosiose įstrižainėse. Kiekvienam natūraliajam nelyginiam skaičiui $n > 1$ nustatykite, kiek langelių po tokio veiksmo lieka lentelėje.

Sprendimas. Skaičius n nelyginis, todėl vidurinis langelis yra abiejose ilgosiose įstrižainėse, ir jose yra iš viso $n + (n - 1) = 2n - 1$ langelių. Ties kiekviena lentelės kraštine dar yra po $n - 2$ langelius (neskaitant kampinių langelių, priklausančių šalinamoms įstrižainėms). Bendras pašalintų langelių skaičius lygus $2n - 1 + 4(n - 2) = 6n - 9$. Taigi lentelėje lieka $n^2 - 6n + 9$ langelių.

Atsakymas. $n^2 - 6n + 9$.

3. Kai mokytoja Daiva ima švelniai šypsotis, tai jos jautresnieji mokiniai jau nujaučia, kad po tokios šypsenos seks arba geometrinis uždavinys su stačiaisiais trikampiais, arba kažkas su geometrine ar net aritmetine progresija. Taip nutiko ir dabar, nes pasišypsojusi mokytoja ėmė diktuoti tokią sąlygą: jeigu a, b ir c yra stačiojo trikampio kraštinių ilgiai, $a < b < c$ ir šie ilgiai sudaro aritmetinę progresiją, tai kiek kartų trikampio statinių ilgių suma gali būti didesnė už įžambinės ilgį?

Sprendimas. Aritmetinės progresijos skirtumą pažymėkime d. Čia $d = b - a = c - b$. Taigi

$$a + c = 2b, \qquad c^2 = a^2 + b^2.$$

Tada $b^2 = c^2 - a^2 = (c - a)(c + a) = 2b(c - a)$ ir $b = 2(c - a) = 2c - 2a$. Gauname

$$a + c = 2b = 4c - 4a, \qquad 5a = 3c,$$

$$2c - b = 2a = 2(2b - c) = 4b - 2c, \qquad 5b = 4c,$$

$$\frac{a + b}{c} = \frac{5a + 5b}{5c} = \frac{3c + 4c}{5c} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}.$$

Atsakymas. $1\frac{2}{5} = 1{,}4$.

4. Sesė Geltonkasė Marijampolietė tikrai visada galėjo, gali ir todėl, suprantama, visada galės suvokti tokio uždavinio sprendimą: reikia nustatyti visus natūraliuosius skaičius n, kuriems skaičius

$$4^n + 260 = m^2$$

yra natūraliojo skaičiaus m kvadratas.

Sprendimas. Perrašykime lygtį kitaip:

$$m^2 - (2^n)^2 = 260, \qquad (m - 2^n)(m + 2^n) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13.$$

Skaičius $m + 2^n$ teigiamas, todėl ir skaičius $m - 2^n$ yra teigiamas. Be to, antrasis iš šių skaičių yra mažesnis už pirmąjį. Skaičius 260 turi 12 teigiamų daliklių, matomų šiuose skaidiniuose:

$$1 \cdot 260 = 2 \cdot 130 = 4 \cdot 65 = 5 \cdot 52 = 10 \cdot 26 = 13 \cdot 20.$$

Taigi pakanka patikrinti šešias galimybes: skaičius $m - 2^n$ tegali būti mažesnysis vieno iš šių skaidinių skaičius, o $m + 2^n$ – didesnysis to paties skaidinio skaičius. Galimybes pavyks greičiau perrinkti, pastebėjus, kad $(m + 2^n) - (m - 2^n) = 2^{n+1}$. Tada lieka dvi galimybės: $130 - 2 = 2^7$ ir $26 - 10 = 2^4$. Atitinkamai $n = 6$, $m = 66$ ir $n = 3$, $m = 18$. Abi skaičių poros yra duotosios lygties sprendiniai.

Pastebėkime, kad šį sprendimą galima supaprastinti, jo pradžioje pažymėjus $m = 2k$ (skaičius m turi būti lyginis) ir, prieš atliekant tolimesnius veiksmus, padalijus lygtį iš 4:

$$4^{n-1} + 65 = k^2.$$

Atsakymas. 3 ir 6.

5. Vienas dar ir šiandien tebešvilpaujantis berniokas pradėjo matematinę karjerą, tuo padaręs įspūdį net ir direktoriui Vilhelmui, kai per pusantros paros kaip šiltą vilną sudorojo tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x - \dfrac{2x + y}{x^2 - y^2} = 1, \\ y + \dfrac{x + 2y}{x^2 - y^2} = -1. \end{cases}$$

Kas gi išeina, iki pat galo išsprendus šią berniokui įveikiamą sistemą?

Sprendimas. Sudėję abi lygtis, gauname

$$0 = x + y + \frac{-2x - y + x + 2y}{x^2 - y^2} = x + y - \frac{x - y}{(x - y)(x + y)} = x + y - \frac{1}{x + y},$$

$$(x + y)^2 = 1, \qquad x + y = \pm 1.$$

Atėmę vieną lygtį iš kitos, gauname

$$2 = x - y - \frac{2x + y + x + 2y}{x^2 - y^2} = x - y - \frac{3(x + y)}{(x - y)(x + y)} = x - y - \frac{3}{x - y},$$

$$(x - y)^2 - 2(x - y) - 3 = 0, \qquad x - y = -1; 3.$$

Turime keturias galimybes, kokia gali būti skaičių pora $(x + y; x - y)$. Kiekvienu atveju randame porą $(x; y)$. Taip gauname keturis sprendinius, tenkinančius pradinę sistemą: $(0; 1)$, $(2; -1)$, $(-1; 0)$, $(1; -2)$.

Pastebėsime, kad lygčių sistemą galima išspręsti, tegavus vieno iš reiškinių $x \pm y$ dvi galimas reikšmes. Pavyzdžiui, gavus $x + y = \pm 1$ ir tikrinant galimybę $x + y = 1$, galima pradinėje sistemoje įrašyti $y = 1 - x$ ir išspręsti gautą sistemą su vienu nežinomuoju:

$$\begin{cases} x - \dfrac{x + 1}{2x - 1} = 1, \\ 1 - x + \dfrac{2 - x}{2x - 1} = -1. \end{cases}$$

Atsakymas. $(0; 1)$, $(2; -1)$, $(-1; 0)$, $(1; -2)$.