

**ŠEŠTOJI VILNIAUS UNIVERSITETO
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO
MATEMATIKOS OLIMPIADA**

Vilnius, 2023 m. kovo 19 d.

IX klasė

1. Skaičių n vadinsime *kone kvadratu*, jei jis yra dviejų natūraliųjų skaičių, kurių skirtumas lygus 1, sandauga. Nustatykite, ar egzistuoja kone kvadratas, kuris nėra dviejų kone kvadratų santykis.
2. Prieš metus stebuklingame sode gyveno 60 gyvūnų: 30 kiškių, 20 vilkų ir 10 liūtų. Gyvūnų skaičiai sode keičiasi tik trimis atvejais: kai vilkas suėda kiškį ir pavirsta liūtu, kai liūtas suėda kiškį ir pavirsta vilku bei kai liūtas suėda vilką ir pavirsta kiškiu. Šiuo metu sode neliko gyvūnų, kurie galėtų būti vieni kitus. Nustatykite, kiek daugiausiai ir kiek mažiausiai gyvūnų gali būti likę sode.
3. Trapecijos $ABCD$ pagrindų AB ir CD ilgiai atitinkamai lygūs 10 ir 4, ir $\angle ADB + \angle CBD = 180^\circ$. Nustatykite visas galimas santykio $BC : AD$ reikšmes.
4. Natūraliųjų skaičių rinkinys (x, y, z) yra lygties

$$x^2 + y^3 = z^5$$

sprendinys.

- a) Raskite bent vieną tokį sprendinį.
- b) Nustatykite, ar yra be galo daug tokių sprendinių.

**ŠEŠTOJI VILNIAUS UNIVERSITETO
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO
MATEMATIKOS OLIMPIADA**

Vilnius, 2023 m. kovo 19 d.

X klasė

1. Nustatykite, kiek yra tokių funkcijų f , apibrėžtų sveikųjų skaičių aibėje \mathbb{Z} ir įgyjančių sveikąsias reikšmes, kad

$$f(-x^2 + x + 3) = 2(f(x + 1))^2 + 3$$

su kiekvienu $x \in \mathbb{Z}$.

2. Prieš metus stebuklingame sode gyveno 60 gyvūnų: 30 kiškių, 20 vilkų ir 10 liūtų. Gyvūnų skaičiai sode keičiasi tik trimis atvejais: kai vilkas suėda kiškį ir pavirsta liūtu, kai liūtas suėda kiškį ir pavirsta vilku bei kai liūtas suėda vilką ir pavirsta kiškiu. Šiuo metu sode neliko gyvūnų, kurie galėtų būti vieni kitus. Nustatykite, kiek daugiausiai ir kiek mažiausiai gyvūnų gali būti likę sode.
3. Stačiojo trikampio ABC įžambinėje AB pažymėtas toks taškas H , kad $\angle AHC = 90^\circ$. Į trikampius ACH ir BCH atitinkamai įbrėžti apskritimai su centrais O_1 ir O_2 . Tiesė O_1O_2 atkarpa AC ir BC kerta atitinkamai taškuose K ir L . Įrodykite, kad $CK = CL = CH$.
4. Natūraliųjų skaičių rinkinys (x, y, z) yra lygties

$$x^2 + y^3 = z^5$$

sprendinys.

- a) Raskite bent vieną tokį sprendinį.
- b) Nustatykite, ar yra be galo daug tokių sprendinių.

**ŠEŠTOJI VILNIAUS UNIVERSITETO
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO
MATEMATIKOS OLIMPIADA**

Vilnius, 2023 m. kovo 19 d.

XI ir XII klasės

1. Realieji teigiami skaičiai x, y, z tenkina lygybę

$$x + y + z = 3xyz.$$

Įrodykite, kad

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \geq 3.$$

2. Prieš metus stebuklingame sode gyveno 60 gyvūnų: 30 kiškių, 20 vilkų ir 10 liūtų. Gyvūnų skaičiai sode keičiasi tik trimis atvejais: kai vilkas suėda kiškį ir pavirsta liūtu, kai liūtas suėda kiškį ir pavirsta vilku bei kai liūtas suėda vilką ir pavirsta kiškiu. Šiuo metu sode neliko gyvūnų, kurie galėtų būti vieni kitus. Nustatykite, kiek daugiausiai ir kiek mažiausiai gyvūnų gali būti likę sode.
3. Trapecijos $ABCD$ pagrindų AB ir CD ilgiai atitinkamai lygūs 10 ir 4, ir $\angle ADB + \angle CBD = 180^\circ$. Nustatykite visas galimas santykio $BC : AD$ reikšmes.
4. Natūralusis skaičius vadinamas *bekvadračiu*, jei joks jo daliklis, didesnis už 1, nėra sveikojo skaičiaus kvadratas.

Tegu n yra natūralusis skaičius. Skaičių k vadinsime n -svarbiu, jei jis priklauso aibei $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ir yra bekvadratis, o skaičiaus $\frac{n}{k}$ sveikoji dalis yra nelyginis skaičius.

Kiekvienam natūraliajam skaičiui n skaičius a_n parodo, kiek yra n -svarbių skaičių. Įrodykite, kad visi sekos a_1, a_2, a_3, \dots nariai yra nelyginiai skaičiai.