ŠEŠTOJI VILNIAUS UNIVERSITETO MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO MATEMATIKOS OLIMPIADA

Atsakymai, sprendimai

Parengė Aivaras Novikas

IX klasė

1. Ats. Ne, neegzistuoja.

   Kiekvienam kone kvadratui $m(m+1)$, kur $m \in \mathbb{N}$, teisingos lygybės
$$m(m+1) = \frac{m(m+1)\cdot(m+1)(m+2)}{(m+1)(m+2)} =$$
$$= \frac{m(m+2)\cdot(m+1)^2}{(m+1)(m+2)} = \frac{(m^2+2m)(m^2+2m+1)}{(m+1)(m+2)}.$$
   Vadinasi, kiekvienas kone kvadratas $m(m+1)$ yra kone kvadratų $(m^2+2m)(m^2+2m+1)$ ir $(m+1)(m+2)$ santykis.

2. Ats. Daugiausiai 40 gyvūnų, mažiausiai 2 gyvūnai.

   Sode liko vien kiškiai (K), vien vilkai (V) arba vien liūtai (L).

   Kaskart vienam gyvūnui suėdant kitą, sode lieka vienu gyvūnu mažiau. Kadangi sode neliko vilkų, kurių buvo 20, arba neliko kiškių, kurių buvo dar daugiau, tai įvykių, kai vienas gyvūnas suėdė kitą, buvo mažiausiai 20. Todėl sode liko ne daugiau nei $60-20=40$ gyvūnų. Kita vertus, sode galėjo likti 40 kiškių, jei gyvūnai ėdė vieni kitus tokia tvarka:

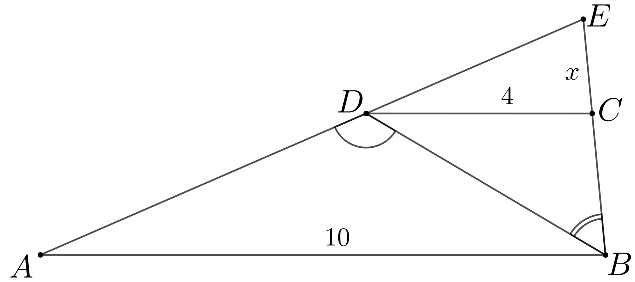
   1) 5 vilkai suėdė po vieną kiškį, sode liko 25 K, 15 V, 15 L;
   2) 15 liūtų suėdė po vieną vilką, sode liko 40 kiškių.

   Kaskart vienam gyvūnui suėdant kitą, pakinta kiškių, vilkų bei liūtų skaičių lyginumas. Kadangi pradiniai gyvūnų skaičiai 30, 20, 10 yra lyginiai, o tarp galutinių trijų skaičių du yra lygūs lyginiam skaičiui 0, tai trečiasis iš galutinių trijų skaičių yra taip pat lyginis ir ne mažesnis už 2. Todėl sode liko bent 2 gyvūnai. Kita vertus, sode galėjo likti 2 vilkai, jei gyvūnai ėdė vieni kitus tokia tvarka:

   1) 10 liūtų ir 20 vilkų suėdė po vieną kiškį, sode liko 0 K, 10 V, 20 L;
   2) 10 liūtų suėdė po vieną vilką, sode liko 10 K, 0 V, 10 L;
   3) 8 liūtai suėdė po vieną kiškį, sode liko 2 K, 8 V, 2 L;
   4) 2 liūtai suėdė po vieną vilką, 2 vilkai suėdė po vieną kiškį, sode liko 2 K, 4 V, 2 L;
   5) 2 liūtai suėdė po vieną vilką, 2 vilkai suėdė po vieną kiškį, sode liko 2 K, 0 V, 2 L;
   6) 2 liūtai suėdė po vieną kiškį, sode liko 2 vilkai.

3. Ats. $BC : AD = 0{,}4$.

Tiesių AD ir BC sankirtos tašką pažymėkime E. Pažymėkime $CE = x$ (žr. pav.).



Kadangi $\angle ADB + \angle BDE = 180^\circ = \angle ADB + \angle CBD$, tai $\angle BDE = \angle CBD$, o trikampis BDE lygiašonis, $BE = DE$. Kadangi tiesės AB ir CD lygiagrečios, tai $\angle BAE = \angle CDE$, $\angle ABE = \angle DCE$ ir $\triangle BAE \sim \triangle CDE$. Todėl

$$BE : CE = AE : DE = AB : DC = 2{,}5, \qquad DE = BE = 2{,}5CE = 2{,}5x,$$

$$BC = BE - CE = 1{,}5x, \qquad AD = AE - DE = 2{,}5DE - DE = 1{,}5DE = 1{,}5 \cdot 2{,}5x,$$

$$BC : AD = \frac{1{,}5x}{1{,}5 \cdot 2{,}5x} = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4.$$

4. Ats. a) Pavyzdžiui, $(x, y, z) = (4096, 256, 32)$; b) taip, yra.

Pastebėkime, kad jei $x^2 = y^3 = 2^n$ ir $z^5 = 2^{n+1}$, kur $n \in \mathbb{N}$, tai (x, y, z) yra duotosios lygties sprendinys:

$$x^2 + y^3 = 2^n + 2^n = 2^{n+1} = z^5.$$

Kad galėtume pasirinkti tokius $x, y, z \in \mathbb{N}$, pakanka, kad n dalytųsi iš 2 ir iš 3, o $n+1$ dalytųsi iš 5. Pavyzdžiui, tinka $n = 24$. Tada tinka ir visos n reikšmės, kurias gausime prie skaičiaus 24 bet kiek kartų pridėję $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Iš tiesų, imdami $n = 24 + 30k$, kur $k = 0, 1, 2, \ldots$, gauname be galo daug duotosios lygties sprendinių

$$(x, y, z) = (2^{\frac{n}{2}}, 2^{\frac{n}{3}}, 2^{\frac{n+1}{5}}) = (2^{12+15k}, 2^{8+10k}, 2^{5+6k}).$$

Atskiru atveju tinka $(x, y, z) = (2^{12}, 2^8, 2^5) = (4096, 256, 32)$.

X klasė

1. Ats. Tokių funkcijų nėra.

Tarkime, kad funkcija f tenkina uždavinio sąlygą. Pažymėkime $a = f(1)$, $b = f(3)$. Duotojoje funkcinėje lygtyje įrašę $x = 0$ ir $x = 2$, gauname

$$b = 2a^2 + 3, \qquad a = 2b^2 + 3,$$

$$a - b = (2b^2 + 3) - (2a^2 + 3) = -2(a - b)(a + b),$$

$$a = b \qquad \text{arba} \qquad 1 = -2(a + b).$$

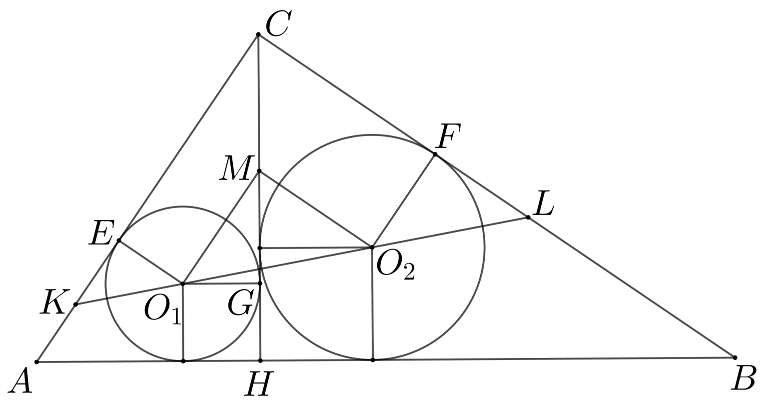
Abiem atvejais gauname prieštarą:

$$a = 2a^2 + 3 \geqslant 2|a| + 3 > a \qquad \text{arba} \qquad -\frac{1}{2} = a + b = (2b^2 + 3) + (2a^2 + 3) > 0.$$

Vadinasi, reikiama funkcija f neegzistuoja.

2. Žr. IX klasės 2 uždavinio sprendimą.

3. Iš taškų O_1 ir O_2 išveskime statmenis į trikampių ACH ir BCH kraštines, ir trijų statmenų pagrindus pažymėkime E, F, G, kaip parodyta paveikslėlyje. Tiesės, einančios per O_1 lygiagrečiai su tiese AC, ir tiesės, einančios per O_2 lygiagrečiai su tiese BC, sankirtos tašką pažymėkime M. Tada $\angle O_1MO_2 = \angle ACB = 90°$. (Galima įrodyti, kad M yra tiesėje CH, bet tuo nesinaudosime.) Pažymėkime $h = CH$, $r_1 = O_1E$, $r_2 = O_2F$ (aukštinės ilgis, įbrėžtinių apskritimų spindulio ilgiai).



Atstumas tarp lygiagrečių tiesių O_1G ir AB lygus $GH = r_1$. Be to, $CE = CG$ (liestinės iš C) ir todėl $CE = CH - GH = h - r_1$. Atstumus tarp lygiagrečių tiesių BC, O_1E ir O_2M sieja lygybė $CE = O_1M + O_2F$. Taigi $O_1M = CE - O_2F = h - r_1 - r_2$. Analogiškai įrodoma, kad $CF = h - r_2$, $O_2M = h - r_1 - r_2$. Vadinasi, trikampis O_1O_2M yra statusis lygiašonis. Statieji trikampiai O_1O_2M, KO_1E, O_2LF, kurių įžambinės yra vienoje tiesėje, o atitinkami statiniai lygiagretūs, yra panašūs, ir

$$EK = EO_1 = r_1, \qquad FL = FO_2 = r_2,$$

$$CK = CE + EK = (h - r_1) + r_1 = CH, \qquad CL = CF + FL = (h - r_2) + r_2 = CH.$$

4. Žr. IX klasės 4 uždavinio sprendimą.

XI ir XII klasės

1. Duotąją lygybę padalinę iš xyz, gauname $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 3$. Pažymėkime $a = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}$. Pasiremkime aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybe:

$$2a + 3 = \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + 1\right) + \left(\frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} + 1\right) + \left(\frac{1}{z^3} + \frac{1}{x^3} + 1\right) \geqslant$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{y^3} \cdot 1} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{y^3} \cdot \frac{1}{z^3} \cdot 1} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{x^3} \cdot 1} = 3 \cdot \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) = 9,$$

$$a \geqslant (9 - 3) : 2 = 3 \text{ – tai ir reikėjo įrodyti.}$$

2. Žr. IX klasės 2 uždavinio sprendimą.

3. Žr. IX klasės 3 uždavinio sprendimą.

4. Skaičiaus x sveikąją dalį žymėsime $[x]$. Teiginys, kad skaičius a_n yra nelyginis duotam $n \in \mathbb{N}$, ekvivalentus tokiam teiginiui: visų skaičių $\left[\frac{n}{k}\right]$, kur skaičius k yra n-svarbus, sumoje yra nelyginis nelyginių dėmenų skaičius. Šis teiginys savo ruožtu ekvivalentus tokiam: visų skaičių $\left[\frac{n}{k}\right]$, kur skaičius k yra n-svarbus, sumos reikšmė s_n yra nelyginis skaičius. Pastarąjį teiginį įrodysime matematinės indukcijos būdu pagal n.

   Indukcijos bazė: aibėje $\{1\}$ yra vienintelis skaičius $k = 1$, jis yra bekvadratis, todėl $s_1 = \left[\frac{1}{1}\right] = 1$. Taigi s_1 yra nelyginis skaičius.

   Indukcijos žingsnis: tarkime, kad s_n yra nelyginis skaičius, kai $n = N$; įrodysime, kad s_{N+1} yra nelyginis skaičius. Visų bekvadračių skaičių $k \in \{1, 2, 3, \ldots, N, N+1\}$ aibę pažymėkime A. Tada

$$s_{N+1} = \sum_{k \in A} \left[\frac{N+1}{k}\right], \qquad s_N = \sum_{k \in A} \left[\frac{N}{k}\right].$$

   Čia užrašytoje s_N sumoje gali būti nereikalingas dėmuo $\left[\frac{N}{N+1}\right]$ (jei $N+1 \in A$), bet jis lygus 0, todėl reikšmės s_N nekeičia.

   Tarkime, kad $k \in A$, ir palyginkime skaičius $\left[\frac{N}{k}\right]$ bei $\left[\frac{N+1}{k}\right]$. Skaičiaus $\frac{N}{k}$ trupmeninė dalis lygi $\frac{r}{k}$, kur $r \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ yra skaičiaus N dalybos iš k liekana. Jei $r \neq k-1$, tai skaičiaus $\frac{N+1}{k} = \frac{N}{k} + \frac{1}{k}$ trupmeninė dalis lygi $\frac{r+1}{k}$, o sveikoji dalis sutampa su $\left[\frac{N}{k}\right]$. Jei $r = k-1$, t. y. jei $N+1$ dalijasi iš k su liekana 0, tai skaičiaus $\frac{N+1}{k} = \frac{N}{k} + \frac{1}{k}$ trupmeninė dalis lygi 0, o sveikoji dalis sutampa su $\left[\frac{N}{k}\right] + 1$.

   Vadinasi, skaičius $s_{N+1} = \sum_{k \in A} \left[\frac{N+1}{k}\right]$ yra tiek didesnis už $s_N = \sum_{k \in A} \left[\frac{N}{k}\right]$, kiek kartų turime situaciją $\left[\frac{N+1}{k}\right] = \left[\frac{N}{k}\right] + 1$, t. y. kiek yra skaičių $k \in A$, iš kurių dalijasi skaičius $N+1$. Taigi skaičius $s_{N+1} - s_N$ parodo, kiek skaičius $N+1$ turi natūraliųjų bekvadračių daliklių. Skaičiaus $N+1 > 1$ visus pirminius daliklius pažymėkime $p_1, p_2, \ldots, p_m$ (čia $m \geqslant 1$). Tada kiekvienas skaičius $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \ldots p_m^{b_m}$, kur kiekvienas rodiklis b_i lygus 0 arba 1, yra skaičiaus $N+1$ bekvadratis daliklis. Tokių daliklių yra 2^m. Visi kiti skaičiaus $N+1$ teigiami dalikliai tegali būti skaičiai $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \ldots p_m^{b_m}$, bent vienam iš skaičių p_i besidalijantys iš p_i^2. Tokie dalikliai jau nėra bekvadračiai. Vadinasi, skaičius s_{N+1} lygus $s_N + 2^m$ – nelyginio ir lyginio skaičių sumai – ir pats yra nelyginis. Tai ir reikėjo įrodyti.