LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

III. APSKRITIMAI

(2022–2024)

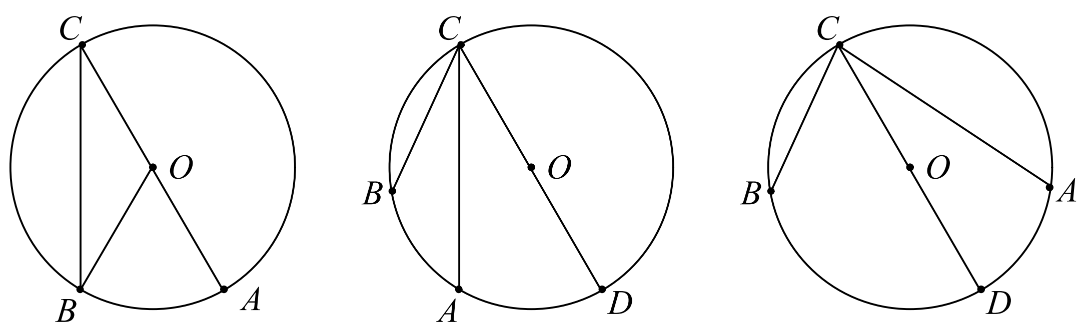
Teorinę medžiagą parengė ir trečiąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Edmundas Mazėtis

1. Centriniai ir įbrėžtiniai kampai. Kaip žinome, *apskritimas* – tai aibė plokštumos taškų, duotuoju atstumu R nutolusių nuo duotojo plokštumos taško $O.$ Taškas O yra vadinamas apskritimo *centru*, o atkarpa OM, jungianti apskritimo centrą su bet kuriuo to apskritimo tašku M, vadinama apskritimo *spinduliu*. Visi apskritimo spinduliai yra lygūs, jų ilgis lygus R. Atkarpa $AB,$ jungianti du apskritimo taškus, vadinama apskritimo *styga.* Jei apskritimo styga eina per jo centrą, tai ji vadinama apskritimo *skersmeniu*. Apskritimo dalis, esanti tarp dviejų jo taškų A ir B, vadinama apskritimo *lanku*, kurio galai yra taškai A ir B. Du duotieji apskritimo taškai nustato du apskritimo lankus, kurių galai yra tie taškai.

Kampas, kurio viršūnė yra apskritimo centras, vadinamas *centriniu kampu*. Kampas, kurio viršūnė yra apskritimo taškas, o kraštinės tą apskritimą kerta, vadinamas *įbrėžtiniu kampu*. Jei taškas O yra apskritimo centras, o A ir B – apskritimo taškai, tai centrinio kampo AOB didumas yra lygus lanko AB didumui.

1 teorema. Jei A ir B – du apskritimo taškai, taškas O – jo centras, o taškas C yra apskritimo taškas, esantis toje pačioje tiesės AB pusėje, kaip ir taškas $O,$ tai kampo ACB didumas lygus kampo AOB didumo pusei.

Teoremą pirmiausia įrodysime, kai atkarpa AC – apskritimo skersmuo (1 pav.). Kadangi trikampis COB yra lygiašonis, tai $\angle OBC = \angle OCB$. Kampas AOB yra trikampio OBC priekampis, todėl $\angle AOB = \angle OBC + \angle OCB = 2\angle OCB = 2\angle ACB.$ Kai atkarpa AC nėra apskritimo skersmuo, tai brėžiame skersmenį CD. Tuomet $\angle ACB = \angle DCB - \angle DCA$ (2a pav.), arba $\angle ACB = \angle ACD + \angle DCB$ (2b pav.). Abiem atvejais teoremos tvirtinimas seka iš šių lygybių ir ką tik įrodyto fakto.



1 pav. 2a pav. 2b pav.

Iš įrodytos teoremos išplaukia tokių teiginių teisingumas:

1 išvada. Visiems apskritimo taškams M, esantiems vienoje stygos AB pusėje, kampai AMB yra lygūs.

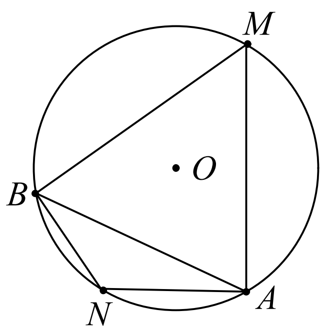
2 išvada. Jei AB ir CD – dvi lygios apskritimo stygos, o apskritimo taškas M yra toje pačioje tiesės AB pusėje, taškas N yra toje pačioje tiesės CD pusėje kaip ir apskritimo centras, arba abu yra skirtingose pusėse, nei apskritimo centras, tai kampai AMB ir CND yra lygūs.

3 išvada. Jei atkarpa AB yra apskritimo skersmuo, tai bet kuriam apskritimo taškui C kampas ACB yra statusis.

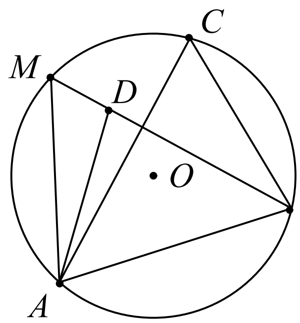
4 išvada. Jei apskritimo taškai M ir N yra skirtingose tiesės, kurioje yra apskritimo styga AB, pusėse (3 pav.), tai $\angle AMB + \angle ANB = 180^0$.

5 išvada. Jei apskritimo lankai AB ir CD yra lygūs, tai stygos AB ir CD irgi yra lygios.

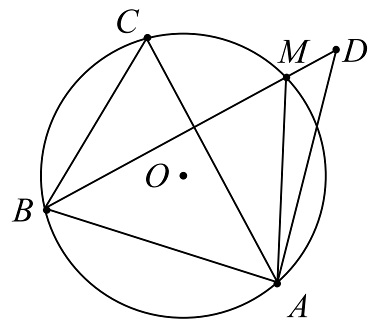
2 teorema. Jei du taškai C ir D yra vienoje tiesės AB pusėje ir $\angle ACB = \angle ADB$, tai taškai A, B, C, D yra viename apskritime.



3 pav.



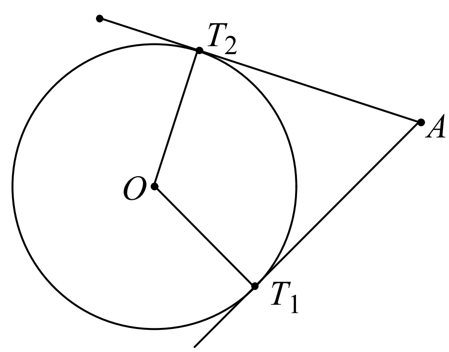
4a pav.



4b pav.

Teoremą įrodysime prieštaros būdu. Apie trikampį ABC apibrėžkime apskritimą, tuomet taškas D gali būti šio apskritimo viduje (4a pav.), šio apskritimo išorėje (4b pav.) arba priklausyti šiam apskritimui. Pirmuoju ir antruoju atvejais sakykime, kad tiesė BD taške M kerta šio apskritimo lanką AB, esantį toje pačioje tiesės AB pusėje, kaip ir taškas C. Iš 1 išvados gauname, kad $\angle AMB = \angle ACB$. Pirmuoju atveju, kai taškas D yra apskritimo viduje, kampas ADB yra trikampio DMA priekampis, todėl $\angle ADB > \angle AMB$, taigi $\angle ADB > \angle ACB$. Antruoju atveju kampas AMB yra trikampio AMD priekampis, todėl $\angle AMB > \angle ADB$, taigi $\angle ADB < \angle ACB$. Abiem atvejais gavome $\angle ADB \neq \angle ACB$, ši prieštara įrodo, kad taškas D negali būti nei apskritimo viduje, nei išorėje, taigi jis yra apskritimo taškas.

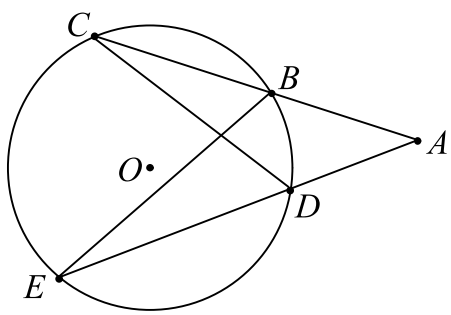
2. Apskritimų liestinės ir kirstinės. Tiesė, turinti su apskritimu du bendrus taškus, vadinama apskritimo *kirstine*, o tiesė, turinti su apskritimu vieną bendrą tašką, vadinama apskritimo *liestine*. Apskritimo liestinė yra statmena tiesei, jungiančiai apskritimo centrą O su lietimosi tašku. Atvirkščiai, jei taškas A yra bendras tiesės l ir apskritimo taškas, o spindulys OA yra statmenas tiesei l, tai ši tiesė yra apskritimo liestinė, liečianti jį taške A. Per kiekvieną apskritimo tašką yra nubrėžiame vienintelė jo liestinė. Jei taškas A yra apskritimo išorėje, tai per jį nubrėžiamos dvi apskritimo liestinės, liečiančios jį taškuose T_1 ir T_2 (5 pav.) ir $AT_1 = AT_2$.



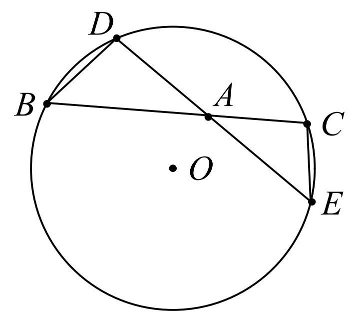
5 pav.

3 teorema. Jei iš taško A yra nubrėžtos dvi apskritimo kirstinės, kertančios apskritimą atitinkamai taškuose B, C ir D, E, tai $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

Teoremos įrodymas, kai taškas A yra apskritimo išorėje (6a pav.), išplaukia iš įbrėžtinių kampų BCD ir BED lygumo, iš čia sekančio trikampių ABE ir ADC panašumo ir iš šio panašumo išplaukiančios lygybės $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$. Analogiškai teorema įrodoma ir kai taškas A yra apskritimo viduje (6b pav.).

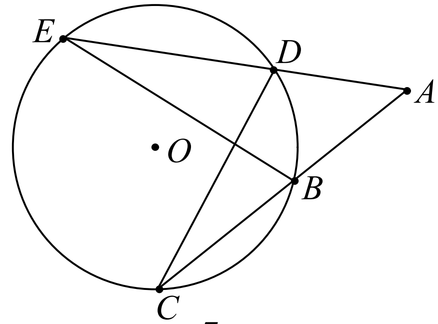


6a pav.

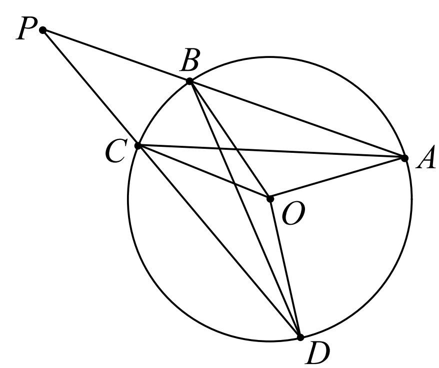


6b pav.

Teisingas ir atvirkščias teiginys: jei tiesė, einanti per taškus B, C ir tiesė, einanti per taškus D, E, susikerta tsaške A ir yra teisinga lygybė $AB \cdot AC = AD \cdot AE$, tai taškai B, C, D, E yra viename apskritime (7 pav.). Įrodymui duotąją lygybę perrašome $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$. Kadangi trikampių ABE ir ADC kampas A yra bendras, tai iš šios lygybės seka, kad šie trikampiai yra panašieji, todėl $\angle ACD = \angle AEB$, tuomet iš 2 teoremos gauname, kad taškai B, C, D, E yra viename apskritime.



7 pav.



8 pav.

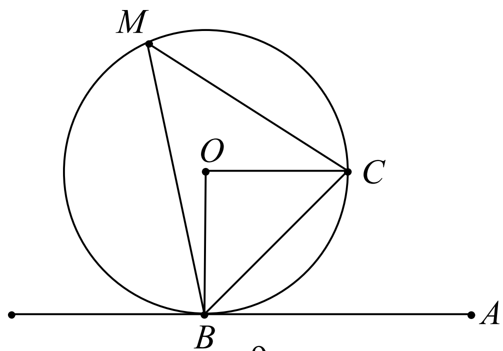
1 pavyzdys. Apskritimo kirstinės AB ir CD susikerta taške P, esančiame apskritimo išorėje, apskritimo centrinis kampas, kuris remiasi į lanką AD, lygus α, o centrinis kampas, besiremiantis į lanką BC lygus β. Rasime atkarpos PD ilgį ir kampo APD didumą, jei $AB = 3, BP = 2, PC = \frac{5}{2}$ (8 pav.).

Sprendimas. Sakykime, kad taškas O yra duotojo apdskritimo centras. Taikydami 3 teoremą gauname lygybę $PD \cdot PC = PB \cdot PA$. Kadangi $PA = PB + AB = 2 + 3 = 5$, tai $PD = \frac{PB \cdot PA}{PC} = \frac{2 \cdot 5}{2{,}5} = 4$. Iš trikampio BPD taikydami 1 teoremą turime $\angle APD = \angle BPD = 180^0 - \angle PBD - \angle PDB = (180^0 - \angle PBD) - \angle CDB = \angle ABD - \angle CDB = \frac{1}{2}\angle AOD - \frac{1}{2}\angle COB = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta = \frac{\alpha - \beta}{2}$.

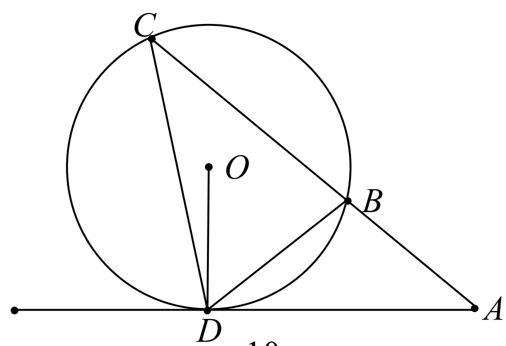
4 teorema. Jei tiesė AB taške B liečia apskritimą, o atkarpa BC yra apskritimo styga, tai bet kuriam apskritimo taškui M, esančiam kitoje tiesės BC pusėje nei taškas A, yra teisinga lygybė $\angle BMC = \angle ABC$ (9 pav.).

Tikrai, kadangi apskritimo spindulys OB yra statmenas tiesei AB, tai $\angle ABC = 90^0 - \angle OBC = 90^0 - \frac{1}{2}(180^0 - \angle BOC) = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BMC$.

Teisingas ir atvirkštinis teiginys: jei taškas B yra bendras apskritimo ir tiesės AB taškas, atkarpa BC yra apskritimo styga, o bet kuriam apskritimo taškui M, esančiam kitoje tiesės BC pusėje, nei taškas A, yra teisinga lygybė $\angle BMC = \angle ABC$, tai tiesė AB yra apskritimo liestinė, liečianti jį taške B (9 pav.). Tikrai $\angle ABO = \angle ABC + \angle OBC = \angle BMC + \frac{1}{2}(180^0 - \angle BOC) = \frac{1}{2}\angle BOC + \frac{1}{2}(180^0 - \angle BOC) = 90^0$, o tai ir reiškia, kad tiesė AB yra apskritimo liestinė.



9 pav.



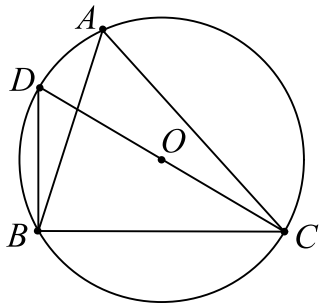
10 pav.

5 teorema. Jei iš taško *A* nubrėžta apskritimo liestinė liečia jį taške *D*, o iš to paties taško nubrėžta kirstinė kerta apskritimą taškuose *B* ir *C*, tai $AD^2 = AB \cdot AC$ (10 pav.).

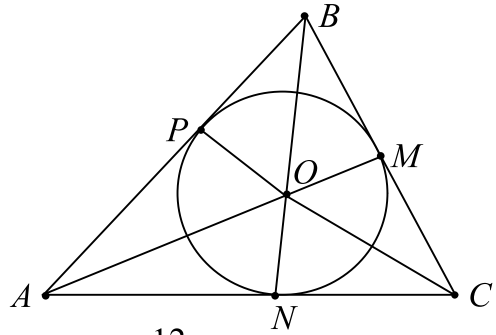
Iš tikrųjų iš 4 teoremos išplaukia, kad $\angle ADB = \angle BCD = \angle ACD$, todėl trikampiai ACD ir ADB yra panašieji. Iš jų panašumo seka lygybė $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AB}$, iš kurios gauname įrodomąją lygybę.

Atvirkščiai, jei taškai A, B, C yra vienoje tiesėje, taškas D tai tiesei nepriklauso ir yra teisinga lygybė $AD^2 = AB \cdot AC$, tai tiesė AD liečia per taškus B, C, D einantį apskritimą taške D. Iš tikrųjų duotoji lygybė perrašoma $\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AD}$. Kadangi trikampių ACD ir ADB kampas A yra bendras, o jį sudarančios kraštinės proporcingos, tai šie trikampiai yra panašieji. Todėl $\angle ACD = \angle ADB$, o tuomet iš 4 teoremos išplaukia, kad tiesė AD taške taške D liečia per taškus B, C, D einantį apskritimą.

3. Įbrėžtieji ir apibrėžtieji apskritimai. Jei trikampio ABC visos viršūnės yra apskritimo taškai, tai apskritimas vadinamas apie trikampį ABC *apibrėžtuoju apskritimu*, o trikampis ABC vadinamas *įbrėžtuoju* į apskritimą. Kaip žinome, apie kiekvieną trikampį yra apibrėžiamas vienintelis apskritimas, kurio centras yra trikampio kraštinių vidurio statmenų susikirtimo taškas. Apibrėžto apie trikampį apskritimo spindulio ilgį *R* su trikampio kraštinėmis ir trikampio kampų sinusais sieja sinusų teorema $\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{AC}{sun\,\angle B} = \frac{BC}{\sin\angle A} = 2R$ (11 pav.). Kadangi trikampio ABC plotui S teisinga lygybė



11 pav.



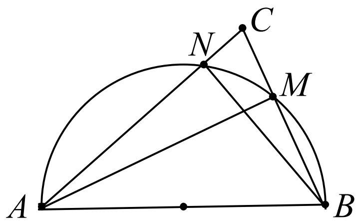
12 pav.

$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A$, tai įrašę iš sinusų teoremos $\sin \angle A = \frac{BC}{2R}$, gauname tokią trikampio ploto formulę $S = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R}$.

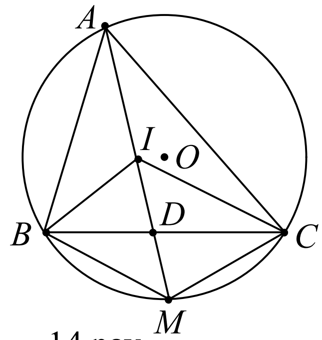
Apskritimas, kuris liečia visas trikampio ABC kraštines, yra vadinamas *įbrėžtuoju* į trikampį ABC, o trikampis ABC vadinamas *apibrėžtuoju* apie apskritimą. Į kiekvieną trikampį yra įbrėžiamas vienintelis apskritimas, kurio centras yra trikampio pusiaukampinių sankirtos taškas. Sakykime, kad į trikampį ABC įbrėžtas apskritimas kraštines BC, CA, AB liečia atitinkamai taškuose M, N, P (12 pav.). Kaip įprasta žymėkime $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $2p = a + b + c$. Jei $AP = AN = x$, $BP = BM = y$, $CM = CZ = z$, tai $x + y = c$, $y + z = a$, $z + x = b$, $2x + 2y + 2z = 2p$. Iš šių lygybių randame $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$. Jei taškas O yra į trikampį ABC įbrėžto apskritimo centras (12 pav.), tai trikampių AOB, BOC ir AOC aukštinės OP, OM ir ON lygios įbrėžto į trikampį apskritimo spinduliui r, todėl tų trikampių plotai atitinkamai lygūs $\frac{1}{2}cr$, $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$. Tuomet trikampio ABC plotas $S = \frac{1}{2}(a + b + c)r$, taigi $S = pr$.

2 pavyzdys. Lygiašonio trikampio $ABC, AB = AC$, $\angle A = 40^0$. Šoninė kraštinė AB yra pusapskritimio skersmuo. Kitos dvi trikampio kraštinės dalija pusapskritimį į tris lankus (13 pav.). Rasime šių lankų didumus.

Sprendimas. Lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo lygūs $\angle B = \angle C = \frac{1}{2}(180^0 - \angle A) = 70^0$. Sakykime, kad tiesės AC ir ir BC kerta pusapskritimį atitinkamai taškuose N ir M. Kadangi atkarpa AB yra apskritimo skersmuo, tai $\angle ANB = 90^0 > \angle ACB$, taigi taškas C yra apskritimo išorėje (2 teorema). Kadangi lankas AB lygus 180^0, o pagal įbrėžtinių kampų savybę (1 teorema) lanko ANM didumas lygus $2\angle ABM = 2\angle ABC = 140^0$, tai lanko MB didumas lygus $180^0 - 140^0 = 40^0$, o $\angle MAB = 20^0$. Iš stačiojo trikampio BNC randame, kad $\angle CBN = \angle CNB - \angle ACB = 90^0 - 70^0 = 20^0$, todėl lanko NM didumas lygus 40^0. Iš čia seka, kad lanko AN didumas $180^0 - 40^0 - 40^0 = 100^0$.



13 pav.

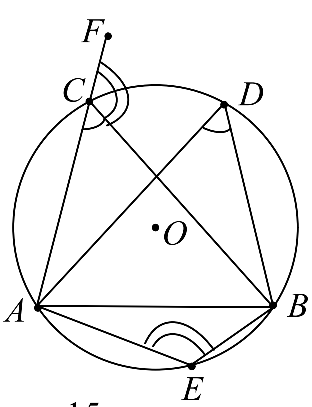


14 pav.

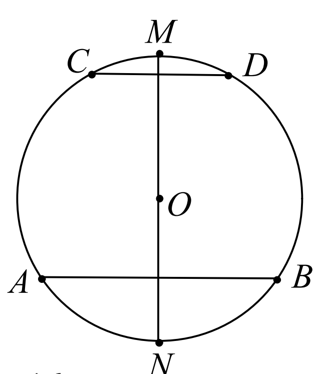
3 pavyzdys. Sakykime, kad taškas I yra įbrėžto į trikampį ABC apskritimo centras (14 pav.), kampo A pusiaukampinė kerta kraštinę BC taške D, o apibrėžtą apie trikampį ABC apskritimą – taškuose A ir M. Įrodysime, kad a) $\angle BIC = 90^0 + \frac{1}{2}\angle A$, b) $MB = MC = MI,$ c) $MD \cdot MA = MB^2$.

Sprendimas. Kadangi atkarpos AI, BI, CI yra trikampio kampų pusiaukampinės, tai iš trikampio BIC turime, kad $\angle BIC = 180^0 - \angle IBC - \angle ICB = 180^0 - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C = 180^0 - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 180^0 - \frac{1}{2}(180^0 - \angle A) = 90^0 + \frac{1}{2}\angle A,$ taigi a) dalis įrodyta. Įrodydami b) dalį pastebėkime, kad įbrėžtiniai kampai MBC ir MAC lygūs, nes jie remiasi į tą patį lanką $BC.$ Todėl $\angle IBM = \angle IBC + \angle CBM = \angle IBC + \angle CAM = \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle A.$ Kadangi kampas BIM yra trikampio AIB priekampis, tai $\angle BIM = \angle IAB + \angle IBA = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B.$ Kadangi $\angle IBM = \angle BIM,$ tai trikampis BIM lygiašonis, $MB = MI.$ Kad $MB = MC$ išplaukia iš to, kad taškas M yra lanko BC vidurio taškas. Kadangi $\angle DAB = \angle MBC,$ tai pagal 4 teoremą tiesė MB yra apie trikampį ABD apibrėžto apskritimo liestinė, todėl pagal 5 teoremą teisinga lygybė $MB^2 = MA \cdot MD,$ taigi įrodyta ir c) dalis.

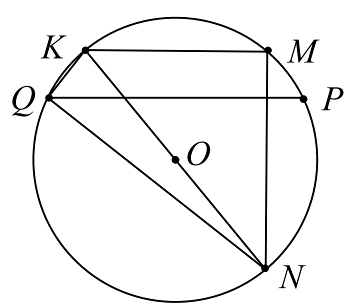
4. **Keturi taškai viename apskritime**. Kaip seka iš 1 teoremos 1 išvados, jei taškai C ir D yra vienoje tiesės AB pusėje ir $\angle ACB = \angle ADB,$ tai taškai A, B, C, D yra viename apskritime. Jei taškas E yra kitoje tiesės AB pusėje nei taškai C ir D, o $\angle ACB + \angle AEB = 180^0$, tai taškai A, B, C, E yra viename apskritime (15 pav.). Jei taškas F yra atkarpos AC tęsinyje už taško C ir $\angle FCB = \angle AEB,$ tai taškai A, B, C, E yra viename apskritime. Šio fakto įrodymas seka iš lygybės $\angle FCB + \angle ACB = 180^0$, todėl $\angle ACB + \angle AEB = 180^0$, taigi taškai A, B, C, E yra viename apskritime.



15 pav.



16 pav.



17 pav.

6 teorema. Jei apskritimo stygos AB ir CD lygiagrečios, tai lankai AC ir BD yra lygūs.

Teoremos įrodymui užtenka nubrėžti skersmenį MN, statmeną duotosioms stygoms (16 pav.), ir pastebėti, kad apskritimo lankai AC ir BD yra simetriški tiesės MN atžvilgiu.

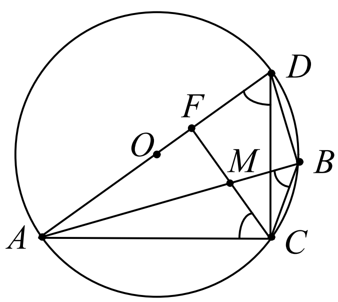
4 pavyzdys. Atkarpos MN ir PQ yra statmenos apskritimo stygos. Rasime atkarpos MP ilgį, jei $NQ = a$, o apskritimo spindulio ilgis lygus R.

Sprendimas. Per tašką M nubrėžkime stygą MK lygiagrečią su styga PQ (17 pav.). Kadangi stygos MN ir PQ yra statmenos, tai $\angle KMN = 90^0$, todėl atkarpa NK yra apskritimo dskersmuo. Iš čia seka, kad $\angle KQN = 90^0$, todėl iš stačiojo trikampio NKQ turime $KQ = \sqrt{NK^2 - NQ^2} = \sqrt{(2R)^2 - a^2}$. Kadangi stygos PQ ir MK yra lygiagrečios, tai pagal 6 teoremą lankai MP ir KQ yra lygūs, taigi lygios ir juos atitinkančios stygos. Taigi $MP = KQ = \sqrt{4R^2 - a^2}$.

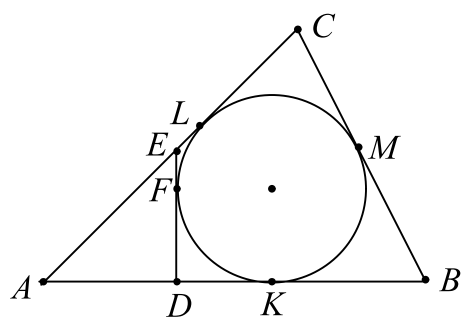
Dažnai uždavinio sąlygoje nėra nurodytas koks nors apskritimas, bet kartais pavyksta rasti keturis taškus, esančius viename apskritime. Tai paprastai palengvina uždavinio sprendimą.

5 pavyzdys. Trikampio ABC kampas C yra bukasis, iš taško C iškeltas statmuo tiesei AC, iš taško B iškeltas statmuo tiesei AB, šie abu statmenys susikerta taške D. Iš viršūnės C nubrėžta trikampio ADC aukštinė CF kerta kraštinę AB taške M (18 pav.). Rasime kraštinės AC ilgį, jei $AM = a, MB = b$.

Sprendimas. Kadangi $\angle ACD = \angle ABD = 90^0$, o taškai B ir C yra vienoje tiesės AD pusėje, tai taškai A, C, B, D yra apskritime, kurio skersmuo yra atkarpa AD. Tuomet $\angle ABC = \angle ADC = 90^0 - \angle FCD = \angle FCA = \angle MCA$. Trikampių ACM ir ABC kampas BAC yra bendras, o ką tik įrodėme, kad kampai MCA ir ABC yra lygūs, todėl šie trikampiai yra panašieji. Iš jų panašumo išplaukia, kad $\frac{AC}{AB} = \frac{AM}{AC}$, todėl $AC^2 = AB \cdot AM = (a + b)a$.



18 pav.



19 pav.

6 pavyzdys. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB = 10$, $AC = 12$, $BC = 6$. Į trikampį įbrėžtas apskritimas, šio apskritimo liestinė kerta kraštines AB ir AC taškuose D ir E. Rasime trikampio ADE perimetrą (19 pav.).

Sprendimas. Sakykime, kad įbrėžtas į trikampį ABC apskritimas trikampio kraštines AB, AC, BC liečia atitinkamai taškuose K, L, M, o šio apskritimo liestinė jį liečia taške F. Tuomet trikampio ADE perimetras $P = AD + DE + AE = AD + DF + FE + AE$. Pagal iš vieno taško nubrėžtų apskritimo liestinių savybes ir 3 skyrelyje gautas lygybes $DF = DK$, $EF = EL$, $AD +$

$DF = AD + DK = AK,\ AE + EF = AE + EL = AL,\ AK = AL = p - BC,$ čia $p -$ trikampio ABC pusperimetris. Taigi $P = AD + DE + AE = (AD + DF) + (FE + AE) = (AD + DK) + (AE + EL) = AK + AL = 2(p - BC) = 2 \cdot (\frac{1}{2}(6 + 10 + 12) - 6) = 16.$

Kaip matome iš šio pavyzdžio sprendimo trikampio ADE perimetras nepriklauso nuo taško $F,$ esančio įbrėžto apskritimo lanke $KL,$ parinkimo.

TREČIOJI UŽDUOTIS.

1. Apskritimo stygos AC ir BD susikerta apskritimo viduje esančiame taške $P,$ $AP = 6,$ $PC = 1, BD = 5,$ $DP > PB,$ centrinis kampas, besiremiantis į lanką AD, kuriame nėra taškų B ir $D,$ lygus $\alpha,$ o centrinis kampas, besiremiantis į lanką BC, kuriame nėra taškų A ir $D,$ lygus β. Raskite atkarpų PD ir PB ilgius ir kampo APD didumą.

2. Du apskritimai kertasi taškuose A ir B. Tiesėje AB yra taškas P, esantis šių apskritimų išorėje ir $PA > PB$. Per jį nubrėžtos abejų apskritimų kirstinės: viena jų kerta vieną apskritimą taškuose C ir $D,$ $PC > PD$, o kita kerta kitą apskritimą taškuose E ir $F,$ $PE > PF$. Raskite kampą $CEF,$ jei $\angle PDF = \alpha$.

3. Iš taško B nubrėžtos apskritimo liestinės, kurios liečis apskritimą taškuose D ir E. Atkarpoje BD yra yaškas A toks, kad $AB = 13$. Apskritimas, einantis per taškus A, E, D, kerta atkarpą BE taške $C,$ be to, $AC = 1$. Raskite trikampio ABC plotą.

4. Per apskritimo išorėje esantį tašką S nubrėžtos dvi apskritimo kirstinės, viena jų kerta apskrinimą taškuose A ir $B,$ $SA < SB$, kita kirstinė apskritimą kerta taškuose C ir $D,$ $SC < SD$. Gautųjų apskritimo lankų santykis $AC : CD : DB : BA = 2 : 3 : 5 : 8$. Raskite kampo ASC didumą.

5. Per apskritimo išorėje esantį tašką E nubrėžtos dvi apskritimo kirstinės, viena jų kerta apskrinimą taškuose A ir $B,$ $EA > EB,$ kita kirstinė apskritimą kerta taškuose C ir $D,$ $EC < ED$. Kampas BEC lygus 60^0, kampas ABD yra tris kartus didesnis už kampą BAC. Įrodykite, kad atkarpa AD yra apskritimo skersmuo.

6. Taškas I yra į trikampį ABC įbtrėžto apskritimo centras, atkarpa atkarpa AD yra kampo A pusiaukampinė, tiesė AD kerta apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo lanką taške $M,$ $AD = 9,$ $DM = 3$. Raskite atkarpos AI ilgį.

7. Taškas I yra į statųjį trikampį $ABC, (\angle C = 90^0)$ įbrėžto apskritimo centras, atkarpa CE yra trikampio ABC pusiaukampinė ir yra teisinga lygybė $CI : IE = \sqrt{3} : \sqrt{2}$. Raskite trikampio ABC smailiųjų kampų didumus.

8. Apskritimo susikertančios stygos AB ir CD yra statmenos, $AD = m,$ $BC = n$. Raskite apskritimo spindulio ilgį.

9. Stačiojo trikampio KLN, $\angle L = 90^0$, taškas P yra aukštinėje LH, iš taško N nuleistas statmuo NM į tiesę KP. Raskite kraštinės KL ilgį, jei $KP = a$, $PM = b$.

10. Smailiojo kampo MAN viduje yra nubrėžtas apskritimas, liečiantis spindulius AM ir AN taškuose B ir C, apskritimo spindulys lygus 5, atkarpos BC ilgis lygus 8. Mažesniame apskritimo lanke BC yra taškas D, per tašką D nubrėžta apskritimo liestinė, kertanti atkarpas AB ir AC atitinkamai taškuose F ir E. Raskite trikampio AFE perimetrą.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2023 m. kovo 15 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: http://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA